Министерство высшего образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра экономической математики, информатики и статистики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ по дисциплине «Дополнительные главы математики. Математические модели в экономике» и руководство по выполнению

Зав.кафедрой ЭМИС,

д.ф.-м.н., профессор

И.Г.Боровской

Составил: проф каф. ЭМИС В.И. Смагин

Томск -2011

Аннотация

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентов по дисциплине Дополнительные главы математики. Математические модели в экономике для студентов экономических направлений.

1. Тема самостоятельной работы:
«Применение производственной функции для построения модели фирмы»

Задание:

В работе необходимо дать определение понятию производственной функции. Рассмотреть свойства производственной функции. Рассмотреть применение производственных функций к задаче построения модели фирмы.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные определения. Свойства производственных функций.
2. Конструирование производственных функций.
3. Динамическая модель односекторной экономики.
4. Примеры производственных функций.

Форма отчета:

Опрос.

Цель работы:

Самостоятельное изучение теории производственных функций и их применения.

Указания к выполнению. Рекомендуется изучить основные определения и теоремы для производственных функций.

Определение 1. Пусть: $Y \geq 0$ – валовый продукт (ВП), $K \geq 0$ – основные фонды (ОФ), $L \geq 0$ – трудовые ресурсы (ТР). Тогда функция $F(K, L) \geq 0$, определяющая зависимость ВП от ОФ и ТР, т.е.

$$Y = F(K, L),$$

называется производственной функцией (ПФ), а аргументы K и L – факторами производства (ФП).

Определение 2. Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L),$$

то ПФ $F(K, L)$ называется однородной ПФ (ОПФ) со степенью однородности γ. Если $\gamma = 1$, то ОПФ $F(K, L)$ называется линейно-однородной ПФ (Л-О ПФ).

Теорема 1. (Теорема Эйлера). Если $F(K, L)$ является ОПФ со степенью однородности γ, то имеет место свойство

$$\gamma F(K, L) = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} K + \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} L. \qquad (1)$$

Определение 3. ПФ $F(K, L)$ называется неоклассической ПФ (НКПФ), если для $K \geq 0$ и $L \geq 0$ она удовлетворяет условиям:

$$
\begin{aligned}
&1^0)\ \ \frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \ \frac{\partial F}{\partial L} > 0;\\
&2^0)\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0;\\
&3^0)\ \ \lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K} = \infty,\ \ \lim_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L} = \infty;\\
&4^0)\ \ \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial K} = 0,\ \ \lim_{L\to \infty}\frac{\partial F}{\partial L} = 0.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Определение 4. Пусть $A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ \alpha + \beta = 1$.

Тогда ПФ вида

$$F(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа (ПФ К.–Д.).

Пример 1. Показать, что ПФ К.–Д. является Л–О НКПФ.

Теорема 2. Пусть $F_i(K, L),\ i = \overline{1, N},$ являются ОПФ со степенями однородности γ_i. Тогда ПФ

$$F(K, L) = \prod_{i=1}^{N} F_i(K, L)$$

являются ОПФ со степенью однородности

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i .$$

Основные экономико–математические параметры

Определение 5. Средней производительностью труда (СПТ) называется величина

$$y = F(K, L) / L \ ,$$

т.е. y – это количество валового продукта, приходящегося на единицу ТР.

Определение 6. Средней фондоотдачей (СФ) называется величина

$$z = F(K, L) / K ,$$

т.е. z – это количество валового продукта, приходящегося на единицу ОФ.

Определение 7. Фондовооруженностью труда (ФТ) называется величина

$$k = K / L ,$$

т.е. k – это количество ОФ, приходящееся на единицу ТР.

Определение 8. Предельной производительностью труда (ППТ) или нормой прибыли с ТР (НПТР) называется величина

$$\upsilon = \partial F(K, L) / \partial L \ ,$$

т.е. υ – это прирост ВП, приходящийся на единицу прироста ТР.

Определение 9. Предельной фондоотдачей (ПФО) или нормой прибыли с ОФ (НПОФ) называется величина

$$r = \partial F(K, L) / \partial K , \qquad (3)$$

т.е. r – это прирост ВП, приходящийся на единицу ОФ.

Пусть при заданном K прирост ТР, равный ΔL, вызывает прирост ВП, равный ΔF. Тогда, согласно (2), $\upsilon = \Delta F / \Delta L$. Пусть при заданном L прирост ОФ, равный ΔK, вызывает прирост ВП, равный ΔF. Тогда, согласно (12), $r \cong \Delta F / \Delta K$. Таким образом, экономический смысл параметров υ и r очевиден.

Пример 2. Для ПФ К.–Д. найти y, z, υ, r. Показать, что для нее имеют место свойства

$$\upsilon < y, \; r < z, \tag{4}$$

т.е. предельная производительность труда и предельная фондоотдача для ПФ К.–Д. меньше соответственно для средней производительности труда и средней фондоотдачи.

Очевидно, что

$$Y_K = \frac{\partial F}{\partial K} K, \; Y_L = \frac{\partial F}{\partial L} L, \tag{5}$$

являются соответственно доходами, полученными с ОФ и ТР. Тогда для Л–О ПФ, согласно (3), (5), следует, что

$$F(K, L) = Y_K + Y_L .$$

Таким образом, теорема Эйлера для Л–О ПФ дает представление ВП в виде суммы Y_K и Y_L.

Определение 10. Коэффициентом эластичности по фондам (КЭФ) называется величина

$$\alpha = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \frac{K}{F(K, L)} \quad ,$$

т.е. α – это процентный прирост ВП, приходящийся на один процент прироста ОФ.

Определение 11. Коэффициентом эластичности по трудовым ресурсам (КЭТР) называется величина

$$\beta = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \frac{L}{F(k, L)} .$$

т.е. β – это процентный прирост ВП, приходящийся на один процент прироста ТР.

Справедливость следующих двух формул очевидна

$$\alpha = r / z, \; \beta = \upsilon / y .$$

Пример 3. Показать, что параметры α и β ПФ К.–Д. являются коэффициентами эластичности соответственно по фондам и трудовым ресурсам.

Теорема 3. Пусть $F(K, L)$ являются Л–О ПФ со степенью однородности γ. Тогда имеет место свойство

$$\alpha + \beta = \gamma .$$

Определение 12. Пусть $F(K, L)$ – ОПФ со степенью однородности γ. Тогда соотношению $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L)$ эквивалентно соотношение

$$y = L^{\gamma - 1} f(k) ,$$

где $y = Y / L, \; k = K / L$ – соответственно средняя производительность труда и фондовооруженность труда (см. (3), (4)), а $f(k) \geq 0$ для $k \geq 0$ имеет вид

$$f(k) = F(k,1).$$

Очевидно, что неоклассические условия (см. (4)) для $f(k)$ имеют вид (здесь и далее штрихи, как правые верхние индексы, означают производные соответствующего порядка по k)

$$1^0)\ f'(k) > 0;$$

$$2^0)\ f''(k) < 0;$$

$$3^0)\ \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty;$$

$$4^0)\ \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0.$$

Теорема 4. Если $F(K,L)$ – ОПФ со степенью однородности γ, то $F(K,L)$ и $f(k)$ связаны соотношениями

$$F(K,L) = L^{\gamma} f(k).$$

Теорема 5. Экономико–математические параметры $z,\ \upsilon,\ r,\ \alpha,\ \beta$ для ОПФ определяются формулами

$$z = (1/k)L^{\gamma-1} f(k),$$

$$\upsilon = L^{\gamma-1}[\gamma\, f(k) - kf'(k)],$$

$$r = L^{\gamma-1} f'(k),$$

$$\alpha = k[f'(k)/f(k)],$$

$$\beta = \gamma - k[f'(k)/f(k)].$$

Теорема 6. Если $F(K,L)$ – Л–О ПФ, то r является убывающей, а υ – возрастающей функцией фондовооруженности k.

Теорема 7. Если хотя бы один из коэффициентов эластичности α либо β не зависит от фондовооруженности k, то Л–О ПФ является ПФ Кобба–Дугласа.

Случай произвольного числа факторов производства

Если $x_i \geq 0,\ i = \overline{1;n}$, являются факторами производства, то функция $F(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, определяющая валовый продукт Y через факторы производства, т.е.

$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

называется производственной функцией (ПФ).

Определение 13. Если для $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место свойство

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^{\gamma} F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

то ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется однородной ПФ (ОПФ) со степенью однородности γ. Если $\gamma = 1$, то ОПФ называется линейно–однородной ПФ (Л–О ПФ).

Теорема 6. (Теорема Эйлера). Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является ОПФ со степенью однородности γ, то имеет место свойство

$$\gamma\, F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i\,. \qquad (6)$$

Определение 14. ПФ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется неоклассической ПФ (НКПФ), если для $x_i \geq 0,\ i = \overline{1;n}$, она удовлетворяет условиям

$$1^0)\ \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} > 0;$$

$$2^0)\ \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial {x_i}^2} < 0;$$

$$3^0)\ \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \infty;$$

$$4^0)\ \lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = 0.$$

Определение 15. Пусть константы $A,\ \alpha_i,\ i = \overline{1;n}$, такие, что

$$A > 0;\ \ 0 < \alpha_i < 1;\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,.$$

Тогда ПФ вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = A{x_1}^{\alpha_1}, {x_2}^{\alpha_2}, ..., {x_n}^{\alpha_n}$$

называется ПФ Кобба–Дугласа (ПФ К.–Д.).

Определение 16. Средней производительностью фактора x_i называется величина

$$y_i = \frac{F(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_i},\ \ i = \overline{1;n}\,,$$

т.е. y_i – это количество валового продукта, приходящегося на единицу фактора x_i.

Определение 17. Фондовооруженностью фактора x_j относительно фактора x_i называется величина

$$r_{ij} = \frac{x_i}{x_j}\,,$$

т.е. r_{ij} – это количество фактора x_i, приходящегося на единицу фактора x_j.

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

2. Тема самостоятельной работы: «Межотраслевой баланс. Модель Леонтьева»

Задание:

В работе необходимо изложить сущность метода межотраслевого баланса в зада чах планирования экономики.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Статическая модель Леонтьева.
2. Анализ продуктивности модели Леонтьева.
3. Учет ограничений на трудовые ресурсы.
4. Модель международной торговли.

Форма отчета:

Опрос.

Цель работы:

Самостоятельное изучение метода межотраслевого баланса.

Указания к выполнению. В модели Леонтьева принимается следующая идеализация. Вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции. Продукция считается достаточно однородной (например, электроэнергия, уголь, черная металлургия и т.д.), чтобы её выпуск можно было оценить в натуральной форме или в денежной форме. В первом случае говорят о натуральном балансе, во втором – о стоимостном.

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

3. Тема самостоятельной работы: «Равновесие на рынке»

Задание:

Изложить сущность рынка рабочей силы, рынка денег и рынка товаров. Законы Вальраса.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные понятия аксиомы.
2. Равновесие на рынке.
3. Объединенная модель рынков.
4. Схемы экономики по Вальрасу.

Форма отчета:

Опрос.

Цель работы:

Самостоятельное изучение метода межотраслевого баланса.

Указания к выполнению. На рынке действуют очень много фирм и очень много потребителей, причем фирма, как правило, выступает и как производитель товаров и как потребитель товаров, созданных другими фирмами. Общую схему товарных потоков можно пояснить следующим образом. От фирм потребителям идут товары и услуги, от потребителей, часть из которых также является фирмами, также идут товары, в том числе первичные товары, такие, как труд, земля и т.д.

Чтобы написать модель такого взаимодействия фирм и потребителей, нам необходимо в абстрактной форме изложить некоторые понятия, о которых рассказывалось выше.

Пусть $u(\vec{x})$ есть функция полезности какого-то потребителя. В общем случае, максимум этой функции может быть не единственным. В этом случае вводится так называемая функция спроса.

Пусть фиксирован вектор цен $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)^T$ и капитал потребителя равен I. Значения количеств товара $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ могут принимать значения из некоторого множества X (x_i не обязательно любые).

Обозначим через $\hat{X}(p)$ множество

$$\hat{X}(\vec{p}) = \left\{ \vec{x} \colon \vec{x} \in X, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I \right\},$$

то есть $\hat{X}(p)$ есть множество тех товаров, которые потребитель может купить на свой капитал I.

Функцией спроса называется множество

$$\Phi(\vec{p}) = \begin{cases} \vec{x} \colon \vec{x} \in \hat{X}(\vec{p}), \quad u(\vec{x}) = \max\limits_{\vec{x}' \in \hat{X}(\vec{p})} u(\vec{x}'), & \text{если max достигается,} \\ \varnothing & \text{в противном слу ае.} \end{cases}$$

Другими словами, функция спроса $\Phi(\vec{p})$ есть множество тех комбинаций товаров, которые потребитель может приобрести за свой капитал I при заданном векторе цен $\vec{p}$, максимизируя свою полезность $u(\vec{x})$.

В общем случае фирма потребляет товары $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и на их основе производит другие товары $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. К товарам относятся и первичные товары, такие, как труд, земля, полезные ископаемые и т.д. Только не следует думать, что фирма потребляет и производит **все** товары. Просто в тех компонентах векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, которые фирма не потребляет или не производит, стоят нули. Таким образом, технологический процесс фирмы есть отображение $\vec{x} \to \vec{y}$ (потреблённых товаров в произведённые). Такое технологическое отображение и называется фирмой, и технология фирмы есть

$$\vec{y} \in F(\vec{x})$$

(отображение не обязательно однозначное). $F(\vec{x})$ называется производственной функцией.

Рассмотрим множество

$$Y = \{ \vec{y} - \vec{x} \colon \ \vec{x} \in X, \vec{y} \in F(\vec{x}) \}.$$

Разность $\vec{y} - \vec{x}$ означает, что товары $\vec{y}$ произведены (прибыли), а товары $\vec{x}$ использованы (убыли). Это множество называется технологическим отображением. Элементы множества Y называются планами.

Прибыль фирмы равна

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - x_i)$$

и мы стремимся её максимизировать. Тогда

$$\Psi(\vec{p}) = \left\{ \vec{z} \in Y:\ \vec{p}^T \vec{z} = \max_{\vec{z}' \in Y} (\vec{p}^T \vec{z}') \right\}$$

есть множество оптимальных планов. Это множество называется функцией предложения фирмы.

В модели экономики Вальраса рассматривается экономика с

– l потребителями с функциями спроса $\Phi_i(\vec{p}),\ i = \overline{1,l}$;

– m производителями с функциями предложения $\Psi_j(\vec{p}),\ j = \overline{1,m}$;

– n типами товаров.

Кроме того, каждый потребитель характеризуется функцией дохода в виде

$$I_i(\vec{p}) = \vec{p}^T \vec{b}_i + K_i(p).$$

Первое слагаемое в этом выражении есть тот доход, который потребитель получает от продажи каких-то товаров (своего труда, сдачи земли в аренду и т.д.), а второе слагаемое есть доход, возникающий в результате участия в доходах производственного сектора (дивиденды по акциям и т.п.).

Назовём совокупным технологическим множеством сумму

$$Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$$

(под выражением $\sum_{k=1}^{m} Y_k$ понимается множество векторов вида

$$\sum_{k=1}^{m} Y_k = \left\{ \vec{y}:\ \vec{y} = \sum_{k=1}^{m} \vec{y}_k,\ \vec{y}_k \in Y_k \right\}),$$

и функцией совокупного предложения производственного сектора – сумму

$$\Psi_0(\vec{p}) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(\vec{p}).$$

Пусть

$$\overline{\Psi}_0(\vec{p}) = \left\{ \vec{y}:\ \vec{y} \in Y,\ \vec{p}^T \vec{y} = \max_{\vec{y}' \in Y} (\vec{p}^T \vec{y}') \right\},$$

то есть $\overline{\Psi}_0(\vec{p})$ была бы функцией предложения, если бы все фирмы работали как некоторое единое целое и весь производственный сектор был бы единой фирмой.

Теорема. $\overline{\Psi}_0(\vec{p}) = \Psi_0(\vec{p})$.

Смысл этого утверждения заключается в том, что каждый производитель, максимизируя свой доход независимо от всех остальных производителей и стремясь только к своей собственной выгоде максимизирует и доход общества в целом.

Однако не следует придавать этому утверждение какой-то глубокий философский смысл. Это утверждение, во-первых, привязано к критерию оптимальности – доходу, а всё-таки деньги – не единственное, что определяет нашу жизнь. Во-вторых, это утверждение верно лишь при фиксированных ценах.

Законы Вальраса. Будем считать, что весь доход производственного сектора делится между отдельными производителями. Это значит, что

$$\forall \bar{y} \in \Psi_0(\bar{p}) \quad \bar{p}^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{l} K_i(\bar{p}).$$

Назовём функцией совокупного спроса многозначное отображение

$$\Phi(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(\bar{p}).$$

Включим в товары также и товары потребителей $\vec{b}_i$. Тогда функция совокупного предложения имеет вид

$$\Psi(\bar{p}) = \vec{b} + \sum_{i=1}^{l} \Psi_i(\bar{p}), \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^{l} \vec{b}_i .$$

Утверждение. Для функций $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ имеет место соотношение

$$\forall \bar{x} \in \Phi(\bar{p}) \quad \forall \bar{y} \in \Psi(\bar{p}) \quad \bar{p}^T \bar{x} \le \bar{p}^T \bar{y}.$$

Примечание: это соотношение называется законом Вальраса в широком смысле.

Оптимальное свойство конкурентного равновесия. Пусть имеется l потребителей и X_i, $i = \overline{1,l}$ обозначают множества, на которых определены функции полезности $u_i(\bar{x})$ соответствующих потребителей и $X = \prod_{i=1}^{l} X_i$ есть декартово произведение множеств X_i. Кроме того, пусть на множестве X выделено некоторое подмножество $X_0 \subset X$, которое называется множеством допустимости. Набор векторов $\left\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right\} = \mathbf{x}$, где $\bar{x}_i \in X_i$, $i = \overline{1,l}$ называется допустимым или распределением, если $\mathbf{x} \in X_0$.

Заметим, что в модели Вальраса множество допустимости имеет вид

$$X_0 = \left\{ \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_l\} : \ \exists \bar{y} \in Y, \ \sum_{i=1}^{l} \bar{x}_i \le \vec{b} + \bar{y} \right\},$$

так как нельзя приобрести больше того, что произведено и что имеется у потребителей в качестве первичных товаров.

Будем предполагать также, что потребители ненасыщаемы; это означает, что при отсутствии ограничений на капитал функция полезности каждого потребителя не имеет максимума, и запросы потребителей в этой гипотетической ситуации неограничены.

Определение. Распределение $\left\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right\} = \mathbf{x}$ называется оптимальным по Парето, если не существует такого распределения $\left\{\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n\right\} = \mathbf{x}'$ для которого

1. $\forall i = \overline{1,l} \qquad u_i(\bar{x}'_i) \ge u_i(\bar{x}_i)$,
2. $\exists j = \overline{1,l} \qquad u_j(\bar{x}'_j) > u_j(\bar{x}_j)$.

Смысл этого определения заключается в том, что нельзя сделать так, чтобы

1. хотя бы одному стало лучше (п. 2),
2. всем остальным не стало хуже (п. 1).

Рассмотрим это свойство для частного случая модели Вальраса, которая носит название модели Эрроу-Дебре. В этой модели предполагается, что

$$I_i(\vec{p}) = \vec{p}^T\vec{b}_i + \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\cdot(\vec{p}^T\vec{y}_j),$$

где $\vec{b}_i$ – начальный запас товаров i-го потребителя, α_{ij} – доля доходов j-го производителя, которую получает i-й потребитель $\left(\alpha_{ij} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{l}\alpha_{ij} = 1\right)$, $\vec{y}_j$ – план j-го производителя. Таким образом, капитал потребителя складывается из продажи начального запаса своих товаров (своего труда, сдачи земли в аренду и т.д.) и участия в прибыли производственного сектора.

Дополнительные справочные сведения по теме:
Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

4. Тема самостоятельной работы:

«Взаимодействие двух фирм на рынке одного товара»

Задание:
Необходимо изложить теорию взаимодействия 2-х фирм на рынке одного товара для линейной модели ценообразования.

Рекомендуемый план выполнения работы:
1. Постановка задачи.
2. Стратегия Курно. Динамика стратегии Курно.
3. Стратегия Стакельберга.
4. Метод Парето.
5. Арбитраж по Нэшу.

Форма отчета:
Опрос.

Цель работы:
Самостоятельное изучение теории взаимодействия двух фирм на рынке одного товара

Указания к выполнению. Случай, когда существует несколько производителей (продавцов), называется олигополией, а когда несколько потребителей (покупателей) – олигопсонией. Случай, когда имеются две фирмы, выпускающие однотипную продукцию, называется дуополией. Необходимо рассмотреть этот случай подробно.

Дополнительные справочные сведения по теме:
Литература [1-12], конспект лекций, самостоятельный Интернет-поиск.

5. Тема самостоятельной работы:

«Модели экономического равновесия»

Задание:

Изложить основную модель экономического равновесия на основе отношений предпочтения и функции полезности.

Рекомендуемый план выполнения работы:

1. Основные определения.
2. Функция спроса.
3. Влияние цены на спрос и ее компенсация.
4. Изменение спроса при изменении капитала

Форма отчета:

Опрос. Реферат.

Цель работы:

Самостоятельное изучение метода модели экономического равновесия, влияние цены на спрос и ее компенсация.

Указания к выполнению. Потребитель, идя на рынок (магазин, мастерскую и т.д.), приобретает там некоторые товары (услуги тоже можно считать товаром). Пусть на рынке имеется в наличии всего n видов товаров – товар №1, товар №2, ... , товар № n. Пусть потребителю предлагается набор товаров, в котором первый товар будет в количестве x_1, второй – в количестве x_2, ..., n-ый товар будет в количестве x_n. Тогда этот набор можно представить в виде вектора-столбца

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T.$$

Очевидно, что $\forall i \;\; x_i \geq 0$ (в дальнейшем это будет обозначаться так: $\vec{x} \geq 0$).

Конечно, многие товары можно приобрести только целиком – нельзя купить 1.5 телевизора или сделать 0.73 стрижки волос. Однако, для нижеследующей теории будем считать, что все товары безгранично делимы, то есть x_i могут принимать любые неотрицательные значения. Это позволит в дальнейшем использовать аппарат дифференциального исчисления.

Пусть потребителю предлагается два набора товаров $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В качестве аксиомы предполагается, что потребитель, сравнивая эти наборы, всегда может сказать одно из следующих утверждений:

1. Набор $\vec{x}$ не хуже набора $\vec{y}$ (это обозначается так: $\vec{x} \succ \vec{y}$);
2. Набор $\vec{x}$ лучше (предпочтительнее) набора $\vec{y}$ ($\vec{x} \succ \vec{y}$);
3. Наборы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ для потребителя эквивалентны ($\vec{x} \sim \vec{y}$);
4. Набор $\vec{y}$ лучше набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$);
5. Набор $\vec{y}$ не хуже набора $\vec{x}$ ($\vec{y} \succ \vec{x}$).

В качестве аксиом принимаются следующие свойства этого отношения:

1. $\vec{x} \succ \vec{x}$;
2. $\vec{x} \succ \vec{y} \wedge \vec{y} \succ \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \succ \vec{z}$.

Определение. Отношение предпочтения называется **непрерывным** на некотором множестве X, если множество $\{(\bar{x},\bar{y})\colon \bar{x}\in X,\ \bar{y}\in X,\ \bar{x}\succ\bar{y}\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X\otimes X$.

Содержательно это определение означает следующее: если для некоторого набора товаров $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ верно $\bar{x}_0\succ\bar{y}_0$, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение $\succ$ сохраняется, то есть если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ близки к $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ соответственно, то $\bar{x}\succ\bar{y}$.

Определение. Функция $u(\bar{x})$ называется **функцией полезности** для отношения $\succ$, если.

1. $\bar{x}\succ\bar{y}\Leftrightarrow u(\bar{x})\ge u(\bar{y})$;
2. $\bar{x}\succ\bar{y}\Leftrightarrow u(\bar{x})> u(\bar{y})$;
3. $\bar{x}\sim\bar{y}\Leftrightarrow u(\bar{x})= u(\bar{y})$.

Основной теоремой является так называемая **теорема Дебре.**

Теорема Дебре. Если множество X связно, а отношение предпочтения удовлетворяет свойствам

1. $\bar{x}\succ\bar{x}$;
2. $\bar{x}\succ\bar{y}\wedge\bar{y}\succ\bar{z}\Rightarrow\bar{x}\succ\bar{z}$.
3. отношение $\succ$ непрерывно на X,

то для этого отношения существует функция полезности $u(\bar{x})$.

Теорема.

1. Пусть $f(t)$ есть строго монотонно возрастающая функция и $u(x)$ есть функция полезности. Тогда $v(x)=f(u(x))$ есть также функция полезности.

2. Если $u(x)$ и $v(x)$ есть две функции полезности для одного и того же отношения предпочтения, то существует такая строго монотонно возрастающая функция $f(t)$, что $v(x)=f(u(x))$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что функция $u(\bar{x})$ является дважды дифференцируемой функцией. В экономике на функцию полезности накладывают некоторые дополнительные требования, характерные именно для экономики. Рассмотрим их.

1. $\forall i,\bar{x}_i \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i}>0.$

Условие очевидно – чем больше каждого товара, тем лучше.

2. $\lim\limits_{x_i\to 0}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=+\infty.$

3. $\forall i=\overline{1,n} \quad \lim\limits_{x_i\to +\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0.$

Это требование носит название закона убывающей полезности.

4. Пусть $\bar{y}\succ\bar{x}$. Тогда $\forall\alpha \quad 0<\alpha<1$ естественно требовать, чтобы

$$\alpha\bar{y}+(1-\alpha)\bar{x}\succ\bar{x}$$

Это приводит к следующему ограничению на $u(\bar{x})$:

$$u(\alpha\bar{y}+(1-\alpha)\bar{x})\ge\min(u(\bar{x}),\,u(\bar{y})).$$

Функция, удовлетворяющая этому требованию, называется квазивогнутой.

В дальнейшем мы, для упрощения теории, будем требовать, чтобы $u(\bar{x})$ была вогнутой, то есть

$$\forall\alpha \;\; 0<\alpha<1 \;\; u(\alpha\bar{y}+(1-\alpha)\bar{x}) \ge \alpha u(\bar{y})+(1-\alpha)u(\bar{x}),$$

или даже строго вогнутой, то есть

$$\forall\alpha \;\; 0<\alpha<1 \;\; u(\alpha\bar{y}+(1-\alpha)\bar{x}) > \alpha u(\bar{y})+(1-\alpha)u(\bar{x}).$$

Заметим, что всякая вогнутая функция одновременно и квазивогнута. Обратное, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{U}(\bar{x}) = \left\| u_{ij} \right\|$ с элементами

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

В экономике эта матрица называется матрицей Гессе. Для строго вогнутой функции эта матрица отрицательно определена. Отсюда, в частности, следует, что

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0.$$

Дополнительные справочные сведения по теме:

Литература [1-15], самостоятельный Интернет-поиск.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко М.Г. Математические модели в экономике. Томск: Изд-во ТУСУР, 2000.
2. Шапкин А.С., Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2007.
3. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование: учебник для вузов. – М.: Дашков и К°, 2008.
4. Смагин В.И. Оптимальное и адаптивное управление экономическими системами. Учебно-методическое пособие. Томск: – Изд-во ТГУ, 2010.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Учебное пособие. М.: ЮНИТИ, 2000.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебное пособие. М.: Дело, 2006.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. Учебное пособие. СПб.: Питер, 2005.
8. Федосеев и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. М.: ЮНИТИ, 1999.

9. Перепелкин Е.А. Математические модели экономических систем. Барнаул: Изд-во
АлтГТУ, 2003.
10. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб.: Питер, 2000.
11. Терпугов А.Ф. Экономико-математические модели. Томск: Изд-во ТГПУ, 1999.
12. Параев Ю.И., Смагин В.И. Оптимальное управление производством и финансовыми инструментами. Учебно-методическое пособие. Томск: Изд-во ТГУ, 2002.
13. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. Кубонива. М.: Наука, 1991.
14. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М.: Мир, 1975.
15. Аллен Р. Математическая экономия. М.: Изд-во ИЛ, 1963.