Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра радиотехнических систем

Г.С. Шарыгин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тезисы лекций

Томск – 2012

Шарыгин Г.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Тезисы лекций [Электронный ресурс]. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 77 с.

Брошюра представляет собой учебное пособие, изданное в виде рабочей тетради и предназначенное для использования студентом при прослушивании и записи лекций, а также при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзаменам.

Рабочая тетрадь включает в себя краткие тезисы материала каждой лекции. Свободное место предназначено для иллюстраций, комментариев и замечаний студента, которые должны вноситься как в процессе записи лекции, так и при самостоятельной работе над курсом. В частности, самостоятельно вносятся студентом графики и рисунки.

Содержание лекций соответствует Государственным образовательным стандартам по направлениям подготовки инженеров 654200 – «Радиотехника» (рег. № 151 тех/дс от 17.03.2000), 654400 – «Телекоммуникации» (рег. № 20 тех/дс от 10.03.2000) и по специальности 075600 – «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» (рег. № 285 инф/СП от 05.04.2000) и рабочим учебным программам, действующим в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники. На лекциях рассматриваются примеры и иллюстрации, связанные с направлениями подготовки радиоспециалистов. Пособие может быть использовано как студентами дневного обучения, так и при самостоятельном изучении курса студентами заочной и дистанционной форм обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ
по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. <u>Цель и задачи курса</u>

1.1. Цель курса

Изучение статистических свойств случайных событий и величин, знакомство с типичными методами решения вероятностных задач, овладение методами статистической обработки результатов наблюдений, измерений и моделирования, подготовка к применению статистических методов в анализе и синтезе радиотехнических цепей и систем, в кодировании и защите информации.

1.2. Задачи изучения курса.

В результате изучения курса студент должен:

* знать способы статистического описания случайных событий и величин;
* знать основные закономерности, связывающие статистические характеристики случайных событий и величин;
* уметь рассчитывать вероятности событий в типичных статистических моделях, числовые характеристики одномерных и многомерных случайных величин по их распределениям, моменты и распределения функций случайных аргументов;
* знать основные дискретные и непрерывные распределения случайных величин и свойства этих распределений;
* понимать смысл и постановки задач двух основных направлений математической статистики - испытания статистических гипотез и оценивания параметров распределений;
* знать основные методы статистической обработки экспериментальных, наблюдательных и имитационных данных, оценки их точности и надежности.

2. <u>Содержание курса</u>

2.1. Введение - 1 час.

Детерминизм и стохастичность в природе. Статистическая устойчивость как основа статистической теории. Флуктуации в радиотехнике, оптике, акустике, информатике. Стохастичность сигналов и помех в радиоэлектронных системах. Необходимость и содержание курса. Рекомендуемая литература.

2.2. Случайные события и вероятности - 5 часов.

Случайное событие, вероятность, частота, группа событий, условная вероятность. Операции над событиями, алгебра событий, ее геометрическая интерпретация, тождества Де Моргана.

Схема случаев, непосредственный расчет вероятностей.

Вероятность произведения событий. Обобщение на случай многих сомножителей. Следствия.

Вероятность суммы событий. Вероятность суммы совместных, но не зависимых событий. Следствия.

Схема гипотез, формула полной вероятности.

Обратная вероятность, вклады гипотез, формула Байеса.

Последовательные независимые однородные испытания, биномиальная формула, два вида задач на биномиальную формулу.

2.3. Случайные величины и распределения вероятностей - 5 часов.

Случайная величина, множество значений, область определения. Примеры случайных величин. Дискретная случайная величина: определение, ряд распределения, условие нормировки, функция распределения, вероятность попадания в интервал, “механическая” интерпретация. Непрерывная случайная величина: плотность вероятности, условие нормировки, функция распределения, вероятность попадания в интервал, «механическая» интерпретация.

Характеристики случайных величин: начальные моменты, центральные моменты, связь начальных и центральных моментов, характеристики положения.

Основные дискретные распределения и их характеристики: биномиальное, Пуассона.

Основные непрерывные распределения и их характеристики: равномерное, экспоненциальное, нормальное, Коши.

2.4. Системы непрерывных случайных величин и многомерные распределения - 3 часа.

Недостаточность одномерных и примеры многомерных величин. Двумерные системы случайных величин: плотность вероятности, вероятность попадания в область, функция распределения, «механическая» интерпретация, частные распределения, моменты системы. Обобщение на n-мерные системы ($n > 2$).

2.5. Статистическая зависимость в двумерной системе - 2 часа.

Условные распределения, зависимость и независимость случайных величин, факторизация двумерных плотности вероятности, функции распределения и моментов.

2.6. Многомерное нормальное распределение - 1 час.

Матрично-векторная запись n-мерной нормальной плотности вероятности, ковариационная матрица, вектор средних, эквивалентность корреляции и зависимости в нормальной системе. Вывод двумерной нормальной плотности вероятности.

2.7. Функции случайных аргументов - 5 часов.

Понятие функции случайных аргументов. Общий метод вычисления моментов функций случайных аргументов. Математическое ожидание линейной функции случайных аргументов, следствия. Дисперсия линейной функции случайных аргументов, следствия.

Корреляция, регрессия и линейная зависимость. Соотношение зависимости и корреляции.

Распределение функций случайных аргументов: общая задача, распределения монотонной и немонотонной функций одного случайного аргумента, примеры. Распределение функции двух случайных аргументов, примеры. Центральная предельная теорема. Распределение модуля нормального случайного вектора при нулевых и ненулевых средних.

2.8. Выборка и выборочные характеристики - 3 часа.

Предмет математической статистики. Независимая однородная выборка. Выборочное распределение, выборочные моменты. Группировка и гистограмма. Характеристики выборочных моментов. Понятие о предельных теоремах. Две основные задачи математической статистики.

2.9. Испытание статистических гипотез - 4 часа.

Понятие об оптимальном испытании статистических гипотез. Гипотеза о теоретическом распределении, понятие о критерии согласия. Критерий согласия хи-квадрат. Критерий согласия Колмогорова. Испытание гипотезы о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности. Испытание гипотез о параметрах распределения.

2.10. Оценка параметров распределений - 5 часов.

Понятие о доброкачественной точечной оценке, состоятельность, несмещенность, эффективность. Потенциальная точность оценивания, неравенство Крамера-Рао, примеры его применения. Метод моментов, примеры его применения. Метод максимума правдоподобия, примеры его применения. Интервальные оценки, построение точного и приближенного доверительных интервалов.

3. <u>Темы практических занятий</u>

3.1. Виды и примеры событий. Алгебра событий ____________________ 2 часа.
3.2. Непосредственный расчет вероятностей ________________________ 3 часа.
3.3. Вероятность произведения и вероятность суммы событий ________ 4 часа.
3.4. Формула полной вероятности и формула Байеса ________________ 2 часа.
3 5. Последовательные независимые испытания _____________________ 2 часа.
3.6. Дискретные распределения ___________________________________ 2.часа.
3.7. Непрерывные распределения __________________________________ 3 часа.
3.8. Нормальное распределение ___________________________________ 2 часа.
3.9. Двумерные распределения и моменты __________________________ 2 часа.
3.10. Распределения функций случайных аргументов_________________ 3 часа.
3.11. Группировка данных и построение гистограммы ________________ 2 часа.
3.12. Вычисление выборочных моментов ___________________________ 2 часа.
3.13. Критерий согласия хи-квадрат ________________________________ 2 часа.
3.14. Построение доверительного интервала ________________________ 3 часа.

<u>Лекция 1</u>

Введение. Предмет теории вероятностей

• Детерминизм и стохастичность в природе $$\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$$ $$\mathbf{f}=?$$ $$\mathbf{Y}=?$$	• Все явления в природе связаны друг с другом множеством причинных связей. *Примеры.* ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ • Если все связи известны, то можно предсказать (рассчитать) явление сколь угодно точно. *Примеры.* ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ • Однако, все связи неизвестны, поэтому предсказать явление невозможно. *Примеры.* ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ • Поэтому все явления являются случайными, отклонения которых от закономерности заранее неизвестны и не могут быть предсказаны (рассчитаны).
• Статистическая устойчивость как основа статистической теории	• <u>Вопрос</u>: проявляются ли какие-либо закономерности в случайных явлениях? Иначе: может ли наука их изучать? • Замечено, что в единичных случайных явлениях никакие закономерности не проявляются. *Примеры.* ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ • Однако, в массовых случайных явлениях, т.е. в таких явлениях, которые повторяются в одних и тех же контролируемых условиях множество раз, такие закономерности проявляются. *Примеры.*______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________

Теория вероятностей есть наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений.

Примеры случайных явлений в технике

• Флуктуации в радиотехнике, оптике, акустике, информатике.	• Флуктуации и случайные явления в радиотехнике. *Примеры.*____________________ ____________________ ____________________ ____________________ • Флуктуации в оптике. *Примеры.*____________________ ____________________ ____________________ ____________________ • Случайные явления в акустике. *Примеры.*____________________ ____________________ ____________________ ____________________ • Случайные явления в информатике. *Примеры.*____________________ ____________________ ____________________ ____________________
• Стохастичность сигналов и помех в радиосистемах	• Особый интерес изучения сигналов и помех (шумов) в радиоэлектронных системах, как случайных явлений. *Примеры.*____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

• Необходимость и содержание курса.	• Поскольку во всех радиоэлектронных системах и устройствах имеют место случайные явления, то все параметры и характеристики РТС могут быть изучены только как случайные явления. Отсюда следует необходимость теории вероятностей как теоретической основы анализа и синтеза радиоэлектронных систем и устройств.

	• Содержание курса: 1. Введение - 1 час. 2. Случайные события - 5 часов. 3. Случайные величины - 5 часов. 4. Системы случайных величин непрерывных - 3 часа. 5. Статистическая зависимость - 2 часа. 6. Многомерное нормальное распределение - 1 час. 7. Функции случайных аргументов - 5 часов. 8. Выборка и выборочные характеристики - 3 часа. 9. Испытание статистических гипотез - 4 часа. 10. Оценка параметров распределений - 5 часов.

Рекомендуемая литература.

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука (любое издание).	
2. Глазов Г.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2004 (в печати). См. также: Глазов Г.Н. Основы теории вероятностей (конспект лекций). - Томск: ТИРиЭТ, 1970.	
3. Чумаков А.С. Основы статистической радиотехники. – Томск, ТУСУР, 2003.	
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Высшая школа, 2000.	
5. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968.	
6. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1979.	
7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения). - М.: Наука (любое издание).	
8. Володин Б.Г. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. /Под ред. Свешникова А.А. - М.: Наука (любое издание).	
9. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.	
10. Надеев А.И., Чумаков А.С. Сборник задач по теории вероятностей. – Томск: ТИАСУР, 1982.	

1. Случайные события и их вероятности

1.1. Основные определения

• Событие A, B,…– любая качественная характеристика результата опыта.	
• Случайное событие – то, которое в результате опыта может произойти, а может и не произойти.	
• Достоверное событие – то, которое обязательно появляется в результате опыта.	
• Невозможное событие – то, которое не может появиться в результате опыта.	
• Событие A влечет за собой событие B ($A \subset B$) – если при совершении события A событие B обязательно совершается.	
• Эквивалентные события $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.	
• Противоположные события – если совершение одного влечет несовершение другого и наоборот.	
• Несовместные события – такие два события, совместное осуществление которых – событие невозможное.	
• Совместные события – те, которые не являются несовместными. Не обязательно появляются вместе.	
• Группа событий – совокупность нескольких событий, которые могут появиться в данном опыте.	
• Полная группа событий – если хотя бы одно из событий, входящих в группу, обязательно совершается. Таким образом, противоположные события – это два несовместных события, образующих полную группу.	
• Случаи – несовместные и равновозможные события, составляющие полную группу.	
• Случай благоприятствует событию A, если он влечет за собой событие A.	
• Случай не благоприятствует событию A, если он не влечет за собой события A.	

• Сумма событий $B = A_1+A_2+\ldots$ - это событие, эквивалентное совершению хотя бы одного из слагаемых событий.	
• Произведение событий $B = A_1A_2\ldots$ - это событие, эквивалентное совместному совершению перемножаемых событий.	
• Операции над событиями удовлетворяют свойствам ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности.	
• Отметим: $A+A = A$; $AA = A$.	
• Операции деления событий и умножения их на число не введены, поэтому не имеют смысла выражения вида A/B, $2A$, $3A+4B$ и т.д.	
• Геометрическая интерпретация событий и операций над ними.	
• Частота события m/n. Серии из n опытов дают разные величины m.	
• Устойчивость частот – сходимость частоты к некоторому числу при бесконечном увеличении серии испытаний (числа n). Это не совсем та сходимость, которая изучается в детерминированной математике.	

Устойчивость частот является основным объективным свойством случайных событий, на котором основана вся теория вероятностей. Это свойство подтверждается всем опытом экспериментальной науки и строго доказывается при определенных условиях (закон больших чисел).

1.2. Вероятность

<u>Вероятность случайного события</u> – основное понятие теории вероятностей. *Вероятность P(A) – количественное выражение степени возможности события A*.

Несколько определений вероятности:

1. Предел частоты при неограниченном увеличении числа опытов.	
2. Схема случаев: отношение числа благоприятствующих событию случаев к общему числу случаев. (Пригодно только при <u>конечном числе равновозможных случаев</u>.)	
3. Геометрическая вероятность. Случай – попадание в любую точку области D. Событие – попадание в часть A области D. Вероятность события A – отношение меры области A к мере области D.	
4. Есть и другие определения.	

Свойства вероятности:

- $1 \geq P \geq 0$

Примеры. ______________________________

- Вероятность невозможного события = 0. И наоборот: если $P = 0$, то событие невозможно.

Примеры. ______________________________

- Вероятность достоверного события = 1. И наоборот: если $P = 1$, то событие достоверно.

Примеры. ______________________________

- Вероятность произведения несовместных событий = 0. И наоборот: если $P(AB) = 0$, то события A и B несовместны.

Примеры. ______________________________

- Вероятность суммы событий, образующих полную группу, = 1. И наоборот: если вероятность суммы событий = 1, то они образуют полную группу.

Примеры. ______________________________

Контрольные вопросы к 1 лекции

1. Почему наблюдаются явления, предсказать которые невозможно?	
2. Какое явление называется случайным?	
3. Проявляются ли какие-либо закономерности в единичных случайных явлениях и почему?	
4. Что такое массовые случайные явления?	
5. Что такое статистическая устойчивость явлений?	
6. Что такое случайное событие?	
7. Является ли достоверное событие случайным?	
8. Если одно событие влечет за собой другое, означает ли это, что они происходят неодновременно?	
9. Что такое случай?	
10. Что такое устойчивость частот событий?	
11. В чем разница понятий сходимости в детерминированной математике и сходимости по вероятности?	
12. Почему вероятность не может быть больше единицы?	
13. Как называются два события, вероятность произведения которых равна нулю?	
14. Если вероятность произведения трех событий равна нулю, можно ли сказать, что они несовместны?	

<u>Лекция 2</u>

2. Вероятность суммы и произведения событий

- Теоремы сложения и умножения вероятностей позволяют определять вероятность события через вероятности других событий, связанных с первым событием.

2.1. Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Доказательство для схемы случаев.

- Общее число случаев n
- Число случаев, благоприятствующих событию A равно m, событию B - равно k, событию AB - равно l
- Тогда $P(A + B) = m/n + k/n - l/n = P(A) + P(B) - P(AB)$, так как l входит как в m, так и в k.

Доказательство через понятие вероятности, как предела частоты.

Доказательство с помощью геометрических представлений.

Следствия из теоремы сложения вероятностей

Следствие 1: ***Если два события несовместны, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий*** Обобщение для многих событий: *Если имеется группа попарно несовместных событий* $A_1, A_2, \dots, A_s$ *то* $$P(\sum_{i=1}^{s} A_i) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i)$$	*Задание*: Написать формулу вероятности суммы трех любых (совместных) событий
Следствие 2: ***Если события*** $A_1, A_2, \dots, A_s$ ***несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице***	*Пример:*
Следствие 3: ***Сумма вероятностей противоположных событий равна единице***	*Пример:*

2.2. Теорема умножения вероятностей

Предварительные определения:

- Зависимые и независимые события
- Условная вероятность $P(A/B) = P_B(A)$
- Для независимых событий $P(A/B) = P(A)$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое имело место: $$P(AB) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)$$

Доказательство для схемы случаев. • Общее число случаев n • Число случаев, благоприятствующих событию A равно m, событию B - равно k, событию AB - равно l • Тогда $P(AB) = l/n = l/m \cdot m/n = l/k \cdot k/n = P(B/A)\, P(A) = P(A/B)\, P(B)$
Доказательство через понятие вероятности, как предела частоты.
Доказательство с помощью геометрических представлений.

Следствия из теоремы умножения вероятностей

<u>*Следствие*</u> 1: ***Если два события независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий*** <u>*Обобщение для многих событий*</u>: ***Если имеется группа независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$, то*** $$P(\prod_{i=1}^{s} A_i) = \prod_{i=1}^{s} P(A_i)$$	<u>*Задание*</u>: Написать формулу вероятности произведения трех любых (зависимых) событий

Следствие 2: ***Если событие А не зависит от события В, то и событие В не зависит от события А*** ***и наоборот***	*Пример*: *Рассматривается статистическая, но не причинная связь*!
Способ определения суммы многих совместных, но независимых событий: $$P(\sum_{i=1}^{s} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{s}[1 - P(A_i)]$$	*Решить задачу: Вероятность аварии в каждом выезде машины 0,001. Я совершил 1000 выездов. Какова вероятность того, что я попаду в аварию?*

Контрольные вопросы к 2 лекции

1. Что такое сумма событий?	
2. Что такое произведение событий?	
3. Что такое зависимые события и могут ли они происходить одновременно?	
4. В каком случае условная вероятность события равна безусловной?	
5. Почему при геометрическом доказательстве теорем площадь фигуры приравнивается к вероятности?	
6. Почему при рассмотрении суммы событий рассматривается их совместность, а не зависимость?	
7. Почему при рассмотрении произведения событий рассматривается их зависимость, а не совместность?	
8. В чем принципиальное различие причинной и статистической связи явлений?	
9. Как обойти трудность определения вероятности суммы многих независимых совместных событий, если неизвестна вероятность их произведения?	
10. Чему равна вероятность произведения несовместных событий?	

Лекция 3

3. Схема гипотез. Формула Байеса. Биномиальная формула

3.1. Формула полной вероятности

Определение: *Гипотезы – это события, которые образуют полную группу несовместных событий*

- Пусть имеется n гипотез H_i, и с каждой может произойти событие A
- Пусть вероятность того, что событие A произошло с гипотезой H_i, равна $P(A/H_i)$
- Тогда вероятность совместного появления гипотезы H_i и события A равна $P(AH_i) = P(A/H_i)\, P(H_i)$
- Но такие появления совместно с разными гипотезами – события несовместные, т.к. гипотезы несовместны
- Поэтому

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\, P(H_i)}$$

Задача: Самолет атакует объект. Три РЛС обнаруживают самолет с вероятностями 0,6; 0,7; 0,8. При обнаружении одним, двумя и тремя локаторами самолет будет сбит с вероятностью соответственно 0,65; 0,75; 0,85. Какова вероятность, что самолет будет сбит?	

3.2. Формула Байеса (англ. математик, 1702-1761, теорема Байеса опубл. В 1763 г.)

$P(AH_i) = P(A/H_i)\, P(H_i)$, но и $P(AH_i) = P(H_i/A)\, P(A)$. Отсюда следует:

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\, P(H_i)}}$$

Смысл: $P(H_i / A)$ - *апостериорная вероятность гипотезы при условии, что событие A произошло.*

Задача: В предыдущем примере самолет сбит. Какова вероятность того, что он был обнаружен сразу тремя локаторами?	
Задача порогового обнаружения в РЛС: Цель есть и цели нет – две гипотезы. Вероятность правильного обнаружения 0,9, вероятность ложной тревоги 0,1 заданы. Порог превышен. Какова вероятность наличия цели?	

3.3. Биномиальная формула

Задача: производится n опытов в одинаковых условиях, в каждом из опытов может произойти событие A с вероятностью p. Опыты независимы. Какова вероятность того, что событие A произойдет m раз: $P_{m,n} = ?$

Решение. Если вероятность несовершения события A в отдельном опыте равна $q = 1 - p$, число способов совершения события A m раз в n опытах равно числу сочетаний из n по m C_n^m, а вероятность каждого такого сочетания равна $p^m q^{n-m}$, то

$$\boxed{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}}$$

так как события *независимы*, а сочетания *несовместны*.

Самостоятельно: Определить вероятность получения положительной оценки, если заданы 10 вопросов, отл. выставляется за 10 правильных ответов, хор. – за 9 или 8, удовл. – за 7 или 6. На каждый вопрос приведены 3 ответа, один из которых – правильный. Ответы выбираются наугад.	

Контрольные вопросы к 3 лекции

1. Является ли гипотеза причиной события *A*?	
2. Если гипотезы существуют независимо от события *A*, то почему условная вероятность гипотезы $P(H_i / A)$ зависит от наличия события *A*?	
3. Почему в биномиальной формуле берется число сочетаний, а не число перестановок или число размещений?	
4. Что означает условие независимости опытов в постановке задачи вывода биномиальной формулы?	
5. Придумайте пример использования формулы полной вероятности.	
6. Придумайте пример использования формулы Байеса.	
7. Придумайте пример использования биномиальной формулы.	

<u>Лекция 4</u>

4. Случайные величины и законы распределения вероятностей

4.1. Основные определения

Случайная *<u>величина</u>* и ее *<u>значение</u>* X	
Множество значений: *<u>конечное счетное</u>*, *<u>бесконечное счетное</u>*, *<u>бесконечное несчетное</u>*	
Соответственно величины: *<u>дискретные</u>*, *<u>непрерывные</u>*	
Область определения случайной величины: *<u>конечная</u>*, *<u>бесконечная</u>*	
Соответственно случайная величина: *<u>ограниченная</u>*, *<u>полуограниченная</u>*, *<u>неограниченная</u>*	

4.2. Законы распределения вероятностей дискретной случайной величины

Ряд распределения $X_i \leftrightarrow P_i$	
Многоугольник распределения	
Условие нормировки ряда распределения	$\sum P_i = 1$
Функция распределения $F(x) = P(X \le x)$	

Свойства функции распределения	1. $F(x) \geq 0$ 2. $F(x_2) \geq F(x_1); x_2 > x_1$ - функция неубывающая 3. $F(-\infty) = 0$ 4. $F(\infty) = 1$ - одна из форм условия нормировки
Вероятность попадания в интервал $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	

3.3. Законы распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Функция распределения $F(x) = P(X \leq x)$ для непрерывной и дискретно-непрерывной случайной величины	

Свойства функции распределения: те же, что и для дискретной случайной величины	
Вероятность попадания в интервал – так же, как и для дискретной случайной величины	

При уменьшении интервала до нуля вероятность попадания в интервал стремится к нулю	

Вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю, *но это не означает невозможности такого события, а лишь то, что при повторении опытов это событие будет появляться сколь угодно редко.*

Ср.: масса точки равна нулю, но тело, составленное из точек, имеет реальную массу.

Плотность вероятности $W(x) = f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \dfrac{dF(x)}{dx}$	
И наоборот: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} W(z)dz$	
Вероятность попадания в интервал (x_1, x_2)	$P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} W(x)dx$
Элемент вероятности – вероятность попадания в интервал (x, x+dx)	$W(x)dx$
Условие нормировки	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1$
Плотность вероятности для дискретных и дискретно-непрерывных случайных величин вводится с помощью дельта-функций	

<u>Контрольные вопросы к 4 лекции</u>

1. Чем случайная величина отличается от случайного события?	
2. Может ли быть конечным или бесконечным число значений дискретной случайной величины?	
3. Может ли быть конечным или бесконечным число значений непрерывной случайной величины?	
4. Какова размерность значений функции распределения случайной величины?	
5. Что такое плотность вероятности случайной величины?	
6. Какова размерность значений плотности вероятности случайной величины?	
7. Чему равна вероятность конкретного значения непрерывной случайной величины?	
8. Что означает и почему имеет место условие нормировки закона распределения?	
9. Почему функция распределения является неубывающей?	
10. Что такое элемент вероятности непрерывной случайной величины и какова его размерность?	
11. Нарисуйте кривые функции распределения и плотности вероятности дискретно-непрерывной случайной величины.	

Лекция 5

5. Статистические характеристики. Дискретные распределения

5.1. Статистические характеристики случайных величин

5.1.1. Среднее значение случайной величины

- Для дискретной величины – из опыта – среднее арифметическое величин, полученных в большом числе опытов:

$$m_x^* = M^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \,,$$

где j – номер опыта, n – число опытов, или

$$m_x^* = M^*(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} x_i \,,$$

где i – номер значения дискретной случайной величины, m_i - число раз появления этого значения в n опытах, k – число возможных значений случайной величины

- В пределе, при большом n:

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)$$ - *__математическое ожидание__* или *__среднее значение__*

- Для непрерывной случайной величины: $m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx$ -

это еще называется *__первый начальный момент случайной величины.__*

Среднее существует не всегда. Его не существует, если интеграл расходится (крайне редко), или не могут быть указаны пределы интеграла. Например, среднее значение фазы при равномерном распределении:

5.1.2. Моменты случайной величины

Моменты – это числовые характеристики случайной величины	

- Моменты бывают начальные и центральные

Начальный момент *k*-го порядка – это математическое ожидание *k*-й степени случайной величины: $$M(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k W(x)dx$$	

- Центрированная случайная величина $X-m_x$

Центральный момент *k*-го порядка – это математическое ожидание *k*-й степени центрированной случайной величины: $$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k W(x)dx$$	
Отметим: $\mu_0=1$; $\mu_1=0$.	
Средний квадрат	
Дисперсия	
Среднеквадратическое отклонение	

- Кроме моментов, существуют другие числовые характеристики – так называемые *характеристики положения*

Мода, *медиана*	

Коэффициент асимметрии $$k_{ac} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$	
Коэффициент эксцесса $$k_{эксц} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$	

5.1.3. Связь начальных и центральных моментов

Установим связь первых и вторых моментов:

$$\mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2x m_x W(x) dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} m_x^2 W(x) dx = M(x^2) - m_x^2;$$

$$\boxed{\overline{x^2} = \sigma_x^2 + \left(\overline{x}\right)^2}; \qquad \text{где} \qquad \overline{x^2} = M(X^2),\ \sigma_x^2 = \mu_2,\ \overline{x} = m_x.$$

5.2. Примеры дискретных распределений

5.2.1. Биномиальное распределение

Напомним биномиальную формулу:

$$\boxed{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}}$$

Если проведение n испытаний рассматривать как опыт, то m есть значение дискретной случайной величины, получаемое в результате опыта. Тогда биномиальная формула является рядом распределения величины m. Это и есть биномиальное распределение. Его моменты: $$M(m) = np;$$ $$D(m) = npq.$$	

5.2.2. Распределение Пуассона

Важная ситуация: некоторые события происходят в случайные моменты времени, непрерывно распределенные на временной оси (поток событий). Примеры: телефонные вызовы, отказы элементов схем.	*Еще примеры:*

- Если предположить, что

- вероятность появления любого числа событий в любом интервале времени не зависит от того, сколько событий произошло в другом (неперекрывающемся) интервале;
- вероятность появления одного события в бесконечно малом интервале времени есть бесконечно малая величина;
- вероятность появления более одного события в бесконечно малом интервале времени есть бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с этим интервалом

При этих условиях вероятность того, что в некотором заданном интервале произойдет X событий, равна $$\boxed{P(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}}$$ где λ – среднее значение величины X. $$M(X)=\lambda;$$ $$D(X)=\lambda.$$	
Распределение Пуассона является частным случаем биномиального распределения при $n \to \infty$ и $p \to 0$, но так, что $pn=\lambda$.	

Контрольные вопросы к 5 лекции

1. Почему в формуле для среднего арифметического нет вероятности, а в формуле для математического ожидания она есть?	
2. Чему равен первый центральный момент случайной величины?	
3. Чем различаются средний квадрат и дисперсия?	
4. Какую размерность имеют дисперсия и среднеквадратическое отклонение?	
5. В каком случае мода, медиана и среднее значение равны?	
6. Нарисуйте примеры кривых плотности вероятности с разными коэффициентами асимметрии и эксцесса.	
7. Какую размерность имеют среднее значение и дисперсия случайной величины, подчиняющейся закону Пуассона?	
8. Почему закон Пуассона является частным случаем биномиального распределения?	
9. Придумайте пример случайной величины, подчиняющейся закону Пуассона.	

Лекция 6

6. Непрерывные распределения. Понятие о системах случайных величин

6.1. Примеры непрерывных распределений

6.1.1. Равномерное распределение

$W(x)=\begin{cases} A=\dfrac{1}{b-a}; & a\le x\le b \\ 0; & x<a, x>b \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0; & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}; & a\le x\le b \\ 1; & x>b \end{cases}$	
$M(X)=\dfrac{a+b}{2};\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$	

6.1.2. Экспоненциальное распределение

Рассмотрим вероятность того, что в течение времени *t* при однородном потоке не произойдет ни одного события (*<u>вероятность пустого интервала</u>*). Из формулы Пуассона следует:

$$P_t(0)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t},$$

где λ – среднее число событий в единицу времени.

Продифференцируем по *t*, то есть найдем приращение вероятности пустого интервала при изменении *t* на d*t*

$$\frac{dP(t)}{dt}=-\lambda e^{-\lambda t};$$

$-dP(t)=\lambda e^{-\lambda t}dt$ есть элемент вероятности случайной величины t.

Таким образом, плотность вероятности

$$\boxed{W(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

Это и есть экспоненциальное распределение. Нетрудно убедиться, что условие нормировки для него выполняется, а среднее значение и среднеквадратическое отклонение равны:

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \;\; t \geq 0$ $M(t) = \dfrac{1}{\lambda};\; D(t) = \dfrac{1}{\lambda^2};\; \sigma_t = \dfrac{1}{\lambda}$	

6.1.3. Распределение Коши

Огюстен Луи Коши (Cauchy) ─ франц. математик (1789-1857), ин. почетн. чл. Петербургской АН

$W(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$ Из условия нормировки $A = \dfrac{1}{\pi}$, поэтому $\boxed{W(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}}$ Моментов распределения Коши не существует, интегралы расходятся.	

6.1.4. Нормальное распределение (Распределение Гаусса)

Карл Фридрих Гаусс (Gauss) ─ нем. ученый (1777-1855), ин. почетн. чл. Петербургской АН

$W(x) = ae^{-b(x-c)^2}$ где a, b, c – постоянные коэффициенты.	

$$\boxed{W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}},}$$ где $M(X)=m_x$, $D(X)=\sigma^2$.	

6.2. Понятие о системах случайных величин

Недостаточность одномерных величин
Примеры многомерных величин
Случайный вектор и геометрическая интерпретация

<u>Контрольные вопросы к 6 лекции</u>

1. Выведите выражение для дисперсии равномерно распределенной случайной величины.	
2. При выводе формулы для экспоненциального распределения: равны ли друг другу вероятность того, что пустой интервал будет иметь длительность t, и вероятность того, что за время t интервал будет пустым?	
3. В чем физический смысл того, что у распределения Коши не существуют моменты?	
4. Поясните без вывода, какие коэффициенты в формуле для нормального распределения характеризуют среднее значение случайной величины и ее разброс вокруг среднего?	
5. Почему для характеристики совокупности случайных величин недостаточно охарактеризовать каждую из величин в отдельности?	
6. Изобразите одну из реализаций случайного трехмерного вектора и обозначьте значения трех случайных величин, входящих в его состав.	

Лекция 7

7. Системы случайных величин

7.1. Законы распределения двумерных случайных величин

Функция распределения $$F(x,y)=P\begin{pmatrix} X<x \\ Y<y \end{pmatrix}$$	
Попадание в прямоугольную область (выражения через функцию распределения)	
Плотность вероятности $$W(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}}\frac{P\begin{pmatrix} x\le X<x+\Delta x \\ y\le Y<y=\Delta y \end{pmatrix}}{\Delta x\Delta y}$$	
Элемент вероятности (вероятность попадания в бесконечно малый прямоугольник) $$W(x,y)dxdy$$	
Вероятность попадания в область $$P(S\in B)=\iint\limits_{B} W(x,y)dxdy$$	

Связь функции распределения и плотности вероятности: $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}W(u,v)dudv;$$ $$W(x,y)=\frac{d^2F(x,y)}{dxdy}$$	
Свойства функции распределения и плотности вероятности: • $0\le F(x,y)\le 1$ • неубывающая • $F(-\infty,y)=0$ при любом y $F(x,-\infty)=0$ при любом x • $F(x,\infty)=P(X<x)=F_1(x)$ $F(\infty,y)=P(Y<y)=F_2(y)$ • $F(\infty,\infty)=1$ • $W(x,y)\ge 0$ • $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dxdy=1$ • $W_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dy;\quad W_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dx$	

7.2. Моменты двумерных случайных величин

- Начальный момент порядка $r + s$ равен

$\alpha_{rs} = M[X^r Y^s]$, где r, s – целые, неотрицательные

- Центральный момент порядка $r + s$ равен

$$\mu_{rs} = M[(\overset{0}{X})^r (\overset{0}{Y})^s]$$

Назвать все моменты и расписать через интегралы от плотности вероятности с объяснением: средневзвешенные величины с весами, равными элементам вероятности	
Если один из порядков r, s равен нулю, то получаются моменты отдельных случайных величин	
Смешанные моменты. Корреляционный момент α_{11}. Ковариация μ_{11}. Коэффициент корреляции $\mu_{11} \big/ \sqrt{\mu_{2(x)} \mu_{2(y)}}$.	

7.3. Обобщение на n-мерные системы (n > 2)

Закон распределения случайного вектора в многомерном пространстве	
Матрица вторых моментов	

Контрольные вопросы к 7 лекции

1. Какова размерность плотности вероятности двумерного случайного вектора?	
2. Изобразите плотность вероятности двумерного вектора, которая бы иллюстрировала взаимную связь (зависимость) двух величин, входящих в систему.	
3. Какую размерность имеют корреляционный момент, коэффициент корреляции и нормированный коэффициент корреляции двух случайных величин?	
4. Сколько независимых элементов имеет корреляционная матрица системы *n* случайных величин?	
5. Могут ли все элементы корреляционной матрицы равняться нулю?	
6. Какой вид имеет корреляционная матрица для системы независимых случайных величин?	
7. При каком условии все диагональные элементы нормированной корреляционной матрицы равны единице?	
8. Сколько моментов третьего порядка имеет система *n* случайных величин?	

Лекция 8.

8. Статистическая зависимость в двумерной системе

8.1. Условные распределения, зависимость и независимость случайных величин

8.1.1. Условные распределения

$F_y(x);\ F_x(y);\ W_y(x);\ W_x(y)$ $F_y(x)=\int_{-\infty}^{x} W_y(x)dx;\ F_x(y)=\int_{-\infty}^{y} W_x(y)dy$ $W_y(x)=\frac{d}{dx}F_y(x);\ W_x(y)=\frac{d}{dy}F_x(y)$	

Применяя *теорему умножения* к элементам вероятности, получим:

$$W(x,y)dxdy = W(x)dx\cdot W_x(y)dy = W_y(x)dx\cdot W(y)dy$$

$$\boxed{W(x,y)=W(x)\cdot W_x(y)=W_y(x)\cdot W(y)}$$

Теорема умножения распределений:

Поскольку $W(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dy;\ W(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dx$, то $\boxed{\begin{gathered} W_y(x)=\frac{W(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dx};\ W_x(y)=\frac{W(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dy}. \\ W_y(x)=\frac{W(x)W_x(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x)W_x(y)dx}; \\ W_x(y)=\frac{W(y)W_y(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(y)W_y(x)dy}. \\ W(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(y)W_y(x)dy; \\ W(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x)W_x(y)dx. \end{gathered}}$	

(Это <u>формулы Байеса</u> и <u>формулы полной вероятности</u> для случайных величин)

8.1.2. Зависимость и независимость случайных величин

Для независимых случайных величин $\boxed{\begin{gathered} W_y(x)=W(x); \\ W_x(y)=W(y); \\ W(x,y)=W(x)W(y) \end{gathered}}$	
Безусловные и условные моменты (отдельных случайных величин):	

8.2. Факторизация законов распределения

Факторизация плотности вероятности $W(x,y)=W(x)W(y)$	Факторизация функции распределения $F(x,y)=F(x)F(y)$

<u>Контрольные вопросы к 8 лекции</u>

1. Отличаются ли размерности условной и безусловной плотности вероятности?	
2. Является ли сечение плотности вероятности двумерной величины $W(x,y)$ плоскостью $x = \text{const}$ условной плотностью вероятности величины Y при условии $X = x$?	
3. Что является аналогом гипотез в формулах полной вероятности для случайных величин?	
4. В каком случае условные и безусловные моменты случайных величин эквивалентны (равны)?	
5. Означает ли факторизация законов распределения независимость случайных величин и наоборот? Почему?	
6. Означает ли независимость двух случайных величин равенство нулю их коэффициента корреляции?	
7. Означает ли равенство нулю коэффициента корреляции двух величин их независимость?	
8. Приведите примеры зависимых и независимых случайных величин.	

Лекция 9

9. Многомерное нормальное распределение. Понятие о функциях случайных величин

9.1. Многомерное нормальное распределение

- Матрично-векторная запись n-мерной нормальной плотности вероятности

$$W(\mathbf{x}) = W(x_1, x_2, ...x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{M}}} \exp - \frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m_x})] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1,...\sigma_n\sqrt{\det \mathbf{R}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\det \mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_{ik} \frac{x_i - m_{x_i}}{\sigma_i} \frac{x_k - m_{x_k}}{\sigma_k} \right\}$$

• Случайный вектор $\mathbf{x}$ и вектор средних $\mathbf{m_x}$	

- Ковариационная матрица (матрица вторых центральных моментов)

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r_{12} & ... & \sigma_1\sigma_n r_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1 r_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_2\sigma_n r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_n\sigma_1 r_{n1} & \sigma_n\sigma_2 r_{n2} & ... & \sigma_n^2 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & ... & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & 1 \end{Vmatrix}$$

где $r_{ik} = r_{ki}$ - нормированные коэффициенты корреляции,
R_{ik} - алгебраическое дополнение элемента r_{ik} в определителе $\det \mathbf{R}$,
обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$ состоит из элементов $R_{ik} / \sigma_i\sigma_k \det \mathbf{R}$

Пример статистической модели смеси сигнала с шумом в двухканальном приемнике

Возможная схема входных цепей двухканального приемника	

Векторная диаграмма сигналов и шумов в двухканальной системе	
Случайный вектор на входе приемника в один момент времени	
Предположения	• Аддитивная смесь сигнала и шума • Распределение квадратурных составляющих шума – нормальное с нулевым средним • Идентичность каналов (по шумам) • Коэффициент корреляции одноименных квадратурных составляющих в каналах = 0,5 (Причина: ________________________________ ____)
Плотность распределения случайного вектора	
Вектор средних значений и корреляционная матрица	

9.2. Двумерная нормальная плотность вероятности

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

- При $r = 0$ плотность вероятности факторизуется, это доказывает эквивалентность корреляции и зависимости в нормальной системе

Эллипс равных плотностей вероятности $\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} = const$	

9.2. Понятие функции случайных аргументов

$\boxed{Y = \varphi(X);\ \vec{Y} = \varphi(\vec{X})}$ Если аргумент случайный, то и функция случайна. Следует всегда обращать внимание на однозначность и монотонность функций. Некоторые выводы справедливы только для таких функций.	• Однозначные и монотонные • Неоднозначные • Немонотонные

Контрольные вопросы к 9 лекции

1. Чем многомерное нормальное распределение принципиально отличается от многомерного не нормального распределения?	
2. Сколько параметров имеет двумерное и *n*-мерное нормальные распределения?	
3. В каком случае эллипс равных плотностей вероятности двумерного нормального вектора превращается в окружность?	
4. Как можно записать плотность распределения n-мерного нормального случайного вектора с некоррелированными составляющими?	
5. Придумайте примеры однозначной монотонной, неоднозначной и немонотонной функций случайной величины и запишите соответствующие выражения.	
6. Как могут быть записаны обратные функции для случаев предыдущего пункта?	

<u>Лекция 10</u>

10. Статистические характеристики функций случайных аргументов

10.1. Общий метод вычисления моментов функций случайных аргументов

$\boxed{M[\varphi(\vec{x})] = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{x})W(\vec{x})d\vec{x}}$ *Ср. с формулами для вычисления моментов случайной величины.*	

10.2. Теоремы о числовых характеристиках.

10.2.1. Математическое ожидание линейной функции случайных аргументов

$M(c) = c$ $M\{\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i)\} =$ $= \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i)W(x_1 \dots x_n)dx_1 \dots dx_n =$ $= \sum_{i=1}^{n}\{a_i M(X_i) + b_i\}.$ Следствия: $M(aX) = aM(X)$ $M(X_1 + \dots + X_n) = M(X_1) + \dots M(X_n)$	

10.2.2. Дисперсия линейной функции случайных аргументов

$D\{\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i)\} =$ $= M\{\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i) - M\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i)\}^2 =$ $= M\{\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i) - \sum_{i=1}^{n}[a_i M(X_i) + b_i]\}^2 =$ $= M\{\sum_{i=1}^{n}(a_i \breve{X}_i)\}^2 =$ $= M\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \breve{X}_i \breve{X}_j\} =$ $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j M(\breve{X}_i \breve{X}_j) =$ $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j k_{ij} =$ $= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j k_{ij}.$	

Следствие 1 В случае попарно некоррелированных величин $D\{\sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i)\} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_{x_i};$ $D\{\sum_{i=1}^{n} X_i\} = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$	
Следствие 2 $D(aX) = a^2 D(X);$ $\sigma_{ax} = \lvert a \rvert \sigma_x.$	
Следствие 3 $D(X + b) = D(X)$	

Следствие 4 $$D(c)=0$$	

О законе больших чисел

Для *некоррелированных величин с равными дисперсиями* дисперсия среднего арифметического равна $D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=$ $=\frac{nD(X)}{n^2}=\frac{D(X)}{n};$ $$\boxed{\sigma\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$	*Выводы*:

10.2.3. Математическое ожидание и дисперсия произведения двух случайных величин

Математическое ожидание *произвольных* случайных величин: $M(XY)=M[(\breve{X}+m_x)(\breve{Y}+m_y)]=$ $=M(\breve{X}\breve{Y}+\breve{X}m_y+\breve{Y}m_x+m_x m_y)=$ $=m_x m_y+k_{xy}.$ Для *некоррелированных* величин: $$\boxed{M(XY)=m_{xy}=m_x m_y}$$	

Дисперсия произведения *некоррелированных* случайных величин $D(XY) = M[(XY - m_{xy})^2] =$ $= M(XY)^2 - 2m_{xy}^2 + m_{xy}^2 =$ $= M(X^2)M(Y^2) - m_x^2 m_y^2.$ Учитывая, что $M(X)^2 = D(X) + m_x^2$, $M(Y)^2 = D(Y) + m_y^2$, получим: $D(XY) = [D(X) + m_x^2][D(Y) + m_y^2] - m_x^2 m_y^2 =$ $= D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X).$ Если случайные величины не только *некоррелированы*, но и имеют *нулевые средние значения* (<u>*ортогональны*</u>), то $\boxed{D(XY) = D(X)D(Y)}$	

10.3. Корреляция, регрессия и линейная зависимость

Точки на плоскости $x0y$ – диаграмма разброса. Можно каким-либо способом нарисовать кривую, вокруг которой группируются точки. Кривая может иметь несколько параметров: n-параметрические кривые.	

Выбор параметров аппроксимирующей функции методом наименьших квадратов.

Наиболее интересна линейная статистическая зависимость – положительная или отрицательная, сильная или слабая.

$$\boxed{Y = aX + b + Z.}$$

Здесь *X*, *Y* и *Z* – случайные величины. Если *a* и *b* подобрать так, чтобы дисперсия *Z* была минимальной, то прямая $y = ax + b$ называется прямой среднеквадратической регрессии *y* на *x*, а коэффициент *a* называется коэффициентом регрессии.

$$D(Z) = D(Y - aX - b) =$$
$$= D(Y) - 2ak_{xy} + a^2 D(X)$$

Исследуя на минимум, получим оптимальное значение $a = a^*$:

$$\frac{dD(Z)}{da} = -2k_{xy} + 2aD(X) = 0;$$

$$\boxed{a^* = \frac{k_{xy}}{D(X)}}$$

- может быть положительным или отрицательным. Оптимальному значению a^* соответствует минимальная дисперсия *Z*:

$$D_{\min}(Z) = D(Y)\left(1 - \frac{k_{xy}^2}{D(X)D(Y)}\right);$$

$$\frac{k_{xy}^2}{D(X)D(Y)} \le 1;$$

$-1 \le \dfrac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = r_{xy} \le 1$	$r_{xy} = a^* \cdot \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

Независимость означает некоррелированность, но не наоборот!

Контрольные вопросы к 10 лекции

1. Почему в формуле для вычисления моментов функции случайного аргумента интегрирование производится не по этой функции, а по самому аргументу?	
2. Среднее значение какой функции вычисляется при вычислении дисперсии случайной величины?	
3. Почему среднее значение суммы всегда равно сумме средних значений, а дисперсия суммы равна сумме дисперсий только при некоррелированных случайных величинах?	
4. Каков смысл закона больших чисел, вытекающий из уменьшения дисперсии среднего при увеличении количества усредняемых величин?	
5. Существует ли минимальное и максимальное количество случайных точек на плоскости, по которым можно построить аппроксимирующую кривую, и чему оно равно?	
6. Приведите пример некоррелированных, но зависимых случайных величин. Чему для них равен коэффициент регрессии?	

Лекция 11

11. Законы распределения вероятностей функций случайных аргументов

11.1. Постановка задачи

$$\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$$

Известно $W_x(\mathbf{X})$, требуется найти $W_y(\mathbf{Y})$. Рассмотрим важные случаи решения задачи.

11.2. Одномерная функция одного случайного аргумента

А. Монотонная однозначная функция $$y = \varphi(x).$$ Тогда функция $x = \psi(y)$ тоже однозначна. $$W_y(y)dy = W_x(x)dx.$$ Точнее: $W_y(y)\lvert dy\rvert = W_x(x)\lvert dx\rvert$, так как элемент вероятности может быть только положительным. $$\boxed{W_y(y) = W_x(x)\left\lvert\frac{dx}{dy}\right\rvert = W_x[\psi(y)]\left\lvert\frac{d\psi(y)}{dy}\right\rvert}$$ ***Самостоятельно:*** *Написать выражение для функции распределения* $F_y(y)$*, если известна* $F_x(x)$*. Выражение написать отдельно для возрастающей и убывающей функции* $y = \varphi(x)$*.*	

Б. Немонотонная функция: обратная функция $x=\psi(y)$ неоднозначна $$W_y(y)\lvert dy\rvert=\sum_{i=1}^{n}W_x(x_i)\lvert dx_i\rvert,$$ $$\boxed{W_y(y)=\sum_{i=1}^{n}W_x(x_i)\left\lvert\frac{dx_i}{dy}\right\rvert=\sum_{i=1}^{n}W_x[\psi_i(y)]\left\lvert\frac{d\psi_i(y)}{dy}\right\rvert}$$	

11.3. Законы распределения функций двух случайных величин

11.3.1. Общий принцип определения закона распределения

$$z=\varphi(x,y)$$ $$F_z(z)=P(Z\le z)=P[\varphi(x,y)\le z]=$$ $$=\iint\limits_D W(x,y)dxdy,$$ где D – область на плоскости $x0y$, где $\varphi(x,y)\le z$ $$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}$$	

11.3.2. Распределение суммы двух случайных величин

$$\boxed{z=x+y}$$ Область D заштрихована. $$F_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x}W(x,y)dxdy;$$ $$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{\infty}W(x,z-x)dx.$$ $$F_z(z)=\int_{-\infty}^{z-y}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dxdy;$$ $$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{\infty}W(z-y,y)dy$$	

Для независимых случайных величин

$$W(x,y)=W_x(x)W_y(y);\ W_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(x)W_y(z-x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(z-y)W_y(y)dy$$

11.5. Распределение разности двух случайных величин

$$\boxed{z=x-y}$$

Область D заштрихована

$$F_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{x-z}^{\infty}W(x,y)dxdy;$$

$$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,x-z)dx.$$

$$F_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{y+z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x,y)dxdy;$$

$$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(y+z,y)dy.$$

Для независимых случайных величин

$$W(x,y)=W_x(x)W_y(y);\ W_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(x)W_y(x-z)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_x(y+z)W_y(y)dy.$$

11.6. Распределение произведения двух случайных величин

$$\boxed{z=xy}$$

Область D заштрихована (гипербола)

$$F_z(z)=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{z/x}^{\infty}W(x,y)dxdy+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z/x}W(x,y)dxdy;$$

$$W_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}W(x,\frac{z}{x})dx+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{x}W(x,\frac{z}{x})dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}W(x,\frac{z}{x})dx$$

11.7. Распределение частного двух случайных величин

$\boxed{z = \dfrac{x}{y}}$ Область D заштрихована $F_z(z) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{yz} W(x,y)dxdy + \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{yz}^{0} W(x,y)dxdy;$ $W_z(z) = \dfrac{dF_z(z)}{dz} =$ $= \int\limits_0^{\infty} yW(yz,y)dy - \int\limits_0^{\infty} yW(yz,y)dy =$ $= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert y \rvert W(yz,y)dy.$	

11.8. Центральная предельная теорема

Без вывода:

> Сумма независимых случайных величин, имеющих произвольные распределения вероятностей, при увеличении количества суммируемых величин распределена асимптотически нормально.

Примеры нормализации распределений:

• Шум.
• Отражение от сложной цели.
• Ошибка измерений.

11.9. Распределение модуля и фазы двумерного случайного вектора

<table>
<tr>
<td>

$$\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = arctg\frac{y}{x}}$$

D – круг радиуса z с центром в начале координат.
Интегрирование – в полярной системе координат: $x = z\cos\varphi;\ y = z\sin\varphi$.

$$F_z(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^z W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi)\ z\ d\varphi\ dz\ ;$$

$$W_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} =$$

$$= \int_0^{2\pi} W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi) z\ d\varphi,\ \ z > 0.$$

$$F_\varphi(\varphi) = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi)\ z\ d\varphi\ dz\ ;$$

$$W_\varphi(\varphi) = \frac{dF_\varphi(\varphi)}{d\varphi} =$$

$$= \int_0^{\infty} W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi)\ z\ dz.$$

Далее – в зависимости от вида распределения $W_{x,y}$.

</td>
<td>

Двумерный случайный вектор:

Область интегрирования:

Область интегрирования:

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Примеры модуля и фазы двумерного случайного вектора из радиоэлектроники:

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Шум и шум + сигнал:

</td>
<td>

Помеха от пассивных отражателей:

</td>
</tr>
</table>

11.9.1. Распределение Рэлея

Джон Уильям Стретт (Strutt), лорд Рейли (Rayleigh), англ. физик (1842-1919), член Лондонского королевского общества, ин. почетн. чл. Петербургской АН.

<u>*Задача:*</u>

x, y независимы и распределены нормально с нулевыми средними и равными дисперсиями: (0, σ), (0, σ). Найти плотность распределения $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **.**

В разделе 11.9: $$W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi) =$$ $$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$ Искомая плотность вероятности $$W_z(z) = \int_0^{2\pi} W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi)\ z\ d\varphi =$$ $$= \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi.$$ $$\boxed{W_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},\ z > 0}$$	*Кривые распределения Рэлея.* *Параметр – σ, максимум – при z=σ.*

11.9.2. Распределение фазы случайного вектора

<u>*Задача:*</u>

При предыдущих условиях найти плотность распределения $\varphi = arctg\ y/x$.

В разделе 11.9: $$W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi) =$$ $$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$ Искомая плотность вероятности $$W_\varphi(\varphi) = \int_0^{\infty} W_{x,y}(z\cos\varphi,\ z\sin\varphi)\ z\ dz =$$ $$= \int_0^{\infty} \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{2\pi}.$$ $$\boxed{W_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}}$$	*Равномерное распределение фазы:*

11.9.3. Обобщенное распределение Рэлея

Задача:

x, y независимы и распределены по нормальному закону с ненулевыми средними и равными дисперсиями: (a, σ), (b, σ). $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Без вывода: $$\boxed{W_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{z\alpha}{\sigma^2}\right), \quad z > 0}$$ - обобщенное распределение Рэлея, где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Параметр этого распределения: $$\boxed{g = \frac{\alpha}{\sigma} \text{ или } \mathrm{g}^2 = \frac{\alpha^2}{\sigma^2}}$$ (В радиотехнике часто называется параметром когерентности.)	*Иллюстрации с приложением к радиотехнике:* *Графическая иллюстрация распределения фазы:*

Контрольные вопросы к 11 лекции

1. Что такое функция случайных аргументов?	
2. В каком случае к случайной величине можно применить центральную предельную теорему?	
3. Является ли нормально распределенным модуль суммы большого числа случайных векторов и почему?	
4. Почему центральная предельная теорема называется предельной? Какую еще предельную теорему Вы знаете?	
5. Что такое случайный вектор? Приведите примеры случайных векторов.	
6. Почему наиболее вероятные значения модуля случайного вектора удалены от нуля, хотя наиболее вероятные значения координат вектора сосредоточены вокруг нуля?	
7. Зависит ли плотность вероятности фазы случайного вектора от того, какую фазу считать нулевой: а) в случае отсутствия средних значений составляющих случайного вектора, б) при наличии средних значений составляющих случайного вектора?	
8. Какие распределения будут иметь модуль и фаза случайного вектора, если параметр когерентности бесконечно велик?	

Лекция 12

12. Выборка и выборочные характеристики

12.1. Предмет математической статистики

• Случайные эксперименты и их серии (последовательности)	*Примеры:*
• Множество статистических данных	*Примеры:*
• Задача – получить надежные выводы из статистических данных, характеризующие исследуемое явление	*Примеры:*

12.2. Простой случайный выбор

• Простой случайный выбор: повторение случайного эксперимента n раз в одинаковых условиях с измерением одной и той же величины x.	
• Генеральная совокупность. Удобно (но не обязательно) считать, что генеральная совокупность содержит бесконечное число элементов	
• Простой случайный выбор из конечной совокупности – выбор с возвращением	
• Выборочные значения	
• Выборка, объем выборки	

12.3. Статистическое распределение

Выборка $x_1 ... x_n$ (некоторые могут совпадать). Относительная частота каждого x_i равна $1/n$. $$\boxed{F^*(x) = P^*(X \le x)}$$ - <u>статистическая функция распределения.</u> • Всегда дискретна, скачки $1/n$. • Разная при повторении выборки. • При $n \to \infty$ скачки уменьшаются, но их количество увеличивается, статистическая функция распределения стремится к функции распределения.	
Моменты статистического распределения (статистические моменты) $$\alpha_k^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k;$$ $$\mu_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*)^k.$$ - случайны. Статистическое среднее, статистическая дисперсия, обычное свойство: $$\boxed{\alpha_2^* = D^* + m^{*2}}$$.	

12.4. Группировка и гистограмма

n - объем выборки k разрядов Относительная частота разрядов $$p_i^* = m_i / n; \quad \sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$$ Статистический ряд - таблица	
<u>Гистограмма</u> Высота каждого прямоугольника $$h_i = \frac{m_i}{n\Delta_i}.$$ Общая площадь прямоугольников = 1.	
Представитель разряда	
Обеспеченность разряда (20x10=200 значений или больше)	
<u>Выборочные распределения</u> – распределения статистических числовых характеристик или любых других функций выборочных значений.	
Выборочные распределения имеют моменты – статистические характеристики функций выборки.	

Контрольные вопросы к 12 лекции

1. Что такое генеральная совокупность и выборка?	
2. Что такое репрезентативность выборки?	
3. Чем выбор с возвращением отличается от выбора без возвращения?	
4. Что такое статистическая функция распределения и какой вид она имеет?	
5. Что такое группировка и зачем она нужна?	
6. Что такое гистограмма, какой вид она имеет и что откладывается по осям гистограммы?	
7. Что такое статистические моменты и чем они отличаются от обычных моментов распределения?	
8. Случайны или нет: • Статистическая функция распределения • Статистические моменты • Гистограмма	

Лекция 13

13. Испытание статистических гипотез. Основные понятия

13.1. Гипотезы и задачи проверки гипотез.

Две основные задачи математической статистики:

- Проверка статистических гипотез
- Оценка неизвестных параметров распределений

Виды гипотез:

Гипотеза о вероятности события	Гипотеза: вероятность события A в одном опыте равна ρ. Проведено n опытов, событие A произошло m раз. Согласуется ли это с гипотезой?
Гипотеза о теоретическом распределении	Имеется статистический материал, по которому может быть построена гистограмма. Соответствует ли этот статистический материал выбранной кривой закона распределения?
Гипотеза о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности	Получены две выборки объемами n_1 и n_2. Имела ли генеральная совокупность в обоих случаях одно и то же распределение?
Гипотеза о равенстве вероятностей события в двух разных сериях испытаний	Проведены две серии независимых испытаний над событием А. Одинакова ли вероятность события А в обеих сериях?
Другие гипотезы	Все они сводятся к предположениям о вероятностях событий или о законах распределения величин.

13.2. Выравнивание статистических рядов и задачи оценки параметров распределений

Выравнивание статистических рядов - один из видов *формализации гипотезы* о кривой распределения. При выдвижении гипотезы о принадлежности статистического материала тому или иному закону распределения должен быть предположен не только вид закона распределения, но и определены его параметры, чтобы могло быть записано выражение для кривой плотности вероятности. Например:

Для нормального закона распределения - среднее и дисперсия	$W(x) =$

Для равномерного закона распределения – границы	$W(x) =$
и так далее	

- Определение параметров распределения по выборке может быть произведено различными способами. В математической статистике изучаются способы оценки параметров, оптимальные в определенном смысле.
- Параметры могут быть различны – как входящие в формулу закона распределения, так и зависящие от них – см. пример с равномерным распределением.
- Все параметры, определенные по выборке – случайны.

13.3. Понятие о критериях согласия

- Рассмотрим гипотезу о теоретическом распределении.
- Расхождения между гистограммой и теоретической кривой плотности вероятности могут объясняться двумя причинами:
  - ограниченностью выборки и связанной с этим случайностью гистограммы,
  - тем, что теоретическая кривая не соответствует выборке.
- Необходимо ввести *критерий согласия* выборки и теоретической кривой, иначе – критерий того, что расхождения вызваны случайными причинами, вызванными ограниченностью выборки.
- Критерии могут быть различны, но в любом случае они должны быть:
  - количественными,
  - зависящими от расхождения между гистограммой и теоретической кривой,
  - увеличивающимися при увеличении расхождения.

Пусть численное значение критерия согласия обозначено *u*, и плотность вероятности его известна: $\boxed{W_u(u)}$ Она может зависеть от плотности распределения генеральной совокупности $W_x(x)$, объема выборки *n* и некоторых других параметров опыта. Посредине этого распределения находятся наиболее вероятные *u*.	

Пусть в результате обработки выборки (сравнения гистограммы с теоретическим предполагаемым законом распределения) вычислено значение критерия согласия u^*. Тогда может быть определена вероятность $$\boxed{P(u \geq u^*) = \int_{u^*}^{\infty} W_u(u)du}$$ Можно задать *уровень значимости*, и если $P(u \geq u^*)$ меньше этого уровня, то гипотеза о согласии выборки с выбранным законом распределения отвергается. В противном случае выборка *не противоречит* закону распределения, но и не является доказательством его справедливости. Иначе: превышение критерием уровня значимости свидетельствует о том, что расхождение между гистограммой и выбранной кривой могут быть вызваны чисто случайными ошибками, зависящими от недостаточного объема выборки.	
Обычно выбирают уровень значимости равным 0,1 или 0,01 – тем больше, чем больше должна быть уверенность в правильности гипотезы о законе распределения.	

Таким образом, методика проверки гипотезы о согласии выборки с выбранным законом распределения должна быть следующей:

- Делается предположение о законе распределения, оцениваются его параметры и строится кривая теоретического распределения.
- Выбирается критерий согласия.
- Строится гистограмма и вычисляется конкретное значение критерия согласия для имеющейся выборки.
- Определяется (аналитически или по таблицам) вероятность превышения вычисленного значения критерия согласия.
- Эта вероятность сравнивается с уровнем значимости, и если она оказывается меньше уровня, гипотеза о согласии отвергается.

Контрольные вопросы к 13 лекции

1. Что такое статистическая гипотеза?	
2. Что является основой для принятия гипотезы?	
3. Можно ли доказать справедливость гипотезы по опытным данным?	
4. В чем состоит проверка гипотезы?	
5. Что такое выравнивание статистических рядов?	
6. Что такое критерий согласия?	
7. От чего зависит значение критерия согласия и является ли оно случайным?	
8. Что такое уровень значимости?	
9. Почему для большей уверенности в правильности выбранного закона распределения уровень значимости выбирается больше?	
10. Если мы на основании критерия согласия не отвергаем гипотезу о теоретическом распределении, то есть ли у нас основание принять ее?	

<u>**Лекция 14**</u>

14. Основные критерии согласия

14.1. Критерий согласия хи-квадрат

Карл (Чарльз) Пирсон (Pearson), англ. математик, биолог, философ (1857-1936), чл. Лондонского королевского общества.

Критерий хи-квадрат (Пирсона) $\boxed{u = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(\Delta p_i)^2}{p_i}}$ Здесь Δp_i - отклонение частоты в i-м разряде гистограммы (всего k разрядов) от теоретической вероятности p_i попадания в i-й разряд; n – объем выборки.	

К.Пирсон показал, что распределение u есть распределение суммы квадратов r нормально распределенных случайных величин (т.н. хи-квадрат распределение с r степенями свободы).

$r = k + s$, где s – число независимых связей, налагаемых на p_i^* при определении $W(x)$: условие нормировки + число независимых моментов (параметров распределения). Например, для нормального распределения $s = 3$.

При большом n распределение хи-квадрат практически не зависит от $W(x)$.

Величина $P(u \geq u^*)$ для хи-квадрат распределения табулирована.

Порядок применения критерия хи-квадрат:

- Определяется значение критерия $u^* = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(\Delta p_i^*)^2}{p_i}$.
- Определяется число степеней свободы r.
- По таблицам определяется $P(u \geq u^*)$ и сравнивается с уровнем значимости. Если $P(u \geq u^*)$ меньше уровня значимости, гипотеза отвергается.

14.2. Критерий согласия Колмогорова

Андрей Николаевич Колмогоров, советский математик (1903-1987), акад. АН СССР.

Критерий Колмогорова

$$\boxed{u = D\sqrt{n} = \max\left|F^*(x) - F(x)\right| \cdot \sqrt{n}}$$

Здесь $F^*(x)$ - статистическая, и $F(x)$ - теоретическая функции распределения, n – объем выборки.

Показано, что при большом n

$$P(u^* \geq u) = 1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2u^2},$$

то есть не зависит от распределения x.

Величина $P(u \geq u^*)$ табулирована.

Недостаток критерия Колмогорова:

Если распределение $F(x)$ заранее неизвестно, а его параметры определяются по выборке, то значения $P(u \geq u^*)$ получаются завышенными. У критерия хи-квадрат этого недостатка нет.

Порядок применения критерия Колмогорова:

- Строятся $F^*(x)$ - статистическая, и $F(x)$ - теоретическая функции распределения, и определяется величина D.
- Определяется u^*.
- По таблице определяется $P(u \geq u^*)$ и сравнивается с уровнем значимости. Если $P(u \geq u^*)$ меньше уровня значимости, гипотеза отвергается.

<u>Лекция 15</u>

15. Оценки параметров распределений

15.1. Классификация оценок

• Оценка неизвестного параметра распределения по ограниченной выборке – случайная величина, имеющая при заданном объеме выборки свои законы распределения и статистические характеристики.	
Состоятельная, несмещенная и эффективная оценки: • Состоятельная оценка – та, которая при бесконечном увеличении объема выборки сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой величины. • Несмещенная оценка – та, среднее значение которой равно истинному значению оцениваемой величины. • Эффективная оценка – несмещенная оценка, которая при данном объеме выборки имеет минимальную дисперсию.	
Точечные и интервальные оценки. • Точечная оценка выражается в виде числового значения оцениваемого параметра. Точечная оценка не позволяет сделать выводы о точности оценки. Интервальная оценка выражается в виде интервала числовых значений, в котором оцениваемый параметр находится с определенной вероятностью: *доверительный интервал, доверительные границы* и *доверительная вероятность*.	

15.2. Неравенство Крамера-Рао

Определяет минимально возможную дисперсию *регулярных несмещенных* оценок:

$$D(a^*) \geq \frac{1}{n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\ln W(x/a)}{da}\right)^2 W(x/a)dx}$$

[Регулярной называется оценка a^* параметра a распределения $W(x/a)$, если для всех значений x и a^* существуют частные производные по a плотностей вероятностей $W(x/a)$ и $W(a^*/a)$]

15.3. Оценки математического ожидания и дисперсии нормальной величины

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

<u>*Оценка математического ожидания*</u> ***m*.** Минимальная дисперсия оценки $$D_{\min}(m^*) = \frac{1}{n}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\ln W(x)}{dm}\right)^2 W(x)dx\right]^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}.$$ Рассмотрим метод оценки: $$m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$ Среднее значение оценки: $$M(m^*) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = m.$$ Следовательно, оценка несмещенная. Дисперсия оценки: $$D(m^*) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$ Следовательно, оценка эффективная.	

Оценка дисперсии σ^2.

Минимальная дисперсия оценки

$$D_{\min}(\sigma^{2*}) = \frac{1}{n}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\ln W(x)}{d\sigma^2}\right)^2 W(x)dx\right]^{-1} = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Рассмотрим *первый* метод оценки – статистическую дисперсию:

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2.$$

Среднее значение оценки:

$$M(\sigma^2) = M(\alpha_2^* - m^{*2}) = M(\alpha_2^*) - M(m^{*2}).$$

$$M(\alpha_2^*) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_2 = \alpha_2.$$

$$M(m^{*2}) = M\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M(x_i x_j).$$

x_i и x_j при $i \neq j$ независимы, а при $i = j$ - равны, поэтому

$$M(x_i x_j) = \begin{cases} m_{x_i} m_{x_j} = m^2 & \text{при } i \neq j \text{ (всего } n \text{ членов)} \\ M(x_i^2) = \alpha_2 & \text{при } i = j \text{ (всего } n^2 - n \text{ членов)} \end{cases}$$

После простых преобразований

$$M(\sigma^{2*}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Следовательно, оценка хотя и состоятельная, но смещенная, и смещение тем больше, чем меньше *n*.

Дисперсия оценки (*без вывода*):

$$D(\sigma^{2*}) \approx \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n},$$

то есть может быть меньше, чем $D_{\min}(\sigma^{2*})$ - например, при нормальном распределении $\mu_4 = 3\sigma^4$. Причина – смещенность оценки, вызывающая дополнительную ошибку оценки дисперсии.

Рассмотрим <u>*второй*</u> метод оценки: $$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m^*)^2$$ Для этой оценки $M(\sigma^{2*}) = \sigma^2$, то есть оценка несмещенная. Однако, $$D(\sigma^{2*}) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{2\sigma^4}{n},$$ следовательно, оценка неэффективная. Рассмотрим <u>*третий*</u> метод оценки: $$\sigma^{2*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$ (здесь m не статистическое, а истинное). Для этой оценки $M(\sigma^{2*}) = \sigma^2$, то есть оценка несмещенная, и $$D(\sigma^{2*}) = \frac{2\sigma^4}{n},$$ следовательно, оценка эффективная.	

<u>Контрольные вопросы к 15 лекции</u>

1. Почему оценка неизвестного параметра является случайной?	
2. В чем разница между состоятельностью и несмещенностью оценки?	
3. Что при интервальной оценке является случайным?	
4. Что такое неравенство Крамера-Рао?	
5. Почему при первом способе оценки дисперсии не соблюдается неравенство Крамера-Рао?	
6. В чем недостаток третьего способа оценки дисперсии?	

Лекция 16

16. Общие методы оценки параметров распределения

16.1. Метод моментов

Параметр выражается через моменты, а затем вместо моментов подставляются статистические моменты.	*Пример*: равномерное распределение генеральной совокупности в интервале от α до β. Оценить α и β.
Оценка, сделанная методом моментов, состоятельна, но не всегда несмещенная и эффективная.	

16.3. Метод максимума правдоподобия

Пусть имеется распределение $\vec{x}$, зависящее от параметра a: $$W(\vec{x}/a).$$ Подставим в качестве $\vec{x}$ выборку, тогда распределение превращается в функцию от a, называемую *функцией правдоподобия*: $$L(a/\vec{x}).$$ Оценка максимального правдоподобия a^* находится из уравнения: $$\boxed{\frac{dL(a/\vec{x})}{da}=0 \text{ или } \frac{d\ln L(a/\vec{x})}{da}=0}$$ Оценки максимального правдоподобия состоятельны, эффективны и асимптотически нормальны.	*Пример*: Оценка максимального правдоподобия параметра нормального случайного вектора:

16.2. Метод наименьших квадратов

Применяется для оценки параметров аппроксимирующих функций. Рассмотрим задачу на плоскости. Исходный статистический материал: $$(x_i, y_i)$$ Аппроксимирующая кривая: $$y = f(x;\vec{a}),$$ где $\vec{a}$ - совокупность неизвестных параметров кривой. Для каждого $\vec{a}$ при значениях x_i находятся отклонения y_i от $f(x;\vec{a})$. Оценка $\vec{a}$ делается при выполнении условия $$\boxed{\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i,\vec{a})\right]^2}{d\vec{a}} = 0}$$	

<u>Контрольные вопросы к 16 лекции</u>

1. Что такое метод моментов?	
2. Почему оценка, сделанная методом моментов, состоятельна?	
3. Справедливо ли для функции правдоподобия условие нормировки?	
4. Зачем в уравнение правдоподобия вводят логарифм?	
5. Методом наименьших квадратов определяется сама аппроксимирующая функция или только ее параметры?	