

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего профессионального образования  
«Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА**

Методические указания к лабораторной работе  
для студентов направлений «Электроника и наноэлектроника»,  
«Электроника и микроэлектроника», «Фотоника и оптоинформатика»

2012

## **Башкиров Александр Иванович**

Исследование дифракции Фраунгофера: методические указания к лабораторной работе для студентов направлений «Электроника и наноэлектроника», «Электроника и микроэлектроника», «Фотоника и оптоинформатика» / А.И. Башкиров; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск : ТУСУР, 2012. - 12 с.

Целью настоящей работы является изучение явления дифракции электромагнитных волн, методику расчета дифракционной картины; исследование дифракцию Фраунгофера при прохождении оптических волн через амплитудную синусоидальную решетку.

Предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлениям «Электроника и наноэлектроника», «Электроника и микроэлектроника», «Фотоника и оптоинформатика», по дисциплинам «Оптические и акустооптические системы обработки информации», «Оптические и акустооптические методы обработки информации»

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ  
Зав.кафедрой ЭП  
\_\_\_\_\_ С.М. Шандаров  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2012 г.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА**

Методические указания к лабораторной работе  
для студентов направлений «Электроника и нанoeлектроника»,  
«Электроника и микроэлектроника», «Фотоника и оптоинформатика»

Разработчик

канд. физ.- мат. наук, доц. каф.ЭП  
\_\_\_\_\_ А.И. Башкиров  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2012 г

2012

## Содержание

1 Введение.....	3
2 Теоретическая часть.....	3
2.1 Контрольные вопросы .....	3
3 Экспериментальная часть.....	3
3.1 Задание на работу .....	3
3.2 Методические указания по выполнению работы .....	4
3.2.1 Приближение, даваемое принципом Гюйгенса-Френеля.....	4
3.2.2 Приближение Фраунгофера.....	6
3.2.3 Синусоидальная амплитудная решетка.....	7
3.3 Содержание отчета .....	8
4 Рекомендуемая литература .....	9

## **1 Введение**

Целью настоящей работы является

- 1) изучение явления дифракции электромагнитных волн, методику расчета дифракционной картины;
- 2) исследование дифракции Фраунгофера при прохождении оптических волн через амплитудную синусоидальную решетку

## **2 Теоретическая часть**

Теория дифракции применима в различных областях и рассмотрена в том числе в учебной и методической литературе. В данном пособии использованы материалы, касающиеся дифракции электромагнитных волн оптического диапазона, изложенные в [1 - 3].

Оптические методы обработки информации находят широкое применение при решении задач, связанных с обработкой больших объемов информации, в частности с обработкой аэрокосмических снимков, рентгеновских изображений. Основная сущность этих методов заключается в том, что оптический транспарант с записанной информацией зондируется когерентным или некогерентным оптическим пучком, затем анализируется световое поле, полученное после транспаранта и преобразованное оптической системой. При этом важно оценивать влияние дифракции и обусловленных ею ограничений на характеристики оптической системы, формирующей изображение для обработки информации.

### **2.1 Контрольные вопросы**

1. В чем заключается явление дифракции электромагнитных волн?
2. Сформулируйте граничные условия Кирхгофа.
3. Запишите интеграл Френеля – Кирхгофа.
4. В чем заключаются дифракционные приближения Френеля и Фраунгофера?

## **3 Экспериментальная часть**

### **3.1 Задание на работу**

1. Изучить настоящее методическое руководство.
2. Согласовать с преподавателем основные параметры дифракционных решеток для расчета дифракционной картины в приближении Фраунгофера.
3. Рассчитать дифракционные картины Фраунгофера при прохождении когерентного оптического излучения через три различные амплитудные синусоидальные решетки.

4. Результаты расчета представить в виде в виде поверхностных графиков.

5. Дать физическую интерпретацию полученным результатам.

### 3.2 Методические указания по выполнению работы

#### 3.2.1 Приближение, даваемое принципом Гюйгенса-Френеля

Рассмотрим дифракцию монохроматического света на бесконечном непрозрачном, экране с отверстием  $\Sigma$  конечных размеров. Рассматривается плоский экран, с которым жестко связана прямоугольная система координат  $(x_1, y_1)$  (рис. 3.1).

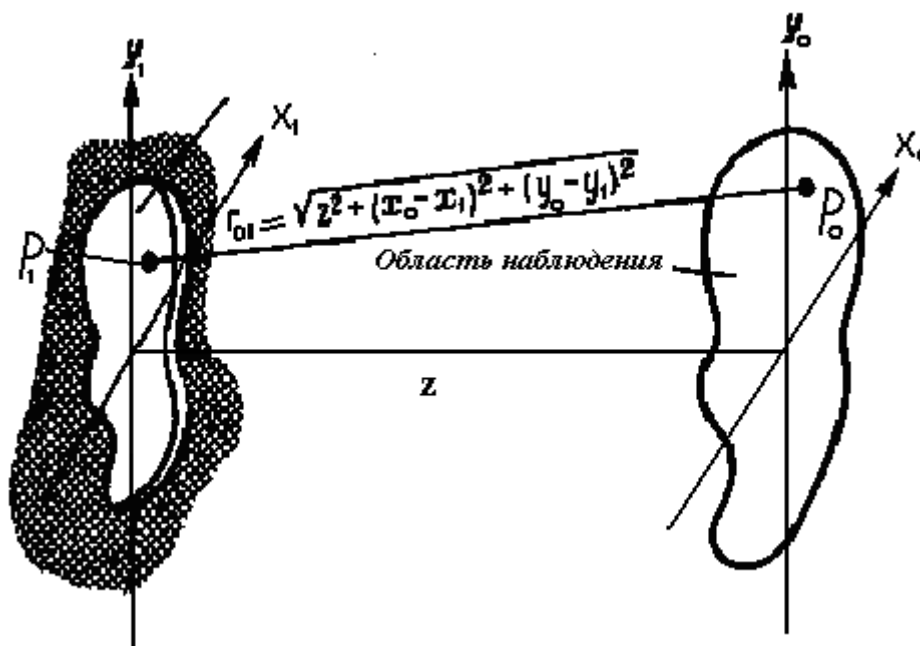


Рисунок 3.1 – Геометрическая схема дифракционной задачи

Кроме того, предполагается, что область наблюдения представляет собой плоскость, параллельную плоскости экрана и расположенную на расстоянии  $z$  по нормали от него. С плоскостью наблюдения связана система координат  $(x_0, y_0)$ , оси которой параллельны осям плоскости  $(x_1, y_1)$ .

Воспользуемся приближениями, которые известны под названием *граничных условий Кирхгофа*:

- 1) на отверстии  $S$  распределение поля  $U$  и его производная  $\partial U/\partial n$  имеют точно такие же значения, какие они имели бы в отсутствие экрана;
- 2) на той части поверхности  $S$ , которая лежит в области геометрической тени экрана, распределение поля  $U$  и его производная  $\partial U/\partial n$  тождественно равны нулю.

Граничные условия Кирхгофа значительно упрощают результат, однако следует отметить, что при этом пренебрегается краевыми эффектами. Так, наличие экрана будет приводить к искажению электромагнитного поля в области отверстия. Кроме того, за экраном отсутствует резкая граница «свет-тень», так как поле проникает за экраном в область тени на расстояние нескольких длин волн. Но если минимальный размер отверстия много больше длины волны света  $S_{\min} \gg \lambda$ , то этими краевыми эффектами можно пренебречь и использовать оба граничных условия.

Дальнейшее упрощение выражения для поля можно произвести, если принять, что расстояние  $r_{01}$  от отверстия до точки наблюдения много больше длины волны  $r_{01} \gg \lambda$ , что обычно имеет место на практике.

Учитывая это, можно получить выражение для поля в следующем виде:

$$U_0(x_0, y_0) = \iint_S \frac{1}{i\lambda} U_1(x_1, y_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) dx_1 dy_1. \quad (3.1)$$

Этот результат известен как *интеграл Френеля – Кирхгофа*.

Можно провести еще некоторые приближения, которые приведут к более простым расчетам распределения электромагнитного поля. Приближения будут основываться на предположении, что расстояние  $z$  между отверстием экрана и плоскостью наблюдения значительно превышает максимальный линейный размер отверстия  $S$ . Также будем рассматривать в плоскости наблюдения конечную область вблизи оси  $z$ , учитывая, что расстояние  $z$  много больше максимального размера этой области. Путем несложных преобразований интеграл суперпозиции можно привести к виду

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{iz\lambda} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_1(x_1, y_1) \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \right\} \times \\ \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{z\lambda}(x_0x_1 + y_0y_1)\right] dx_1 dy_1. \quad (3.2)$$

Когда расстояние  $z$  достаточно велико для того, чтобы это выражение можно было считать точным, считается, что наблюдение поля ведется в области *дифракции Френеля*.

### 3.2.2 Приближение Фраунгофера

Расчет дифракционной картины становится еще проще, если принять более жесткие ограничения, чем в приближении Френеля. В частности, в области дифракции Френеля напряженность поля  $U(x_0, y_0)$  можно найти путем фурье-преобразования произведения распределения  $U(x_1, y_1)$  в отверстии на квадратичную фазовую функцию  $\exp[j(k/2z)(x_1^2 + y_1^2)]$ , если к тому же принять более строгое предположение Фраунгофера

$$z \gg \frac{k(x_1^2 + y_1^2)_{\max}}{2}, \quad (3.3)$$

то квадратичный фазовый множитель становится равным приблизительно единице по всему отверстию; тогда наблюдаемое распределение поля можно найти непосредственно, вычисляя фурье-образ распределения в самом отверстии. Таким образом, в области дифракции Фраунгофера

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz) \exp\left[j \frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]}{j\lambda z} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right] dx_1 dy_1. \quad (3.4)$$

Без учета множителей, стоящих перед интегралом, это выражение представляет собой фурье-образ распределения поля в отверстии, вычисленный для частот  $f_x = x_0/\lambda z$ ,  $f_y = y_0/\lambda z$ .

В области оптических частот условия, необходимые для того, чтобы уравнения дифракции Фраунгофера были справедливы, в действительности могут быть довольно жесткими. Например, при длине волны  $6 \cdot 10^{-7}$  м (красный свет) и ширине отверстия 2,5 см расстояние должно удовлетворять условию

$$Z \gg 1600 \text{ м.}$$

Тем не менее, в ряде важных случаев требуемые условия удовлетворяются. Кроме того, картины дифракции Фраунгофера можно наблюдать и на расстояниях, не удовлетворяющих условию (1), если отверстие освещается сферической волной, сходящейся к наблюдателю, или если между наблюдателем и отверстием соответствующим образом расположена собирающая линза.

Наконец нужно заметить, что не существует передаточной функции, которую можно связать прямо с дифракцией Фраунгофера, так как приближение (3.1) не удовлетворяет условию пространственной инвариантности уравнения дифракции.



### 3.2.3 Синусоидальная амплитудная решетка

Определим комплексный амплитудный коэффициент пропускания экрана  $t(x, y)$  в соответствующих точках как отношение амплитуды поля непосредственно за экраном к амплитуде поля волны, падающей на экран.

Зависимость поглощения от координат можно вводить, например, при помощи фотографического диапозитива, который позволяет получить все действительные значения коэффициента пропускания  $t$  между нулем и единицей. Координатную зависимость фазового сдвига можно вводить при помощи прозрачных пластинок переменной толщины, что позволяет реализовать все значения  $t$ , лежащие в комплексной плоскости внутри окружности единичного радиуса.

В качестве примера этого более общего типа экрана, на котором происходит дифракция, рассмотрим *синусоидальную амплитудную решетку*, определяемую коэффициентом пропускания

$$t(x, y) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right), \quad (3.5)$$

где для простоты мы предположили, что структура решетки ограничена квадратом со стороной  $l$ . Параметр  $m$  определяет разность между максимальным и минимальным коэффициентами пропускания, а  $f_0$  — частота решетки. На рис.3.2 изображен график коэффициента пропускания.

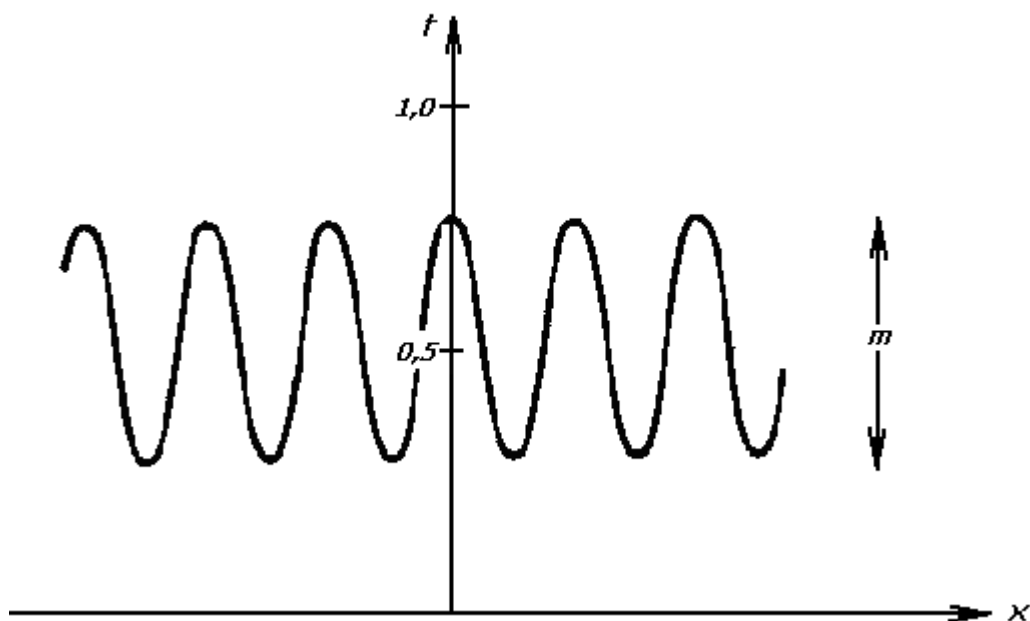


Рисунок 3.2 – Функция пропускания синусоидальной амплитудной решетки

Если экран освещен нормально падающей плоской монохроматической волной единичной амплитуды, то распределение поля в отверстии описывается просто функцией  $t$ . Для нахождения дифракционной картины Фраунгофера сначала найдем преобразование Фурье этого распределения. Учитывая, что

$$F\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1)\right\} = \frac{1}{2} \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0, f_y)$$

и

$$F\left\{\text{rect}\left[\frac{x}{l}\right] \text{rect}\left[\frac{y}{l}\right]\right\} = l^2 \text{sinc}(lf_x) \text{sinc}(lf_y),$$

можно, пользуясь теоремой свертки, записать

$$F\{U(x_1, y_1)\} = \frac{l^2}{2} \text{sinc}(lf_y) \left\{ \text{sinc}(lf_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}[l(f_x + f_0)] + \frac{m}{2} \text{sinc}[l(f_x - f_0)] \right\}.$$

Дифракционную картину Фраунгофера теперь можно представить в виде

$$U(x_0, y_0) = \frac{l^2}{j2\lambda z} \exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \text{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \left\{ \text{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 + f_0\lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 - f_0\lambda z)\right] \right\}. \quad (3.6)$$

Наконец, соответствующую интенсивность можно найти, возводя в квадрат выражение (3.4). Заметим, что если частота решетки  $f_0$  много больше  $2/l$ , то перекрытием трех  $\text{sinc}$  функций, зависящих от  $x_0$ , можно пренебречь. В результате получим

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{l^2}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 + f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 - f_0\lambda z)\right] \right\}. \quad (3.7)$$

### 3.3 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) схему эксперимента;

- 4) результаты эксперимента и их анализ;
- 5) ответы на контрольные вопросы;
- 6) выводы;
- 7) список использованной литературы.

#### **4 Рекомендуемая литература**

1. Гудмен Д. Введение в Фурье-оптику. – М.: Мир, 1970. – 364с.
2. Акаев А.А., Майоров С.А. Оптические методы обработки информации. – М.: Высшая школа, 1988. - 237 с.
3. Пуговкин А.В., Серебренников Л.Я., Шандаров С.М. Введение в оптическую обработку информации. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981.– 61 с.

Учебное пособие

Башкиров А.И.

Исследование дифракции Фраунгофера

Методические указания к лабораторной работе  
для студентов направлений «Электроника и нанoeлектроника», «Электроника  
и микроэлектроника», «Фотоника и оптоинформатика»

Усл. печ. л.                      Препринт  
Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники  
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40