МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

В.Г. Спицын

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине “Математические методы исследования систем”

Томск 2012

1. Математические методы и их применение при принятии управленческих решений

Математическая модель системы - это ее отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Таким образом, модель - это условный образ системы, созданный для упрощения ее исследования, получения о ней новых знаний, анализа и оценки пронимаемых решений в конкретных или возможных ситуациях.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Системы линейных уравнений

При исследовании поведения функции и формы ее графика полезно установить, на каких интервалах график функции обращен выпуклостью вверх, а на каких - выпуклостью вниз.

Определение. График функции $y = f(x), x \in (a;b)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) на интервале *(a,b),* если график расположен ниже (точнее не выше) любой своей касательной. Сама функция *f(x)*также называется выпуклой вверх (вогнутой вниз).

Определение. График функции $y = f(x), x \in (a;b)$ называется выпуклым вниз (вогнутым вверх) на интервале *(a,b),* если он расположен выше (точнее не ниже) любой своей касательной. Сама функция *f(x)*также называется выпуклой вниз (вогнутой вверх).

На интервале выпуклости вверх (вогнутости вниз) производная функции убывает.

На интервале выпуклости вниз (вогнутости вверх) производная функции возрастает.

Достаточное условие выпуклости графика функции. Если на интервале (*a;b*) дважды дифференцируемая функция $y = f(x), x \in (a;b)$, имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график функции является выпуклым вверх (вниз).

Точка графика непрерывной функции f(x), в которой существует касательная и при переходе через которую график функции меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба. Если дифференцируемая функция $y = f(x), x \in (a;b)$, имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на интервале $(a;b)$ и точка $(x_0, f(x_0))$, где $x_0 \in (a;b)$, является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие существования точки перегиба. Если функция $y = f(x), x \in (a;b)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$ и при переходе через $x_0 \in (a;b)$, вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

ЗАДАЧИ

1. Найти промежутки выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графиков следующих функций:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $y = 3x^2 - x^3$;

c) $y = x + x^{\frac{5}{3}}$;

d) $y = \ln(1 + x^2)$.

2. Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

a) $y = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2$;

b) $y = x_1^2 - x_2^2$;

c) $y = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$;

d) найти экстремум функций $y = x_1^2 + x_2^2$, при условии, что $x_1 + x_2 - 1 = 0$ (т.е. точка экстремума должна находится на этой прямой).

3. Определить, является ли система векторов $A_1 = (5,4,3,2), A_2 = (3,3,2,2), A_3 = (8,1,3,-4)$ линейно-зависимой; если она линейно-зависима, то найти ее максимальную линейно-независимую подсистему.

4. Показать, что функция $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2 - 6$ является выпуклой при $x_1 \geq 0$.

5. Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m<n$) называются основными или базовыми, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n-m переменных называются неосновными или свободными.

Найти все возможные группы основных переменных в системе (1).

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \qquad (1)$$

7. Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все n-m неосновных переменных равны 0.
Найти все базисные решения системы (1)

8. Является ли точка X выпуклой линейной комбинацией точек X_1, X_2, X_3, если соответствующее выражение имеет вид:
a) $X = (1/3)X_1 + (1/2)X_2 + (1/3)X_3$;
b) $X = (1/6)X_1 + (1/2)X_2 + (1/3)X_3$;
c) $X = (1/3)X_1 - (1/2)X_2 + (7/3)X_3$;
d) $X = (1/6)X_1 + (1/2)X_2 - (1/3)X_3$.

2 Линейное программирование и теория двойственности

Линейное программирование (планирование) - математический метод поиска максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

С каждой задачей линейного программирования связана другая задача, называемая двойственной по отношению к исходной.
1. Если первая задача имеет размеры $m \times n$ (m ограничений с n неизвестными), то вторая – размеры $n \times m$.
2. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи, называемая *двойственной переменной*. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи; так, если в исходной системе имеется три переменных, то двойственная задача также должна иметь три ограничения.
3. Матрица коэффициентов при двойственных переменных в ограничениях двойственной задачи является *транспонированной матрицей* коэффициентов при переменных, состоящих в ограничениях. Так, если в исходной задаче имеется два ограничения, то матрица их коэффициентов A и ее транс-

понированный аналог A^T (столбцы превращаются в ряды) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{21} \\ a_{12} \, a_{22} \\ a_{13} \, a_{23} \end{pmatrix}.$$

4. Если в исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств типа ($\le$) *меньше*, то в двойственной они изменяются на противоположные - типа *больше* ($\ge$).
5. Правые части ограничений в двойственной задаче равняются коэффициентам при переменных целевой функции в исходной задаче, а коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равняются правым частям ограничений исходной задачи.
6. Максимизация целевой функции исходной задачи заменяется минимизацией целевой функции двойственной задачи.

2. ***Решить геометрически и проверить на компьютере (Excel) следующие задачи:***

a) Найти максимальное значение целевой функции

$F = 2x_1 - 6x_2$

при ограничениях

$x_1 + x_2 \ge 2,$

$-x_1 + 2x_2 \le 4,$

$x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

b). Найти минимальное значение целевой функции

$F = 2x_1 - x_2$

при ограничениях

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$-x_1 + 2x_2 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 \le 10,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

c). Найти максимальное значение целевой функции

$F = x_1 + x_2$

при ограничениях

$x_1 - 4x_2 - 4 \le 0,$

$3x_1 - x_2 \ge 0,$

$x_1 + x_2 - 4 \ge 0,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

d). Найти минимальное значение целевой функции

$F = 2x_1 - x_2$

при ограничениях

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$2x_1 - x_2 \ge 2,$

$-x_1 - 2x_2 \ge -10,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

e). Найти максимальное значение целевой функции

$F = x_1 - x_2$

при ограничениях

$-2x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1 - 2x_2 \le -8,$

$x_1 + x_2 \le 5,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

f). Найти максимальное значение целевой функции

$F = 4x_1 - 2x_2$

при ограничениях

$x_1 - 2x_2 \le 0,$

$x_1 + 2x_2 \ge 2,$

$2x_1 + x_2 \le 10,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

g) Найти максимальное значение целевой функции

$F = 2x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$x_1 + 3x_2 \le 18,$

$2x_1 + x_2 \le 16,$

$x_2 \le 5,$

$3x_1 \le 21,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

h). Найти минимальное значение целевой функции

$F = 4x_1 + 6x_2$

при ограничениях

$3x_1 + x_2 \ge 9,$

$x_1 + 2x_2 \ge 8,$

$x_1 + 6x_2 \ge 12,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

i). Найти максимальное значение целевой функции

$F = 3x_1 + 3x_2$

при ограничениях

$x_1 + x_2 \le 8,$

$2x_1 - x_2 \ge 1,$

$x_1 - 2x_2 \le 2,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

j). Найти максимальное значение целевой функции

$F = x_1 + x_2$

при ограничениях

$2x_1 + 4x_2 \le 16,$
$-4x_1 + 2x_2 \le 8,$
$x_1 + 3x_2 \ge 9,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

е). Задачи 1-3 решить симплексным методом, составить задачи двойственные данным и найти их решения.

1. $F = x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$x_1 - x_2 \le -2,$
$x_1 - 2x_2 \ge -13,$
$3x_1 - x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $Z = 10y_2 - 3y_3 \to \min$
при ограничениях

$-2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1,$
$y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3,$
$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$x_1 - 4x_2 - 4 \le 0,$
$3x_1 - x_2 \ge 0,$
$x_1 + x_2 - 4 \ge 0,$
$x_i \ge 0, x_{2i} \ge 0.$

3. Задачи многокритериальной оптимизации

Задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$$Z(\overline{X}) = \langle Z_1(\overline{X}), Z_2(\overline{X}), \ldots, Z_m(\overline{X}), \rangle \to \max, \tag{3.1}$$

$$\overline{X} \in Q. \tag{3.2}$$

Здесь i-ый частный критерий обозначен через $z_i(\overline{X})$, где $\overline{X}$ - допустимое решение, а область допустимых решений – через Q.

В процессе решения задач многокритериальной оптимизации предварительно проводят экспертные оценки, как самих критериев, так и взаимоотношений между ними, и на основе этих оценок выбирают один из следующих методов решения:

- оптимизация одного признанного наиболее важным критерия, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;
- упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них с помощью *метода последовательных уступок;*
- сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес.

Решение задачи многокритериальной оптимизации (3.1), (3.2) должно принадлежать пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач, которое обычно оказывается пустым, поэтому рассматривается обычно множество *эффективных решений – оптимальных по Парето.* Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшились.

Определение*. Вектор $\overline{X}^* \in Q$ называется эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (3.1), (3.2) если не существует такого вектора $\overline{X} \in Q$, что*

$$Z_i(\overline{X}) \geq Z_i(\overline{X}^*), i = \overline{1, m}, \tag{3.3}$$

причём хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство.

Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т.е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть *областью Парето*, или *областью компромиссов*, а принадлежащие ей решения – *эффективными, или*

Пусть задача трёхкритериальной оптимизации имеет вид:

$$Z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max, \tag{3.4}$$

$$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{3.5}$$

$$Z_3 = x_1 - 3x_2 \to \max, \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{array}\right\}. \tag{3.7}$$

Так как коэффициенты при одних и тех же переменных в частных критериях имеют разные знаки, то в заданной области допустимых решений невозможно улучшить все частные критерии, т.е. область Парето совпадает с областью допустимых решений (3.7).

Для определённости можно предположить, что допустимые уступки по первым двум критериям заданы: $\delta_1=3$; $\delta_2=5/3$. Тогда можно решить однокритериальную задачу (3.4), (3.7) с помощью графического метода (см. рис. 3.1).

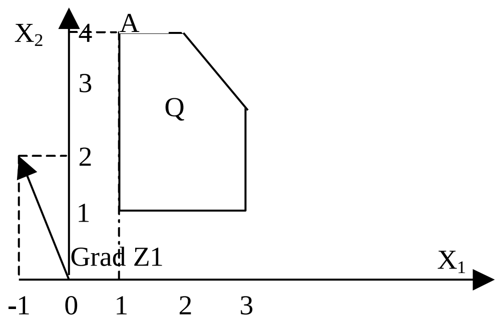

Рис.3.1.

Максимум функции Z_1 при условиях (3.7) достигается в точке A области Q с координатами (1;4):

$$x_1^* = 1; x_2^* = 4; \max Z_1 = Z_1^* = Z_1(A) = 7.$$

Максимизация функции Z_2 осуществляется при условиях (3.7) и дополнительном ограничении на Z_1, позволяющем учесть величину уступки δ_1 ($Z_1^* - \delta_1 = 4$), которое будет иметь вид:

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4. \qquad (3.8)$$

Задача (3.5), (3.7), (3.8) также решается графически (рис. 3.2).

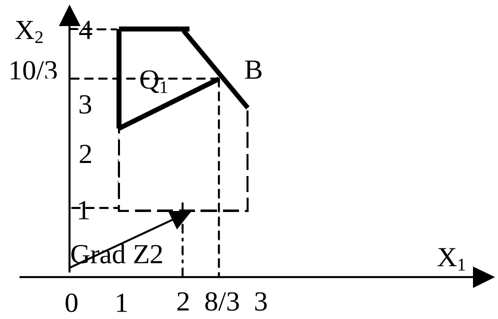

Рис. 3.2

Максимум функции Z_2 при условиях (3.7), (3.8) достигается в точке B части Q_1 области Q, так что

$$x_1^{**} = 8/3; x_2^{**} = 10/3; \max Z_2 = Z_2^* = Z_2(B) = 26/3.$$

Второе дополнительное ограничение получается из условия $Z_2^* - \delta_2 = 7$ и будет иметь вид:

$$2x_1 + x_2 \geq 7. \qquad (3.9)$$

Максимизируя функцию Z_3 при условиях (3.7), (3.8), (3.9) с помощью графического метода, получаем оптимальное решение рассматриваемой трёхкритериальной задачи, которое представлено на рис. 3.3 (точка C).

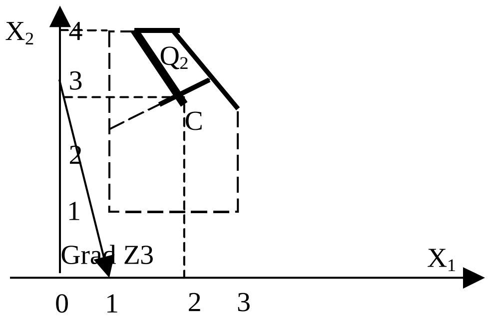

Рис. 3.3

Значения переменных и соответствующие значения частных критериев при этом составляют:

$$x_1 = 2; x_2 = 3; Z_1 = 4; Z_2 = 7; Z_3 = -7.$$

4. Нелинейное программирование

Из методов математического программирования наиболее сложными считаются методы нелинейного программирования. *Задача нелинейного программирования* формулируется так же, как и общая задача оптимального программирования:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \qquad (4.1)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)(\leq, =, \geq) d_i, i = \overline{1, m}; \qquad (4.2)$$

$$a_j \geq x_j \geq b_j, j = \overline{1, n}. \qquad (4.3)$$

где a_j, и b_j, — нижнее и верхнее предельно допустимые значения x_j, причём целевая функция F и(или) хотя бы одна из функций g_i являются нелинейными. Если в ограничениях (4.2) стоит знак равенства, то их называют ещё *уравнениями связи.*

У произвольной задачи нелинейного программирования отсутствует некоторые или все свойства задачи линейного программирования. В задачах линейного программирования экстремум целевой функции находится только на границе, что не является справедливым для нелинейных задач. Поэтому наибольшее или наименьшее значение функции без учета того, где находится такое значение (внутри заданного интервала или на его границе), называют не экстремумом, а *оптимумом*. Оптимум — более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум существует всегда, причем он может быть как локальным, так и глобальным.

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами *безусловной оптимизации* называются такие, в которых задается лишь одна целевая функция F – (4.1), без указания ограничений и граничных условий (эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда). В этих задачах понятия оптимума и экстремума совпадают, и для нахождения оптимума применяют методы нахождения экстремума.

Задачами *условной оптимизации* называются задачи, в которых кроме целевой функции задаются некоторые дополнительные условия и ограничения - (4.2) – (4.3). Ограничения могут быть заданы в виде, как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его, подтверждая тем самым вывод, сделанный для задач линейного программирования, что введение дополнительных условий *не улучшает* оптимального решения, а в ряде случаев приводит к *несовместности.*

Аналитические методы решения задач безусловной оптимизации заключаются в поиске *экстремума функции* F - (4.1), который находится (как уже рассматривалось ранее) в точке с координатами, определяемыми в результате решения следующей системы уравнений:

$$\partial F / \partial x_1 = 0; \partial F / \partial x_2 = 0, \ldots, \partial F / \partial x_n = 0. \qquad (4.4)$$

Эта точка называется *стационарной* точкой. Для получения достаточных условий существования экстремума следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка функции $F(X)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$:

$$d^2 f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X)\Delta x_i \Delta x_j .$$

В стационарной точке X^0 функция $f(X)$ имеет максимум, если $d^2f(X^0)<0$, и минимум, если $d^2f(X^0)>0$, при любых Δx_i и Δx_j, не обращающихся в нуль одновременно.

Вектор столбец, составленный из частных производных функции $F=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$:

$$\Delta f(x_j) = \begin{vmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \dots \\ \partial f/\partial x_n \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

называется *градиентом функции $f(x_j)$*. Градиент показывает направление наискорейшего увеличения функции. Вектор, противоположенный градиенту, называют *антиградиентом,* он показывает направление скорейшего уменьшения функции. Численной мерой *градиента,* как и любого вектора, является модуль, определяемый как:

$$\left|\Delta f\left(x_j\right)\right| = \left[\left(\partial f/\partial x_1\right)^2 + \left(\partial f/\partial x_2\right)^2 + \dots + \left(\partial f/\partial x_n\right)^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2}.$$

Если обозначить модуль градиента через

$$\varepsilon_M = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\partial f/\partial x_j\right)^2\right]^{1/2},$$

то признаком экстремума является условие $\varepsilon_M=0$.

Наиболее простая задача условной оптимизации имеет вид:

$$F = f(x_j) \to \min; a_j \le x_j \le b_j;\ j=\overline{1,n}, \tag{4.6}$$

(если решается задача поиска максимума функции F, то это всегда равнозначно поиску минимума функции $–F$). При решении такой задачи применятся тот же алгоритм, что и в задачах безусловной оптимизации. Для нахождения стационарной точки также решается система уравнений (6.4). Если при решении этой системы какое-либо из значений переменной x_j выходит на (или за) нижнюю границу, то в качестве оптимального принимается значение x_j равное a_j, и поиск продолжается по остальным переменным; аналогично осуществляется поиск для верхней границы.

Пусть в общем случае задача условной оптимизации имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & F = f(x_j) \to \min; \\ & g(x_j) = 0; \\ & a_j \le x_j \le b_j,\ j = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Известен ряд достаточно сложных методов решения подобных задач. Один из таких методов называется *методом штрафных функций*; суть его заключается в следующем. От задачи условной оптимизации (4.7) переходят к такой задаче, в которой минимизируется новая целевая функция, включающая, кроме заданной целевой функции $f(x_j)$, заданные ограничения $g(x_j)$. Новая целевая функция записывается следующим образом:

$$\Phi(X) = f(X) + \Psi(g(X)) \to \min(\max), \tag{4.8}$$

где $\Psi(g(X))$ - штрафная функция.

Вводимая штрафная функция должна удовлетворять следующим требованиям:

$\Psi(g_i(x_j)) = 0$, если x_j находится в области допустимых решений;

$\Psi(g_i(x_j)) > 0$, если x_j находится вне области допустимых решений.

Штрафная функция может иметь следующий вид:

$$\Psi(g_i(x_j)) = M\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_j), \tag{4.9}$$

где M — большое число (например, если ожидаемое оптимальное значение целевой функции порядка единиц, то можно принять M= 1000).

Если x_j находится в области допустимых решений, то выполняются все ограничения и, значит, $g_i(x_j)=0$. При этом штрафная функция (4.9) равняется нулю, и новая целевая функция (4.8) оказывается равной заданной.

Если x_j, не находится в области допустимых решений, то не выполняются ограничения, т. е. $g_i(x_j)\neq 0$. Значит, $g_i^2(x_j)>0$, а большое число M приводит к тому, что в новой целевой функции (4.8) штрафная функция (4.9) оказывается существенно больше заданной целевой функции $f\ (x_j)$. Поэтому в ходе минимизации благодаря большому градиенту в первую очередь уменьшается штрафная функция $\Psi(g_i(x_j))$, пока она не станет равной нулю (т. е. пока значения x_j не войдут в область допустимых решений или пока не будет найдено допустимое решение), а далее начинается процесс минимизации заданной целевой функции.

Пример 1. Решить задачу условной оптимизации вида:

$$\left.\begin{aligned}
&F = x_2 \to \min;\\
&x_2 = 2(x_1-2)^2+1;\\
&(x_1-3)^2+(x_2-0{,}5)^2 \geq 4;\\
&0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 3.
\end{aligned}\right\}$$

Решение. Первое ограничение представляет собой параболу с координатами вершины $A(2;1)$, второе — часть плоскости, находящуюся вне окружности радиусом $R = 2$, центр которой имеет координаты $O(3;\ 0{,}5)$. Без наложения второго ограничения минимум находился бы в вершине параболы в точке A и имел бы значение $F_1=1$. Наложение дополнительного условия ухудшило результат. Минимум переместился в точку B с координатой $x_1=1{,}4$. При этом $F_2^*=x_2= 1{,}8$, т. е. его значение ухудшилось.

Решение этой задачи методом штрафных функций предусматривает следующий алгоритм.

1. Записывается условие задачи в виде системы (4.7):

$$\left.\begin{aligned}&F = x_2 \to \min;\\&x_2 - 2(x_1 - 2)^2 - 1 = 0;\\&(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 - y_1 - 4 = 0;\\&0 \le x_1 \le 4; 0 \le x_2 \le 3; y_1 \ge 0.\end{aligned}\right\}$$

Чтобы удовлетворить форме выражения (4.7), во втором ограничении сделан переход от неравенства к уравнению и введена неотрицательная переменная $y_1 \ge 0$.

2. Составляется новая целевая функция, включающая штрафную функцию с числом M= 1000. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}&F = x_2 + 1000\{[x_2 - 2(x_1 - 2)^2 - 1] +\\&+ [-y_1 + (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 - 4]\} \to \min;\\&0 \le x_1 \le 4; 0 \le x_2 \le 3; y_1 \ge 0.\end{aligned}\right\}$$

3. Далее проводится решение полученной системы.

Для решения задач вида (4.7) существует *классический метод оптимизации Лагранжа – метод разрешающих множителей*. При этом предполагается, что функции f и g_i $(i=1,2,..,m)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Суть *метода Лагранжа* состоит в построении функции вида $L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+ \lambda g(x_1,x_2)$ от трех переменных x_1, x_2, λ, называемой функцией Лагранжа, и в сведении задачи на условный экстремум в случае двух независимых переменных к задаче на абсолютный экстремум функции $L(x_1,x_2,\lambda)$ трех независимых переменных x_1, x_2, λ.

Функция Лагранжа $L(x_1,x_2,\lambda)$ представляет собой сумму целевой функции (4.10) и функции ограничения (4.11), умноженной на новую независимую переменную λ, называемую *множителем Лагранжа,* входящую обязательно в первой степени:

$$f(x_1, x_2) \to \min(\max), \tag{4.10}$$

при условии

$$g(x_1, x_2) = 0. \qquad (4.11)$$

Необходимое условие локального условного экстремума функции (4.10) при наличии ограничения (4.11) в аналитической форме имеет следующий вид: пусть (x_1^0, x_2^0) - точка условного локального экстремума функции (4.10) при наличии ограничения (4.11) и пусть $gradg(x_1^0, x_2^0) = 0$. Тогда существует единственное число λ^0, такое, что (трехмерная) точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ удовлетворяет следующей системе трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ.

$$\left.\begin{aligned} &\partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_1 = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_2 = 0; \\ &\partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial \lambda = g(x_1, x_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

Иначе говоря, если двумерная точка (x_1^0, x_2^0) есть точка локального экстремума функции (6.10) при наличии ограничения (6.12), то трехмерная точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ - критическая точка функции Лагранжа. Отсюда следует, что для нахождения точек (условного) локального экстремума функции (4.10) при наличии ограничения (4.11) прежде всего, следует найти критические точки функции Лагранжа, т. е. найти все решения системы уравнений (4.12). Далее критические точки функции Лагранжа следует укоротить, удалив из них последние координаты λ^0. Затем каждую укороченную критическую точку необходимо проанализировать, является ли она в действительности точкой (условного) локального экстремума функции (4.10) при наличии ограничения (4.11) или не является. При этом используют геометрические соображения [2].

В некоторых новых задачах на условный экстремум, появляющихся в экономике, обычно укороченная критическая точка функции Лагранжа действительно является точкой условного локального (и глобального) экстремума функции (6.10) [2].

Пример 2. Найти экстремум функции $y = x_1^2 + x_2^2$ при условии, что $x_1+x_2-1=0$, т. е. решить задачу на условный экстремум методом Лагранжа.

Решение. Функция Лагранжа
$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$, откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_1 &= 2x_1 + \lambda = 0; \\ \partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_2 &= 2x_2 + \lambda = 0; \\ \partial L(x_1, x_2, \lambda)/\partial \lambda &= x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Система уравнений (4.13) имеет единственное решение, т. е. дает единственную критическую точку функции Лагранжа *(1/2, 1/2, -1)*. Укороченная критическая точка (x_1^0, x_2^0) *=(1/2; 1/2)* есть точка условного локального (также и глобального) минимума заданной функции при ее заданном ограничении, что нетрудно проверить.

5. Целочисленное программирование

Задачи оптимизации, решением которых должны быть целые числа, называют задачами *целочисленного (дискретного) программирования.* В том случае, если ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного программирования,* если же хотя бы одна зависимость является нелинейной, задачу называют *целочисленной задачей нелинейного программирования.*

Огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный характер, что связано с физической неделимостью многих элементов расчёта. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплекс-методом, с последующим округлением до целых чисел. Такой метод оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объёма (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

*Метод отсекающих плоскостей (*известный как *метод Гомори)* состоит в построении дополнительных ограничений и применении двойственного симплекс-метода. Представление о комбинаторных методах даёт широко используемый на практике *метод ветвей и границ*.

С помощью *метода ветвей и границ* решаются задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В общем виде любая из этих задач может быть записана следующим образом: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{5.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{1,m}), x_j \geq 0, \tag{5.2}$$

$$x_j \equiv 0 (j = \overline{1,n}). \tag{5.3}$$

Как и при решении задачи методом Гомори, находится оптимальный план задачи без учёта целочисленности переменных с помощью симплекс-метода. Пусть им является план X_0. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то найдено искомое оптимальное решение задачи. Если среди компонента плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи, причём для всякого последующего плана X – $F(X_0) \geq F(X)$. Так как у плана X_0 имеются дробные числа, то пусть, например, это будет компонента x_{i0}. Тогда в оптимальном целочисленном плане её значение будет, по крайней мере, либо меньше, либо равно ближайшему меньшему целому числу K_{i0}, либо больше, либо равно ближайшему целому числу $K_{i0}+1$. Для нахождения этих чисел, решаются симплекс-методом следующие две задачи линейного программирования:

$$(I)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=\overline{1,m}), \\ x_{i0} \le K_{i0}, \\ x_j \ge 0 (j=\overline{1,n}); \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=\overline{1,m}), \\ x_{i0} \ge K_{i0}+1, \\ x_j \ge 0 (j=\overline{1,n}); \end{cases}$$

Здесь возможен один из следующих четырёх случаев:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нём и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматривается вторая задача и в её оптимальном плане выбирается одна из компонент, значение которой равно дробному числу, и строятся две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет целочисленный оптимальный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляются значения целевой функции на этих планах и сравниваются между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно её значению на плане, среди компонент которых есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи, и он, вместе со значением целевой функции на нём даёт искомое решение. Если значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует

взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).
4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляются значения целевой функции на этих планах и сравниваются между собой. Далее рассматривается та из задач, для которой значение целевой функции больше, и в её оптимальном плане выбирается одна из компонент, значение которой равно дробному числу, и строятся две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи (5.1)-(5.2), а каждая соединённая с ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. На каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение целевой функции наибольшее. Если на некотором шаге будет получен план, имеющих целочисленные компоненты, и значение функции на нём будет больше или равно значений функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нём является оптимальным.

Метод ветвей и границ имеет более простую логическую схему расчётов, чем метод Гомори и более удобен при решении с использованием компьютера. Схему расчёта задач на основе метода ветвей и границ часто называют *принятием решений на дереве возможных вариантов*.

Пример 1. Методом ветвей и границ найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + x_2$$

при условиях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j \equiv 0 (j = \overline{1,5})$$

Решение. В результате решения задачи симплекс-методом без учёта условия целочисленности переменных получен следующий оптимальный план *X_0=(18/5,3/5,0,0,24/5)*, при котором значение функции *F=39/5*. Далее выбирается одна из дробных переменных, например x_1, которая в оптимальном плане исходной задачи будет принимать значение, либо $x_1 \leq 3$, либо $x_1 \geq 4$.

$$(I)\begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \leq 3, x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}); \end{cases} \quad (II)\begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \geq 4, x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Задача (I) имеет оптимальный план $X_1^{(1)} = (3,3/2,0,9/2,3/2)$, на котором значение целевой функции *F=15/2*. Задача (II) неразрешима. Далее исследуется задача (I). Так как среди компонент оптимального плана есть дробные числа, то для одного из них, например x_2, вводятся дополнительные ограничения - $x_2 \leq 1$, $x_2 \geq 2$. Затем решаются следующие две задачи:

$$(III)\begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \leq 3, x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}); \end{cases} \quad (IV)\begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 \geq 4, x_2 \geq 2, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Задача (IV) неразрешима, а задача (III) имеет оптимальный план $X_2^{(1)} = (3,1,2,3,3)$, на котором значение целевой функции $F(X_2^{(1)} = 7$. Что и является решением задачи.

6. Сетевые модели

Сетевой моделью (другие названия: *сетевой график, сеть)* называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта, в их логической и технологической последовательности и связи. Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме, позволяет, во-первых, более чётко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ. Таким образом, методы сетевого моделирования относятся к методам принятия оптимальных решений.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. *Графом* называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются *вершинами* (отображаются кружочками, точками и др.), и множества пар вершин, которые называются *ребрами* (дугами, соединяющими вершины графа). Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т.е. на каждом ребре задаётся направление, то граф называется *ориентированным*; в противном случае – *неориентированным*. Последовательность неповторяющихся рёбер, ведущая от некоторой вершины к другой, образует *путь*. Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий, в противном случае граф называется *несвязным*. В экономике чаще всего используются два вида графов: дерево и сеть. *Дерево* представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (*корень*) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются *ветвями*. *Сеть* – это ориентированный конечный связный граф, имеющий начальную вершину (*источник*) и конечную вершину (*сток*). Таким образом, сетевая модель представляет собой граф вида «сеть» [1].

С помощью *сетевого планирования и управления* (СПУ) решаются различные оптимизационные экономические задачи, связанные с пространственным перемещением объектов, временным исполнением работ субъектами и др. Объектом управления в СПУ являются коллективы исполнителей, располагающих определёнными ресурсами и выполняющих определённый комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например, разработку нового изделия. Основой СПУ является сетевая модель (СМ), в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий отражающих процесс достижения определённой цели. Она может быть представлена в виде графика или таблицы.

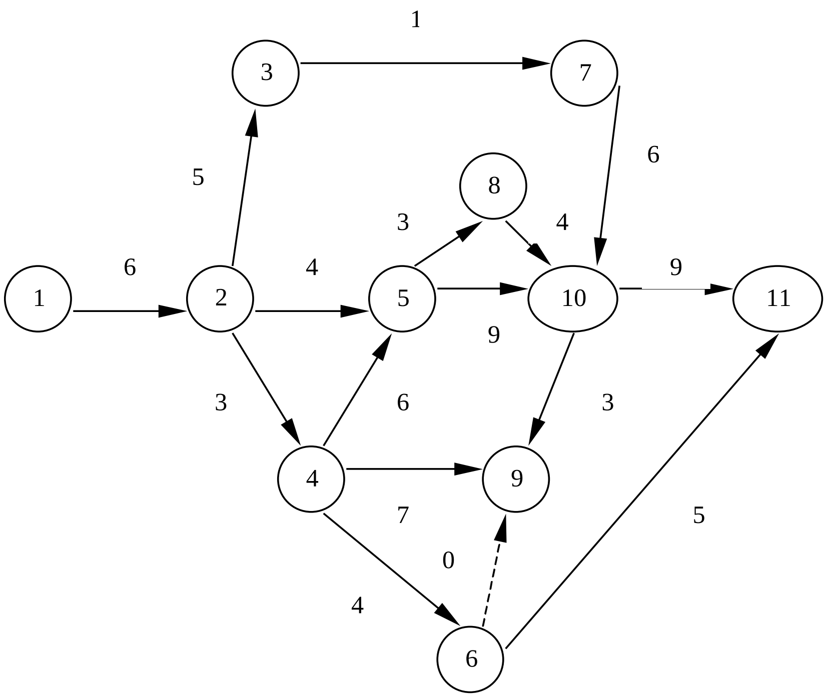

Рис. 6.1. Сетевая модель.

Основные понятия сетевой модели: событие, работа и путь. На рис. 6.1 графически представлена СМ, состоящая из 11 событий и 16 работ, продолжительность выполнения которых указана над работами.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключённых в скобки чисел (i,j), где i –

номер события, из которого работа выходит, а *j* – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет предельную продолжительность $t(i,j)$. Например, запись $t(2,5)=4$ означает, что работа $(2,5)$ имеет продолжительность *4* единицы. К работам относятся также такие процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени выполнения. Они заключаются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой; такие работы называются *фиктивными* и в графике изображаются пунктирными стрелками.

Событиями называются результаты выполнения одной или нескольких работ. Они не имеют протяжённости во времени. Они не имеют протяжённости во времени. Событие свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. События обозначаются одним числом и при графическом представлении СМ изображаются кружком (или иной геометрической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер $(i=1,2,\dots,N)$. В СМ имеется начальное событие (с номером *1*), из которого работы только выходят, и конечное событие (с номером *N*), в которое работы только входят.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную вершины, например, в приведённой выше модели путями являются $L_1=(1,2,3,7,10,11)$, $L_2=(1,2,4,6,11)$ и др. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называют критическим и обозначают $L_{кр}$, а его продолжительность – $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведёт к срыву всего комплекса работ.

СМ имеет ряд характеристик, которые позволяют определить степень направленности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов. Однако перед расчётом СМ следует убедиться, что она удовлетворяет следующим основным требованиям [1]:

1. События правильно пронумерованы, т.е. для каждой работы *(i,j)* $i<j$. При невыполнении этого требования необходимо использовать алгоритм перенумерации событий, который заключается в следующем:

- нумерация событий начинается с исходного события, которому присваивается №1;
- из исходного события вычёркиваются все исходящие из него работы (стрелки), и на оставшейся сети находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему и присваивается №2;
- затем вычёркивают работы, выходящие из события №2, и вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа, и ему присваивают №3, так продолжается до завершающего события, номер которого должен быть равен количеству событий в сетевом графике.
- если при очередном вычёркивании работ одновременно несколько событий не имеют, входящих в них работ, то их нумеруют очередными номерами в произвольном порядке.

2. Отсутствуют тупиковые события (кроме завершающего его), т.е. такие, за которыми не следует хотя бы одна работа.

3. Отсутствуют события (за исключением исхода его), которым не предшествует хотя бы одна работа.

4. Отсутствуют циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

Для событий рассчитывают три характеристики: ранний и поздний срок совершения события, а также его резерв.

Ранний срок свершения события определяется величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события, причём $t_P(1)=0$, и $t_P(N)=t_{KP}(L)$:

$$t_P(j)=\max_i\{t_P(i)+t(i,j)\};\ j=\overline{2,N}. \qquad (6.7)$$

Поздний срок свершения события характеризует самый поздний допустимый срок, к которому должно свершится событие, не вызывая при этом срыва срока конечного события:

$$t_{П}(i) = \min_{j} \{ t_{П}(j) - t(i, j) \}; i = \overline{2, N-1}. \qquad (6.8)$$

Этот показатель определяется «обратным ходом», начиная с завершающего события, с учётом соотношения $t_П(N)=t_P(N)$.

Все события, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют *резервы R(i):*

$$R(i) = t_{П}(i) - t_{P}(i). \qquad (6.9)$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Для всех работ *(i,j)* на основе ранних и поздних сроков свершения всех событий, можно определить показатели:

ранний срок начала –

$$t_{PH}(i, j) = t_{P}(i), \qquad (6.10)$$

ранний срок окончания –

$$t_{PO}(i, j) = t_{P}(i) + t(i, j), \qquad (6.11)$$

поздний срок окончания –

$$t_{\Pi O}(i, j) = t_{\Pi}(j), \tag{6.12}$$

поздний срок начала -

$$t_{\Pi H}(i, j) = t_{\Pi}(j) - t(i, j), \tag{6.13}$$

полный резерв времени -

$$R_{\Pi}(i, j) = t_{\Pi}(j) - t_{P}(i) - t(i, j), \tag{6.14}$$

независимый резерв времени -

$$R_{H}(i, j) = \max\{0, t_{P}(j) - t_{\Pi}(i) - t(i, j)\} = \tag{6.15}$$

$$= \max\{0, R_{\Pi}(i, j) - R(i) - R(j)\}. \tag{6.16}$$

Полный резерв времени показывает, на сколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Независимый резерв времени соответствует случаю, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Путь характеризуется двумя показателями – продолжительностью и резервом. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Резерв определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей. Из этого определения следует, что работы, лежащие на критическом пути, и сам критический путь имеют нулевой резерв времени. Резерв времени пути показывает, насколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности общего срока выполнения всех работ.

Результаты расчёта основных показателей СМ, изображённой на рис. 6.1, представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

$K_{ПР}$	(i,j)	$t(i,j)$	$t_{РН}(i,j) = t_Р(i)$	$t_{РО}(i,j)$	$t_{ПН}(i,j)$	$t_{ПО}(I,j) = t_П(j)$	$R_П$	$R_Н$	$K_Н$
1	2	3	4	5=4+3	6=7-3	7	8	9	10
0	(1,2)	6	0	6	0	6	0	0	1
1	(2,3)	5	6	11	12	17	6	0	0,67
1	(2,4)	3	6	9	6	9	0	0	1
1	(2,5)	4	6	10	11	15	5	5	0,44
1	(3,7)	1	11	12	17	18	6	0	0,67
1	(4,5)	6	9	15	9	15	0	0	1
1	(4,6)	4	9	13	17	21	8	0	0,47
1	(4,9)	7	9	16	14	21	5	0	0,67
2	(5,8)	3	15	18	17	20	2	0	0,78
2	(5,10)	9	15	24	15	24	0	0	1
1	(6,9)	0	13	13	21	21	8	0	0,38
1	(6,11)	5	13	18	28	33	15	7	0,38

1	*(7,10)*	*6*	*12*	*18*	*18*	*24*	*6*	*0*	*0,67*
1	*(8,10)*	*4*	*18*	*22*	*20*	*24*	*2*	*0*	*0,78*
2	*(9,10)*	*3*	*16*	*19*	*21*	*24*	*5*	*0*	*0,67*
4	*(10,11)*	*9*	*24*	*33*	*24*	*33*	*0*	*0*	*1*

Перечень работ и их производительность расположены в порядке возрастания во второй и третьей графах таблицы. В первой графе проставляется число $K_{ПР}$, характеризующее количество работ, непосредственно предшествующих событию, с которого начинается рассматриваемая работа. Для работ, начинающихся с номера «*1*», предшествующих работ нет. Для работы, начинающейся на номер «*k*», просматриваются все верхние строчки второй графы таблицы и отыскиваются строки, оканчивающиеся на этот номер. Количество найденных работ записывается во все строчки, начинающиеся с номера «*k*». Например, для работы *(5,8)* в гр. *1* проставляется цифра *2*, так как в гр. *2* на номер *5* оканчиваются две работы *(2,5)* и *(4,5)*.

Заполнение таблицы начинается с расчёта раннего срока начала работ. Для работ, имеющих цифру *0* в первой графе, в гр. *4* также заносится *0*, а их значения в гр. *5* получается в результате суммирования гр. *3* и *4* (формула *(6.10)*). Для рассматриваемой СМ таких работ только одна – *(1,2)*, поэтому в гр. *4*, в соответствующей ей строке ставится *0*, а в гр.*5 – 0+6=6*.

Для заполнения следующих строк гр. *4*, т.е. строк, начинающихся с номера *2*, просматриваются заполненные строки гр. *5*, содержащие работы, которые оканчиваются на этот номер, и максимальное значение переносится в гр. *4* обрабатываемых строк. В данном случае такая работа лишь одна *(1,2)*, о чём можно судить по гр. *1*. Цифра *6* из гр. *5* переносится в гр. *4* для всех работ, начинающихся с номера *2*, т.е. в три последующие строки с номерами *(2,3)*, *(2,4)*, *(2,5)*. Далее, для каждой из этих работ, путём суммирования их значений – гр. *3* и *4*, формируется значение гр. *5.* Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будут заполнены гр. *4* и *5*.

Графы *7* и *6* заполняются «обратным ходом», т.е. снизу вверх. Для этого просматриваются строки, оканчивающиеся на номер последнего события, и из гр. *5* выбирается максимальная величина, которая записывается в гр. *7* по всем строчкам, оканчивающимся на номер последнего события (формула – $t_П(N) = t_P(N)$). Здесь $t(N)=33$. Затем для этих строчек находится содержимое гр.*6*, как разность между гр. *7* и *3*, т.е. $t_{ПН}(10,11)=33-9=24$.

Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер события, которое непосредственно предшествует завершающему событию *(10).* Для определения гр. *7* этих строк (работы *(5,10), (7,10), (8,10), (9,10)*) просматриваются все строчки гр. *6*, лежащие ниже и начинающиеся с номера *10*. В гр. *6* среди них выбирается минимальная величина, которая переносится в гр. *7* по обрабатываемым строчкам. Здесь она одна – *(10,11)*, поэтому во все строчки указанных работ заносится цифра *24.*

Содержимое гр. *8* равно разности гр. *6* и *4* или гр. *7* и *5* (формула *(6.9)*). Гр. *9* можно получить, воспользовавшись формулой *(6.16).* С учётом того, что нулевой путь имеют только события и работы, которые принадлежат критическому пути, получается - $L_{KP}=(1,2,4,5,10,11)$, а $t_{KP}=33$ дня.

Наиболее распространенными на практике сетевыми моделями и задачами являются – задача коммивояжера, задача поиска кратчайшего пути, задача о распределении потоков в сетях.

Задача коммивояжера. В жизни часто встречаются ситуации, которые связаны с перемещением («из пункта А в пункт Б») и разнообразным поведением *j*-го субъекта или функционированием *i*-го объекта. К числу таких задач относится задача коммивояжера, связанная с минимизацией пути при посещении ряда объектов.

Для составления математической модели задачи обычно вводят следующие обозначения: i и j — номера пунктов выезда и заезда; t_j —время переезда из пункта i в пункт j (в общем случае t_{ij} не равняется t_{ji} , например, если один пункт находится на возвышенности, а другой - в долине). Кроме этого, вводятся булевские переменные, причем принимают, что $\delta_{ij} = 1$, если из пункта i мы едем в пункт j; $\delta_{ij} = 0$ - в противном случае. Например, если из пункта i выехать (въехать) только один раз в каком-то определенном направлении в(из) любой(го) другой(го) пункт(а) j из n имеющихся, либо оставаться в пункте i, то данное условие можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1, i = \overline{1, n}.$$

Общая постановка данной задачи, включающей объезд n пунктов записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \delta_{ij} \to \min; \\ & \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1; j = \overline{1, n}; \\ & \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1; i = \overline{1, n}; \\ & \delta_{ij} = [0;1]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

Система (6.18) включает условия, являющиеся необходимыми, но не достаточными. Требование непрерывности маршрута обеспечивается введением дополнительных переменных, исключающих создание подциклов.

К задаче коммивояжера сводятся задачи выбора маршрута при развозке грузов, последовательности обработки различных деталей на одном станке, проектирования технологических процессов и т.д.

Задача поиска кратчайшего пути. Пусть данная задача формулируется следующим образом: из пункта i в пункт j ведет много дорог, на одних из которых движение одностороннее, а на других - двустороннее (длина пути между пунктами указывается на каждой дуге). Требуется найти кратчайший путь из пункта i в пункт j.

При составлении математической модели задачи должно соблюдаться условие непрерывности маршрута и одноразовости посещения пунктов (в каждый пункт должна входить и выходить только одна дуга). Это требование выполняется, если соблюдаются условия:

а) для дуг, входящих в пункт,

$$N_{iBx} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ki} = 1,$$

где δ_{ki} соответствует дуге, выходящей из пункта k и входящей в пункт i; $\delta_{ki} = 1$, если дуга k-i входит в маршрут; $\delta_{ki} = 0$ - в противном случае;

б) для дуг, выходящих из пункта,

$$N_{jBBx} = \sum_{j=1}^{p} \delta_{ij} = 1,$$

где δ_{ij} соответствует дуге, выходящей из пункта i и входящей в пункт j, $\delta_{ij} = 1$, если дуга i-j входит в маршрут; $\delta_{ij} = 0$ – в противном случае.

Все пункты маршрута подразделяются на: начальный, промежуточный и конечный, и для них должно выполняться условие:

$$N_{iBx} - N_{jBBx} = \begin{cases} 1- & \text{для начального пункта;} \\ 0- & \text{для промежуточного пункта;} \\ 1- & \text{для конечного пункта.} \end{cases}$$

Если необходимо, чтобы маршрут имел при этом и кратчайшую длину, необходимо добавить следующую целевую функцию:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij}\delta_{ij} \to \min,$$

где c_{ij} - длина пути, а суммирование производится по всем дугам.

Объединяя ограничения и целевую функцию, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} & F = \sum_i \sum_j c_{ij}\delta_{ij} \to \min; \\ & \sum_{ki=1}^{n} \delta_{ki} - \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0, \delta_{ij} \geq 0; \\ 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (6.19)$$

1 — для начального пункта;

0 — для промежуточного пункта;

1 — для конечного пункта.

На переменные δ_{ij} здесь достаточно наложить только требование неотрицательности. Требование же, чтобы $\delta_{ij}=0$ или $\delta_{ij}=1$, можно не накладывать, так как такая задача из-за ограничений обеспечивает получение в решении для δ_{ij} только либо нуля, либо единицы. Таким образом, приведенная система является обычной задачей линейного программирования, которую можно реализовать без наложения требований целочисленности.

Реально существующие длинные маршруты трудно обозримы, сплошной же перебор всевозможных вариантов - весьма трудоемкая процедура, поэтому для нахождения кратчайшего пути необходимо решение задачи линейного программирования. В общем случае характеристика дуги *i-j* может иметь самый различный смысл: продолжительность, стоимость, трудоемкость и т.д. В целом к задаче выбора кратчайшего пути или маршрута сводятся самые разнообразные задачи, включая задачу выбора оптимального маршрута при разработке технологических процессов.

Основная литература

1. Шапкин А. С. Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций : Учебник для вузов. - 4-е изд. - М. : Дашков и К°, 2007. - 395 с. – 20 экз.
2. Катулев А. Н. Математические методы в системах поддержки принятия решений: Учебное пособие для вузов. - М. : Высшая школа, 2005. – 310 с. – 20 экз.

Дополнительная литература

3. Яворский В.В. Оптимизация и математические методы принятия решений: Учебное пособие для вузов. - Томск : ТУСУР, 2006. - 215 с. - 8 экз.
4. Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учебное пособие: в 2 ч. Ч. 1. - Томск : ТМЦДО, 2010. - 210 с. - 13 экз.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А.. Методы оптимизации в примерах и задачах : Учебное пособие для втузов - 2-е изд., испр. . - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с. - 71 экз.