МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

В.Г. Спицын

Методические указания к выполнению самостоятельных работ по дисциплине “Математические методы исследования систем”

Томск 2012

1. Математические методы и их применение при принятии управленческих решений

Построение любой модели осуществляется, обычно, в следующей последовательности:

1. Формируется предмет и цели исследования.
2. В рассматриваемой системе выделяются структурные или функциональные элементы, соответствующие данной цели, выявляются наиболее важные качественные характеристики этих элементов.
3. Словесно, качественно описываются взаимосвязи между элементами модели.
4. Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик объекта и формализуются, насколько возможно, взаимосвязи между объектами. Тем самым, формулируется математическая модель. **Математическая модель системы** - это ее отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Таким образом, модель - это условный образ системы, созданный для упрощения ее исследования, получения о ней новых знаний, анализа и оценки пронимаемых решений в конкретных или возможных ситуациях.
5. Проводятся расчеты по математической модели и осуществляется анализ полученного решения.

1.2. Оптимальность в планировании и управлении

В качестве методов оптимизации находят применение все разделы математического программирования (планирования): линейное, нелинейное и динамическое. Методы математического программирования являются частью науки, традиционно называемой *исследованием операций.*

Суть *методов оптимизации* заключается в том, что исходя из наличия определённых ресурсов, выбирается такой способ использования (распределения), при котором обеспечивается максимум (или минимум) интересующего нас показателя. При этом учитываются определённые ограничения, налагаемые на использование ресурсов условиями экономической ситуации.

<u>Задачи на условный экстремум.</u> В теории локального безусловного экстремума на независимые переменные не накладываются никакие дополнительные условия. Рассмотрим теперь другую задачу. Найти локальный максимум (или локальный минимум) функции $y=f(x_1,x_2)$ при *условии*, что независимые переменные x_1 и x_2 удовлетворяют ограничению $g(x_1,x_2)=0$ в виде равенства, т.е.

$$f(x_1,x_2)\to\max(f(x_1,x_2)\to\min), \tag{1.1}$$

при условии

$$g(x_1,x_2)=0. \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) называется задачей на *условный локальный экстремум*. Функцию $f(x_1,x_2)$ принято называть *целевой*, так как её максимизация (или минимизация) часто есть формальное выражение какой-либо *цели* (например, максимизация объёма производства при фиксированных затратах). Функцию g называют функцией задающей ограничения, или функцией связи.

Уравнение (1.2) есть уравнение *нулевой* линии уровня функции $g(x_1,x_2)=0$. Поэтому задачу на условный локальный экстремум можно сформулировать так: среди точек нулевой линии функции $y= g(x_1,x_2)=0$ найти точку (x_1^0,x_2^0), в которой частное значение $f(x_1^0,x_2^0)$ функции $y=f(x_1,x_2)$ больше (или меньше) её частных значений $f(x_1,x_2)$ в остальных точках (x_1,x_2) этой линии, близких точке (x_1^0,x_2^0). Точка (x_1^0,x_2^0) называется точкой *условного локального максимума (минимума)* функции $f(x_1,x_2)$, само частное значение функции $f(x_1^0,x_2^0)$ - *условным локальным максимумом (минимумом)* функции $f(x_1,x_2)$ при наличии ограничения $g(x_1,x_2)=0$.

Если значение $f(x_1^0,x_2^0)$ функции $f(x_1,x_2)$ больше (меньше) значений $f(x_1,x_2)$ этой функции во всех точках (x_1,x_2) линии

$g(x_1,x_2)=0$, то значение $f(x_1^0, x_2^0)$ называется условным *глобальным* максимумом (минимумом) функции $f(x_1,x_2)$ при наличии ограничения $g(x_1,x_2)=0$, а точка (x_1^0, x_2^0) - точкой условного *глобального* максимума (минимума) функции $f(x_1,x_2)$. Точка условного глобального максимума (минимума) функции $f(x_1,x_2)$, является также точкой условного *локального* максимума (минимума) этой функции.

В случае функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ n независимых переменных $x_1,\ldots,x_n$ задача на условный максимум (минимум) формулируется так:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\},$$

(обычно $m<n$).

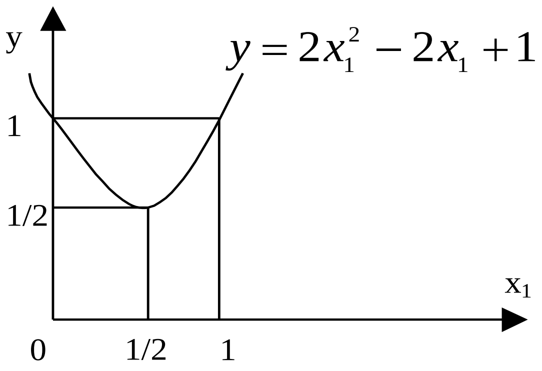
Пример. Найти экстремум функции $y = x_1^2 + x_2^2$, при условии, что

$x_1+x_2-1=0$ (т.е. точка экстремума должна находится на этой прямой).

Решение. Выражаем из заданного условия переменную x_2 и подставляем полученное выражение $x_2=1-x_1$ в заданную функцию. Тогда задача на условный экстремум функции двух переменных сведётся к задаче на безусловный экстремум функции $y = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$ одной переменной x_1. Для решения задачи на безусловный экстремум найдём первую производную этой функции и приравняем её к нулю: $y' = 4x_1 - 2 = 0$, откуда получим, что $x_1^0 = \dfrac{1}{2}$.

При переходе (слева направо) переменной x_1 через точку x_1^0 первая производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому критическая точка x_1^0 есть точка локального минимума функции $y = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$. Очевидно из графика (см. ниже), что этот локальный минимум

$y^0 = 2(x_1^0)^2 - 2x_1^0 + 1 = \frac{1}{2}$ является также глобальным. Других локальных и глобальных экстремумов функция $y = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$ не имеет, так как не существует точек, отличных от точки x_1^0, в которых бы производная $y' = 4x_1 - 2$ обращалась в нуль. Из полученного следует, что $(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$- точка условного глобального минимума функции, сам условный минимум равен $y^0 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = \frac{1}{2}$.



1.2. Общий случай математической постановки задачи оптимизаци

В общем случае задача оптимизации включает три компоненты (целевую функцию *F*, ограничения g_i и граничные условия) и имеет следующую математическую постановку:

$$\left.\begin{array}{l} F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min); \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\le, =, \ge)d_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\le, =, \ge)d_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\le, =, \ge)d_m; \\ a_j \le x_j \le b_j; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \end{array}\right\}, \quad (1.3)$$

где a_j, и b_j, —нижнее и верхнее предельно допустимые значения x_j.

Задачу (1.3) можно представить в еще более общей компактной форме записи:

$$\left.\begin{aligned} &F = f(x_j) \to \max(\min); \\ &g_i(x_j)(\le,=,\ge)d_i; \\ &a_j \le x_j \le b_j; i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}, \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных, и в общем случае они могут быть двусторонними типа $a_j \le x_j \le b_j$. Вместе с тем на практике достаточно часто возникают следующие частные случаи:

1) в технических, экономических и других видах расчетов искомые величины обычно являются положительными или равными нулю. В этом случае в задаче (1.4) принимается $a_j=0$, $b_j=\infty$ и накладывается только требование неотрицательности $x_j \ge 0$;

2) в ряде случаев значение величины x_j может задаваться. Если принять, что должно выполняться требование $x_j = x_j^1$, где x_j^1 - заданное значение, то граничные условия в задаче (1.4) можно записать следующим образом: $x_j^1 \le x_j \le x_j^1$.

Ограничения обычно выражают определенные зависимости между переменными величинами, которые по своей сути могут быть теоретическими (формульными) и статистическими. *Теоретические* зависимости обычно справедливы при любых условиях и для их получения не требуется никаких дополнительных измерений. Однако на практике достаточно часто между параметрами модели нет известной функциональной зависимости. Так, например, если мы желаем оптимизировать использование общественного транспорта города в течение суток, то нам необходимо знать, как пассажиропоток распределен во времени. Естественно, что такой готовой зависимости нет, и для ее получения потребуется осуществить сбор и обработку статистических данных, чтобы получить определенную аналитическую зависимость, которая и будет тем ограничением, которое следует включить в задачу оптимизации.

Значения переменных, удовлетворяющие заданным граничным условиям и ограничениям, называют *допустимым* решением задачи. Иногда случается, что в задачу включаются противоречивые по смыслу требования, выполнить которые невозможно. Такая ситуация приводит к *несовместным* задачам, которые в планировании называют *несбалансированными планами* (когда нет и не может быть допустимых решений). Обычно же, если задача составлена правильно, то в общем случае она имеет набор допустимых решений и требуется найти оптимальное решение (от лат. optimus — наилучший). Наилучшего решения во всех смыслах быть не может, оно может быть наилучшим (оптимальным) только в одном, строго установленном смысле, согласно некоторому *критерию* (от гр. kriterion — мерило, оценка, средство для суждения).

Критерий часто называют целевой функцией, функцией цели, а в математических работах - функционалом. Критерий в общем случае может оценивать качественные свойства объекта, причем как желательные для субъекта (обычно с максимальным уровнем или значением, например, прибыль, производительность, надежность), так и нежелательные для него (или минимальные - непроизводительные затраты, расход материала, простои оборудования и др.). Если при принятии решения требуется максимизировать какое-то свойство (к примеру, прибыль, производительность или надежность), то в результате решения задачи критерий будет иметь наибольшее значение из всех допустимых решений. Если же требуется минимизировать критерий (стоимость, расход материала, время простоев оборудования), то в результате решения критерий будет иметь наименьшее значение из всех допустимых.

1.3. Классификация задач оптимизации

Множество различных по смыслу задач оптимизации нельзя эффективно решить без привлечения ЭВМ, без знаний экономико-математических моделей, практических навыков составления математических моделей решения задач и применения их в среде существующего программного обеспечения (табл. 1.1).

Таблица 1.1.

Классификация задач оптимизации процессов и принятия решений

Область применения	*Управление*	*Проектирование*	*Разработка технологических процессов*
Производство Образование Культура Бизнес Экономика Финансы Искусство Бытовая сфера Принятие решений	Различные задачи распределения ресурсов (материальных, финансовых, информационных, трудовых)	1.Оптимизация параметров объекта проектирования 2. Оптимизация структуры объекта проектирования 3.Оптимизация функционирования	1.Оптимизация маршрута изготовления изделия 2. Оптимизация параметров технологических процессов 3. Выбор режима работы, обеспечения качества и эффективности

Основные задачи управления деятельностью человека можно отнести к классу задач распределения и оптимизации ресурсов. Любой объект в процессе управления, проектирования или эксплуатации характеризуется своим устройством и действием, причем устройство определяется его структурой и параметрами, а действие - процессом функционирования. Процессы функционирования объекта проектирования и технологические процессы характеризуются изменением некоторых параметров во времени, которые подразделяются на *непрерывные и дискретные* (непрерывные процессы протекают в металлургии, энергетике, химии и др., а дискретные — в машиностроении, экономике, образовании и т. п.).

В любых математических моделях можно выделить следующие элементы (рис. 1.1): исходные данные, зависимости, описывающие целевую функцию, и ограничения.

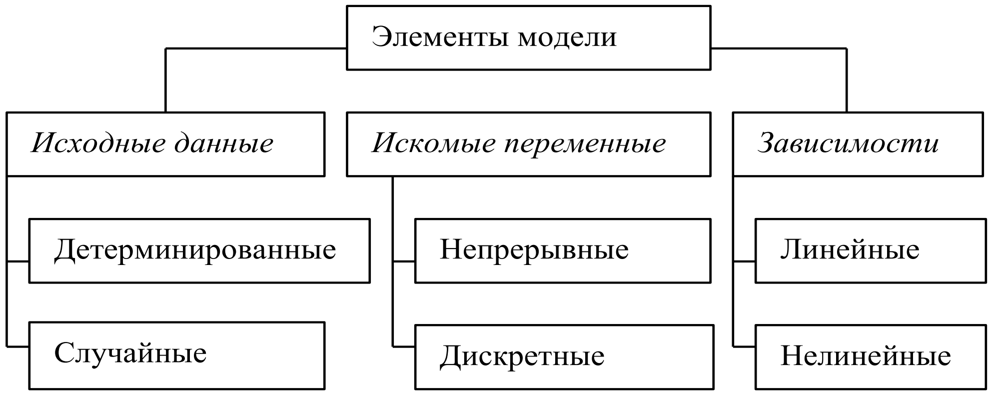


Рис. 1.1. *Разновидности элементов математической модели*

Зависимости между переменными, как целевые функции, так и ограничения, могут быть линейными и нелинейными. *Линейными* называют такие зависимости, в которые переменные входят в первой степени и нет их произведения; если переменные входят не в первой степени или есть произведение переменных, то зависимости являются *нелинейными*. Сочетание разнообразных элементов модели приводит к различным классам задач оптимизации, требующим разных методов решения и разных программных средств (табл. 1.2).

Таблица 1.2.

Распространённые задачи математического программирования

Исходные данные	*Переменные*	*Зависимости*	*Задача оптимизации*
Детерминированные или постоянные	Непрерывные	Линейные	Линейного программирования (ЛП)
	Целочисленные		Целочисленного программирования (ЦЧП)
	Непрерывные, целочисленные	Нелинейные	Нелинейного программирования (НЛП)
Случайные	Непрерывные	Линейные	Стохастического программирования (СТП)

Для ряда систем наиболее характерны задачи оптимизации и распределения ресурсов, решаемые методом линейного программирования, для которого разработаны надёжные алгоритмы. Более сложные задачи (целочисленные, нелинейные) оптимизации можно свести к задачам линейного программирования.

2. Основы линейного программирования

Ниже излагаются теоретические основы методов линейного программирования, а также необходимые для этого основные понятия из линейной алгебры.

2.1. Элементы линейной алгебры и геометрии выпуклых множеств

2.1.1. Система m линейных уравнений с n переменными

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

или в краткой записи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \left(i = 1, 2, \ldots, m\right).$$

В задачах линейного программирования представляют интерес системы, в которых ранг r матрицы системы $A = (a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, или, что то же самое, максимальное число независимых уравнений системы r меньше числа переменных, т.е. $r < n$. Будем полагать, что в системе (2.1) все m уравнений системы независимы, т.е. $r = m$ и соответственно $m < n$.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются ***основными*** *(или* ***базисными****), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля (В литературе такой определитель часто называют базисным минором матрицы A). Тогда остальные $n - m$ переменных называются* ***неосновными*** *(или* ***свободными****).*

Основными могут быть разные группы из n переменных. Максимально возможное число групп основных переменных равно числу способов выбора m переменных из их общего числа n, т.е. числу сочетаний C_n^m. Но так как могут встретиться случаи, когда определитель матрицы коэффициентов при m переменных равен нулю, то общее число групп основных переменных не превосходит C_n^m.

2.1. Найти все возможные группы основных переменных в системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Общее число групп основных переменных не более чем C_4^2 =4 · 3 / 2 = 6, т.е. возможные группы основных переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, ,x_4..

Выясним, могут ли быть основными переменные x_1, x_2. Так как определитель матрицы из коэффициентов при этих переменных $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2(-1) = 3 \neq 0$, то x_1, x_2 могут быть основными переменными. Рассуждая аналогично, найдем, что могут быть основными переменные x_1,x_3; x_1, x_4, но не могут быть основными x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, ,x_4., так как в трех последних группах переменных соответствующие определители равны нулю (например, для переменных x_3, ,x_4 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$).

Для решения системы (2.1) при условии $m < n$ докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Если для системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) ранг матрицы коэффициентов при переменных равен m, т.е. существует хотя бы одна группа основных переменных, то эта система является неопределенной, причем каждому произвольному набору значений неосновных переменных соответствует одно решение системы.*

Пусть, например, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - основные переменные (если это не так, то нумерацию соответствующих переменных можно изменить), т.е. определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оставим в левых частях уравнений системы (2.1) члены с переменными x_1, x_2, ..., x_m, а члены с переменными $x_{m+1}, x_{m+2},...,x_n$ перенесем в правые части. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Задавая неосновным переменным $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ произвольные значения, каждый раз будем получать новую систему с новыми свободными членами $b_1', b_2', \ldots, b_m'$. Каждая из полученных систем будет иметь один и тот же определитель $|A| \neq 0$, следовательно, в силу теоремы Крамера каждая из этих систем будет иметь единственное решение. Так как получаемых таким образом систем бесконечно много, то и система (3.1) будет иметь бесконечное множество решений.

2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. В задаче 2.**1** установлено, что основными могут быть переменные x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4. Возьмем в качестве основных переменные x_1, x_2, а переменные x_3, x_4 будем считать неосновными и перенесем их с соответствующими коэффициентами в правые части уравнений системы. Получим

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 - x_4, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Решая данную систему любым способом, найдем $x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3 - 2x_3 + x_4$. Задавая неосновным переменным x_3 и x_4 произвольные значения, например, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, получим бесконечное множество решений этой системы (x_1 = 2/3; $x_2 = 2/3 - 2c_1 + c_2$; $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$).

Решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы (2.1) называется *допустимым* (именно такие решения представляют интерес в большинстве задач линейного программирования), если оно содержит лишь неотрицательные компоненты, т.е. $x_j \geq 0$ для любых $j = 1, 2, ..., n$. В противном случае решение называется *недопустимым.* Так, в задаче 2.**2** решение системы при $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, т.е. $X_1 = (2/3;\ 5/3;\ 2;\ 5)$ является допустимым, а при $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, т.е. $X_2 = (2/3; -7/3; 2; 1)$ – недопустимым.

Среди бесконечного множества решений системы выделяют так называемые базисные решения.

Базисным *решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все n-m неосновных переменных равны нулю.*

В задачах линейного программирования особый интерес представляют *допустимые базисные решения,* или, как их еще называют, *опорные планы.* Число базисных решений является конечным, так как оно равно числу групп основных переменных, не превосходящему C_n^m. Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется *вырожденным.*

2.3. Найти все базисные решения системы, приведенной в задаче 2.1.

Решение. В задаче 2.1 было установлено, что существует три группы основных переменных x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4, т.е. число базисных решений равно 3.

Найдем первое базисное решение, взяв в качестве основных переменные x_1, x_2 и неосновных – переменные x_3, x_4. Приравняв неосновные переменные нулю, т.е. при $x_3 = x_4 = 0$, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$

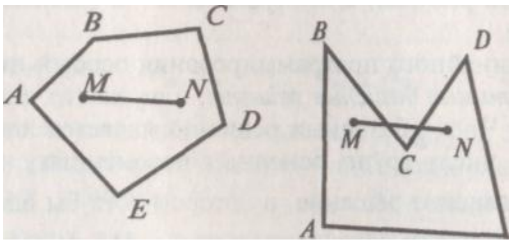
откуда $x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3$. Следовательно, первое базисное решение системы $X_1 = (2/3; 2/3; 0; 0)$ — допустимое.

Если взять за основные переменные x_1, x_3 и приравнять нулю соответствующие неосновные переменные $x_2 = x_4 = 0$, получим второе базисное решение $X_2 = (2/3;\ 0;\ 2/3;\ 0)$ – также допустимое. Аналогично можно найти и третье базисное решение $X_3 = (2/3;\ 0;\ 0;\ -2/3)$ – недопустимое.

Совместная система (2.1) имеет бесконечно много решений, из них базисных решений – конечное число, не превосходящее C_n^m.

2. 1.2. Выпуклые множества точек

В школьном курсе математики *выпуклыми* назывались многоугольники, целиком расположенные по одну сторону от прямых, на которых лежат их стороны.



а ***б***

Рис. 2.1

Например, многоугольник на рис. 2.1, *а* – выпуклый, а многоугольник на рис. 2.1, *б* не является выпуклым (он расположен по обе стороны от прямой *BC).*

Общим определяющим свойством, которое отличает выпуклый многоугольник от невыпуклого, является то, что если взять любые две его точки и соединить их отрезком, то весь отрезок будет принадлежать этому многоугольнику. Это свойство может быть принято за определение выпуклого множества точек.

Множество точек называется ***выпуклым,*** *если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.*

Согласно этому определению многоугольник на рис. 2.1 *а* является выпуклым множеством, а многоугольник на рис. 2.1, *б* таковым не является, ибо отрезок *MN* между двумя его точками *M* и *N* не полностью принадлежит этому многоугольнику.

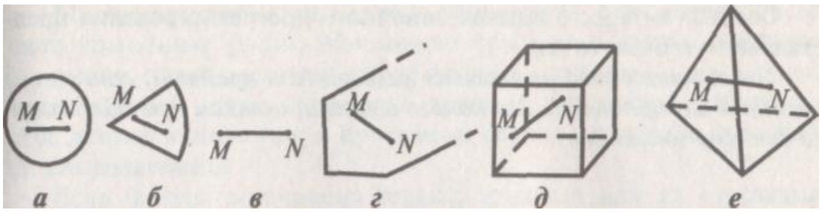


Рис. 2.2

Выпуклыми множествами могут быть не только многоугольники. Примерами выпуклых множеств являются круг, сектор, отрезок, многоугольная область, куб, пирамида (рис. 2.2, *а –е),* многогранная область, прямая, полуплоскость, полупространство и т.п.

Выпуклые множества обладают важным свойством, которое устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Пересечение (общая часть) любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

□ Пусть M и N – любые две точки пересечения двух (для доказательства теоремы ограничимся случаем двух множеств) множеств *А и В* (рис. 3.3). Так как точки M и N принадлежат пересечению множеств, т.е. одновременно и выпуклому множеству *А,* и выпуклому множеству *В,* то согласно определению выпуклого множества все точки отрезка *MN* будут принадлежать как множеству *А,* так и множеству *В,* т.е. пересечению этих множеств. А это и означает, что пересечение данных множеств есть выпуклое множество. ■

Среди точек выпуклого множества можно выделить внутренние, граничные и угловые точки.

Точка множества называется *внутренней,* если в некоторой ее окрестности содержатся точки только данного множества.

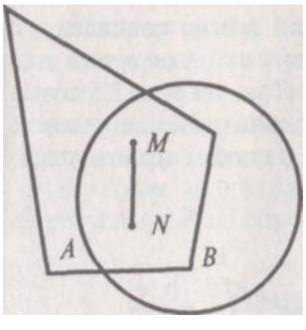


Рис. 2.3

(Под *окрестностью* точки плоскости (пространства) подразумевается круг (шар) с центром в этой точке.).

Точка множества называется *граничной,* если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Особый интерес в задачах линейного программирования представляют угловые точки.

*Точка множества называется **угловой** (или **крайней),** если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.*

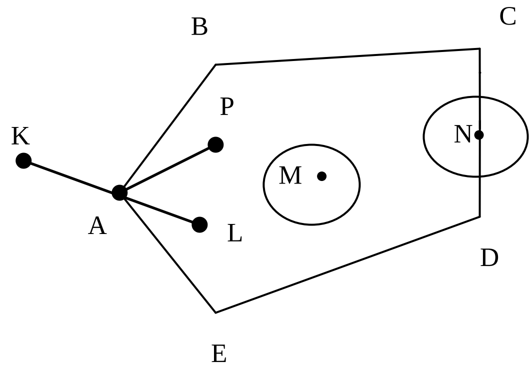


Рис. 2.4

На рис. 2.4 приведены примеры различных точек многоугольника: внутренней (точки *M),* граничной (точка *N)* и угловых (точки *A, B, C, D, E).* Точка *A* — угловая, так как для любого отрезка, целиком принадлежащего многоугольнику, например, отрезка *AP,* она не является внутренней; точка *A* — внутренняя для отрезка *KL*, но этот отрезок не принадлежит целиком многоугольнику.

Для выпуклого множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многоугольника (многогранника), в то же время для невыпуклого множества это не обязательно. Так, на рис. 2.5 точка *A* является вершиной невыпуклого многоугольника, но не угловой

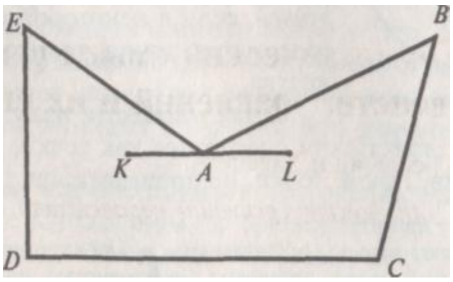


Рис. 2.5

(она является внутренней для отрезка KL, целиком принадлежащего этому многоугольнику).

Множество точек называется *замкнутым,* если включает все свои граничные точки. Множество точек называется *ограниченным,* если существует шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество; в противном случае множество называется *неограниченным.*

Если фигура ограничена только прямыми или их отрезками, то число ее угловых точек конечно; в случае криволинейности границ фигура содержит бесконечно много угловых точек, что позволяет сделать следующее определение.

Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется ***выпуклым многогранником (многоугольником),*** *если оно ограниченное, и* ***выпуклой многогранной (многоугольной) областью,*** *если оно неограниченное.*

До сих пор рассматривались выпуклые множества точек на плоскости и в пространстве. Аналитически такие точки изображаются упорядоченной парой чисел (x_1, x_2) или упорядоченной тройкой чисел (x_1, x_2, x_3). Понятие точки можно обобщить, подразумевая под точкой (или вектором) упорядоченный набор n чисел $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$, в котором числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами точки (вектора). Такое обобщение имеет смысл, так как если взять какой-либо экономический объект, то для его характеристики двух-трех чисел обычно бывает недостаточно и необходимо взять n чисел, где $n > 3$.

Множество всех точек $X= (x_1, x_2,..., x_n)$ образует n-мерное точечное (векторное) пространство. При $n > 3$ точки и фигуры n-мерного пространства не имеют реального геометрического смысла и все исследования объектов этого пространства необходимо проводить в аналитической форме. Тем не менее, оказывается целесообразным и в этом случае использовать геометрические понятия для облегчения представлений об объектах n-мерного пространства.

2.1.3. Геометрический смысл решений неравенств, уравнений и их систем

Рассмотрим **решения неравенств.**

Теорема 2.3. *Множество решений неравенства с двумя переменными*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \qquad (2.2)$$

является одной из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, *включая и эту прямую, а другая полуплоскость с той же прямой есть множество решений неравенства*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1. \qquad (2.3)$$

□ Для произвольной абсциссы x_1 ордината точки M (рис. 2.6), лежащей на прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ при условии $a_{12} \neq 0$, есть

$x_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \dfrac{b_1}{a_{12}}$, т.е. координаты точки $M\left(x_1; -\dfrac{a_{11}}{a_{12}} + \dfrac{b_1}{a_{12}}\right)$.

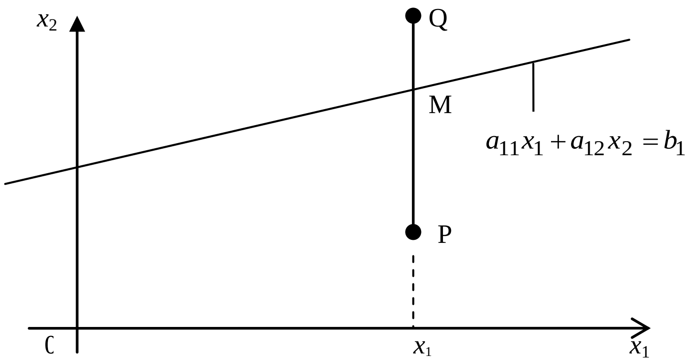


Рис. 2.6

Через точку M проведем прямую, параллельную оси $0x_2$. Тогда для любых точек P и Q этой прямой, расположенных выше и ниже точки M, т.е. в верхней и нижней полуплоскостях, будут верны неравенства $x_{2Q} \ge x_{2M}$ и $x_{2P} \le x_{2Q}$ или $x_2 \ge -\dfrac{a_{11}}{a_{12}} + \dfrac{b_1}{a_{12}}$ и $x_2 \le -\dfrac{a_{11}}{a_{12}} + \dfrac{b_1}{a_{12}}$. При условии $a_{12} > 0$ неравенства преобразуются соответственно к виду $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$ и $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, т.е. координаты всех точек верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству (2.2), а нижней полуплоскости – неравенству (2.3). В случае $a_{12} < 0$, наоборот, координаты всех точек верхней полуплоскости удовлетворяют неравенству (2.3), а координаты нижней полуплоскости – неравенству (2.2). ■

2.4. Построить множество решений неравенства:

а) $3x_1 - 4x_2 + 12 \le 0$; б) $3x_1 - 2x_2 \ge 0$.

Решение. В соответствии с теоремой 2.3, множество решений неравенства есть полуплоскость.

а) Построим границу полуплоскости – прямую $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, найдя точки её пересечения с осями координат. А (4; 0) и *B* (0; 3) на рис. 2.7, *а*.

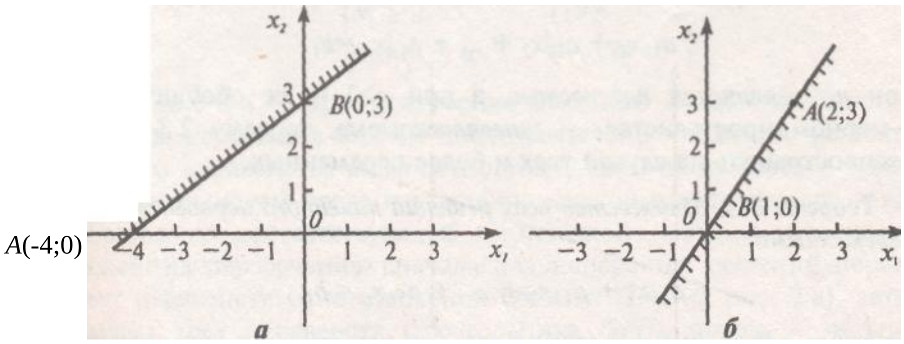


Рис. 2.7

Для определения искомой полуплоскости (верхней или нижней) рекомендуется задать произвольную контрольную точку, не лежащую на ее границе — построенной прямой. Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется и во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. И, наоборот, в случае невыполнения неравенства в контрольной точке, оно не выполняется во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и выполняется во всех точках другой полуплоскости.

В качестве контрольной точки удобно взять начало координат *O* (0;0), не лежащее на построенной прямой. Координаты точки *O* не удовлетворяют неравенству: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \le 0$, следовательно, решением данного неравенства является нижняя полуплоскость, не содержащая контрольную точку *O*. Искомая полуплоскость выделена штриховкой.

б) Построим границу полуплоскости – прямую $3x_1 - 4x_2 = 0$ по двум точкам. Одной из этих точек является начало координат на рис. 2.7, *б* (в уравнении прямой отсутствует свободный член), а другую точку берем на прямой произвольно, например, *А* (2; 3) на рис. 2.7, *б*. В качестве контрольной возьмем, например, точку *В* (1; 0). Самую "простую" точку *О* (0; 0) здесь в качестве контрольной брать не следует, ибо она лежит на построенной прямой. Так как координаты контрольной точки *В* (1; 0) удовлетворяют неравенству, т.е.$3 \bullet 1 - 2 \bullet 0 \geq 0$, то решением данного неравенства является нижняя (правая) полуплоскость, содержащая эту точку.

Учитывая, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (3.4)$$

при $n = 3$, является *плоскостью,* а при n > 3 – ее обобщением в *n*-мерном пространстве – *гиперплоскостью,* теорему 2.3 можно распространить на случай трех и более переменных.

Теорема 2.4. *Множество всех решений линейного неравенства с n переменными*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

является одним из полупространств, на которые все пространство делится плоскостью или гиперплоскостью (3.4), включая и эту плоскость (гиперплоскость).

Рассмотрим **множество решений систем неравенств.**

Теорема 2.5 *Множество решений совместной системы т линейных неравенств с двумя переменными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$$

является выпуклым многоугольником (или выпуклой многоугольной областью).

□ Каждое из неравенств в соответствии с теоремой 2.3 определяет одну из полуплоскостей, являющуюся выпуклым множеством точек. Множеством решений совместной системы линейных неравенств служат точки, которые принадлежат полуплоскостям решений всех неравенств, т.е. принадлежат их пересечению. Согласно теореме 2.2 о пересечении выпуклых множеств это множество является выпуклым и содержит конечное число угловых точек, т.е. является выпуклым многоугольником (выпуклой многоугольной областью).

Теорема 2.6. *Множество решений совместной системы m линейных неравенств с n переменными является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.*

Рассмотрим **множество допустимых решений системы *m* линейных уравнений с *n* переменными.**

Теорема 2.7. *Множество всех допустимых решений совместной системы m линейных уравнений с n переменными (m < n) является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.*

Между допустимыми базисными решениями и угловыми точками множества допустимых решений системы линейных уравнений существует взаимнооднозначное соответствие..

2.2. Теоретические основы методов линейного программирования

Для рассмотрения теоретических основ методов линейного программирования целесообразно вновь вернуться к понятию выпуклого множества точек, дав ему более строгое определение в аналитической форме.

2.2.1. Выпуклые множества в *n*-мерном пространстве

В разделе 2.1.2 выпуклое множество точек определялось как множество, которое вместе с любыми своими двумя точками содержит весь отрезок, их соединяющий. Однако в случае n переменных не ясно, что следует понимать под "отрезком" в n-мерном пространстве. Очевидно, надо дать аналитическое определение этого понятия.

Начнем с $n = 2$ (двумерного пространства, плоскости). Пусть $X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ и $X_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$- точки плоскости Ox_1x_2, а $X = (x_1, x_2)$ – любая точка отрезка X_1X_2 (рис. 2.11). Очевидно, что отношение α длин отрезков XX_2 и X_1X_2 удовлетворяет условию $0 \le \alpha \le 1$. Запишем это отношение α через координаты точек. Получим

$$\alpha = \frac{x_1^{(2)} - x_1}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{x_2^{(2)} - x_2}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1^{(1)} + (1-\alpha)x_1^{(2)}, \\ x_2 = \alpha x_2^{(1)} + (1-\alpha)x_2^{(2)}, \end{cases} \qquad (2.5)$$

где

$$0 \le \alpha \le 1 \qquad (2.6)$$

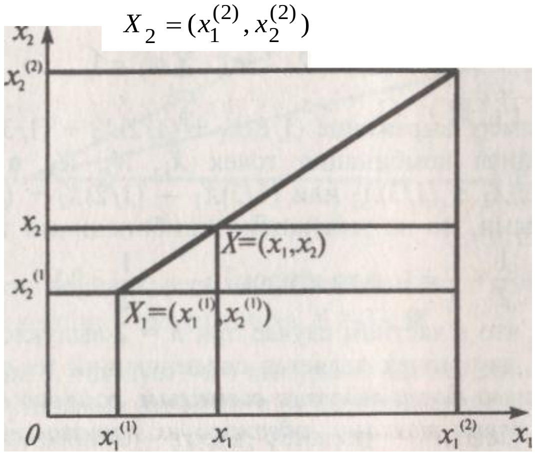


Рис. 2.11

Полагая $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = 1 - \alpha$, условия (2.5) и (2.6) примут вид

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)}, \\ x_2 = \alpha_1 x_2^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(2)}, \end{cases} \qquad (3.7)$$

$$\alpha_1 \ge 0, \;\; \alpha_2 \ge 0, \;\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \qquad (3.8)$$

Равенство (3.7) можно записать в виде

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \qquad (3.9)$$

понимая, что в нем все операции выполняются покоординатно (т.е. отдельно по переменной x_1 и отдельно по переменной x_2).

Таким образом, ***отрезок*** *$X_1 X_2$ можно определить как множество точек (векторов), удовлетворяющих условиям (2.9) и (2.8).*

В случае *n*-мерного пространства определение отрезка будет таким же – множество точек, удовлетворяющих условиям (2.9) и (2.8), если под X_1 и X_2 подразумевать точки (векторы) *n*-мерного пространства: $X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ и $X_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$.

Обобщением понятия отрезка для нескольких точек является их выпуклая линейная комбинация.

Точка X называется ***выпуклой линейной комбинацией*** *точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если выполняются условия*

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

$$\alpha_j \geq 0 \; (j = 1,2,\ldots,n), \; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.$$

Так, например, выражение $(1/6)X_1 + (1/2)X_2 + (1/3)X_3$ есть выпуклая линейная комбинация точек X_1, X_2, X_3, а выражения $(1/3)X_1 + (1/2)X_2 + (1/3)X_3$ или $(1/3)X_1$ - $(1/2)X_2$ + $(7/6)X_3$ являются линейными, но не выпуклыми комбинациями тех же точек (в первом $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, а во втором $\alpha_2 = -\frac{1}{2} < 0$).

Очевидно, что в частном случае при *n* = 2 выпуклой линейной комбинацией двух точек является соединяющий их отрезок. Поэтому *множество точек является* ***выпуклым,*** *если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит их произвольную выпуклую линейную комбинацию.*

Рассмотрим теорему о представлении выпуклого многогранника.

Теорема 2.8. *Выпуклый n-мерный многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.*

□ Возьмем для простоты *n* = 2, а в качестве многогранника – треугольник $X_1X_2X_3$ (рис.2.12). Через произвольную точку X треугольника проведем отрезок XX_4. Поскольку точка X лежит на этом отрезке, то

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4,$$

где

$$\alpha_1 \geq 0, \; \alpha_4 \geq 0, \; \; \alpha_1 + \alpha_4 = 1.$$

Точка X_4 лежит на отрезке X_2X_3, следовательно, $X_4 = \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ где $\alpha_2 \geq 0, \; \alpha_3 \geq 0, \; \; \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$

Подставив значение X_4 в выражение для X, получим

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_4(\alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2\alpha_4 X_2 + \alpha_3\alpha_4 X_3.$$

Обозначив, $t_1 = \alpha_1, t_2 = \alpha_2\alpha_4, t_3 = \alpha_3\alpha_4,$ получим окончательно

$$X = t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3,$$

где

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \text{ и } t_1 + t_2 + t_3 = 1.$$

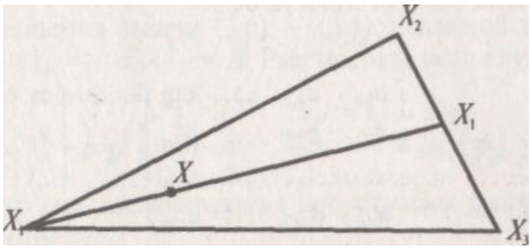


Рис. 2.12

Таким образом, точка X есть выпуклая линейная комбинация угловых точек (вершин) треугольника $X_1X_2X_3$. ■

Из теоремы 2.8 следует, что выпуклый многогранник порождается своими угловыми точками или вершинами: отрезок – двумя точками, треугольник – тремя, тетраэдр – четырьмя точками и т.д. В то же время выпуклая многогранная область, являясь неограниченным множеством, не определяется однозначно своими угловыми точками: любую ее точку нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек.

2.2.2. Свойства задачи линейного программирования

Любая задача линейного программирования может быть представлена в виде общей, канонической или стандартной задачи. В данном разделе будем рассматривать каноническую задачу, в которой система ограничений есть система уравнений (2.1)

Для обоснования свойств задачи линейного программирования целесообразно рассмотреть ещё два вида записи канонической задачи.

Матричная форма записи:

$$F = CX \to \max\,(\min) \qquad (2.10)$$

при ограничениях

$$AX = B, \qquad (2.11)$$

$$X \geq 0, \tag{2.12}$$

где

$$C = (c_1, c_2, \ldots c_n);\ A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Здесь C – матрица-строка, A – матрица системы, X – матрица-столбец переменных, B – матрица-столбец свободных членов.

Векторная форма записи:

$$F = CX \to \max\,(\min) \tag{2.13}$$

при ограничениях

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P, \tag{2.14}$$

$$X \geq 0, \tag{2.15}$$

где CX – скалярное произведение векторов $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, векторы

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при переменных и свободных членов (*Скалярным произведением CX двух векторов* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *и* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов* $CX = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.*)*

Векторное неравенство $X \geq 0$ означает, что все компоненты вектора X неотрицательны, т.е. $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

В гл. 2.1 была сформирована, но не доказана в общем виде теорема:

Теорема 2.9. *Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.*

□ Пусть $X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ и $X_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$ – два допустимых решения задачи (2.10) – (2.12), заданной в матричной форме. Тогда $AX_1 = B$ и $AX_2 = B$. Рассмотрим выпуклую линейную комбинацию решений X_1 и X_2 , т.е.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \text{ при } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0 \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

и покажем, что она также является допустимым решением системы (2.11). В самом деле

$$AX = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + (1-\alpha_1)AX_2 = \alpha_1 B + (1-\alpha_1)B = B,$$

т.е. решение X удовлетворяет системе (2.11). Но так как $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, то и $X \geq 0$, т.е. решение X удовлетворяет и условию (2.12).

Итак, доказано, что множество всех допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым, а точнее (если учесть изложенное в предыдущей главе), представляет выпуклый многогранник или выпуклую многогранную область, которые в дальнейшем будем называть одним термином – *многогранником решений.*

Ответ на вопрос, в какой точке многогранника решений возможно оптимальное решение задачи линейного программирования, даётся в следующей фундаментальной теореме.

Теорема. 2.10. *Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (*аналогичная формулировка для минимального*) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.*

Данная теорема является фундаментальной, так как она указывает принципиальный путь решения задач линейного программирования. Действительно, согласно этой теореме вместо исследования бесконечного множества допустимых решений для нахождения среди них искомого оптимального решения необходимо исследовать лишь конечное число угловых точек многогранника решений.

Следующая теорема посвящена аналитическому методу нахождения угловых точек.

Теорема 2.11. *Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.*

Из теорем 2.10 и 2.11 непосредственно вытекает важное следствие: *если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.*

Итак, *оптимум линейной функции задачи линейного программирования следует искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.*

2.3. Общая формулировка задачи линейного программмирования

Линейное программирование (планирование) - математический метод поиска максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

Методы линейного программирования широко применимы в производстве, транспорте, организации процессов, в обучении, руководстве персоналом и др. К числу наиболее известных задач, решаемых этим методом, относятся задача о назначениях, транспортная задача, задача распределения ресурсов и др. Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования [9].

Задача о банке. Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн. долл. Часть этих средств, не менее 35 млн. долл. должна быть распределена в кредитах - неликвидных активах банка (обратить кредиты в деньги, в случае необходимости, без существенных потерь невозможно). Ценные бумаги (ликвидные активы) должны составлять не менее 30% средств, размещённых в кредитах и ценных бумагах.

Пусть x - средства (млн. долл.), размещённые в кредитах; y - средства, вложенные в ценные бумаги. Имеем следующую систему линейных ограничений:

1) $x+y \le 100$ - балансовое ограничение;
2) $x \ge 35$ - кредитное ограничение;
3) $y \ge 0{,}3(x+y)$ - ликвидное ограничение;
4) $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Цель банка - получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг: $f=c_1x+c_2y \to max$ при условиях 1)-4), где c_1 - доходность кредитов, c_2 - доходность ценных бумаг. Здесь f - линейная целевая функция, условия 1)-4) - линейные ограничения.

Задача об использовании ресурсов. Пусть предприятие имеет ресурсы 3-х видов R_1, R_2, R_3 в количестве соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц и выпускает два вида товаров T_1, T_2. Причём известны значения a_{ij}, каждое из которых определяет число единиц R_i $(i=1,2,3)$, необходимое для производства единицы товара T_j $(j=1,2)$. Доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, равен соответственно c_1 и c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которой доход предприятия оказался бы максимальным. Если обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество товаров T_1 и T_2, тогда доход предприятия - есть целевая функция $f=c_1x_1+c_2x_2 \to max$. Поскольку величина каждого ресурса используемого при выпуске обеих товаров $R_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2$ $(i=1,2,3)$ не должна превосходить его запаса b_i, то должны выполнятся следующие условия:

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i\ (i=1,2.3).$$

Математическая задача об использовании ресурсов состоит в определении значений неизвестных x_1 и x_2, удовлетворяющих заданным условиям и максимизирующих целевую функцию.

Транспортная задача. Пусть имеется два месторождения угля $М_1$ и $М_2$ и три потребителя $П_1$, $П_2$, $П_3$. Количество угля в $М_1$ и $М_2$ соответственно равно a_1 и a_2. Запросы потребителей $П_1$, $П_2$, $П_3$ пусть будут b_1, b_2, b_3. Считаем, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $a_1+a_2=b_1+b_2+b_3$. Наконец, заданы числа c_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2.3)$, представляющие собой стоимость перевозки тонны угля из $М_i$ в $П_j$. Требуется определить такие (неотрицательные) шесть чисел x_{ij}, каждое из которых определяет количество угля, предназначенного к отправке из $М_i$ к $П_j$, при которых затраты на перевозки угля были бы минимальными.

	П$_1$	П$_2$	П$_3$	Всего отправлено
М$_1$	x_{11}	x_{12}	X_{13}	A_1
М$_2$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	A_2
Всего доставлено	b_1	B_2	B_3	

Общее количество угля, вывезенное из М$_\mathrm{i}$, должно равняться a_i. Отсюда имеем условия $x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}=a_i$ $(i=1,2)$.

Поскольку общее количество угля, доставленное в П$_\mathrm{j}$ должно равняться b_j, получаем следующие условия: $x_{1j}+x_{2j}=b_j$ $(j=1,2,3)$.

Предполагается, что затраты на перевозку прямо пропорциональны количеству перевозимого угля, т.е. перевозка из М$_\mathrm{i}$ в П$_\mathrm{j}$ стоит $c_{ij}x_{ij}$. Тогда общие затраты по всем перевозкам будут $z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$.

Таким образом, имеем систему из пяти линейных уравнений с шестью неизвестными и линейную функцию z, которую требуется минимизировать.

Наиболее общим случаем из приведённых выше примеров является задача об использовании ресурсов, поскольку содержит ограничения в виде неравенств. Её математическая модель при числе переменных равном n и числе ограничений равном m будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min);\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i;\\ &d_j \le x_j \le D_j;\, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}, \end{aligned}\right\}, \qquad (2.23)$$

где c_j - коэффициенты в целевой функции; a_{ij} - норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы j-й продукции; b_i - имеющийся ресурс; d_j и D_j - минимальное и максимальное допустимые значения x_j.

Дадим теперь общую формулировку задачи линейного программирования.

Пусть S - система линейных ограничений (т.е. линейных уравнений или нестрогих линейных неравенств) с n переменными $x_1,x_2,\dots,x_n$, *а* $f(x)$ *- целевая функция вида* $f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n=(c,x)$ *(если через скалярное произведение двух векторов). Требуется решить задачу* $f(x) \to \min (\max)$ *при условиях S.* Обычно S включает в себя условия неотрицательности переменных $x_1\geq 0, x_2\geq 0,\dots,x_n\geq 0$, что вытекает из их реального смысла (эти условия называются *тривиальными* ограничениями). Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее намеченной цели называется *оптимальным планом.*

С помощью этих задач можно решать достаточно большой класс задач распределения ресурсов не только в планировании и управлении производством и экономическими объектами, но и в проектировании изделий и технологических процессов.

Если сравнить систему (2.23) с общей постановкой задачи оптимизации (1.3), то можно утверждать, что задача линейного программирования представляет собой частный случай задачи оптимизации.

Наиболее часто встречаются две разновидности задачи линейного программирования, каждую из которых нетрудно преобразовать в другую.

1. *Каноническая задача линейного программирования*. Все ограничения являются уравнениями (кроме условий $x_j\geq 0$). Примером является транспортная задача.

2. *Стандартная задача линейного программирования*. Все ограничения состоят только из неравенств.

Для того, чтобы преобразовать стандартную задачу (2.1) в каноническую, вводятся m дополнительных переменных $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$, которые называют обычно *балансовыми*, и каждое из нетривиальных неравенств вида $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n\leq b_i$ заменяется двумя ограничениями: уравнением $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+b_i=x_{n+i}$ и условием $x_{n+i}\geq 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

2.4. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод решения задачи линейного программирования в его непосредственной форме применяется только в случае двух переменных. Выпуклая многогранная область X, заданная системой линейных ограничений для двух переменных, является выпуклой многоугольной областью, а угловые точки X называются вершинами [9].

При описании графического метода используется понятие линии уровня: *линией уровня* функции $f(x,y)$ называется множество всех точек (x,y), в которых функция принимает некоторое постоянное значение α. В случае линейной функции $f(x,y)=c_1x+c_2y$ все линии уровня являются прямыми, перпендикулярными общему вектору нормали $\bar{c}=(c_1;c_2)$.

Графический метод состоит в следующем.

1. Строится множество X всех допустимых решений.
2. Если $X=\varnothing$, то задача неразрешима.
3. Если $X\neq\varnothing$, то рассматриваются прямые уровня $f=\alpha$ при монотонном изменении α от $-\infty$ до $+\infty$. При увеличении α прямая $f=\alpha$ смещается параллельно в направлении вектора $\bar{c}$. Если A - первая точка встречи прямой уровня с областью X , $f(A)=\alpha_0$, то прямая уровня $f(x)=\alpha$ при $\alpha<\alpha_0$ не имеет общих точек с X. Откуда следует, что $\alpha_0=\min f$ на X. Аналогичным образом, если A - последняя точка пересечения линии уровня с X, то $f(A)=\max f$ на X.

Если первой точки пересечения линии уровня с X не существует, то $\min f=-\infty$, и задача на минимум не разрешима. Если не существует последней точки пересечения, то $\max f=+\infty$, и задача на максимум неразрешима. Из чертежа всегда видно, разрешима задача или нет, и имеются ли у допустимого множества вершины. При ограниченной целевой функции допустимое множество X без вершин может быть только двух видов:

1) X - полуплоскость;

2) X -область, ограниченная двумя параллельными прямыми.

Если у X есть хотя бы одна вершина, то (при ограниченной целевой функции) оптимальное решение может быть найдено методом перебора вершин. Для вычисления целевой функции в некоторой вершине V допустимого множества необходимо знать точное значение её координат. Для определения координат вершины V решается система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{i1}x + a_{i2}y = b_i, \\ a_{j1}x + a_{j2}y = b_j, \end{cases}$$

где i и j - номера прямых, ограничивающих область X, на пересечении которых находится вершина V. Графический метод позволяет избежать полного перебора вершин, так как если из чертежа видно, что A - единственная первая (или последняя) точка пересечения линии уровня с X, то незачем вычислять координаты других вершин, так как A - единственное оптимальное решение.

Решим графическим методом рассмотренную ранее задачу о банке:

1) $x+y\leq 100;$

2) $x\geq 35;$

3) $y\geq 0,3(x+y);$

4) $x\geq 0;$

5) $y\geq 0;$

$f=0,15x+0,1y\rightarrow max.$

Построим в плоскости x,y полуплоскости, заданные неравенствами 1)-5). Общая их часть (заштрихованный треугольник на рис. 3.14) - область допустимых решений. Построим вектор $\bar{c}$ и прямую уровня, перпендикулярную вектору $\bar{c}$ и проходящую через начало координат. Перемещая эту прямую параллельно в направлении вектора $\bar{c}$, найдём последнюю точку пересечения прямой уровня и допустимого множества X.

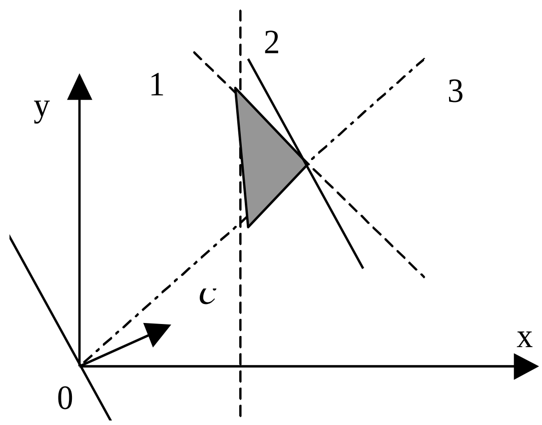


Рис. 2.14. *Графический метод решения задачи линейного программирования*

Найденная точка максимума находится на пересечении прямых 1 и 3. Её координаты получаются путём решения системы

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ y = 0{,}3(x + y). \end{cases}$$

Точка максимума здесь равна *(70,30)*. Максимальная прибыль: $f_{max}=f(70,30)=0{,}15\cdot 70+0{,}1\cdot 30=13{,}5$.

2.5. Симплекс-метод решения задачи ЛП

Определение координат вершин *области допустимых решений* (ОДР) в реальных задачах со многими переменными и ограничениями связано с очень большими объемами вычислений. Поэтому для аналитического решения задач линейного программирования разработан специальный алгоритм направленного перебора вершин, называемый *симплекс-методом,* с переходом от одной вершины к другой в направлении, при котором значение целевой функции от вершины к вершине улучшается. Определение значения целевой функции и переменных в одной вершине считается *итерацией*. Число итераций зависит от числа искомых переменных и в реальных задачах может измеряться сотнями. Вручную с помощью симплекс-метода можно решать задачи, содержащие не более десяти переменных. В реальных ситуациях без ЭВМ и прикладных программ вычислений поиск оптимального решения практически невозможен.

Так как оптимальное решение задачи линейного программирования соответствует вершине ОДР, то можно сформулировать следующие выводы:

1) если оптимальным решением являются координаты вершин ОДР, то сколько вершин имеет ОДР, столько оптимальных решений может иметь задача;

2) чем больше существует ограничений в модели задачи, тем больше будет число вершин и, следовательно, число оптимальных решений;

3) введение дополнительных ограничений никогда не улучшает оптимального решения (этот вывод особенно важен для практики планирования: если мы хотим улучшить принятую целевую функцию, т. е. результат работы, мы должны стремиться к тому, чтобы иметь как можно меньше ограничений).

Симплекс метод в его непосредственной форме предназначен для решения *канонической задачи линейного программирования.*

Рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями в форме уравнений [9]. Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

m линейных уравнений с n неизвестными и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2.3}$$

Среди неотрицательных решений системы (3.2) нужно найти такое, которое минимизирует функцию (3.3).

Для работы по симплекс-методу требуется, чтобы заданная система уравнений была приведена к *допустимому виду*. Это означает, что какие-то из неизвестных должны быть выражены через остальные неизвестные, причём *свободные члены этих выражений неотрицательны*.

Пример допустимой системы:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 + 7x_5 + 5, \\ x_2 = 3x_4 + 6x_5 + 4, \\ x_3 = -x_4 + 2x_5, \end{cases} \qquad (2.4)$$

здесь свободные члены равны соответственно 5,4 и 0.

Неизвестные в допустимом виде системы, которые выражены через остальные, называются *базисными* (будем обозначать буквой Б), а весь набор этих неизвестных - *допустимым базисом неизвестных*. Остальные неизвестные называются *небазисными* или *свободными*. В системе (3.4) допустимый базис образован неизвестными x_1, x_2, x_3; неизвестные x_4 и x_5 - свободные.

После того, как выделен допустимый базис неизвестных, можно в выражении (3.3) для целевой функции заменить каждое базисное неизвестное его выражением через свободные. Тогда функция f запишется через одни лишь свободные неизвестные. Например, если $f=5x_1-7x_2+x_3-x_4-x_5+2$, а система ограничений приведена к виду (3.4), то новое выражение для f будет

$$f=5(-2x_4+7x_5+5)-7(3x_4+6x_5+4)+(-x_4+2x_5)-x_4-x_5+2=-33x_4-6x_5-1.$$

Чтобы упростить дальнейшие записи, будем считать, что имеется всего пять неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и система ограничений приведена к допустимому виду с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta, \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + \gamma, \\ (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0), \end{cases} \tag{2.5}$$

а целевая функция - к виду

$$f = \delta_4 x_4 + \delta_5 x_5 + \delta. \tag{2.6}$$

Положим все свободные неизвестные равными нулю: $x_4=0, x_5=0$, и найдём из системы (2.5) значения базисных неизвестных: $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, $x_3=\gamma$.

Полученное таким путём решение системы (2.5):

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0) \tag{2.4}$$

будет неотрицательным. Оно называется ***базисным решением***, отвечающим базису $Б=\{x_1, x_2, x_3\}$. Для базисного решения значение функции f равно $f_Б=\delta$.

При решении задачи о минимизации функции (2.6) с ограничениями (2.5) и условиями неотрицательности переменных, возможны **три случая**.

1. *Все коэффициенты при свободных неизвестных в выражении для f неотрицательны:* $\delta_4 \geq 0$, $\delta_5 \geq 0$.

Тогда для любого неотрицательного решения системы (2.5) имеем $\delta_4 x_4 \geq 0$, $\delta_5 x_4 \geq 0$, значит $f=\delta_4 x_4+\delta_5 x_5+\delta \geq \delta$. Таким образом, $\min f=\delta$, т.е. *базисное решение является оптимальным* - задача решена.

2. *Имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором в выражении f отрицателен, а все коэффициенты при этом неизвестном в уравнении (2.5) - неотрицательны.*

Пусть, например, $\delta_4<0$, $\alpha_4 \geq 0$, $\beta_4 \geq 0$, $\gamma_4 \geq 0$. Тогда, отправляясь от базисного решения (2.7), будем наращивать значение x_4 (не меняя $x_5=0$). Значения базисных неизвестных также будут меняться. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha \geq \alpha \geq 0, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta \geq \beta \geq 0, \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma \geq \gamma \geq 0, \end{cases}$$

т.е. решение $(x_1,x_2,x_3,x_4,0)$ будет оставаться неотрицательным. При этом $f = \delta_4 x_4 + \delta$, и ввиду $\delta < 0$ значение f с ростом x_4 будет неограниченно уменьшаться. Таким образом, в этом случае $\min f = -\infty$, т.е. *задача решения не имеет*.

3. Имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором в f отрицателен, но и среди коэффициентов при этом неизвестном в уравнениях (2.5) также есть отрицательные.

В этом случае осуществляется *шаг (итерация)*, а именно, от базиса Б переходим к новому базису Б$'$, с таким расчетом, чтобы значение $f_Б \leq f_{Б'}$. Конкретно, содержание шага заключается в следующем. Пусть, например,

$$\alpha_4 < 0, \beta_4 < 0, \gamma_4 \geq 0. \tag{2.8}$$

Если снова, как в случае 2, наращивать значение x_4, то будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_4 x_4 + \alpha, \\ x_2 = \beta_4 x_4 + \beta, \\ x_3 = \gamma_4 x_4 + \gamma. \end{cases}$$

Ввиду (2.8) значения x_1 и x_2, будут уменьшаться, а значение x_3 будет оставаться неотрицательным. При наращивании x_4 наступит момент, когда одно из неизвестных x_1 или x_2 обратится в нуль: для x_1- при $x_4 = -\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$, а для x_2 - при $x_4 = -\dfrac{\beta}{\beta_4}$. Выберем из этих отношений наименьшее. Пусть, например, это будет $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4} = \rho$. Тогда наращивание x_4 возможно только от 0 до ρ. При $x_4 \geq \rho$, $x_1 \leq 0$, что недопустимо. Полагая в системе (2.5) $x_4 = \rho$ и $x_5 = 0$, получим неотрицательное решение

$$x_1 = 0, x_2 = \beta_4 + \beta, x_3 = \gamma_4\rho + \gamma, x_4 = \rho, x_5 = 0, \tag{2.9}$$

для которого значение функции $f = \beta_4\rho + \beta \le \beta$ (т.к. $\beta_4 < 0$ и $\rho \ge 0$).

Поскольку с ростом x_4 первым из базисных неизвестных обращается в нуль x_1, переходим к новому базису $Б' = \{x_4, x_2, x_3\}$, выражая x_4 через x_1 из первого уравнения (2.5):

$$x_4 = \frac{1}{\alpha_4}x_1 - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}x_5 - \frac{\alpha}{\alpha_4}. \tag{2.10}$$

Подставляя это выражение для x_4 в остальные два уравнения (2.5), получаем систему вида:

$$\begin{cases} x_4 = a_1x_1 + a_5x_5 + a, \\ x_2 = b_1x_1 + b_5x_5 + b, \\ x_3 = c_1x_1 + c_5x_5 + c, \end{cases} \tag{2.11}$$

с базисным решением

$$x_1 = 0, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = a, x_5 = 0, \tag{2.12}$$

которое должно совпадать с (2.9), поскольку, как видно из (2.10) и (2.11), двух разных решений с $x_1=0$ и $x_5=0$ быть не может. Новое значение функции $f_{Б'} = \beta_4\rho + \beta \le \beta$ (т.к. $\beta_4 < 0$ и $\rho \ge 0$). Таким образом, с переходом к новому базису $Б'$ система ограничений сохранила допустимую форму (2.11), где $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$, а значение функции f уменьшилось или осталось прежним. Осуществив подстановку в (2.6) значения x_4, заданного формулой (2.10), получим новое выражение для f:

$$f = d_1x_1 + d_5x_5 + d. \tag{2.13}$$

Если для полученной задачи (2.11), (2.13) снова имеет место случай 3, то делаем следующий *шаг*, до тех пор пока не придём к одному из случаев 1 или 2, когда процесс заканчивается.

Симплекс-таблицы. Весь процесс вычислений по симплекс-методу можно записать в виде последовательности однотипно заполняемых таблиц, причём каждому шагу будет соответствовать переход к новой таблице. Описание симплекс-таблицы, которая служит основой для решения задач линейного программирования, осуществим на примере задачи (2.5), (2.6).

Для заполнения первой таблицы необходимо в каждом из уравнений (2.5) и (2.6) перенести все члены, кроме свободного, из правой части в левую, т.е. записать (2.5) и (2.6) в виде:

$$\begin{cases} x_1 \ldots\ldots - \alpha_4 x_4 - \alpha_5 x_5 = \alpha, \\ \ldots x_2 \ldots - \beta_4 x_4 - \beta_5 x_5 = \beta, \\ \ldots\ldots x_3 - \gamma_4 x_4 - \gamma_5 x_5 = \gamma, \\ f - \delta_4 x_4 - \delta_5 x_5 = \delta. \end{cases} \tag{2.14}$$

В системе (2.14) столбцы коэффициентов при базисных неизвестных образуют единичный базис.

Симплекс-таблица составляется следующим образом: целевую функцию и базисные переменные запишем в первый столбец таблицы, а в остальные столбцы запишем свободные члены и коэффициенты перед свободными переменными.

Базисные неизвест-ные	Свобод-ные члены	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5
→ x_1	α	1	0	0	$\underline{\underline{-\alpha_4}}$	$-\alpha_5$
x_2	β	0	1	0	$-\beta_4$	$-\beta_5$
x_3	γ	0	0	1	$-\gamma_4$	$-\gamma_5$
f	δ	0	0	0	$-\delta_4$	$-\delta_5$

↑

Согласно изложенному ранее методу необходимо определить, имеются ли в последней строке таблицы (не считая свободного члена δ) положительные числа. Если таковых нет, то базисное решение (α,β,γ,0,0), отвечающее данному базису, является оптимальным, а $min\ f=\delta$ - задача решена. Предположим, что в последней строке имеется (не считая δ) положительное число δ_4. Отмечаем столбец в котором оно находится вертикальной стрелкой и просматриваем остальные числа столбца. Если среди них нет положительных, т.е. $\alpha_4 \geq 0$, $\beta_4 \geq 0$, $\gamma_4 \geq 0$, то имеем случай 2 – $min\ f=-\infty$, и процесс снова прекращается.

Пусть среди чисел отмеченного столбца (не считая последнего числа) имеются положительные числа. Тогда мы имеем случай 3 и должны сделать *шаг*. Если, например, $-\alpha_4 > 0$, $-\beta_4 > 0$, а $-\gamma_4 \leq 0$, то имеем те же предположения, что и в (2.8), при которых рассматриваются отношения $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$ и $-\dfrac{\beta}{\beta_4}$, и выбирается из них наименьшее. Пусть, например, это отношения $-\dfrac{\alpha}{\alpha_4}$, отвечающее строке таблицы с базисным неизвестным x_1. Отмечаем эту строку горизонтальной стрелкой. Элемент таблицы, стоящий в отмеченном столбце и отмеченной строке называется *разрешающим* элементом. В данном случае это $-\alpha_4$.

Теперь осуществляется перестройка таблицы с целью перехода к новому базису $\{x_4, x_2, x_3\}$. Для этого умножаем выделенную строку на такое число, чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица, т.е. умножаем на $\dfrac{1}{-\alpha_4}$. Это соответствует тому, что первое из уравнений в (2.14) разрешается относительно нового базисного неизвестного x_4. Полученную таким образом новую строку вписываем уже в новую таблицу снова в виде первой строки. Затем к каждой из остальных строк таблицы прибавляем вновь полученную строку, умноженную на такое число, чтобы в клетке отмеченного столбца появился нуль - это соответствует исключению неизвестного x_4 из остальных уравнений, а также из выражения для f. Преобразованные таким образом строки пишем в новую таблицу на место прежних. В результате получаем таблицу 2. К новой таблице применяется та же процедура до тех пор, пока процесс не остановится.

Пример 1. Решим задачу $f=x_4-x_5\to\min$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5, \\ x_i \geq 0 (i = 1,2.3.4.5). \end{cases} \tag{3.15}$$

Здесь неизвестные x_1,x_2,x_3 образуют базис, а функция f выражена через свободные неизвестные x_4 и x_5. Исходная таблица имеет вид:

Базисные неизвест-ные	Свобод-ные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1	-2
→ x_2	2	0	1	0	-2	$\underline{\underline{1}}$
x_3	3	0	0	1	3	1
f	0	0	0	0	-1	1

↑

Среди коэффициентов при свободных неизвестных в выражении f имеется отрицательное число при x_5; имеются также отрицательные коэффициенты при x_5 во втором и третьем уравнениях в (2.15). Следовательно, имеем случай 3. Для каждого из этих уравнений находим отношение свободного члена к коэффициенту при x_5, взятому со знаком минус. Получаем два отношения: $\frac{2}{1},\frac{3}{1}$, из которых меньшим является первое, отвечающее уравнению для x_2. Производим замену базиса по схеме x_2-x_5, т.е. вместо x_2 в базис вводится x_5 $\{x_1,x_5,x_3\}$. Заполнение следующей таблицы начинается со строки x_5. Таблица имеет вид:

Базисные неизвест-ные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

x_1	5	1	2	0	-3	0
x_5	2	0	1	0	-2	1
→ x_3	1	0	-1	1	$\underline{\underline{5}}$	0
F	-2	0	-1	0	1	0

↑

Теперь задача приведена к виду:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_4 - 2x_2, \\ x_5 = 2 + 2x_4 - x_2, \\ x_3 = 1 - 5x_4 + x_2, \\ f = -2 - x_4 + x_2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Для полученной задачи снова имеем случай 3, так как коэффициент при x_4 в выражении для f отрицателен и имеется отрицательный коэффициент при x_4 в уравнении для x_3, поэтому производим замену базиса по схеме x_3-x_4. Получаем следующую таблицу:

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	X_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
f	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

В этой таблице последняя строка (не считая свободного члена) не имеет положительных чисел. Значит, достигнуто оптимальное решение – *оптимальный план*:

$x_1=\frac{28}{5}$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=\frac{1}{5}$, $x_5=\frac{12}{5}$, а минимум функции $f=-\frac{11}{5}$.

Алгоритм работы по симплекс-методу.

1. Выделяем исходный допустимый базис и заполняем первую таблицу.
2. Если в последней строке полученной таблицы, кроме, быть может, первого числа, нет положительных чисел, то базисное решение является оптимальным – задача решена.
3. Пусть среди указанных в п.2 чисел имеется положительное число в строке x_j. Отмечаем столбец x_j вертикальной стрелкой. Просматриваем остальные числа этого столбца. Если среди них нет положительных чисел, то $min f = -\infty$ - задача решения не имеет.
4. Пусть среди просмотренных в п.3 чисел имеются положительные числа. Для каждого из таких чисел a составляем отношение $\frac{b}{a}$, где b – первое число в той же строке (свободный член). Из всех таких отношений выбираем наименьшее. Пусть оно соответствует строке базисного неизвестного x_i. Отмечаем эту строку горизонтальной стрелкой. Число a, стоящее в отмеченной строке и отмеченном столбце, называется *разрешающим элементом* таблицы.
5. Переходим к новой таблице. Для этого отмеченную строку умножаем на $\frac{1}{a}$ (чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица) и пишем её на месте прежней. К каждой из остальных строк таблицы прибавляем строку, полученную на месте отмеченной строки, умноженную на такое число, чтобы элемент, стоящий в отмеченном столбце, обратился в 0. Полученную строку пишем на место прежней.
6. С новой таблицей возвращаемся к выполнению п.2.

Признаки допустимого и оптимального решений. Для задачи линейного программирования, записанной в виде симплекс-таблицы, можно сформулировать признаки допустимого и оптимального решений. Решение является *допустимым*, если в симплекс-таблице в столбце свободных членов, все значения, относящиеся к базисным переменным, являются неотрицательными. *Оптимальное решение* связано с *минимумом* или с *максимумом* целевой функции и определяется по двум признакам: а) целевая функция имеет *минимальное* значение, если решение является *допустимым* (т.е. свободные члены неотрицательны) и все элементы в строке целевой функции – *отрицательны* (свободный член при этом не учитывается); целевая функция имеет *максимальное* значение, если решение является *допустимым* и все элементы в строке целевой функции - *положительны* (свободный член не рассматривается); б) значение целевой функции при этом равняется свободному члену.

3. Теория двойственности в анализе оптимальных решений экономических задач

С каждой задачей линейного программирования связана другая задача, называемая двойственной по отношению к исходной. Рассмотрим пример, показывающий, как в реальной экономической ситуации появляются двойственные задачи линейного программирования.

На некотором предприятии после выполнения годового плана возник вопрос: как поступить с остатками сырья - наладить из оставшегося сырья производство изделий ширпотреба или продать? При исследовании любой из этих двух возможностей необходимо иметь точные исходные данные. Пусть имеются два вида сырья S_1 и S_2, остатки которого составляют соответственно 35 и 20 единиц. Из этого сырья можно наладить производство трёх видов товаров: T_1, T_2, T_3. От реализации единицы каждого вида товара завод получит прибыль: от T_1 - 7 руб., T_2 - 6 руб., T_3 -18 руб. Нормы расхода сырья на производство единицы каждого из товаров T_1, T_2, T_3 вместе с данными о прибыли и запасах, представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Виды товаров	S_1	S_2	Прибыль

T_1	1	2	7
T_2	1	1	6
T_3	5	2	18
Запасы	35	20	

При исследовании первой возможности - наладить выпуск товаров, необходимо задать план выпуска товаров. План выпуска задаётся тремя числами x_1, x_2, x_3, где x_i - количество единиц товара T_i, которое следует произвести. Неизвестные x_i должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &x_i \geq 0, \\ &i = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 35, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20. \end{cases} \tag{3.2}$$

Смысл каждого из неравенств (3.2) заключается в следующем: количество единиц каждого вида сырья - S_1 или S_2, которое расходуется на выпуск x_1 единиц T_1, x_2 единиц T_2 и x_3 единиц T_3, не должно превышать его запаса.

Прибыль, которую получит предприятие от реализации плана (x_1,x_2,x_3) выпуска товаров определяется функцией цели $f = 7x_1+6x_2+18x_3$ (руб.), которую нужно максимизировать, т.е. решить задачу линейного программирования: $f \to max$, при условиях (3.1) и (3.2).

Назовём эту задачу *задачей 1.*

При исследовании второй возможности возникает вопрос: по каким ценам продавать сырьё? Справедливое требование к ценам со стороны продавца состоит в том, что выручка от продажи сырья должна быть не меньше, чем прибыль от продажи изготовленного из него товара. Если обозначить через y_i цену единицы сырья S_i, то получим следующие системы неравенств:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \tag{3.1$'$}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 7, \\ y_1 + y_2 \geq 6, \\ 5y_1 + 2y_2 \geq 18. \end{cases} \qquad (3.2')$$

Что касается покупателя, то с его стороны требуется сократить до минимума расходы на покупку сырья, т.е. величины функции $\varphi=35y_1+20y_2$. Следовательно, необходимо решить задачу линейного программирования: $\varphi \to min$ при условиях (3.1′), (3.2′).

Назовём эту задачу *задачей 1′*.

Для большей отчётливости сопоставим формулировки задач 1и 1′ (табл. 3.2; 3.3)

Таблица 3.2

Задача 1	Задача 1′
$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ (3.1)	$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \end{cases}$ (3.1′)
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 35, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20, \end{cases}$ (3.2)	$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 7, \\ y_1 + y_2 \geq 6, \\ 5y_1 + 2y_2 \geq 18. \end{cases}$ (3.2′)
$f=7x_1+6x_2+18x_3 \to max.$	$\varphi=35y_1+20y_2 \to min.$

В более общей форме:

Таблица 3.3

Задача 1	Задача 1′
$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \end{cases}$ (3.1)	$\begin{cases} y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \end{cases}$ (3.1′)
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_2, \end{cases}$ (3.2)	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq c_3, \end{cases}$ (3.2′)
$f=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \to max.$	$\varphi=b_1y_1+b_2y_2 \to min.$

Задачи 1 и 1′ называются *двойственными* друг другу.

Если ввести в рассмотрение матрицу из коэффициентов при неизвестных в системе (3.2) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, а также матрицы-столбцы

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, то получим матричную форму записи задач (табл. 3.4)

Таблица 3.4

Задача 1	Задача 1′
$X \geq 0$ (3.1) $AX \leq B$ (3.2) $f=C^TX \to max.$	$Y \geq 0$ (3.1′) $A^TY \geq C$ (3.2′) $\varphi=B^TY \to min.$

Для того чтобы записать двойственную задачу, нужно учитывать следующее.

1.Если первая задача имеет размеры $m \times n$ (m ограничений с n неизвестными), то вторая – размеры $n \times m$.

2.Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи, называемая *двойственной переменной*. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи; так, если в исходной системе имеется три переменных, то двойственная задача также должна иметь три ограничения.

3. Матрица коэффициентов при двойственных переменных в ограничениях двойственной задачи является *транспонированной матрицей* коэффициентов при переменных, состоящих в ограничениях. Так, если в исходной задаче имеется два ограничения, то матрица их коэффициентов A и ее транспонированный аналог A^T (столбцы превращаются в ряды) имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \\ a_{12}\, a_{22} \\ a_{13}\, a_{23} \end{pmatrix}.$$

4. Если в исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств типа ($\leq$) *меньше*, то в двойственной они изменяются на противоположные - типа *больше* ($\geq$).
5. Правые части ограничений в двойственной задаче равняются коэффициентам при переменных целевой функции в исходной задаче, а коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равняются правым частям ограничений исходной задачи.
6. Максимизация целевой функции исходной задачи заменяется минимизацией целевой функции двойственной задачи.

4. Задачи многокритериальной оптимизации

Задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$$Z(\overline{X}) = \langle Z_1(\overline{X}), Z_2(\overline{X}), \ldots, Z_m(\overline{X}), \rangle \to \max, \tag{4.1}$$

$$\overline{X} \in Q. \tag{4.2}$$

Здесь i-ый частный критерий обозначен через $z_i(\overline{X})$, где $\overline{X}$ - допустимое решение, а область допустимых решений – через Q.

В процессе решения задач многокритериальной оптимизации предварительно проводят экспертные оценки, как самих критериев, так и взаимоотношений между ними, и на основе этих оценок выбирают один из следующих методов решения:

- оптимизация одного признанного наиболее важным критерия, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;
- упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них с помощью *метода последовательных уступок;*

• сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес.

Решение задачи многокритериальной оптимизации (4.1), (4.2) должно принадлежать пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач, которое обычно оказывается пустым, поэтому рассматривается обычно множество *эффективных решений – оптимальных по Парето.* Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшились.

Определение. *Вектор* $\overline{X}^* \in Q$ *называется эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (3.1), (3.2) если не существует такого вектора* $\overline{X} \in Q$, *что*

$$Z_i(\overline{X}) \geq Z_i(\overline{X}^*), i = \overline{1, m}, \qquad (4.3)$$

причём хотя бы для одного значения i имеет место строгое неравенство.

Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т.е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть *областью Парето*, или *областью компромиссов*, а принадлежащие ей решения – *эффективными*.

5. Нелинейное программирование

Из методов математического программирования наиболее сложными считаются методы нелинейного программирования. *Задача нелинейного программирования* формулируется так же, как и общая задача оптимального программирования:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \qquad (5.1)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)(\leq, =, \geq) d_i, i = \overline{1, m}; \qquad (5.2)$$

$$a_j \geq x_j \geq b_j,\ j = \overline{1,n}. \qquad (5.3)$$

где a_j, и b_j, — нижнее и верхнее предельно допустимые значения x_j, причём целевая функция F и(или) хотя бы одна из функций g_i являются нелинейными. Если в ограничениях (5.2) стоит знак равенства, то их называют ещё *уравнениями связи.*

У произвольной задачи нелинейного программирования отсутствует некоторые или все свойства задачи линейного программирования. В задачах линейного программирования экстремум целевой функции находится только на границе, что не является справедливым для нелинейных задач. Поэтому наибольшее или наименьшее значение функции без учета того, где находится такое значение (внутри заданного интервала или на его границе), называют не экстремумом, а *оптимумом*. Оптимум — более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум существует всегда, причем он может быть как локальным, так и глобальным.

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами *безусловной оптимизации* называются такие, в которых задается лишь одна целевая функция F – (5.1), без указания ограничений и граничных условий (эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда). В этих задачах понятия оптимума и экстремума совпадают, и для нахождения оптимума применяют методы нахождения экстремума.

Задачами *условной оптимизации* называются задачи, в которых кроме целевой функции задаются некоторые дополнительные условия и ограничения - (5.2) – (5.3). Ограничения могут быть заданы в виде, как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его, подтверждая тем самым вывод, сделанный для задач линейного программирования, что введение дополнительных условий *не улучшает* оптимального решения, а в ряде случаев приводит к *несовместности.*

Аналитические методы решения задач безусловной оптимизации заключаются в поиске *экстремума функции F* - (5.1), который находится (как уже рассматривалось ранее) в точке с координатами, определяемыми в результате решения следующей системы уравнений:

$$\partial F / \partial x_1 = 0; \partial F / \partial x_2 = 0, \ldots, \partial F / \partial x_n = 0. \qquad (5.4)$$

Эта точка называется *стационарной* точкой. Для получения достаточных условий существования экстремума следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка функции $F(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$d^2 f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(X)\Delta x_i \Delta x_j .$$

В стационарной точке X^0 *функция* $f(X)$ *имеет максимум, если* $d^2f(X^0)<0$, *и минимум, если* $d^2f(X^0)>0$, *при любых* Δx_i *и* Δx_j, *не обращающихся в нуль одновременно.*

Вектор столбец, составленный из частных производных функции $F=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\Delta f(x_j) = \begin{vmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \ldots \\ \partial f / \partial x_n \end{vmatrix}, \qquad (5.5)$$

называется *градиентом функции* $f(x_j)$. Градиент показывает направление наискорейшего увеличения функции. Вектор, противоположенный градиенту, называют *антиградиентом,* он показывает направление скорейшего уменьшения функции. Численной мерой *градиента,* как и любого вектора, является модуль, определяемый как:

$$\left|\Delta f(x_j)\right| = \left[(\partial f / \partial x_1)^2 + (\partial f / \partial x_2)^2 + \ldots + (\partial f / \partial x_n)^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{n}(\partial f / \partial x_j)^2\right]^{1/2}.$$

Если обозначить модуль градиента через

$$\varepsilon_M = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\partial f / \partial x_j \right)^2 \right]^{1/2},$$

то признаком экстремума является условие $\varepsilon_M=0$.

Наиболее простая задача условной оптимизации имеет вид:

$$F = f(x_j) \to \min; a_j \le x_j \le b_j; j = \overline{1,n}, \qquad (5.6)$$

(если решается задача поиска максимума функции F, то это всегда равнозначно поиску минимума функции $-F$). При решении такой задачи применятся тот же алгоритм, что и в задачах безусловной оптимизации. Для нахождения стационарной точки также решается система уравнений (5.4). Если при решении этой системы какое-либо из значений переменной x_j выходит на (или за) нижнюю границу, то в качестве оптимального принимается значение x_j равное a_j, и поиск продолжается по остальным переменным; аналогично осуществляется поиск для верхней границы.

Пусть в общем случае задача условной оптимизации имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} F = f(x_j) \to \min; \\ g(x_j) = 0; \\ a_j \le x_j \le b_j, \; j = \overline{1,n}. \end{array}\right\} \qquad (5.7)$$

Известен ряд достаточно сложных методов решения подобных задач. Один из таких методов называется *методом штрафных функций*; суть его заключается в следующем. От задачи условной оптимизации (5.7) переходят к такой задаче, в которой минимизируется новая целевая функция, включающая, кроме заданной целевой функции $f(x_j)$, заданные ограничения $g(x_j)$. Новая целевая функция записывается следующим образом:

$$\Phi(X) = f(X) + \Psi(g(X)) \to \min(\max), \qquad (5.8)$$

где $\Psi(g(X))$ - штрафная функция.

Вводимая штрафная функция должна удовлетворять следующим требованиям:

$\Psi(g_i(x_j)) = 0$, если x_j находится в области допустимых решений;
$\Psi(g_i(x_j)) > 0$, если x_j находится вне области допустимых решений.

Штрафная функция может иметь следующий вид:

$$\Psi(g_i(x_j)) = M\sum_{i=1}^{m} g_i^2(x_j), \tag{5.9}$$

где M — большое число (например, если ожидаемое оптимальное значение целевой функции порядка единиц, то можно принять M= 1000).

Если x_j находится в области допустимых решений, то выполняются все ограничения и, значит, $g_i(x_j)=0$. При этом штрафная функция (5.9) равняется нулю, и новая целевая функция (5.8) оказывается равной заданной.

Если x_j, не находится в области допустимых решений, то не выполняются ограничения, т. е. $g_i(x_j)\neq 0$. Значит, $g_i^2(x_j) > 0$, а большое число M приводит к тому, что в новой целевой функции (5.8) штрафная функция (5.9) оказывается существенно больше заданной целевой функции $f\ (x_j)$. Поэтому в ходе минимизации благодаря большому градиенту в первую очередь уменьшается штрафная функция $\Psi(g_i(x_j))$, пока она не станет равной нулю (т. е. пока значения x_j не войдут в область допустимых решений или пока не будет найдено допустимое решение), а далее начинается процесс минимизации заданной целевой функции.

6. Целочисленное программирование

Задачи оптимизации, решением которых должны быть целые числа, называют задачами *целочисленного (дискретного) программирования.* В том случае, если ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют *целочисленной задачей линейного программирования,* если же хотя бы одна зависимость является нелинейной, задачу называют *целочисленной задачей нелинейного программирования.*

Огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный характер, что связано с физической неделимостью многих элементов расчёта. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплекс-методом, с последующим округлением до целых чисел. Такой метод оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объёма (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, среди которых можно выделить два направления: методы отсечения (отсекающих плоскостей) и комбинаторные методы.

*Метод отсекающих плоскостей (*известный как *метод Гомори)* состоит в построении дополнительных ограничений и применении двойственного симплекс-метода. Представление о комбинаторных методах даёт широко используемый на практике *метод ветвей и границ*.

С помощью *метода ветвей и границ* решаются задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В общем виде любая из этих задач может быть записана следующим образом: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{6.1}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = \overline{1,m}), x_j \geq 0, \tag{6.2}$$

$$x_j \equiv 0 \, (j = \overline{1,n}). \tag{6.3}$$

Как и при решении задачи методом Гомори, находится оптимальный план задачи без учёта целочисленности переменных с помощью симплекс-метода. Пусть им является план X_0. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то найдено искомое оптимальное решение задачи. Если среди компонента плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи, причём для всякого последующего плана $X - F(X_0) \geq F(X)$. Так как у плана X_0 имеются дробные числа, то пусть, например, это будет компонента x_{i0}. Тогда в оптимальном целочисленном плане её значение будет, по крайней мере, либо меньше, либо равно ближайшему меньшему целому числу K_{i0}, либо больше, либо равно ближайшему целому числу $K_{i0}+1$. Для нахождения этих чисел, решаются симплекс-методом следующие две задачи линейного программирования:

$$(I)\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{1,m}), \\ x_{i0} \leq K_{i0}, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}); \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{1,m}), \\ x_{i0} \geq K_{i0} + 1, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}); \end{cases}$$

Здесь возможен один из следующих четырёх случаев:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нём и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматривается вторая задача и в её оптимальном плане выбирается одна из компонент, значение которой равно дробному числу, и строятся две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет целочисленный оптимальный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляются значения целевой функции на этих планах и сравниваются между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно её значению на плане, среди компонент которых есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи, и он, вместе со значением целевой функции на нём даёт искомое решение. Если значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляются значения целевой функции на этих планах и сравниваются между собой. Далее рассматривается та из задач, для которой значение целевой функции больше, и в её оптимальном плане выбирается одна из компонент, значение которой равно дробному числу, и строятся две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи (6.1)-(6.2), а каждая соединённая с ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. На каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение целевой функции наибольшее. Если на некотором шаге будет получен план, имеющих целочисленные компоненты, и значение функции на нём будет больше или равно значений функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нём является оптимальным.

Метод ветвей и границ имеет более простую логическую схему расчётов, чем метод Гомори и более удобен при решении с использованием компьютера. Схему расчёта задач на основе метода ветвей и границ часто называют *принятием решений на дереве возможных вариантов*.

7. Сетевые модели

Сетевой моделью (другие названия: *сетевой график, сеть)* называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта, в их логической и технологической последовательности и связи. Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме, позволяет, во-первых, более чётко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ. Таким образом, методы сетевого моделирования относятся к методам принятия оптимальных решений.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. *Графом* называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются *вершинами* (отображаются кружочками, точками и др.), и множества пар вершин, которые называются *ребрами* (дугами, соединяющими вершины графа). Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т.е. на каждом ребре задаётся направление, то граф называется *ориентированным*; в противном случае – *неориентированным*. Последовательность неповторяющихся рёбер, ведущая от некоторой вершины к другой, образует *путь*. Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий, в противном случае граф называется *несвязным*. В экономике чаще всего используются два вида графов: дерево и сеть. *Дерево* представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (*корень*) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются *ветвями*. *Сеть* – это ориентированный конечный связный граф, имеющий начальную вершину (*источник*) и конечную вершину (*сток*). Таким образом, сетевая модель представляет собой граф вида «сеть».

С помощью *сетевого планирования и управления* (СПУ) решаются различные оптимизационные экономические задачи, связанные с пространственным перемещением объектов, временным исполнением работ субъектами и др. Объектом управления в СПУ являются коллективы исполнителей, располагающих определёнными ресурсами и выполняющих определённый комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например, разработку нового изделия. Основой СПУ является сетевая модель (СМ), в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий отражающих процесс достижения определённой цели. Она может быть представлена в виде графика или таблицы.

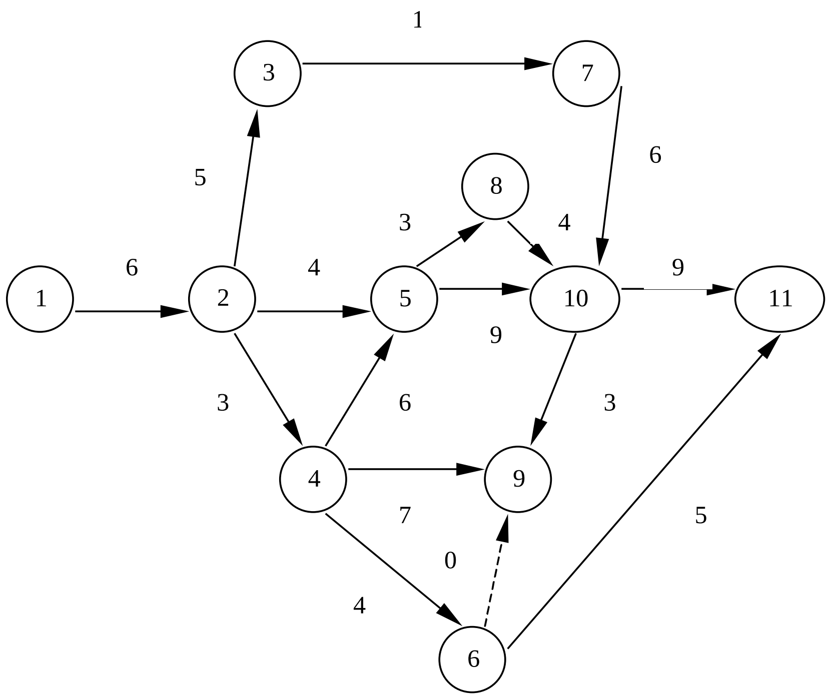


Рис. 7.1. Сетевая модель.

Основные понятия сетевой модели: событие, работа и путь. На рис. 7.1 графически представлена СМ, состоящая из 11 событий и 16 работ, продолжительность выполнения которых указана над работами.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключённых в скобки чисел *(i,j)*, где *i* – номер события, из которого работа выходит, а *j* – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет предельную продолжительность $t(i,j)$. Например, запись $t(2,5)=4$ означает, что работа *(2,5)* имеет продолжительность *4* единицы. К работам относятся также такие процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени выполнения. Они заключаются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой; такие работы называются *фиктивными* и в графике изображаются пунктирными стрелками.

Событиями называются результаты выполнения одной или нескольких работ. Они не имеют протяжённости во времени. Они не имеют протяжённости во времени. Событие свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. События обозначаются одним числом и при графическом представлении СМ изображаются кружком (или иной геометрической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер $(i=1,2,\ldots,N)$. В СМ имеется начальное событие (с номером *1*), из которого работы только выходят, и конечное событие (с номером *N*), в которое работы только входят.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную вершины, например, в приведённой выше модели путями являются $L_1=(1,2,3,7,10,11)$, $L_2=(1,2,4,6,11)$ и др. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называют критическим и обозначают $L_{кр}$, а его продолжительность – $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведёт к срыву всего комплекса работ.

СМ имеет ряд характеристик, которые позволяют определить степень направленности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов. Однако перед расчётом СМ следует убедиться, что она удовлетворяет следующим основным требованиям [1]:

1. События правильно пронумерованы, т.е. для каждой работы *(i,j)* $i<j$. При невыполнении этого требования необходимо использовать алгоритм перенумерации событий, который заключается в следующем:

- нумерация событий начинается с исходного события, которому присваивается №1;
- из исходного события вычёркиваются все исходящие из него работы (стрелки), и на оставшейся сети находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему и присваивается №2;
- затем вычёркивают работы, выходящие из события №2, и вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа, и ему присваивают №3, так продолжается до завершающего события, номер которого должен быть равен количеству событий в сетевом графике.
- если при очередном вычёркивании работ одновременно несколько событий не имеют, входящих в них работ, то их нумеруют очередными номерами в произвольном порядке.

2. Отсутствуют тупиковые события (кроме завершающего его), т.е. такие, за которыми не следует хотя бы одна работа.

3. Отсутствуют события (за исключением исхода его), которым не предшествует хотя бы одна работа.

4. Отсутствуют циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

Для событий рассчитывают три характеристики: ранний и поздний срок совершения события, а также его резерв.

Задача поиска кратчайшего пути. Пусть данная задача формулируется следующим образом: из пункта i в пункт j ведет много дорог, на одних из которых движение одностороннее, а на других - двустороннее (длина пути между пунктами указывается на каждой дуге). Требуется найти кратчайший путь из пункта i в пункт j.

При составлении математической модели задачи должно соблюдаться условие непрерывности маршрута и одноразовости посещения пунктов (в каждый пункт должна входить и выходить только одна дуга). Это требование выполняется, если соблюдаются условия:

а) для дуг, входящих в пункт,

$$N_{iBx} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ki} = 1,$$

где δ_{ki} соответствует дуге, выходящей из пункта k и входящей в пункт i; $\delta_{ki} = 1$, если дуга k-i входит в маршрут; $\delta_{ki} = 0$ - в противном случае;

б) для дуг, выходящих из пункта,

$$N_{jBBx} = \sum_{j=1}^{p} \delta_{ij} = 1,$$

где δ_{ij} соответствует дуге, выходящей из пункта i и входящей в пункт j, $\delta_{ij} = 1$, если дуга i-j входит в маршрут; $\delta_{ij} = 0$ – в противном случае.

Все пункты маршрута подразделяются на: начальный, промежуточный и конечный, и для них должно выполняться условие:

$$N_{iBx} - N_{jBBx} = \begin{cases} 1 - & \text{для начального пункта;} \\ 0 - & \text{для промежуточного пункта;} \\ 1 - & \text{для конечного пункта.} \end{cases}$$

Если необходимо, чтобы маршрут имел при этом и кратчайшую длину, необходимо добавить следующую целевую функцию:

$$F=\sum_i\sum_j c_{ij}\delta_{ij}\to\min,$$

где c_{ij} - длина пути, а суммирование производится по всем дугам.

Объединяя ограничения и целевую функцию, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned}&F=\sum_i\sum_j c_{ij}\delta_{ij}\to\min;\\&\sum_{ki=1}^{n}\delta_{ki}-\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}=\begin{cases}1\\0,\delta_{ij}\ge 0;\\1\end{cases}\end{aligned}\right\}\qquad(6.19)$$

1 — для начального пункта;

0 — для промежуточного пункта;

1 — для конечного пункта.

На переменные δ_{ij} здесь достаточно наложить только требование неотрицательности. Требование же, чтобы $\delta_{ij}=0$ или $\delta_{ij}=1$**,** можно не накладывать, так как такая задача из-за ограничений обеспечивает получение в решении для δ_{ij} только либо нуля, либо единицы. Таким образом, приведенная система является обычной задачей линейного программирования, которую можно реализовать без наложения требований целочисленности.

Реально существующие длинные маршруты трудно обозримы, сплошной же перебор всевозможных вариантов - весьма трудоемкая процедура, поэтому для нахождения кратчайшего пути необходимо решение задачи линейного программирования. В общем случае характеристика дуги *i-j* может иметь самый различный смысл: продолжительность, стоимость, трудоемкость и т.д. В целом к задаче выбора кратчайшего пути или маршрута сводятся самые разнообразные задачи, включая задачу выбора оптимального маршрута при разработке технологических процессов.

Основная литература

1. Шапкин А. С. Мазаева Н. П. Математические методы и модели исследования операций : Учебник для вузов. - 4-е изд. - М. : Дашков и К°, 2007. - 395 с. – 20 экз.
2. Катулев А. Н. Математические методы в системах поддержки принятия решений: Учебное пособие для вузов. - М. : Высшая школа, 2005. – 310 с. – 20 экз.

Дополнительная литература

3. Яворский В.В. Оптимизация и математические методы принятия решений: Учебное пособие для вузов. - Томск : ТУСУР, 2006. - 215 с. - 8 экз.
4. Турунтаев Л.П. Оптимизация и математические методы принятия решений: учебное пособие: в 2 ч. **Ч. 1**. - Томск : ТМЦДО, 2010. - 210 с. - 13 экз.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А.. Методы оптимизации в примерах и задачах : Учебное пособие для втузов - 2-е изд., испр. . - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с. - 71 экз.