Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

В.А. Кологривов

Прикладные математические методы в радиотехнике

Учебно-методическое пособие
по контрольному заданию
и самостоятельной работе над дисциплиной
для студентов радиотехнических специальностей
заочного и вечернего факультета

2012

Кологривов В.А.
Прикладные математические методы в радиотехнике: Учебно-методическое пособие по контрольному заданию и самостоятельной работе над дисциплиной для студентов радиотехнических специальностей заочного и вечернего факультета. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. – 43 с.

Учебно-методическое пособие содержит задание по контрольной работе и краткие методические указания по его выполнению для дисциплины “Прикладные математические методы в радиотехнике”, необходимый теоретический материал, примеры решения конкретных задач и контрольные вопросы степени освоения дисциплины.
Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения высшего профессионального образования, по направлениям: «Радиотехника», «Телекоммуникации» и др.

АННОТАЦИЯ

В пособии сформулировано задание на контрольную работу по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”, даны краткие методические указания по выполнению, приведены необходимые теоретические сведения, проиллюстрирована методика исследования основных характеристик простейших звеньев первого порядка и приведены контрольные вопросы освоения дисциплины.

Методическое пособие предназначено для студентов заочного факультета специальности “Радиотехника”.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина “Прикладные математические методы в радиотехнике” (**ПММР**) введена в учебный план начальной подготовки студентов специальности “Радиотехника” и призвана привить навыки использования необходимого математического аппарата при решении прикладных радиотехнических задач. Умение математической формулировки прикладных задач и правильной интерпретации результатов исследований позволят достичь фундаментальности начальной общетехнической подготовки, что должно способствовать успешному изучению специальных дисциплин радиотехнического профиля.

Содержание дисциплины “Прикладные математические методы в радиотехнике” базируется на ранее полученных знаниях по дисциплинам “Высшая математика”, “Основы теории электрических цепей”, “Теория радиотехнических цепей и сигналов” и других. В дисциплине, с привлечением аппарата линейной алгебры, операционного исчисления и дифференциальных уравнений исследуются основные характеристики аналоговых и дискретных радиотехнических цепей, устройств и систем – передаточные (системные), частотные, переходные, импульсные. Рассмотрены основные понятия и определения, тестовые воздействия, методика построения соответствующей математической модели, рациональные методы аналитического решения и другие вопросы.

Основное внимание дисциплины сосредоточено на аналитическом исследовании основных характеристик радиотехнических устройств и цепей, ориентированном на рациональное моделирование этих характеристик в математических пакетах и системах для инженеров и исследователей, таких как **MatCad, SciLab, MatLab, Maple-V** и другие. Так лабораторные работы по дисциплине проводятся в среде системы для инженерных и научных исследований – **MatLab** либо **SciLab,** имеющее простой входной язык программирования, богатую функциональную среду, развитые графические средства отображения результатов моделирования и содержащей специализированные пакеты - обработки сигналов, функционального моделирования линейных и нелинейных, аналоговых, дискретных и цифровых систем и другие.

В данном пособии, в соответствии с содержанием контрольной работы, отражены вопросы исследования аналоговых цепей и систем. В методическом пособии рассмотрены методы: узловых потенциалов определения передаточных и частотных характеристик; интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (операторный, Лагранжа и представления решения в форме Коши). Рассмотрены вопросы перехода от передаточной функции к соответствующему дифференциальному уравнению, определения начальных значений функции и ее производных, использования элементов обобщенных функций при постановке радиотехнических задач.

Используемые методы анализа и методика исследования радиотехнических цепей и устройств проиллюстрированы на конкретных примерах.

2 ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Найти **аналитические выражения передаточной, частотной и переходной характеристик** апериодического усилительного каскада на полевом транзисторе, включенным по схеме с общим истоком и представленного на рисунке 1.1.

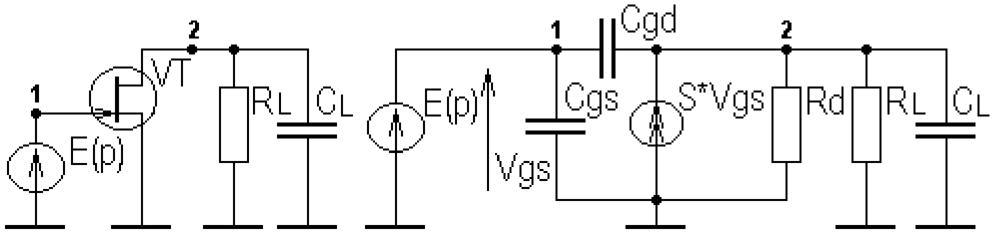


Рисунок 1.1 - Схема каскада на полевом транзисторе и его модель

Разделительные цепи и цепи питания на высокочастотной эквивалентной схеме каскада не учтены. Полевой транзистор представлен эквивалентной схемой с параметрами: C_{gs} - входная емкость затвор-исток; C_{gd} - проходная емкость затвор-сток; S - крутизна полевого транзистора; R_d - сопротивление канала.

Нагрузкой каскада является параллельное соединение сопротивления R_L и емкости C_L.

Частотные характеристики ($|K_V(\omega)|$ - АЧХ $\varphi(\omega)$ - ФЧХ) и переходную характеристику $h(t)$ при конкретных значениях параметров модели **представить в графическом виде.**

Значения параметров модели полевого транзистора принять равными: $C_{gs} = 5\,п\Phi$; $C_{gd} = 0.5\,п\Phi$; $S = 50\,мА/В$; $R_d = 500\,Ом$.

Варианты задания. Значения параметров нагрузки каскада, в зависимости от порядкового номера студента в списке N, положить равными: $R_L = [50 + 5 \cdot N]\,Ом$; $C_L = [5 + 0.1 \cdot N]\,п\Phi$.

В качестве выходной реакции на соответствующее входное воздействие $E(p)$ рассматривать напряжение на нагрузке $V_L(p) = V(p)$.

3 КРАТКИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для получения передаточной характеристики в виде дробно-рационального выражения относительно комплексной переменной p использовать **метод узловых потенциалов.**

Выражение передаточной характеристики, для упрощения последующих преобразований представить в простейшем, то есть в **каноническом виде.**

Вывод соотношения переходной характеристики выполнить **операторным методом, методом Лагранжа и методом Коши.**

4 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В основе всех аналитических исследований характеристик реальных устройств и систем лежит некоторое графическое модельное представление в виде принципиальной либо эквивалентной схемы. На основе схемного представления строится математическая модель устройства. В данном случае, речь идет о линейных аналоговых устройствах и системах. В качестве основных переменных в радиотехнике и электронике обычно выступают токи, напряжения, мощности, падающие и отраженные волны и так далее. Независимыми переменными являются: в частотной области – частота ω или f; во временной области – время t.

В частотной области математической моделью аналоговых устройств является **система линейных алгебраических уравнений.** Во временной области в качестве основной математической модели используются **обыкновенные дифференциальные уравнения.**

Основными характеристиками аналоговых устройств и систем являются – **передаточная (частотная), переходная и импульсная** характеристики.

Формально, все перечисленные характеристики определяются как реакции на соответствующее тестовое входное воздействие. При моделировании, анализе и расчете входное воздействие моделируется независимым источником тока либо напряжения. Для исследования перечисленных выше характеристик обычно используют идеальный источник напряжения. В качестве реакции цепи, как уже отмечалось, будем рассматривать выходное напряжение.

Таким образом, источник входного воздействия представляет собой идеальный источник напряжения и, в зависимости от исследуемой характеристики (передаточная, переходная, импульсная), представляет собой, соответственно, гармоническое воздействие типа $E \cdot \sin(\omega \cdot t)$ или $E \cdot \cos(\omega \cdot t)$, единичный скачок (функция Хевисайда)

$$1(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0 \\ не \quad определена \quad при \quad t = 0 \\ 1 \quad при \quad t > 0 \end{cases},$$

δ - импульс (функция Дирака)

$$\delta(t-0) = \delta(0) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0 \\ \infty \quad при \quad t = 0 \\ 0 \quad при \quad t > 0 \end{cases}.$$

При описании цепей и сигналов наиболее широко используемым является символический **операторный метод,** основанный на интегральных преобразованиях Лапласа (прямом и обратном).

Прямое одностороннее преобразование Лапласа определяется интегральным соотношением вида

$$F(p) = L\left[f(t)\right] = \int_{0}^{+\infty} e^{-p\cdot t} \cdot f(t)\,dt,$$

где $p = \sigma + j\cdot\omega$ - комплексный параметр. Соответственно, $e^{-\sigma\cdot t}$ - определяет затухание, а $e^{-j\cdot\omega\cdot t}$ - определяет осциллятор с круговой частотой ω.

Заметим, что прямое преобразование Лапласа определено для функций: определенных на интервале от $-\infty$ до $+\infty$ за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода; $f(t) = 0$ при $t < 0$; существуют такие два числа $M > 0$ и $s > 0$, что при всех $t > 0$ выполняется условие $\left|f(t)\right| \le M \cdot e^{s\cdot t}$. Последнее условие означает, что функция $\left|f(t)\right|$ должна возрастать не быстрее показательной функции. Функция $f(t)$, удовлетворяющая этим условиям, **называется оригиналом.** Комплексная функция $F(p)$, получаемая в результате интегрального преобразования, **называется изображением.**

Обратное преобразование Лапласа определяется интегральным соотношением вида

$$f(t) = L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{\sigma - j\cdot\infty}^{\sigma + j\cdot\infty} e^{pt}\cdot F(p)\,dp,$$

где путь интегрирования – любая прямая $\mathrm{Re}(p) = \sigma$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\mathrm{Re}(p) = \sigma_0$. Прямое вычисление интеграла затруднительно, поэтому, **обычно используют первую теорему разложения в ряд** по отрицательным степеням p **либо представление интеграла суммой вычетов,** соответствующих значениям функции $F(p)$ в особых точках.

Для определения вычетов используют вторую теорему разложения правильной дробно рациональной функции с учетом кратности корней характеристического уравнения.

Функция изображения $F(p)$ в нашем случае соответствует, какому либо передаточному соотношению аналоговой системы и представляется, как правило, правильной дробно-рациональной функцией, степень числителя которой меньше степени знаменателя.

В операторном методе функциям оригиналам $f(t)$ в плоскости t, ставятся в соответствие изображения функций $F(p)$ в плоскости комплексной переменной p. При этом интегральным преобразованиям в плоскости оригиналов соответствуют алгебраические преобразования в плоскости изображений и наоборот. В связи с этим свойством интегрального преобразования Лапласа стараются задачу, сформулированную в области оригиналов, перевести в область изображений, получить изображение результата, а затем, используя обратное преобразование, найти оригинал решения.

Так, для основных, перечисленных выше тестовых воздействий, как оригиналов, имеем следующие изображения

$$e(t) = E \cdot \sin(\omega \cdot t) \Leftrightarrow E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$e(t) = E \cdot \cos(\omega \cdot t) \Leftrightarrow E(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$e(t) = 1(t) \Leftrightarrow E(p) = 1/p;$$

$$e(t) = \delta(0) \Leftrightarrow E(p) = 1.$$

Используемый в теории цепей символический метод использует также компонентные уравнения основных элементов представленные в плоскости изображений. В качестве примера, приведем соответствия представлений элементов в виде оригиналов и изображений при нулевых начальных условиях (начальное напряжение на емкости либо начальный ток катушки индуктивности равны нулю)

$$e(t) \Leftrightarrow E(p); \quad i(t) \Leftrightarrow I(p); \quad v(t) = z(t) \otimes i(t) \Leftrightarrow V(p) = Z(p) \cdot I(p);$$

$$i_C(t) = C \cdot dv_C(t)/dt \Leftrightarrow I_C(p) = p \cdot C; \quad v_L(t) = L \cdot di_L(t)/dt \Leftrightarrow V_L(p) = p \cdot L.$$

Наиболее известной характеристикой устройств и систем, определяемой в плоскости изображений, является **передаточная характеристика,** представляющая собой отношение изображений реакции и входного воздействия. Передаточная характеристика представляется обычно в виде дробно рациональной функции

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k}.$$

Заметим, что для физически реализуемых цепей дробно-рациональные функции имеют вид правильной дроби, то есть степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя $m < n$.

Известно также, что знаменатель передаточной функции, приравненный нулю, определяет **характеристическое уравнение исследуемой системы**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k = 0,$$

представляющее собой степенной полином соответствующего порядка.

Передаточные соотношения. Наряду с передаточной характеристикой, как отношения изображений выходной реакции и входного воздействия, используются и другие производные выражения, которые обобщенно можно назвать передаточными соотношениями. Так, выражая выходное напряжение из передаточной характеристики, получаем передаточное соотношение вида

$$V(p) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k} \cdot E(p).$$

Частотная характеристика. Следующей распространенной характеристикой, наиболее тесно связанной с передаточной характеристикой, является частотная характеристика

$$K(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot (j \cdot \omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot (j \cdot \omega)^k}.$$

Как видим, для преобразования передаточной характеристики в частотную характеристику необходимо комплексную переменную $p = \sigma + j \cdot \omega$, как оператор Лапласа, заменить на $j \cdot \omega$, при отсутствии полюсов на мнимой оси. Дело в том, что составляющие напряжений и токов выражаются функциями вида

$$e^{p \cdot \tau} = e^{(\sigma + j \cdot \omega) \cdot \tau} = e^{\sigma \cdot \tau} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau} = f(\sigma, \tau) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau},$$

где τ- постоянная времени цепи; σ- параметр затухания процесса; ω- круговая частота колебаний. Таким образом, параметр $j \cdot \omega$ учитывает частотную зависимость характеристики.

Частотная характеристика, в общем случае комплексная функция и может быть представлена в показательной форме в виде зависимостей модуля и аргумента от частоты. **Модуль** частотной характеристики $|K(\omega)| = Abs(K(\omega))$ называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Аргумент** частотной характеристики $\varphi(\omega) = Arg(K(\omega)) \cdot 180/\pi$, выраженный в градусах, называется **фазочастотной характеристикой (ФЧХ).**

Частотные характеристики описывают условия прохождения спектральных составляющих входного воздействия, как по амплитуде, так и по фазовому сдвигу. По условиям прохождения различных спектральных составляющих сложного входного воздействия различают формы АЧХ типа – фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающего фильтра (ППФ), полосно-заграждающего фильтра (ПЗФ) и другие. Важным параметром частотных характеристик является **граничная частота.** Граничная частота соответствует частоте входного гармонического воздействия либо частоте спектральной составляющей сложного входного воздействия, при которой амплитуда реакции составляет $1/\sqrt{2}$ от входного уровня, обычно принимаемого за единичный. Можно показать, что простейшие RC- и RL- интегрирующие и дифференцирующие цепи имеют соответственно формы АЧХ типа ФНЧ и ФВЧ с граничной частотой $\omega_{gr} = 1/\tau$, где $\tau = R \cdot C = L/R$- постоянная времени соответствующей цепи. Интегрирующие и дифференцирующие RC- и RL- цепи имеют на граничной частоте фазовые сдвиги спектральных составляющих, соответственно, равные -45° и $+45^{\circ}$.

Постоянная времени RC- и RL- цепей соответствует времени, за которое напряжение на конденсаторе, в результате перезаряда, либо ток индуктивности, за счет самоиндукции, после их скачкообразного перепада изменяются ровно в e раз.

Для получения передаточной характеристики и, соответственно, частотной характеристики используется формализованные метода анализа, в частности, **метод узловых потенциалов.**

Метод узловых потенциалов основан на векторно-матричном представлении закона Ома сложной цепи относительно узловых напряжений V и токов I

$$Y \cdot V = I .$$

Матрица коэффициентов узловой системы уравнений называется матрицей проводимостей Y. Элементы главной диагонали матрицы проводимостей содержат суммы проводимостей ветвей инцидентных данному узлу и называются собственными проводимостями узлов. Взаимные элементы матрицы проводимостей соответствуют суммам проводимостей с обратным знаком, включенных между соответствующими узлами и называются взаимными проводимостями. Вектор узловых токов I является вектором свободных членов узловой системы. Компоненты вектора токов соответствуют алгебраическим суммам независимых источников тока инцидентных соответствующему узлу, причем втекающий ток берется со своим знаком, а вытекающий ток с противоположным знаком. Решение узловой системы уравнений определяет вектор узловых напряжений V.

Многополюсный подход. Многополюсный подход является формализацией узлового метода. При многополюсном подходе сложная цепь представляется телом многополюсника относительно узлов схемы. Напряжения узлов отсчитываются относительно узла, выбранного за опорный и имеющий нулевой потенциал. Все токи узлов считаются направленными внутрь многополюсника. Математическое представление многополюсника соответствует линейной алгебраической системе уравнений с матрицей коэффициентов соответствующей матрице проводимостей схемы. Вектор свободных членов системы уравнений определяется независимыми источниками тока, подключенными к узлам схемы. С позиций многополюсного подхода **матрицу проводимостей удобно формировать по следующим правилам:**

а) проводимость двухполюсной ветви RLC- типа, включенная между узлами i, j, вносится в матрицу проводимостей симметрично, на пересечении i, j- строк и i, j столбцов. В диагональные элементы, с координатами $ii, \; jj$ проводимость ветви добавляется со своим знаком, а в недиагональные элементы с координатами $ij, \; ji$ проводимость ветви добавляется с противоположным знаком;

б) источник тока, управляемый напряжением (параметр крутизна S) или током (параметр коэффициент передачи по току α), с управляющей ветвью y между узлами i, j и управляемой ветвью между узлами k, l, вносятся в матрицу проводимостей несимметрично, на пересечении k, l- строк и i, j столбцов. В диагональные элементы, с координатами $ki, \; lj$ составляющие S или $\alpha \cdot y$ добавляются со своим знаком, а в недиагональные элементы с координатами $kj, \; li$ – с противоположным знаком. Для управляемых источников важна исходная сонаправленность управляющей и управляемой ветвей, которая определяется из физических представлений о работе моделируемого прибора или устройства. **Матрица проводимостей предварительно должно быть обнулена.**

Вектор узловых токов формируется следующим образом: любой независимый источник тока, включенный между узлами i, j, добавляется в компоненту вектора i с противоположным знаком, а в компоненту j - со своим знаком. **Вектор токов также предварительно должен быть обнулен.** Заметим, что **обычно порядок перечисления узлов ветви схемы соответствует принятому направлению тока ветви.**

Узловой метод позволяет определить передаточные либо частотные характеристики линейных цепей в виде отношения алгебраических дополнений матрицы проводимостей. Так, в частности, коэффициент передачи цепи по напряжению с i- го входа на j- тый выход, с позиций многополюсного подхода, определяется выражением

$$K_V(p) = \Delta_{ij} / \Delta_{ii},$$

где Δ_{ij} - алгебраическое дополнение матрицы проводимостей, получаемое в результате вычеркивания i- той строки и j- го столбца. При этом предполагается, что проводимость нагрузки внесена в матрицу.

Характеристики систем во временной области. Во временной области для оценки быстродействия аналоговых устройств и систем используются переходная и импульсная характеристики, определяемые как реакции на специфические тестовые воздействия.

Переходной характеристикой называется реакция системы, находящейся в состоянии покоя, на единичный скачок (функцию Хевисайда). Под состоянием покоя, в общем случае следует понимать полное установление реакции на предыдущее воздействие. Переходная характеристика определяет инерционные свойства систем по отработке входного воздействия в виде единичного скачка и оценивается таким важным параметром, как время нарастания t_n. **Время нарастания** соответствует времени изменения амплитуды реакции системы от уровня 0.1 до уровня 0.9 от устанавливаемого в конечном итоге значения.

Можно показать, что простейшие RC- и RL- интегрирующие и дифференцирующие цепи имеют переходные характеристики, соответственно, нарастающего и спадающего характеров, с временем нарастания равным $t_n \approx 2.2 \cdot \tau$.

Импульсной характеристикой называется реакция системы, находящейся в состоянии покоя, на δ- импульс (функцию Дирака).

Реакция на произвольное воздействие. Переходная и импульсная характеристики позволяют оценить и сравнить быстродействие аналоговых систем, то есть скорость отработки реакции на предельно резкие изменения входного воздействия. С другой стороны, любое входное воздействие можно представить суперпозицией сдвинутых и масштабированных единичных скачков либо δ- отсчетами по времени от входного воздействия, следовательно, зная переходную либо импульсную характеристику системы и, используя интеграл Дюамеля можно рассчитать реакцию на произвольное воздействие. Реакцию на произвольное входное воздействие именуют **переходным процессом.**

Связь частотных и временных характеристик. Можно показать, что частотная характеристика соответствует установившейся реакции цепи, находящейся в состоянии покоя, на единичное гармоническое воздействие. Амплитуда установившейся реакции на гармоническое воздействие соответствует точке на АЧХ, временной сдвиг, выраженный в долях периода входного воздействия, соответствует точке на ФЧХ.

Методы анализа временных характеристик. Наиболее распространенными и универсальными методами анализа временных характеристик линейных цепей как моделей реальных устройств и систем являются: **операторный метод, метод Лагранжа и метод Коши,** позволяющие, в общем случае, получать характеристики систем, как с постоянными, так и переменными параметрами.

Операторный метод. В нашем случае, когда задана схемная модель аналогового устройства и получена его передаточная характеристика, а, следовательно, известно передаточное соотношение определяющее изображение выходной реакции на входное воздействие вида

$$V(p) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k} \cdot E(p)$$

легко, используя обратное преобразование Лапласа, найти оригинал выходной реакции. Для определения оригинала по дробно-рациональному изображению можно воспользоваться либо готовыми таблицами, либо представить интегральное преобразование суммой вычетов, соответствующих значениям дробно-рациональной функции в особых точках. Операторный метод позволяет найти реакцию системы на произвольное входное воздействие $E(p)$.

Методы, основанные на интегрировании дифференциальных уравнений. Эта группа методов предполагает использование математической модели аналоговых устройств и систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений относительно выходной переменной. Реакция на входное воздействие при этом находится в результате интегрирования дифференциальных уравнений.

Использование группы методов, основанных на интегрировании дифференциальных уравнений, предполагает предварительное решение таких задач как **формирование дифференциального уравнения** по заданному схемному решению или известной передаточной характеристике и **определение независимых дополнительных условий, например, начальных условий,** необходимых для определения частного решения.

Переход от передаточных характеристик к дифференциальным уравнениям. Кроме операторного метода вычисления оригинала выходной реакции на входное воздействие можно использовать модель преобразования сигнала устройством во временной области в виде дифференциального уравнения соответствующего порядка относительно выходной переменной. Для построения соответствующего дифференциального уравнения удобно использовать передаточную характеристику либо передаточное соотношение для выходной переменной. Так, если передаточную характеристику

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k\cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\cdot p^k}$$

переписать в виде

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot p^k\right]\cdot V(p)=\left[\sum_{k=0}^{m} b_k\cdot p^k\right]\cdot E(p)$$

и перейти в область оригиналов, применив теорему операционного исчисления о дифференцировании оригинала, при нулевых начальных условиях, то получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение n- го порядка относительно выходной переменной

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot v^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{m} b_k\cdot e^{(k)}(t),$$

где $v^{(k)}(t)$, $e^{(k)}(t)$ - производные k - го порядка от выходной переменной $v(t)$ и входной переменной $e(t)$, определяемой входным воздействием.

Часто переход от передаточной функции к соответствующему дифференциальному уравнению относительно выходной переменной отображают в виде формальной схемы

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k} \Rightarrow \frac{v(t)}{e(t)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^k},$$

где $\Rightarrow$- переход от изображений к оригиналам; $(d/dt)^k$- оператор дифференцирования k- го порядка. Раскрывая дробь в правой части формализованной записи, приходим к тому же дифференциальному уравнению.

Аналогичный формализованный переход к дифференциальному уравнению можно осуществить, используя передаточное соотношение выражающее изображение выходной переменной

$$V(p)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k} \cdot E(p) \Rightarrow v(t)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^k} \cdot e(t).$$

Как видим, после раскрытия дроби правой части получим то же самое дифференциальное уравнение.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальным уравнением называется уравнение связи неизвестной функции и/или ее производных. **Порядок дифференциального уравнения** определяется порядком старшей производной входящей в уравнение. **Дифференциальное уравнение,** правая часть которого равна нулю, **называется однородным,** иначе – **неоднородным.** Правая часть неоднородного дифференциального уравнения представляет собой известную функцию, определяемую входным воздействием исследуемой системы. Левая **однородная часть дифференциального уравнения**, представленная в символической форме путем замены производных неизвестной функции соответствующей степенью комплексной переменной, **определяет характеристическое уравнение** в виде степенного полинома. Корни характеристического уравнения определяют **фундаментальную систему решений** однородного уравнения. **Дифференциальное уравнение** представленное в форме, когда коэффициент при старшей производной неизвестной функции равен единице, **называется приведенным. Дифференциальное уравнение,** разрешенное относительно старшей производной, **называется уравнением в форме Коши.** Решить или **проинтегрировать**

дифференциальное уравнение означает – из заданного уравнения связи найти функцию, подстановка которой в исходное уравнение, обращает его в тождество.

Из уравнения связи можно определить лишь **общее решение дифференциального уравнения,** которому в пространстве решений соответствует множество пространственных кривых. Для выделения конкретного **частного решения дифференциального уравнения** из семейства необходимо в многомерном пространстве решений поставить точку, выделяющую конкретную кривую. Функциональное пространство решений образовано неизвестной функцией и ее производными до $n-1$- го порядка. Соответственно, чтобы в n- мерном пространстве отметить точку $(t_0, y_0, y_0^{'}, \cdots, y_0^{(n-1)})$ и, соответственно, кривую, частного решения необходимы **независимые дополнительные условия,** например, **начальные условия,** то есть значение искомой функции и ее производных до $n-1$- го порядка, при $t=0$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что для определения частного решения дифференциального уравнения n- го порядка необходимо ровно n начальных условий.

Определение начальных условий. В нашем случае, когда задано схемное решение, получена передаточная функция, по передаточной функции сформировано дифференциальное уравнение, возникает задача определения начальных условий. В случае простейших схемных решений начальные условия могут быть получены из физических представлений о работе моделируемого устройства. В общем же случае необходима формальная методика определения начальных условий. В качестве методики определения начальных условий можно воспользоваться **теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала** в виде соотношения

$$v(0) = \lim_{t\to 0} v(t) = \lim_{p\to\infty} p \cdot V(p),$$

которое позволяет по известному передаточному соотношению для выходной переменной найти начальное значение оригинала искомой функции. Далее, применяя повторно данное соотношение, можем получить начальные значения производных искомой функции до $n-1$- го порядка включительно

$$v^{'}(0) = \lim_{t\to 0} v^{'}(0) = \lim_{p\to\infty} p^2 \cdot V(p);$$

……………………………………

$$v^{(n-1)}(0) = \lim_{t\to 0} v^{(n-1)}(0) = \lim_{p\to\infty} p^n \cdot V(p).$$

Таким образом, решив задачу формирования дифференциального уравнения по заданному схемному решению, как модели исследуемого устройства и задачу определения начальных условий, приступаем к краткому изложению методов аналитического интегрирования.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений. В качестве основных аналитических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений **рассмотрим метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и представление решения в форме Коши (метод Коши),** которые могут быть использованы для уравнений с любой правой частью, а также применимы для интегрирования дифференциальных уравнений, как с постоянными коэффициентами, так и с переменными коэффициентами. Изложение перечисленных методов, для краткости, произведем для дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Элементы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'(t) + \alpha \cdot y(t) = 0$$

записывается в виде

$$y(t) = C \cdot y_1(t) = C \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

где C - некоторая постоянная, определяемая из независимого дополнительного условия, например, начального условия; $y_1(t) = e^{-\alpha \cdot t}$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $-\alpha$ - корень характеристического уравнения.

Выражая производную от общего решения

$$y'(t) = -\alpha \cdot C \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

и, подставляя ее совместно с решением в исходное однородное уравнение

$$y'(t) + \alpha \cdot y(t) = -\alpha \cdot C \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \alpha \cdot C \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 0,$$

убеждаемся, что уравнение обращается в тождество.

Для дифференциальных уравнений более высокого порядка общее решение определяется линейной суперпозицией набора фундаментальных решений, определяемых корнями характеристического уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'(t) + \alpha \cdot y(t) = f(t),$$

где $f(t)$ - известная функция, определяемая входным воздействием исследуемой системы, записывается в том же виде, что и однородного уравнения, только постоянные заменяются варьируемыми постоянными, то есть неизвестными функциями.

Так для неоднородного уравнения первого порядка **общее решение** запишется в виде

$$y(t) = C(t) \cdot y_1(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

где $C(t)$ - варьируемая постоянная – неизвестная пока функция.

С целью определения варьируемой постоянной, найдем производную общего решения

$$y'(t) = C'(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} - \alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}$$

и, совместно с решением, подставим в исходное неоднородное уравнение

$$C'(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} - \alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} + \alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = f(t).$$

В результате получаем выражение производной варьируемой постоянной

$$C'(t) = f(t)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Интегрируя полученное выражение

$$C(t) = \int f(t)\cdot e^{\alpha\cdot t}\, dt + C,$$

находим варьируемую постоянную, с точностью до новой постоянной интегрирования C.

Подстановка выражения варьируемой постоянной в общее решение

$$y(t) = \left\langle \int f(t)\cdot e^{\alpha\cdot t}\, dt + C \right\rangle \cdot e^{-\alpha\cdot t} = C\cdot e^{-\alpha\cdot t} + \int f(t)\cdot e^{\alpha\cdot t}\, dt\cdot e^{-\alpha\cdot t}$$

или

$$y(t) = C\cdot e^{-\alpha\cdot t} + \int e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot f(\tau)\, d\tau$$

дает новую форму записи **общего решения неоднородного уравнения** в виде **общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.**

Для определения **частного решения неоднородного уравнения** необходимо из независимых дополнительных условий найти постоянную интегрирования C. Постоянную интегрирования C можно найти, воспользовавшись, например, начальными условиями, которые легко определяются **по теореме операционного исчисления о начальном значении функции оригинала** из передаточного соотношения.

При определении **общего решения неоднородного дифференциального уравнения** более высокого порядка оно представляется линейной суперпозицией варьируемых постоянных и фундаментальных решений. В этом случае при нахождении производных решения с целью подстановки в исходное уравнение и нахождения варьируемых постоянных приходится накладывать ограничения на появления высших производных варьируемых постоянных. Эти ограничения (на рост порядка производных от варьируемых постоянных) и результат подстановки производных от решения в исходное уравнение, **дают разрешающую систему уравнений Лагранжа,** позволяющую, с точностью до новых постоянных интегрирования, найти все варьируемые постоянные, то есть определить общее решение. Для **определения частного решения неоднородного уравнения** n- го порядка необходимо из независимых дополнительных условий на искомую функцию и ее первые производные до $(n-1)$- го порядка включительно, определить постоянные интегрирования. В качестве независимых дополнительных условий могут быть использованы начальные условия, в виде начальных значений неизвестной функции и ее первых производных до $(n-1)$- го порядка включительно.

Представление решения в форме Коши (метод Коши). Для представления частного решения неоднородного уравнения первого порядка в форме Коши удобно воспользоваться общим решением, полученным в методе Лагранжа

$$y(t) = C \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \int e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau .$$

Заменяя постоянную интегрирования C начальным значением искомой функции $y(0)$ и, подставляя конкретные пределы интегрирования, приходим к записи **частного решения неоднородного дифференциального уравнения в форме Коши**

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau .$$

Решение в форме Коши распространяется и на неоднородную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t),\ Y'(t)$- вектор неизвестных функций и вектор производных функций; A- постоянная матрица коэффициентов системы уравнений; $F(t)$- вектор известных функций, определяемый входным воздействием системы.

Решение в форме Коши системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами записывается в виде

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau)\, d\tau ,$$

где $Y(0)$- вектор начальных значений искомых функций; $e^{A \cdot t}$- экспонента от матрицы коэффициентов системы.

Не вдаваясь, в подробности, отметим, что любая **аналитическая функция от матрицы,** при попарно различных и отличных от нуля собственных значениях, определяется соотношением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где A- матрица постоянных коэффициентов системы уравнений; H- **модальная матрица** собственных векторов; Λ- диагональная **матрица собственных значений;** $F(\Lambda)$- диагональная матрица заданной функции от собственных значений.

Как видим, определение аналитической функции от матрицы сопряжено с решением **проблемы собственных векторов и собственных значений.**

Необходимость рассмотрения систем дифференциальных уравнений возникает либо в связи с исследованием многоканальных систем, либо при интегрировании дифференциальных уравнений высокого порядка при переходе к эквивалентной системе уравнений первого порядка, путем замены переменных.

5 ИЛЛЮСТРАЦИЯ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК АНАЛОГОВЫХ ЦЕПЕЙ

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования передаточных и временных характеристик рассмотрим примеры простейших цепей первого порядка.

Интегрирующая RC**- цепь.** На рисунке 5.1 изображена простая интегрирующая RC- цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

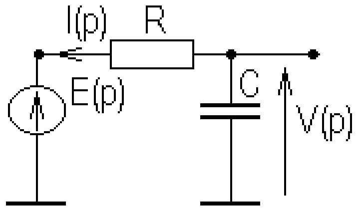


Рисунок 5.1 - Интегрирующая RC - цепь

1. Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + 1/p \cdot C} = \frac{E(p) \cdot p \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C}.$$

Далее, сразу получаем интересующее нас напряжение на конденсаторе, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p) = I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} = \frac{E(p)}{1 + p \cdot R \cdot C} = \frac{E(p)}{1 + p \cdot \tau} = \frac{E(p) \cdot \alpha}{p + \alpha},$$

где $\tau = R \cdot C$- постоянная времени RC- цепи; $-\alpha = -1/\tau$- значение корня характеристического уравнения $p + \alpha = 0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + p \cdot \tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot \alpha}{p + \alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p \cdot V(p) = K(p)$ при $p = 0$ и $p \to \infty$. Так, при $p = 0$, получаем $K(0) = 1$, а при $p \to \infty$, соответственно, имеем $K(\infty) = 0$.

2. Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p) = 1/p \Leftrightarrow 1(t) = e(t).$$

2.1. Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p) = \frac{\alpha}{p \cdot (p + \alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p \cdot (p + \alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}).$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике интегрирующей RC - цепи

$$V(p) = \frac{\alpha}{p \cdot (p + \alpha)} \Leftrightarrow (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики равно нулю $h(0) = 0$, при $t = 0$. Установившееся значение переходной характеристики равно единице $h(\infty) = 1$, при $t \to \infty$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = 0;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 1.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени изменения значения от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения

$$(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0.1;\ e^{-t_1/\tau} = 0.9;\ e^{t_1/\tau} = 1/0.9;\ t_1/\tau = \ln(1) - \ln(0.9);\ t_1 = -\tau \cdot \ln(0.9);$$

$$(1 - e^{-t_2/\tau}) = 0.9;\ e^{-t_2/\tau} = 0.1;\ e^{t_2/\tau} = 1/0.1;\ t_2/\tau = \ln(1) - \ln(0.1);\ t_2 = -\tau \cdot \ln(0.1);$$

$$t_н = t_2 - t_1 = -\tau \cdot (\ln(0.1) - \ln(0.9)) \approx 2.19722 \cdot \tau.$$

Вид переходной характеристики интегрирующей RC- цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 5.2.

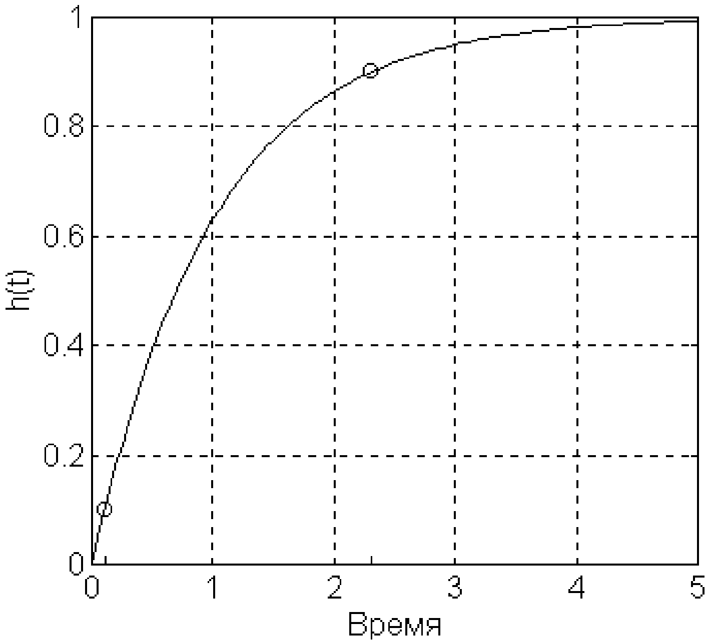


Рисунок 5.2 - Переходная характеристика интегрирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения удобно формировать на основе передаточных характеристик, путем замены оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt .

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot\alpha}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p\cdot(p+\alpha)}\rightarrow v(t)=\frac{1(t)\cdot\alpha}{(d/dt+\alpha)}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения интегрирующей RC - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=\alpha\cdot 1(t).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+\alpha\cdot 1(t).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0) = \lim_{t \to {}_+0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{\alpha}{p + \alpha} = 0.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика интегрирующей RC- цепи на единичный скачок на входе.

2.2. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \alpha \cdot 1(t),$$

откуда

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \alpha \cdot 1(t)$$

или

$$C^{'}(t) = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t) = \int \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = e^{\alpha \cdot t} + C,$$

где C- новая постоянная интегрирования.

Эту постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (e^{\alpha \cdot t} + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 1 + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального условия $v(0) = 0$, при $t = 0$, следует, что

$$0 = 1 + C,$$

откуда получаем

$$C = -1.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике интегрирующей RC- цепи, получаем в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

2.3. Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \alpha \cdot 1(\tau) \cdot d\tau.$$

Так как $v(0) = 0$, то, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике интегрирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику интегрирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

3. Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t).$$

3.1. Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи

$$V(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha} \Leftrightarrow \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0) = \alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \alpha;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v(_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v(_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h'(t) = (1 - e^{-\alpha \cdot t})' = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Вид импульсной характеристики интегрирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 5.3.

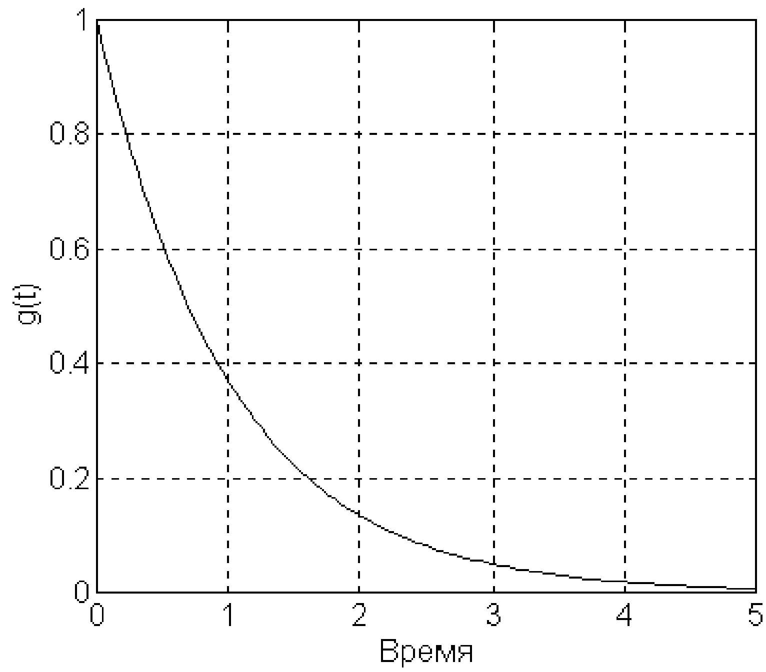


Рисунок 5.3 - Импульсная характеристика интегрирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1$, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot\alpha}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p+\alpha}\rightarrow v(t)=\frac{\delta(0)\cdot\alpha}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения интегрирующей RC - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=\alpha\cdot\delta(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ - функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+\alpha\cdot\delta(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha\cdot p}{p+\alpha}=\alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика интегрирующей RC- цепи на единичный импульс на входе.

3.2. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C'(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\alpha\cdot\delta(0),$$

или

$$C'(t)=\alpha\cdot\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t) = \int \alpha \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = \alpha + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (\alpha + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального условия $v(0) = \alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$\alpha = \alpha + C,$$

откуда получаем

$$C = 0.$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи, получаем в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

3.3. Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \alpha \cdot \delta(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} + \underset{t=0}{\alpha} = g(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t > 0$, а второе слагаемое при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику интегрирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Дифференцирующая RC - цепь. На рисунке 5.4 изображена простая дифференцирующая RC - цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

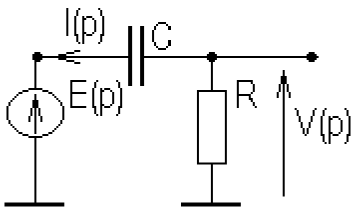


Рисунок 5.4. - Дифференцирующая RC - цепь

1. Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + 1/p \cdot C} = \frac{E(p) \cdot p \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C}.$$

Далее, умножая ток на сопротивление, получаем интересующее нас напряжение на резисторе, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p) = I(p) \cdot R = \frac{E(p) \cdot p \cdot R \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C} = \frac{E(p) \cdot p \cdot \tau}{1 + p \cdot \tau} = \frac{E(p) \cdot p}{p + \alpha},$$

где $\tau = R \cdot C$ - постоянная времени RC - цепи; $-\alpha = -1/\tau$ - значение корня характеристического уравнения $p + \alpha = 0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{p \cdot \tau}{1 + p \cdot \tau} = \frac{p}{p + \alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot p}{p + \alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p \cdot V(p) = K(p)$ при $p = 0$ и $p \to \infty$. Так, при $p = 0$, получаем $K(0) = 0$, а при $p \to \infty$, соответственно, имеем $K(\infty) = 1$.

2. Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p) = 1/p \Leftrightarrow 1(t) = e(t).$$

2.1 Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p) = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике дифференцирующей RC - цепи

$$V(p) = \frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t = 0$, равно единице $h(0) = 1$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $h(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = 1;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени изменения значения от уровня 0.9 до уровня 0.1 от установившегося значения

$$e^{-t_1/\tau} = 0.9;\ e^{t_1/\tau} = 1/0.9;\ t_1/\tau = \ln(1) - \ln(0.9);\ t_1 = -\tau \cdot \ln(0.9);$$

$$e^{-t_2/\tau} = 0.1;\ e^{t_2/\tau} = 1/0.1;\ t_2/\tau = \ln(1) - \ln(0.1);\ t_2 = -\tau \cdot \ln(0.1);$$

$$t_н = t_2 - t_1 = -\tau \cdot (\ln(0.1) - \ln(0.9)) \approx 2\ .19722 \cdot \tau.$$

Вид переходной характеристики дифференцирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 5.5.

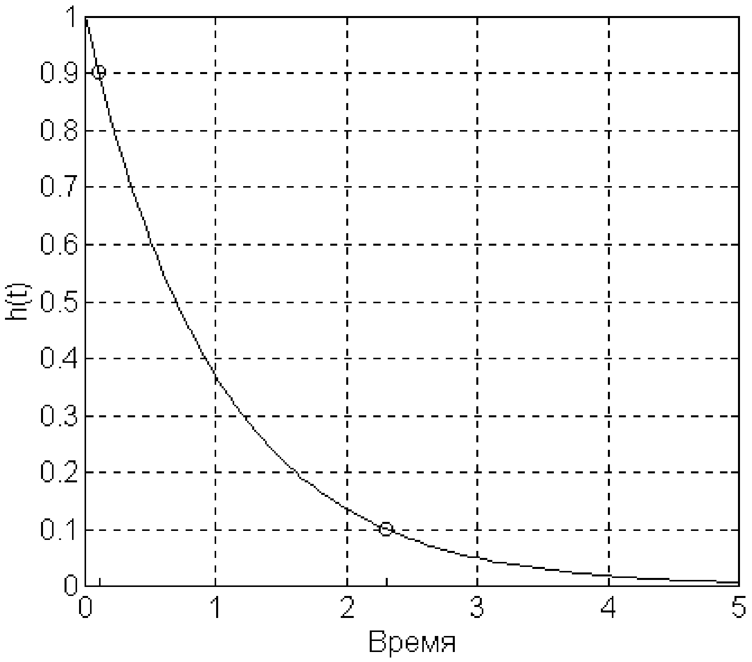


Рисунок 5.5 - Переходная характеристика дифференцирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения формируем на основе передаточных характеристик, путем замены оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot p}{p+\alpha}=\frac{1}{p+\alpha}\rightarrow v(t)=\frac{\delta(0)}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения дифференцирующей RC - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=\delta(0).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+\delta(0).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0)=\lim_{t\rightarrow_{+}0}v(t)=\lim_{p\rightarrow\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\rightarrow\infty}\frac{p}{p+\alpha}=1.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика дифференцирующей RC - цепи на единичный скачок на входе.

2.2. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0),$$

откуда

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=\delta(0)$$

или

$$C^{'}(t)=\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t)=\int\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=1+C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt=f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t)=(1+C)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=e^{-\alpha\cdot t}+C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального условия $v(0)=1$, при $t=0$, следует, что

$$1=1+C,$$

откуда получаем

$$C=0.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике дифференцирующей RC - цепи, получаем в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}=h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

2.3. Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int\limits_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int\limits_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \delta(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = 1$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике дифференцирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{e^{-\alpha \cdot t}} + \underset{t=0}{1} = h(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено при $t > 0$, а второе слагаемое при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику дифференцирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

3. Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t).$$

3.1. Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = \frac{p}{p + \alpha}.$$

Отметим, что в данном случае дробно-рациональное выражение для изображения выходного напряжения имеет одинаковые степени числителя и знаменателя. Для перехода в область оригиналов необходимо, чтобы степень знаменателя была выше степени числителя, в связи с чем, разобьем дробно-рациональное выражение на элементарные дроби, поделив числитель на знаменатель

$$V(p) = \frac{p}{p + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображениями и оригиналами

$$1 \Leftrightarrow \delta(0); \ \frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленных соответствий, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике дифференцирующей RC - цепи

$$V(p) = 1 - \frac{\alpha}{p+\alpha} \Leftrightarrow \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0) = \delta(0) - \alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \delta(0) - \alpha;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

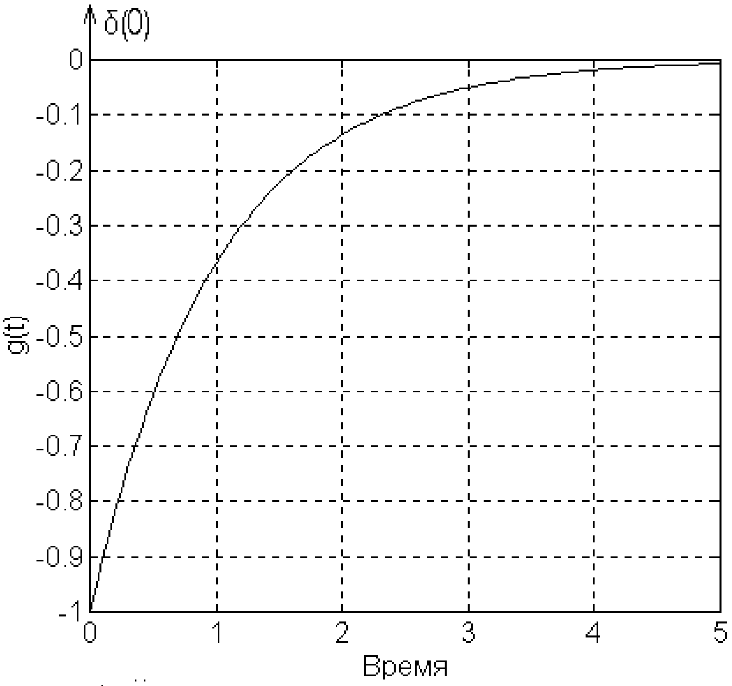
$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 1$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0) = (e^{-\alpha \cdot t})^{'} + \delta(0) \cdot 1 = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Поскольку начальное значение ненулевое, импульсная характеристика содержит δ - функцию.

Вид импульсной характеристики дифференцирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 5.6.



Рисунолк 5.6 - Имппульсная характеристика дифференцируюшей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1$, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot p}{p+\alpha}=\frac{1\cdot p}{p+\alpha}\to v(t)=\frac{d(\delta(0))/dt}{d/dt+\alpha}=\frac{\delta'(0)}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения дифференцирующей RC - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=\delta'(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ - функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+\delta'(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся модифицированной теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0} v(t)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{p+\alpha}.$$

Отметим, что в полученном дробно-рациональном отношении степень числителя выше степени знаменателя и простое взятие предела дает сразу ∞, скрывая конечные составляющие начального значения.

В данной ситуации целесообразно воспользоваться модификацией теоремы операционного исчисления о начальном значении функции.

Модификация теоремы о начальном значении заключается в том, что вначале путем последовательного деления числителя на знаменатель выделяем целую и дробную части. Составляющие целой части дадут δ-функцию и ее производные, а остаток от деления в пределе, при $p\to\infty$ даст конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0} v(t)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{p+\alpha}=\lim_{p\to\infty}\left(p\cdot 1-\frac{\alpha\cdot p}{p+\alpha}\right)=\delta(0)-\alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика дифференцирующей RC- цепи на единичный импульс на входе.

3.2. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta^{'}(0),$$

или

$$C^{'}(t)=\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t)=\int\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=-\alpha+C,$$

где C- новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство производной от δ- функции

$$\int f(t)\cdot\delta^{'}(0)\cdot dt=-f^{'}(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t)=(-\alpha+C)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}+C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального условия $v(0) = \delta(0) - \alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$\delta(0) - \alpha = -\alpha + C,$$

откуда получаем

$$C = \delta(0).$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи, получаем в виде

$$v(t) = (\delta(0) - \alpha) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

3.3. Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \delta'(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = \delta(0) - \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике дифференцирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot (\delta(0) - \alpha) - \alpha = \delta(0) - \underset{t>0}{\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} - \underset{t=0}{\alpha} = g(t).$$

Учитывая, что второе слагаемое определено при $t > 0$, а первое и третье слагаемые при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику дифференцирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как правило, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод подкупает своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализован и прост для реализации в современных системах аналитического исследования. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик простых RC- цепей, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в методическом пособии сформулировано задание на контрольную работу, даны краткие методические указания, представлено краткое содержание теоретической части и приведены примеры исследования характеристик простейших аналоговых цепей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971.- 808 с., 1974.- 754 с.
2. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова, Изд. 2-е, доп., в 2-х томах – Т. 1. - М.: Высшая школа, 1977.- 366 с.; Т. 2. - М.: Высшая школа, 1977.- 455 с.
3. Овчиннников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1989.- 679 с.
4. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики (дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения). – М.: Высшая школа, 1974.- 367 с.
5. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.- 376 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ПММР

Предлагаемые вопросы призваны выработать представление об изучаемой дисциплине **«Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР),** ориентировать студента на определенный уровень знаний полученных из предыдущих дисциплин (Высшая математика, Линейная алгебра, Теория цепей, Теория сигналов, Микроэлектроника), а также подготовить для творческого восприятия последующих дисциплин радиотехнического профиля.

1. Цель и содержание курса ПММР.
2. Задачи курса ПММР.

3. Понятия устройства, схемы, цепи, модели.
4. Компонентные и топологические уравнения.
5. Топологические матрицы.
6. Топологические законы цепей.
7. Компонентные уравнения цепей.
8. Особенности компонентных уравнений инерционных элементов.
9. Понятие графа, дерева графа, узла, сечения, контура.
10. Модели элементной базы.
11. Идеальный операционный усилитель и его модель.
12. Независимые источники, назначение и свойства.
13. Управляемые источники и их использование.
14. Модели сигнала в частотной и временной области.
15. Тестовые сигналы, используемые в радиотехнике.
16. Математическая модель цепи в частотной области.
17. Узловая система уравнений, свойства, методы формирования.
18. Линейность узловой системы уравнений.
19. Порядок узловой системы уравнений.
20. Содержание метода узловых потенциалов.
21. Понятие исходного состояния покоя.
22. Определение передаточной характеристики (функции).
23. Определение частотной характеристики (функции).
24. Связь передаточной и частотной характеристик.
25. Понятия ЧХ, АЧХ и ФЧХ.
26. Простейшие RC- и RL-цепи и их передаточные характеристики (функции).
27. Понятие постоянной времени.
28. Понятие фильтра - ФНЧ, ФВЧ, полосовой фильтр, заграждающий фильтр.
29. Понятие полосы пропускания, заграждения.
30. Понятие граничной частоты АЧХ цепи.

31. Связь постоянной времени с граничной частотой простых RC- и RL-цепей.
32. Определение характеристического уравнения по передаточной функции.
33. Методы определения передаточных и частотных характеристик по схеме.
34. Понятие четырехполюсника, системы параметров, канонические схемы соединения.
35. Понятие многополюсника, системы параметров, переход от многополюсника к четырехполюснику.
36. Классические системы параметров и их связь.

37. Понятие линейной алгебраической системы уравнений.
38. Методы решения линейных алгебраических систем уравнений.
39. Понятие определителя, минора и алгебраического дополнения.
40. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений.
41. Признаки существования решения неоднородной линейной системы.
42. Особенности решения однородных линейных алгебраических систем уравнений.

43. Проблема собственных значений и векторов.
44. Понятия собственных значений и векторов.
45. Понятия характеристической матрицы и характеристического уравнения.
46. Методы определения собственных значений.
47. Связь собственных значений характеристической матрицы и корней характеристического уравнения.
48. Понятие модальной матрицы и методы ее представления.
49. Проблема кратности собственных значений и векторов.
50. Понятие аналитической функции от матрицы и способы ее представления.

51. Суть интегрального преобразования Лапласа.
52. Прямое и обратное преобразования Лапласа - основные понятия.
53. Основные теоремы преобразования Лапласа.
54. Основы операционного исчисления.
55. Условия существования преобразования Лапласа.
56. Понятие обобщенных функций.
57. Расширение операторного метода на обобщенные функции.
58. Функция Хевисайда и дельта-функция.
59. Способы выполнения обратного преобразования Лапласа.
60. Теорема о дифференцировании оригинала.
61. Теоремы о начальном и конечном значениях.

62. Понятие переходной функции цепи.
63. Понятие импульсной функции цепи.
64. Связь переходной и импульсной функций.
65. Связь передаточной и импульсной функций.
66. Простейшие RC- и RL-цепи и их переходные характеристики (функции).
67. Понятие времени нарастания переходной характеристики.
68. Связь времени нарастания и постоянной времени простых RC- и RL-цепей.
69. Математическая модель цепи во временной области.
70. Способы аналитического определения временных характеристик цепи (системы).
71. Переход от передаточных функций к дифференциальным уравнениям.
72. Определение характеристического уравнения по дифференциальному уравнению.

73. Понятие дифференциального уравнения, типы дифференциальных. уравнений.
74. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
75. Суть решения дифференциального уравнения.
76. Отличие обыкновенных дифференциальных уравнений от уравнений в частных производных.
77. Системы дифференциальных уравнений.
78. Порядок дифференциального уравнения.
79. Однородное и неоднородное дифференциальные уравнения.
80. Дифференциальные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами.
81. Дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.
82. Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения.
83. Понятие общего решения дифференциальных уравнений.
84. Понятие частного решения дифференциальных уравнений.
85. Понятия независимых, начальных и граничных условий.
86. Содержание задачи Коши.
87. Содержание граничной или краевой задачи.
88. Понятие фундаментальной системы решений.
89. Условие независимости фундаментальной системы решений.
90. Общее решение однородных дифференциальных уравнений.
91. Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений.
92. Переход от дифференциального уравнения высокого порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

93. Методы аналитического интегрирования дифференциальных уравнений.
94. Операторный метод решения дифференциальных уравнений.

95. Учет начальных условий при операторном методе решения дифференциальных уравнений.
96. Определение начальных условий для дифференциальных уравнений по теореме о начальном значении и изображению выходной переменной.
97. Метод неопределенных коэффициентов - решения дифференциальных уравнений.
98. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных.
99. Общее решение однородного дифференциального уравнения в методе Лагранжа.
100. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения в методе Лагранжа.
101. Вид общего решения дифференциального уравнения в методе Лагранжа при наличии нулевых и или кратных корней характеристического уравнения.
102. Условие Лагранжа и формирование определяющей системы уравнений.
103. Использование независимых или начальных условий в методе Лагранжа.
104. Представление решения в форме Коши (метод Коши - матричная формулировка).
105. Учет начальных условий в методе Коши.
106. Способ аналитического преодоления вырождения модальной матрицы при нулевых и кратных корнях характеристического уравнения в матричной формулировке метода Коши.

107. Понятие дискретной системы, период дискретизации.
108. Понятие системной характеристики дискретной системы.
109. Понятие частотной характеристики дискретной системы.
110. Переход от системной характеристики к частотной характеристике.
111. Причина периодического характера частотных характеристик дискретных систем.
112. Понятие переходной характеристики дискретной системы.
113. Понятие импульсной характеристики дискретной системы.
114. Связь импульсной и переходной характеристик дискретных систем.
115. Дискретные системы, как модели импульсных и цифровых систем.
116. Понятие решетчатых функций и дискретных последовательностей.
117. Понятия дискретизации, квантования уровня и цифрового кодирования.
118. Функциональные схемы дискретных систем.
119. Основные элементы функциональных схем дискретных систем.
120. Тестовые сигналы дискретных систем.
121. Связь представлений дискретных систем с Z-преобразованием.
122. Понятия области дискретного времени и Z-области изображений.
123. Математическая модель дискретной системы в Z-области.
124. Математическая модель дискретной цепи во временной области.

125. Представление переходных и импульсных характеристик дискретных систем рекуррентными соотношениями.

126. Понятие разностного оператора и оператора сдвига.
127. Исчисление разностных операторов.
128. Понятие обратного разностного оператора.
129. Понятие факториального многочлена и его применение.
130. Действие прямого и обратного разностных операторов на факториальный многочлен.
131. Способы раскрытия функциональных последовательностей.
132. Понятие разностных уравнений.
133. Порядок разностных уравнений.
134. Однородные и неоднородные разностные уравнения.
135. Линейные и нелинейные разностные уравнения.
136. Разностные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами.
137. Понятие фундаментальной системы решений разностного уравнения.
138. Условие независимости фундаментальной системы решений.
139. Понятие общего решения разностных уравнений.
140. Понятие частного решения разностных уравнений.
141. Понятие общего решения однородных разностных уравнений.
142. Понятие общего решения неоднородных разностных уравнений.
143. Понятие частных решений неоднородных уравнений.

144. Переход от системных функций дискретных систем к разностным уравнениям.
145. Методы решения разностных уравнений.
146. Использование независимых или начальных условий.
147. Способы определения начальных условий.
148. Особенности учета начальных условий при решении разностных уравнений.
149. Переход от разностного уравнения высокого порядка к системе разностных уравнений первого порядка.
150. Операторный метод решения разностных уравнений.
151. Метод неопределенных коэффициентов - решения разностных уравнений.
152. Метод Лагранжа или вариации произвольных постоянных – решения разностных уравнений.
153. Общее решение однородного разностного уравнения в методе Лагранжа.
154. Общее решение неоднородного разностного уравнения в методе Лагранжа.
155. Вид общего решения разностного уравнения в методе Лагранжа при наличии нулевых и кратных корней характеристического уравнения.

156. Условие Лагранжа и формирование определяющей системы уравнений при решении разностных уравнений.
157. Использование начальных условий в методе Лагранжа.
158. Метод Коши - решения разностных уравнений (матричная формулировка).
159. Учет начальных условий в методе Коши.
160. Способ аналитического преодоления вырождения модальной матрицы при нулевых и кратных корнях характеристического уравнения в матричной формулировке метода Коши.

161. Понятие цифрового фильтра и цифровой фильтрации.
162. Отличие дискретного и цифрового фильтра.
163. Способы реализации цифровой фильтрации.
164. Функциональные модели цифровых фильтров.
165. Трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры.
166. Ошибки квантования, погрешности цифровой фильтрации.
167. Методы синтеза цифровых фильтров.
168. Синтез цифрового фильтра по частотной характеристике аналогового прототипа.
169. Использование билинейного преобразования частоты при синтезе цифрового фильтра.
170. Синтез цифрового фильтра по дифференциальному уравнению аналогового прототипа.
171. Переход от дифференциального уравнения к разностному уравнению с использованием конечно разностного представления производных.
172. Использование прямых и обратных разностей представления производных.
173. Синтез цифрового фильтра по импульсной характеристике аналогового прототипа.
174. КИХ- и БИХ- цифровые фильтры.
175. Связь интервала повторения частотных характеристик с периодом дискретизации.