Томский университет систем управления и радиоэлектроники
Кафедра радиотехнических систем

В. И. Тисленко

ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и организации самостоятельной работы по курсу

Томск – 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Курс «Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоэлектронных средств» (ОКПиМРЭС) изучается в _7_ семестре. Объем курса 70 часов из них: лекции 26 часов; практические занятия 18 часов и 26 часов самостоятельная работа.

Учебное методическое пособие соответствует рабочей программе по курсу ОКПиМРЭС для студентов по направлению подготовки 210300 «Радиотехника»: квалификация инженер (спец. 210304.65). Пособие предназначено для выполнения заданий по практике и организации самостоятельной работы в течение семестра, а также при подготовке к экзамену.. Выполнение всех работ предполагает применение ПЭВМ с использованием пакета Mathcad. Выполненное задание по практике должно содержать разработанный листинг программы в среде Mathcad с выполненными пунктами задания и выводами.

Экзамен проводятся по разделам курса лекций. По итогам выполненных заданий с учетом результатов опроса на практических занятиях студент получает соответствующее количество баллов, которые суммируются с другими, полученными в семестре результатами, и определяют в конце семестра общую оценку по рейтингу.

1. Программа курса «Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоэлектронных средств»

1.1. Наименование тем, содержание и объемы в часах лекционных занятий (26 час, самостоятельная работа – 12 часов)

1.1.1. Математическое моделирование – основа компьютерного проектирования РЭС - 4 часа
Самостоятельная работа - 2 часа

Модели реальных объектов и моделирование как способ познания мира. Функции и формы моделей. Требования к моделям. Математические модели и их классификация. Общая характеристика задач, связанных с компьютерным проектированием РЭС.

Статистический характер критериев эффективности РЭС. Общая характеристика задач статистической теории РТС. Основные этапы и их содержание при решении задачи оценки критерия эффективности РЭС методом прямого вероятностного моделирования на ЭВМ. Общая структура программы для реализации метода статистических испытаний.

1.1.2. Математическое моделирование сигналов и помех. Алгоритмы анализа аналоговых и цифровых устройств - 8 часов
Самостоятельная работа - 4 часа

Алгоритмы моделирования случайных величин с заданными статистическими свойствами. Моделирование случайного вектора с заданной ковариационной матрицей.

Обзор моделей линейных динамических систем и их взаимосвязь. Дискретная аппроксимация линейных динамических систем.

Модели случайных процессов. Марковское свойство случайных процессов. Концепция формирующего фильтра. Дуализм моделей сигналов и систем. Задание динамических моделей марковских процессов в форме системы разностных уравнений для переменных состояния. Модели процессов вида скользящего среднего (СС), авторегрессии (АР) и АРСС.

Использование пакетов программ MathCad и MatLab (Simulink) в задачах моделирования РЭС.

1.1.3. Математические основы моделирования компонентов РЭС различного уровня сложности. Методы оптимизации проектных решений .... – 8 часов
Самостоятельная работа - 4 часа

Описание информационных РЭС (примеры). Классификация методов построения математических моделей. Функциональное моделирование. Основные принципы упрощения описания РЭС при построении математических моделей. Схемотехнические и системотехнические модели.

Математические модели РЭС на несущей частоте. Проблемы моделирования на ЭВМ. Примеры.

Метод комплексной огибающей при моделировании устройств обработки сигналов. Примеры.

Метод статистических эквивалентов. Идентификация параметров модели РЭС. Особенности моделирования нелинейных динамических систем.

Методы оптимизации проектных решений – целевая функция, численные методы поиска безусловного и условного экстремума.

<u>Список рекомендуемой литературы</u>

1.Основная литература

1. Борисов Ю.П. Моделирование радиотехнических систем.—М.: Сов. радио, 1976.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.—М.: Сов. радио, 1961.
3. Моделирование в радиолокации./ Под ред. Леонова А.М.—М.: Сов. радио, 1979.

2. Дополнительная литература

1. Гуткин Л.С. Оптимизация радиоэлектронных устройств.—М.: Сов. радио, 1975.

2. Методические указания к практическим работам

2.1 Задание по практике №1

Моделирование случайных величин с заданной плотностью распределения вероятностей

<u>Цель работы</u>:

1. Изучение метода функционального преобразования (МФП) для получения алгоритма моделирования на ЭВМ случайной величины (СВ) с заданной плотностью распределения вероятностей (ПРВ).

2. Изучение методологии применения статистических критериев значимости и согласия в задачах статистической обработки результатов эксперимента.

1. Теоретические основы метода функционального преобразования

Для получения алгоритма генерации (имитации) на ЭВМ СВ Y с заданной ПРВ $W_y(y)$ широко используется метод функционального преобразования (МФП). МФП основан на том, что при нелинейном взаимно однозначном преобразовании вида $y=f(x)$, где X - базовая (опорная) СВ с известной ПРВ $W_x(x)$, СВ Y имеет ПРВ

$$W_y(y) = W_x[x=\varphi(y)]\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| \quad , \tag{1}$$

где $x = \varphi(y)$ - функция обратная к f(x).

В качестве базовой СВ X удобно выбрать величину с равномерной в интервале [0;1] ПРВ, т.е. $W_x(x)=1$. Из соотношения (1) следует, что обратная функция

$$x = \varphi(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} W_y(y)dy \quad . \qquad (2)$$

Используя соотношение (2), можно определить вид нелинейного преобразования *y=f(x)*.

1.1. Моделирование СВ с ПРВ Релея

Пусть СВ Y имеет ПРВ Релея

$$W_y(y) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right] \qquad , y \in (0;\infty).$$

Используя (2), получим

$$x = \varphi(y) = \int\limits_{0}^{y} \frac{y}{\sigma^2}\exp\left[y^2/2\sigma^2\right]dy = 1 - \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right].$$

Разрешив полученное соотношение относительно *y*, найдем требуемое нелинейное преобразование

$$y = f(x) = \sigma\sqrt{-2\ln(1-x)}\,. \qquad \textbf{(3)}$$

1.2. Моделирование СВ с ПРВ Гаусса

Нормальная ПРВ $N(m;\sigma)$ определена двумя параметрами: математическим ожиданием *m* и дисперсией σ^2. Она имеет вид

$$W_y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}]. \qquad (4)$$

Непосредственное применение соотношения (2) не ведет к успеху, так как интеграл вида (2) в данном случае в элементарных функциях не выражается. Для имитации гауссовой СВ можно использовать известное положение из курса статистической радиотехники: модуль *A* случайного вектора, проекции которого Y_1 и Y_2 не коррелированы и имеют нормальные распределения вероятностей, т.е.

$$Y_1 \Rightarrow N(0;\sigma_y) \qquad Y_2 \Rightarrow N(0;\sigma_y)$$

имеет ПРВ Релея. Фаза этого вектора имеет равномерную ПРВ в интервале $[-\pi;\pi]$ и статистически не зависит от модуля A.

Таким образом, для двух случайных величин Y_1 и Y_2 - проекций случайного вектора, модуль которого $A \in (0;\infty)$ и фаза $\Phi \in (0;2\pi)$, имеем

$$Y_1 = A\cos(2\pi X_1)\ ; \qquad Y_2 = A\sin(2\pi X_1)\,; \tag{5}$$

где $X_1 \in (0;1)$ - базовая СВ $X_1 \Rightarrow RAND$

Учитывая (3,5), получаем алгоритм моделирования пары независимых гауссовых СВ Y_1 и Y_2

$$Y_1 = \sigma\sqrt{-2\ln(1-X_2)}\cos(2\pi X_1)\ ;$$

$$Y_2 = \sigma\sqrt{-2\ln(1-X_2)}\sin(2\pi\ X_1)\,. \tag{6}$$

В целях экономии времени, требуемого на выработку СВ, часто используют приближенный алгоритм имитации СВ с N (0;1), основанный на центральной предельной теореме

$$Y = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6\,, \tag{7}$$

где $\{X_i\}$ - последовательность некоррелированных СВ, имеющих равномерную ПРВ в интервале [0;1].

2.Методы теории статистической проверки гипотез в задачах обработки экспериментальных данных

При обработке результатов эксперимента (натурного или имитационного на ЭВМ) возникает необходимость применения статистических методов теории проверки гипотез. Поскольку количество наблюдений в реальном эксперименте ограниченно, то любые результаты обработки *конечной совокупности* выборочных данных содержат элемент случайности. Физически ясно, что выборка, являясь конечной по количеству элементов, содержит информацию о свойствах генеральной совокупности, из которой она извлечена.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного генерального распределения вероятностей или о значениях параметров генерального распределения, когда его вид известен.

Для проверки гипотезы о соответствии генерального (теоретического) распределения вероятностей некоторому заданному закону используют статистические ***критерии согласия***. Проверку *гипотезы о равенстве параметров* генерального распределения вероятностей некоторой случайной величины предполагаемому (теоретическому) значению проводят с помощью ***критериев значимости***.

Задачи проверки гипотез, решение которых предполагает с точностью до параметров знание теоретической ПРВ, относятся к параметрической теории проверки гипотез. В противном, более сложном случае, они составляют предмет исследования непараметрической теории проверки гипотез. Здесь семейство ПРВ задается в обобщенной форме. Например, проверяемая гипотеза может определять класс симметричных унимодальных ПРВ.

Методология применения статистических ***критериев согласия и значимости*** основана на справедливости эвристического (основанного на интуиции) ***принципа значимости***. Он состоит в следующем.

Пусть при некоторых условиях эксперимента, исследователь намерен проверить свойства наблюдаемых данных, которые он формулирует в виде основной гипотезы H_0. С наблюдаемыми данными в условиях справедливости гипотезы H_0 можно связать некоторое случайное событие А, вероятность которого есть $P(A)= \alpha$ и пусть она достаточно мала, т.е. наблюдатель считает событие *А* практически не возможным (достаточно маловероятным). Допустим, что наблюдая результаты эксперимента, «Наблюдатель» *реально фиксирует в эксперименте* появление события А. В соответствии с *принципом значимости* он (наблюдатель) в создавшейся ситуации признает, что *случайное событие А* появилось, по всей видимости, не «по воле случая», так как оно (в соответствии с его - «Наблюдателя» представлениями) не должно было появиться, поскольку достаточно мала вероятность его появления в условиях справедливости гипотезы H_0. Понимая, что это противоречит его представлениям о «ПРИРОДЕ», он отвергает выдвинутую им гипотезу H_0 и отдает предпочтение в пользу альтернативной гипотезы H_1. Иными словами, для думающего «Наблюдателя» появление в физическом эксперименте маловероятных (в его понимании до проведения эксперимента) событий дает основание (повод) отказаться от выдвинутых до проведения опыта предположений.

В бинарном случае в соответствии с некоторым выбранным (адекватным) критерием процедура проверки простой гипотезы H_0 предполагает применение конкретного решающего правила, которое сводится к вычислению по выборочным данным $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ некоторой величины $T(X_1,...,X_n)=T(\vec{X})$, называемой ***статистикой критерия***, и сравнению ее величины с пороговым значением $t_{(1-\alpha)}$ (квантиль уровня $(1-\alpha)$). Термин «квантиль уровня $(1-\alpha)$» определяет для любой случайной T ее значение $t_{(1-\alpha)}$ такое, что $t_{(1-\alpha)}$ удовлетворяет соотношению

$$(1-\alpha) = P(T \le t_{(1-\alpha)}).$$

Таким образом, процедура проверки *простой статистической ги*потезы H_0 против *простой альтернативы* предполагает принятия решения согласно правилу

$$T(\vec{X}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t_{(1-\alpha)}. \quad \textbf{(8)}$$

Пороговое значение статистики критерия $t_{(1-a)}$ определяется на основе условной ПРВ *W(T/H₀)*. Отметим, что аналитическое выражение для ПРВ $W(T/H_0)$ при этом должно быть известным. Таким образом, для малой вероятности α, величина которой равна

$$\alpha = P(T(x) > t_{(1-\alpha)} / H_0) = \int_{t_{(1-\alpha)}}^{\infty} W(T / H_0) dT, \quad \textbf{(9)}$$

и задается наблюдателем, можно определить *пороговое значение статистики критерия* $t_{(1-\alpha)}$ - *квантиль распределения вероятностей уровня* (1-α). Величину α в теории проверки гипотез ***называют уровень значимости***.

Обратите внимание, что α есть вероятность ошибочного решения (ошибка первого рода), состоящего в том, что в условиях справедливости основной гипотезы H_0 принимается решение в пользу альтернативной гипотезы H_1. В радиолокации это событие соответствует ложной тревоге.

Вероятность противоположного события , состоящего в принятии гипотезы H_0 ,когда она верна,

$$P(T(x) < t_{(1-\alpha)}) = 1 - \alpha = P_{дов}$$

называется ***доверительной вероятностью***.

В бинарном случае возможна также ошибка 2-го рода, вероятность ее появления равна

$$\beta = P(T(x) < t_{(1-\alpha)} / H_1) \qquad \textbf{(10)}$$

В статистической теории проверки гипотез величину вероятности

$$1 - \beta = 1 - P(T(x) < t_{(1-\alpha)} / H_1)$$

называют ***мощностью критерия***. В радиолокации мощность критерия соответствует вероятности правильного обнаружения. При этом величина β, очевидно, равна вероятности пропуска цели.

Одним из критериев оптимальности процедуры проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 является достижение максимальной мощности при заданном уровне значимости.

В лабораторной работе используются следующие статистические критерии.

Критерий значимости для проверки гипотезы H_0 о равенстве генерального среднего значения m_x заданной величине m_0 при неизвестной дисперсии. Альтернативная гипотеза H_1 : $m_x \neq m_0$. В качестве статистики критерия используют T – статистику (статистика Стьюдента)

$$T = \frac{\bar{x} - m_0}{s / \sqrt{n}},$$

где n-объем выборки; $\bar{x}$ - выборочное среднее;

$$\bar{x} = (\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

S^2 - выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Критические значения Т-статистики находят по таблицам *t*-распределения Стьюдента с *(n-1)* степенями свободы для уровня значимости $\alpha/2$ (критерий двусторонний), где α - уровень значимости одностороннего критерия. Данный критерий используют, предполагая, что выборочные данные независимы и имеют гауссово распределение вероятностей. При достаточно больших объемах выборки он может быть использован и при произвольных распределениях вероятностей.

2. Критерий значимости для проверки гипотезы H_0 о равенстве генеральной дисперсии σ_x^2 предполагаемому значению σ_0^2. Альтернативная гипотеза H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_0^2$.
В качестве статистики критерия используется величина хи-квадрат с *(n-1)* степенями свободы

$$x^2{}_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Данный критерий является двухсторонним, пороговые значения статистики критерия находят по таблицам хи-квадрат распределения вероятностей (распределение Пирсона). Для доверительной вероятности $P_{дов}$ = $1-\alpha$ необходимо определить квантиль уровня $\alpha/2$ (левый порог) и квантиль уровня (1 - $\alpha/2$) (правый порог).

Данный критерий строго может быть использован в предположении независимости элементов выборки и их нормального закона распределения вероятностей.

3. Критерий значимости для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух случайных величин с независимыми и равными дисперсиями.

Основная гипотеза H_0 : $m_y = m_x$; альтернативная гипотеза H_1 : $m_y \neq m_x$. В качестве статистики критерия используют *t* статистику Стьюдента

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_0\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - выборочные средние случайных величин X и Y; n_1 и n_2 - объемы выборок; величина S_0 определяется по выборочным значениям дисперсий S_1^2 и S_2^2 в виде

$$S_0^{\,2} = \frac{(n_1-1)S_1^{\,2} + (n_2-1)S_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}.$$

Критерий является двухсторонним, пороговые значения статистики критерия находят по таблицам t-распределения Стьюдента с $v = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Для доверительной вероятности
$P_{дов}=(1-\alpha)$ определим квантиль порядка $\alpha/2$ (левый порог) и квантиль порядка (1-$\alpha/2$) (правый порог).

Строгое применение критерия связано с предположениями независимости и гауссовского распределения вероятностей элементов выборок.

4. Критерий значимости для проверки гипотезы H_0 о равенстве генеральных дисперсий 2-х случайных величин X и Y. Основная гипотеза H_0 : $D_x = D_y$; альтернативная гипотеза H_1 : $D_x \neq D_y$.

В качестве статистики критерия используют F статистику Фишера

$$F = \frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}},$$

где S_1 и S_2 - выборочные дисперсии для двух случайных величин, определенные по выборкам объема n_1 и n_2 соответственно. Критерий является двухсторонним, пороговые значения статистики критерия находят по таблицам F - распределения Фишера с (n_1-1) и (n_2-1) степенями свободы. Для заданного уровня значимости α определим квантиль уровня $\alpha/2$ (левый порог) и квантиль уровня $(1-\alpha/2)$ (правый порог). Строгое применение критерия также требует справедливости предположений о независимости и гауссовом распределения вероятностей элементов выборок.

5. Критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона).

В данном случае проверяется гипотеза не о параметрах распределения вероятностей, а о виде самого распределения вероятностей.
Основная гипотеза - H_0 : генеральная плотность вероятностей $W(x)$ соответствует предполагаемой (теоретической) $W_0(x)$. Альтернативная гипотеза H_1: $W(x) \neq W_0(x)$.

В качестве статистики критерия используется величина хи-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где k - количество интервалов, на которое разбивается область значений элементов выборки при расчете гистограммы; m_i - количество элементов выборки в i-ом интервале; n - объем выборки; p_i - теоретическая вероятность попадания случайной величины в i-й интервал.

Пороговое значение статистики критерия χ^2 определяем по таблицам χ^2 -квадрат распределения вероятностей с числом степеней свободы $s = k - r - 1$, где r - число параметров теоретического распределения вероятностей $W_0(x)$, определенных по выборочным данным.

Рекомендуется брать такой объем выборки n и число интервалов k, при которых в каждом интервале оказывается не менее (7-10) значений. Обычно $к \geq$ (8-10).

Как и во всех предыдущих случаях, строгое применение этого критерия связано с предположениями о независимости и гауссовом распределения вероятностей элементов выборки X_i.

В противном случае мощность критерия снижается. Однако критерий χ^2 используют и при негауссовом распределением вероятностей, если достаточно велик объем выборки n.

3. Задание на работу.

Для выполнения работы необходимо:

1. Изучить метод функциональных преобразований в задаче моделирования случайной величины с заданной плотностью распределения вероятностей и основные положения статистической теории проверки гипотез.

2. Получить индивидуальный вариант задания, в котором предусмотрено:

а) моделирование (составление и реализация программы в среде Matcad) последовательности независимых случайных величин с заданной (теоретической) плотностью распределения вероятностей;

б) исследование статистических свойств разработанного датчика случайной последовательности с использованием методов теории проверки гипотез. Объем выборки для анализа следует согласовать с преподавателем.

3. Используя критерий согласия χ^2-квадрат проверить гипотезу о совпадении генерального распределения вероятностей, которым обладает разработанный датчик, с теоретически предполагаемым. Параметры, определяющие вид теоретического распределения вероятностей $W_0(x)$, т. е. того распределения, которое задано по заданию, следует полагать неизвестными и для расчета находить их оценки по выборочным данным.

4. По выборке обьема N, используя *t*-критерий Стьюдента и χ^2 -квадрат критерий Пирсона проверить гипотезы о равенстве генеральных средних и дисперсии заданным величинам. Уровень значимости α=0.01.

5. Используя разработанный датчик, получить две независимые выборки обьемом n_1 и n_2 для двух случайных величин с одинаковыми распределениями вероятностей, со средними значениями, отличающимися на 20%, и проверить гипотезу о различии генеральных средних с использованием *t*-критерия Стьюдента.

6. Используя разработанный датчик, получить две независимые выборки обьемом n_1 и n_2 для двух случайных величин с одинаковыми распределениями вероятностей и отличающимися на 20% дисперсиями, и проверить гипотезу о различии генеральных дисперсий с использованием *F* статистики Фишера (критерия Фишера).

7. Исследовать сходимость суммы случайных величин, имеющих равномерную ПРВ к гауссовому закону распределения вероятностей при числе слагаемых *m*=3;6;12. Для оценки степени сходимости использовать критерий согласия χ^2-квадрат.

8. По результатам работы для каждого пункта задания следует сделать выводы.

4. Контрольные вопросы

1. Объясните сущность метода функциональных преобразований при составлении алгоритма имитации случайной величины с заданной ПРВ.
2. Предложите алгоритм имитации на ЭВМ случайного события А, вероятность появления которого задана и равна *P(A)*.
3. Предложите вероятностную схему машинного эксперимента для проверки биномиального закона распределения вероятностей случайной дискретной величины.
4. Объясните смысл принципа значимости в статистической теории проверки гипотез.

5. Каков смысл величины α, определяющей уровень значимости?

6. Каков смысл величины, определяющей мощность критерия?

7. Что такое статистика критерия?

8. Почему требования увеличения доверительной вероятности и мощности критерия являются противоречивыми?

Литература

2.2 Задание по практике №2

Вычисление многомерных интегралов методом Монте Карло. Алгоритм имитации n-мерного гауссовского вектора

1. **Теоретические основы метода**.

В качестве критерия эффективности РТС, как правило, используется некоторая величина, смысл которой состоит в вычислении среднего значения (математического ожидания) некоторой функции случайных величин. В общем виде задача сводится к вычислению многомерного интеграла

$$M\left[f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right]=\iiint\limits_{A}...\iiint\limits_{A} f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\cdot W\left(x_1,x_2,...,x_n\right)dx_1dx_2...dx_n, \quad (1)$$

где $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f(\vec{\boldsymbol{x}})$ - функция n случайных переменных; $W\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ - совместная n – мерная плотность распределения вероятностей (ПРВ) системы n случайных величин; A – область интегрирования в n – мерном пространстве. В зависимости от вида функции $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ выражение (1) может иметь различный смысл, который определяется конкретной задачей.

Например, в ряде случаев возникает необходимость вычисления вероятности некоторого события **A**, которое состоит в том, что совокупность случайных величин $X_1,X_2,X_3,...,X_n=\vec{X}$, т.е. вектор $\vec{X}\in A,$ где A – некоторая область в n – мерном пространстве. При этом многомерная плотность распределения вероятностей $W(x_1,x_2,...,x_n)$ известна. В этом случае задача также состоит в вычислении математического ожидания, которым является n – кратный интеграл следующего вида

$$P(\boldsymbol{A})=M\left[\chi(\vec{\boldsymbol{x}})\right]=\iiint\limits_{A}...\iiint\limits_{A}\chi(\vec{\boldsymbol{x}})\cdot W(\vec{\boldsymbol{x}})\,d\vec{\boldsymbol{x}}, \quad (2)$$

где $\chi(\vec{\boldsymbol{x}})$ - функция (индикатор множества *A*), которая имеет вид

$$\chi(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad \vec{\boldsymbol{x}} \in A \\ 0 & \textit{при} \quad \vec{\boldsymbol{x}} \notin A \end{cases}.$$

Численный метод Монте Карло предполагает замену ПРВ в (2) или (1) на ее приближенное представление в виде совокупности *N* «точечных масс» (δ - функций), расположенных *в выборочных* точках $\{\vec{\boldsymbol{x}}_i\}$ области определения ПРВ и имеющих весовые коэффициенты $\{\omega_i\}$. Это означает, что ПРВ в (2) приближенно представляется в следующей форме

$$W(\vec{\boldsymbol{x}}) \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_i \cdot \delta(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_i). \tag{3}$$

Поскольку любая ПРВ удовлетворяет условию нормировки, то очевидно весовые коэффициенты, соответствующие выборочным точкам, должны быть также нормированы, т. е. $\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$. В простейшем случае это могут быть веса равного уровня, т. е.

$$\omega_i = \frac{1}{N}. \tag{4}$$

Если (3) с учетом (4) подставить в (2) или (1), то, учитывая фильтрующее свойство δ - функции, получим (для выражения (2)) следующую форму

$$P(\boldsymbol{A}) = M\left[\chi(\vec{\boldsymbol{x}})\right] = \iiint\limits_{A} \ldots \iiint\limits_{A} \chi(\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot W(\vec{\boldsymbol{x}})\, d\vec{\boldsymbol{x}} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi(\vec{\boldsymbol{x}}_i). \tag{5}$$

Отметим, что (5) по существу является равно взвешенным средним арифметическим подинтегральной функции, вычисленным по совокупности *N* выборочных точек $\{\vec{\boldsymbol{x}}_i\}$, которые выбраны из генеральной совокупности с известной ПРВ $W(\vec{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, (5) утверждает известный из теории статистики факт, что в качестве *оценки математического ожидания* некоторой случайной величины (здесь - случайной функции $\chi(\vec{\boldsymbol{x}})$) можно использовать выборочное среднее арифметическое этой функции - среднее по выборке $\{\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_N\}$ объема *N*. Другими словами, в качестве истинной вероятности события $P(\boldsymbol{A})$, применяя метод Монте Карло, мы используем ее оценку

$$P^*(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi(\vec{\boldsymbol{x}}_i). \tag{6}$$

Конечно, первостепенное значение и интерес представляет качество оценки (6). Потребителя (инженера) интересует не просто результат решения задачи, но и точность этого результата. В этом плане важно понимать, что оценка (6) сама является случайной величиной, так как формируется как функция выборки. Поскольку выборка всегда рассматривается как последовательность случайных величин, то и любые преобразования над ней дают случайную величину. Таким образом, *качество оценки (6) можно характеризовать только вероятностными категориями*, т. е. в терминах теории вероятностей. Можно интересоваться плотностью распределения вероятностей оценки вида (6), ее математическим ожиданием и дисперсией, а также тем насколько вероятны ее отклонения на заданную величину от истинного значения. В курсе лекций по ТВиМС мы показали, что оценка вида (6) является несмещенной и в случае *независимой выборки* имеет дисперсию

$$D_{P^*} = \frac{D_\chi}{N}. \tag{7}$$

В теории вероятностей известно неравенство Чебышева, которое устанавливает соотношение для вероятности отклонения любой (с конечным средним значением и дисперсией) случайной величины от ее математического ожидания. Неравенство Чебышева имеет в данном случае следующий вид

$$P\left\{\left|P - P^*\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D_{P^*}}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > \sigma_x \tag{8}$$

Применение, соотношений (7) или (8) требует знания дисперсии D_χ. В практических задачах в качестве этой величины используют ее оценку D_χ^*, которую также находят на основе выборочных данных $\left\{\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, ..., \vec{\boldsymbol{x}}_N\right\}$.

Практическая реализация метода Монте Карло предполагает, что инженер имеет возможность и умеет реализовать (с помощью ЭВМ) генерацию выборок $\left\{\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, ..., \vec{\boldsymbol{x}}_N\right\}$ из генерального распределения вероятностей $W(\vec{\boldsymbol{x}})$.

2. Способ генерации выборочных значений случайного вектора $\vec{X}$ с заданной ковариационной матрицей $\boldsymbol{K}_x$.

Способ основан на линейном преобразовании опорного вектора $\vec{\boldsymbol{Y}}$, который имеет единичную ковариационную матрицу, т. е. $\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{E}$. Линейное преобразование определено заданием матрицы преобразования $\boldsymbol{S}$. Таким образом, полагаем, что $\vec{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{\boldsymbol{Y}}$. По определению

$$\boldsymbol{K}_x = M\left[\tilde{\vec{\boldsymbol{X}}} \cdot \tilde{\vec{\boldsymbol{X}}}^T \right] \tag{9}$$

где $\sim$ - знак центрирования случайной величины (вычитание среднего значения). Далее полагаем, что $M\left[\vec{\boldsymbol{X}}\right] = \vec{\boldsymbol{0}}$. Подставляя в (9) выражение для искомого вектора $\vec{\boldsymbol{X}}$ через вектор $\vec{\boldsymbol{Y}}$, получим

$$\boldsymbol{K}_x = M\left[\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Y}^T \cdot \boldsymbol{S}^T \right] = \boldsymbol{S} \cdot M\left[\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Y}^T \right] \cdot \boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{K}_y \cdot \boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^T. \tag{10}$$

Матрицу $\boldsymbol{S}$ в представлении (10) называют квадратным корнем матрицы $\boldsymbol{K}_x$, т.е. $\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{K}_x}$. В теории матриц доказано утверждение о том, что любая невырожденная симметрическая матрица имеет квадратный корень, причем матрица $\boldsymbol{S}$ может иметь нижнюю треугольную форму. Представление матрицы $\boldsymbol{K}_x = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^T$ называют разложением Холецкого. Таким образом, для составляющих вектора $\vec{\boldsymbol{X}}$ в скалярной форме будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &X_1 = s_{11} \cdot Y_1 \\ &X_2 = s_{21} \cdot Y_1 + s_{22} \cdot Y_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &X_n = s_{n1} \cdot Y_1 + s_{n2} \cdot Y_2 + s_{n3} \cdot Y_3 + \ldots\ldots\ldots + s_{nn} \cdot Y_n \end{aligned} \quad , \tag{11}$$

где s_{ij} - элементы матрицы $\boldsymbol{S}$. Для определения элементов s_{ij} необходимо последовательно и поочередно выполнять действия возведения в квадрат уравнений (11) и их попарного умножения с выполнением операции математического ожидания. В частности первые три элемента матрицы получим в виде

$$s_{11} = \sqrt{D_{x_1}}, \quad s_{21} = \frac{K_{12}}{s_{11}}, \quad s_{22} = \sqrt{D_{x_2} - (s_{21})^2}\,.$$

В итоге все элементы матрицы $\boldsymbol{S}$ будут выражены через известные элементы ковариационной матрицы $\boldsymbol{K}_x$. В случае, когда искомый вектор $\vec{\boldsymbol{X}}$ имеет гауссово распределение вероятностей $\mathcal{N}(\vec{\boldsymbol{0}}; \boldsymbol{K}_x)$, для генерации в пакете Matcad выборочных значений каждой из n составляющих вектора $\vec{\boldsymbol{Y}}$ следует использовать стандартную процедуру *rnorm(N,0,1),* где N – объем выборки.

Задание на работу

1. Для заданной ковариационной матрицы $\boldsymbol{K}_x$ составить программу генерации N выборочных реализаций гауссовского случайного n – мерного вектора $\vec{\boldsymbol{X}}$, имеющего $M\left[\vec{\boldsymbol{X}}\right]=\vec{\boldsymbol{0}}$. Размерность вектора n и вид его ковариационной матрицы задаются индивидуально.

2. Выполнить расчет двух выборочных значений ковариационных моментов составляющих вектора $\vec{\boldsymbol{X}}$ и сравнить с их теоретическими значениями.

3. Вычислить вероятность события

$$P(\boldsymbol{A})=\iiint\limits_{A}\ldots\iiint\limits_{A} W(\vec{\boldsymbol{x}})\,d\vec{\boldsymbol{x}},$$

где $W(\vec{\boldsymbol{x}})$ - гауссова n – мерная ПРВ; A – заданное множество в n – мерном пространстве, которое можно определить следующим выражением

$$A=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_n:\quad L(\vec{\boldsymbol{x}})\le 0\right\}. \tag{12}$$

В (12) граница множества определена заданием уравнения гиперплоскости $L(\vec{\boldsymbol{x}})$=0, проходящей через одну из главных осей ковариационного эллипсоида. Результат вычисления вероятности сравнить с теоретическим значением.

4. Составить программу для вычисления значений многомерной функции распределения вероятностей $F(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ в заданной точке с координатами $x_1=a_1;\,x_2=a_2;\,x_3=a_3;\ldots;\,x_n=a_n$. Выполнить численный расчет функции распределения в точке, для которой *можно найти* ее теоретическое значение и сравнить результаты.

5. Выполнить экспериментальное исследование зависимости рассеяния оценок, полученных методом Монте Карло в п. 4, от объема выборки N. Расчет провести для трех значений объема выборки, отличающихся друг от друга в 10 и 100 раз.

6. Выполнить расчет по п. 4 с использованием стандартных процедур интегрирования пакета Matcad.

7. Сделать выводы по работе.

3. Контрольные вопросы

1. Объясните сущность вычисления многомерного интеграла методом статистических испытаний.
2. Что определяет величину погрешности оценки интеграла и почему оценка достоверности вычислений предполагает использование вероятностных понятий.
3. В каком случае воспроизведение случайного вектора с учетом ковариационных связей между его компонентами является исчерпывающим, т.е. полностью определяет статистические свойства этого вектора.

2.3 Задание по практике №3

Цель работы: Моделирование гауссовского стационарного случайного процесса с заданной корреляционной функцией.
Теоретическая часть работы изложена в курсе лекций.
Задание на работу:

1. Корреляционная функция процесса имеет вид:

$$K_y(\tau) = \frac{\sigma_y^2}{(\alpha - \alpha_1)}\left(\alpha \cdot e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1|\tau|}\right); \qquad (1)$$

$$K_y(\tau) = \frac{\sigma_y^2}{(\alpha_1 - \alpha)}\left(\alpha_1 \cdot e^{-\alpha|\tau|} - \alpha \cdot e^{-\alpha_1|\tau|}\right); \qquad (2)$$

$$K_y(\tau) = \sigma_y^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\Omega\ \tau + \frac{\alpha}{\Omega} \cdot \sin\Omega|\tau|\right), \qquad (3)$$

причем $\Omega^2 \gg \alpha^2$.

2. Для заданных параметров, определяющих вид корреляционной функции, определить передаточную характеристику порождающего фильтра и получить алгоритм имитации случайного процесса в форме уравнений для переменных состояния. Построить график энергетического спектра процесса.
3. Получить выборку объемом (150-200)$\cdot\tau_0$, где $\cdot\tau_0$ - интервал корреляции процесса и по ней вычислить экспериментальную корреляционную функцию. Сравнить результат с теоретической функцией $K_y(\tau)$.
4. Результаты оформить с необходимыми выкладками и графиками; сделать выводы по работе.

2.4 Задание по практике №4

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖИТЕЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ТИПА С ФАЗОВЫМ ДЕТЕКТОРОМ

Цель работы: Исследовать характеристики обнаружения фазового детектора.

Задание на работу :

На вход обнаружителя – фазового детектора с пороговым устройством поступает регулярный полезный радиосигнал с известной частотой и узкополосный стационарный гауссов шум с заданной корреляционной функцией.

В работе необходимо:

1. Исследовать зависимость вероятности ложной тревоги от величины нормированного порога Uп/SIGMAn; (SIGMAn=$\sigma_{шума}$).
2. Исследовать зависимость вероятности правильного обнаружения от величины отношения So/GIGMAn.
3. Исследовать влияние отношения постоянной времени ФНЧ к интервалу корреляции шума на входе фазового детектора на характеристики обнаружения.
4. Получить гистограмму распределения вероятностей сигнала на входе порогового устройства при наличии и отсутствии полезного сигнала.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Составить программу генерации на ЭВМ статистически независимых гауссовых последовательностей квадратурных составляющих узкополосного шума.

Для этой цели использовать соотношение (или упрощенные формулы - см. соответствующую лекцию)

Nc(k)=exp(-GAMMA)*Nc(k-1)+sqrt(1-exp(-2*GAMMA))*Xo1(k);
Ns(k)=exp(-GAMMA)*Ns(k-1)+sqrt(1-exp(-2*GAMMA))*Xo2(k),

где GAMMA - отношение интервала дискретизации к интервалу корреляции шума; Xo1 ,Xo2 - независимые белые гауссовы последовательности.

2. Образовать в программе сумму квадратурных составляющих полезного сигнала и шума
:

Vc(k)=So*Cos(FIs)+ Nc(k);
Vs(k)=So*Sin(FIs) = Ns(k).

3. Используя математическую модель фазового детектора в виде последовательного соединения нелинейной части и ФНЧ (метод комплексной огибающей), образовать в программе сигнал на входе ФНЧ по формуле

$$Y(k)=Vc(k)*Uo*Cos(FIo) + Vs(k)*Uo*Sin(FIo),$$

где Uo и FIo -амплитуда и фаза опорного сигнала.

4. Используя рекуррентный алгоритм фильтрации, образовать сигнал на выходе ФНЧ в виде интегрирующей цепочки согласно формуле

$$Z(k)=(1-бt/To)*Z(k-1)+бt/To *Y(k-1), \quad бt=\Delta t,$$

где β=бt/To -отношение интервала квантования к постоянной времени ФНЧ.

5. Для оценки вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения организовать в программе расчет частоты превышений порога Un с выводом результатов при различных отношениях Uп/SIGMAn (при расчете вероятности ложной тревоги) и So/SIGMAn(при расчете вероятности правильного обнаружения).

6. По результатам работы сделать выводы и ответить на вопросы к лаб. работе.

Условные обозначения в программе: So/SIGMAn (SIGMAn=1) - отношение сигнал шум; GAMMA=бt/TAUo, TAUo - интервал корреляции шума; FIs - фаза сигнала; Uo , FIop - амплитуда и фаза опорного сигнала в случае совпадения несущей частоты с частотой полезного сигнала;

β=бt/To - отношение интервала квантования к постоянной времени ФНЧ