

Томский университет систем управления и радиоэлектроники
Кафедра радиотехнических систем

В. И. Тисленко

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Учебно-методическое пособие по практическим занятиям,
лабораторным работам и организации самостоятельной
работы студентов**

Томск – 2011

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	
2. Программа курса «Статистическая теория радиотехнических систем».....	
3. Контрольные вопросы по курсу.....	
4. Методические указания к практическим работам	
4.1 Задание по практике № 1. Статистическое описание случайных сигналов.....	
4.2 Задание по практике №2. Статистические свойства огибающей и фазы смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссова шума.....	
4.3 Задание по практике № 3. Оптимальное обнаружение полезного сигнала на фоне шума.....	
4.4 Задание по практике № 4. Оценка неизвестных параметров сигналов при наличии помех.....	

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для выполнения заданий по практике, лабораторным работам и организации самостоятельной работы в течение семестра.

В пособии содержатся теоретические сведения и указания по выполнению заданий по практическим и лабораторным занятиям.

Задания выполняются на ПЭВМ с использованием пакета Mathcad.

Студент получает листинг программы в электронной форме, на его основе создает собственную программу в среде Mathcad и выполняет задание.

Выполненное задание по практике должно содержать разработанный листинг программы в среде Mathcad с выполненными пунктами задания и выводами.

В данном пособии приведены контрольные вопросы по каждой теме. По итогам выполненных заданий студент получает соответствующее количество баллов, которые суммируются с другими, полученными в семестре результатами, и определяют в конце семестра общую оценку по рейтингу.

2. Программа курса «Статистическая теория радиотехнических систем»

2.1 Математические модели сигналов и помех в радиотехнических системах

(лекции – 10 час., самостоятельная работа – 5 час.)

Общее описание сигналов и помех. Классификация сигналов и сообщений. Функция различия сигналов. Частотно-временная корреляционная функция узкополосного радиосигнала и ее структура. Функция неопределенности радиосигнала и связь ее параметров с параметрами радиосигнала. Принцип неопределенности. Примеры функций неопределенности простых и сложных импульсных сигналов.

Виды помех. Стационарная гауссовская случайная помеха. Белый шум. Статистические свойства огибающей и фазы смеси регулярного сигнала и гауссовской помехи.

Радиоканал и его свойства. Модель сигнала в однолучевом и многолучевом каналах. Пространственные частотные и временные искажения структуры электромагнитного поля в месте приема. Гауссовская модель полезного сигнала в многолучевом канале.

2.2 Основы статистической теории обнаружения и различения сигналов при наличии помех

(лекции – 14 час., самостоятельная работа – 7 час.)

Общая характеристика задач статистической теории РТС. Согласованный линейный фильтр: импульсная реакция и комплексная частотная характеристика согласованного фильтра; форма сигнала на выходе и отношение уровней сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра. Примеры построения согласованных фильтров: фильтр для прямоугольного радиоимпульса с прямоугольной огибающей; для прямоугольного радиоимпульса с фазокодовой манипуляцией (ФКМ), фильтр для пачки когерентных радиоимпульсов.

Байесовская теория синтеза оптимального приемника - различителя (обнаружителя) сигнала при наличии помех: функция потерь; средний байесов риск; отношение правдоподобия.

Структура оптимального приемника – различителя (обнаружителя) детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума: корреляционный приемник и приемник с согласованным фильтром. Статистическая характеристика качества различения и обнаружения.

2.3 Основы статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала при наличии помех. Разрешение сигналов по параметрам

(лекции – 12 час., самостоятельная работа – 12 час.)

Оценки параметров сигналов и их свойства. Байесовская теория оценок: функция потерь; байесовский риск; оптимальные байесовские оценки. Функция правдоподобия и максимально правдоподобные оценки. Совместные оценки.

Метод наименьших квадратов: оператор оценки в линейных моделях; статистические свойства оценок МНК. Примеры оценок неизвестных параметров.

Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы. Статистические характеристики (среднее и дисперсия) максимально правдоподобной оценки параметра сигнала при большом отношении уровня сигнала к шуму. Оптимальная оценка амплитуды и начальной фазы регулярного сигнала.

Информация по Фишеру. Неравенство Крамера – Рао.

Разрешение сигналов: критерий разрешения; разрешение двух сигналов по времени запаздывания; простые и сложные сигналы. Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частотному сдвигу. Тело неопределенности.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Тисленко В.И. Статистические методы обработки сигналов в радиотехнических системах. – Томск . 2007. 244 с.
2. Тисленко В.И. Статистическая теория радиотехнических систем. – Томск. 2003 (19)
3. Липкин И.А. Основы статистической радиотехники. - М.: Сов. радио,1978. (29)

Дополнительная литература

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 2004. (50)
2. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. *Учебное пособие для вузов.* – М.: Радиотехника, 2003.

3. Контрольные вопросы по курсу СТРТС

Раздел 2.1

1. В чем принципиальное отличие сигнала и помехи?
2. Почему РТС извлечения информации относят к системам с внешней модуляцией, а РТС передачи информации к системам с внутренней модуляцией?
3. В чем отличие аддитивной помехи от мультипликативной?
4. В чем различие детерминированного и статистического подходов к решению задач анализа и синтеза РТС? Почему детерминированный подход не состоятелен?
5. Перечислите функции и параметры, задание которых связано с понятием «статистическое описание» случайной функции?
6. В чем отличие детерминированной, квазидетерминированной и случайной функций?
7. В чем отличие аналогового и цифрового сообщений?
8. Запишите общее выражение сигнала – переносчика сообщения
9. В чем отличие сигналов с одноступенчатой и двухступенчатой модуляцией? Приведите примеры осциллограмм.
10. Что есть функция различия сигналов и каков ее смысл?
11. Запишите выражение функции различия двух сигналов по одному информативному параметру x , когда он не является энергетическим. По двум параметрам?
12. Запишите в общем виде частотно – временную корреляционную функцию узкополосного радиосигнала.
13. Запишите выражение временной автокорреляционной функции (АКФ) узкополосного радиосигнала в действительной и комплексной форме.
14. Запишите выражение комплексной огибающей временной АКФ узкополосного радиосигнала и обоснуйте тот факт, что это медленная (в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$) функция времени.
15. Что есть функция неопределенности (ФП) радиосигнала и каковы ее свойства?
16. В чем сущность принципа неопределенности в радиолокации?
17. Какие параметры радиосигнала определяют ширину ФП вдоль осей время – частота?
18. Что есть база радиосигнала и в чем различие сигналов с простой и сложной модуляцией?
19. Почему для сигнала с простой модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени непременно приводит (при постоянной мощности) к снижению энергии этого сигнала?

20. Почему для сигнала со сложной модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени не приводит (при постоянной мощности) к снижению энергии этого сигнала?
21. В каком случае ширина огибающей радиосигнала и ширина огибающей временной АКФ этого сигнала примерно одинаковы? Когда они могут различаться на несколько порядков?
22. Изобразите графически временную АКФ одиночного радиоимпульса с прямоугольной огибающей и простой модуляцией.
23. Изобразите графически временную АКФ одиночного ФКМ радиоимпульса с прямоугольной огибающей?
24. Почему для полноты вероятностного описания случайного сигнала необходимо привлечение плотностей распределения вероятностей более чем 1-го порядка ?
25. Какая функция определяет спектральные свойства случайного стационарного процесса, поясните ее вероятностный смысл и физическую единицу измерения?
26. Какой случайный процесс называют нормальным и каковы его особенности?
27. Что означает тот факт, что шум белый?
28. Что означает тот факт, что шум стационарный и гауссов?
29. Что есть радиоканал для радиосистем и каковы механизмы его влияния на свойства сигнала на входе приемного устройства РТС? Приведите примеры.
30. В чем отличие моделей однолучевого и многолучевого радиоканалов?
31. Поясните графически формирование квадратурных составляющих высокочастотного сигнала в многолучевом радиоканале.
32. Покажите взаимосвязь квадратурных составляющих с огибающей и фазой радиосигнала.
33. Запишите выражение для одномерной ПРВ огибающей и назовите параметры, которые определяют вид этой функции.
34. Какой параметр характеризует величину СКО огибающей (или фазы) смеси регулярного и случайного сигналов относительно их средних значений.
35. Сделайте эскиз ПРВ фазы смеси регулярного и случайного сигналов для двух значений параметра когерентности $a_1 > a_2$.

Раздел 2.2

1. Назовите основные задачи статистической теории радиосистем.
2. В чем суть задачи оптимизации РТС и каковы основные этапы ее решения?

3. Изложите постановку задачи оптимизации характеристик линейного фильтра, решением которой является согласованный фильтр.
4. Если $\dot{g}(\omega)$ есть комплексный частотный спектр полезного сигнала $s(t)$, то какой вид имеют комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и его импульсная реакция?
5. Объясните работу согласованного фильтра на физическом уровне?
6. Какие величины определяют максимальное отношение уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума на выходе согласованного фильтра?
7. В какой момент времени на выходе согласованного фильтра можно получить наибольшее превышение полезного сигнала над шумом?
8. Какую форму имеет полезный сигнал на выходе согласованного фильтра, если входной сигнал есть: одиночный прямоугольный видеоимпульс; радиоимпульс с прямоугольной огибающей; одиночный радиоимпульс с ФКМ?
9. Изобразите структурную схему согласованного фильтра для радиоимпульса с ФКМ; для пачки радиоимпульсов с простой модуляцией.
10. Изложите постановку задачи в байесовской теории синтеза оптимального приемника - различителя (обнаружителя) 2 – х полезных сигналов на фоне помехи.
11. Каков смысл величин, определяющих платежную матрицу в задаче синтеза оптимального приемника - различителя?
12. Что есть средний байесов риск в задаче синтеза оптимального приемника – различителя 2- х сигналов; приемника – обнаружителя полезного сигнала на фоне шума?
13. Запишите в общем виде оптимальное решающее правило приемника – различителя 2- х сигналов на фоне помехи.
14. Почему отношение 2 – х плотностей распределения вероятностей, участвующих при формировании решения на выходе оптимального приемника – различителя, называют отношением правдоподобия?
15. Дайте формулировку критерия «идеального наблюдателя»; критерия Неймана – Пирсона?
16. Изобразите структуру оптимального приемника – различителя для случая 2 – х полностью известных сигналов, поступающих на вход приемника вместе с белым гауссовым шумом.
17. Изобразите структуру оптимального приемника – обнаружителя полностью известного, поступающего на вход приемника вместе с белым гауссовым шумом.
18. Почему в структуре оптимального приемника – различителя (обнаружителя) полностью известных сигналов возможно применение согласованных фильтров?

19. В каких координатах представляют графики кривых, определяющих статистические характеристики качества бинарного приемника – различителя?
20. Какие из перечисленных четырех случайных событий в приемнике – обнаружителе являются противоположными: ложная тревога; пропуск сигнала; правильное обнаружение; неправильное обнаружение?
21. Изобразите графически ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ выходного сигнала оптимального приемника – различителя (обнаружителя) и укажите площади, определяющие вероятности принятия ошибочных решений.

Раздел 2.3

1. Изложите в общем виде постановку задачи в статистической теории оценивания.
2. Что есть смещение оценки неизвестного параметра сигнала?
3. Запишите выражение для среднеквадратической ошибки параметра сигнала.
4. Поясните свойство состоятельности оценок.
5. Изложите постановку задачи оценки параметра сигнала в байесовской теории оценивания.
6. Какой смысл имеет функция потерь в байесовской теории оценивания и каковы основные типы этих функций?
7. Что есть байесовский риск в теории оценивания?
8. Запишите в общей форме выражение байесовского риска.
9. Каков содержательный смысл априорной ПРВ $W(\lambda)$ и апостериорной ПРВ $W(\lambda/y_1, y_2, \dots, y_n)$ оцениваемого параметра λ ?
10. Запишите в общей форме выражение байесовской оценки при квадратичной функции потерь.
11. Как изменяется вид байесовской оценки при назначении простой функции потерь?
12. Что есть функция правдоподобия и оценка параметра по максимуму правдоподобия?
13. Запишите выражение, связывающее апостериорную ПРВ оцениваемого параметра и функцию правдоподобия; запишите в общем виде уравнение правдоподобия.
14. Запишите в общей форме математическую модель наблюдаемого сигнала, которая содержит аддитивную помеху и является линейной по отношению к одному (двум, трем) неизвестным параметрам.
15. Каков смысл и вид целевой функции при определении оценок по методу наименьших квадратов (МНК)?

16. В чем состоит особенность оператора, определяющего оценку $\lambda_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ в случае линейной по параметрам модели наблюдаемого сигнала?
17. Выполните необходимые преобразования и получите выражение для оценки постоянного параметра методом наименьших квадратов.
18. Каково условие несмещенности оценок по МНК?
19. Какие величины определяют СКО оценки $\lambda_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ постоянного параметра λ , если выборка состоит из некоррелированных отсчетов наблюдаемого сигнала?
20. Изобразите в общем виде структуру оптимального измерителя неизвестного параметра сигнала и поясните функции отдельных элементов измерителя.
21. Запишите выражение для дисперсии оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ неизвестного параметра сигнала, поступающего в смеси с белым гауссовым шумом на вход приемника – измерителя и перечислите величины, которые определяют ее значение.
22. Запишите в общей форме функцию правдоподобия параметра λ для случая выборки, состоящей из n статистически независимых отсчетов y_1, y_2, \dots, y_n наблюдаемого сигнала $y(t)$.
24. Как определяют вклад выборки \mathbf{y} и отдельного наблюдения y_i , являющегося элементом статистически независимой выборки?
25. Как определяют количество информации по Фишеру о параметре λ , содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} объема n ?
26. Какими свойствами обладают максимально правдоподобные оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ неизвестного параметра λ при выполнении условий регулярности для функции правдоподобия?
27. Запишите неравенство Крамера – Рао. Что определяет это неравенство?
28. В чем состоит особенность задачи разрешения сигналов по параметру в сравнении с задачей различения сигналов?
29. Что есть мера разрешения двух сигналов по параметру временной задержки?
30. Что определяет величину потенциальной разрешающей способности двух сигналов известной формы по времени задержки?
31. Как следует построить приемник – обнаружитель, чтобы реализовать предельную разрешающую способность сигналов известной формы по времени задержки?
32. Что дает применение сигналов с большой базой в плане их разрешения по времени задержки?
33. Каковы особенности разрешения сигналов одновременно по двум параметрам – времени задержки и частотному сдвигу?

34. Почему применение сигнала с простой модуляцией не позволяет одновременно повысить разрешение сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?

35. В чем состоит преимущество применения сигналов с большой базой при достижении высокого разрешения сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?

4. Методические указания к практическим работам

4.1 Задание по практике №1

Статистическое описание случайных сигналов

Цель работы: Изучение и экспериментальная оценка основных вероятностных характеристик случайных сигналов с непрерывным множеством значений.

1. Основные положения теории случайных сигналов.

1.1 Случайный сигнал- это функция времени $X(t)$, численное значение которой в любой момент времени t_i является случайной величиной, т.е. $X(t_i) = X_i$. Далее будем иметь в виду такие случайные сигналы, у которых множество значений непрерывно. Оно может быть ограниченным и тогда $X_i \in (a; b)$, где a и b постоянные величины или не ограниченным, например, $X_i \in (-\infty; \infty)$.

В инженерной практике широко используют представление сигналов в дискретном времени. Таким образом, если иметь в виду дискретную последовательность моментов времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, то случайный процесс есть последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n . Важно отметить, что для описания случайного сигнала *необходимо рассматривать совместно систему n случайных величин*. Вопрос о том, сколько следует взять моментов времени и как их задать, заслуживает отдельного рассмотрения.

1.2. Ансамбль реализаций и функция распределения вероятностей. Заведомо определить значение величины X_i невозможно, поскольку это случайная величина. Таким образом, X_i или, если иметь в виду любой текущий момент времени t , то $X(t)$, есть по существу обозначение множества (совокупности, ансамбля) значений случайной функции. Конкретные численные значения случайной величины X обозначают малой буквой x . В теории случайных сигналов конкретную реализацию случайного сигнала $X(t)$ обозначают $x^{(k)}(t)$. При этом полный ансамбль реализаций полагают бесконечно большим.

Конечно в инженерной практике количество возможных реализаций (опытов, наблюдений) всегда ограничено. Задача статистики, как науки состоит, в частности, в том, чтобы по ограниченному числу опытов получить информацию о вероятностных свойствах случайных величин (функций) и дать оценку достоверности этой информации.

Для описания случайных величин в теории вероятностей введено **понятие функции распределения вероятностей (ФРВ) $F(x)$** . Числовое значение функции $F(x)$ в точке x равно вероятности события ($X \leq x$), т.е.

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

Приращение этой функции на интервале $[x; x + \Delta x]$, очевидно, равно вероятности попадания сигнала в этот интервал $P\{X \in [x; x + \Delta x]\}$, т.е.

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = P[X \leq (x + \Delta x)] - P[X \leq x]. \quad (2)$$

1.3. Функция плотности распределения вероятностей. Найдем отношение вероятности (2) к длине интервала, т.е. определим среднюю плотность распределения вероятности на конечном интервале $[x; x + \Delta x]$. Получим

$$W_{cp}(x) = \Delta F(x) / \Delta x. \quad (3)$$

Очевидно, что при условии $\Delta x \rightarrow 0$, можно получить плотность вероятности в точке (подобно тому, как получают мгновенную скорость в механике). Таким образом, для *функции плотности распределения вероятности (ПРВ)* найдем

$$W(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} W_{cp}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\Delta F(x) / \Delta x] = \frac{dF(x)}{dx} \quad (4)$$

Следует отметить, что дифференциал

$$dF(x) = W(x) \cdot dx \quad (5)$$

имеет смысл *бесконечно малой вероятности попадания случайной величины (случайного процесса в один произвольный момент времени t) в бесконечно малую окрестность со значением x* .

На рис 1 для десяти моментов времени ($t_i \equiv i = 1, 2, \dots, 10$) показаны 50 реализаций $x^{(k)}(t_i) \equiv x_i^{(k)}$, где $k = 1, 2, \dots, 50$ одной и той же случайной функции $X(t)$.

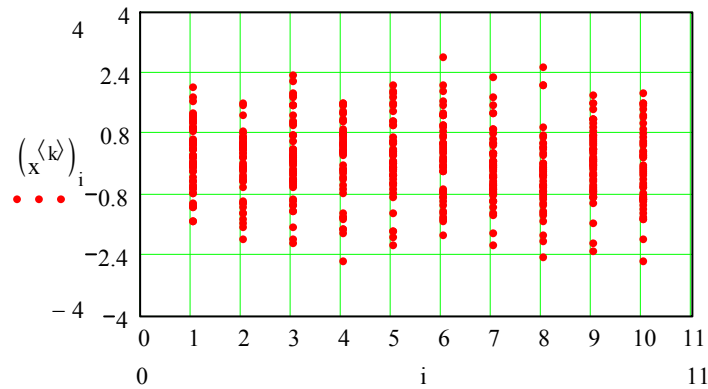


Рис. 1.

На рис. 2 показаны три реализации этой же случайной функции, но ее соседние по времени значения соединены прямыми линиями (кусочно - линейная аппроксимация непрерывной функции).

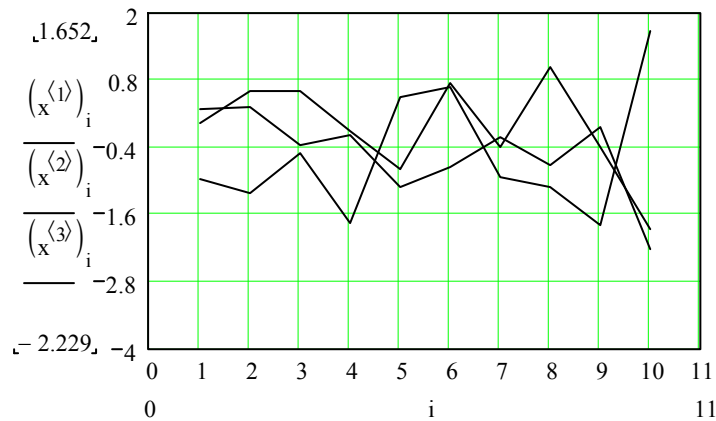


Рис. 2.

1.4. Многомерные ФРВ и ПРВ. Функция $F(x)$, введенная выше в п. 3, характеризует поведение случайного сигнала в *один момент времени*. Ее вид, в общем случае, может измениться при выборе другого момента времени. Чтобы подчеркнуть этот факт функцию распределения обычно записывают в виде $F(x_1; t_1)$. Однако, как уже отмечалось, знание только этой функции недостаточно, чтобы описать поведение случайного сигнала. Необходимо рассматривать совместно систему n случайных величин. Таким образом, вводится функция

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n; t_1, t_2, \dots, t_n], \quad (6)$$

где $P[\bullet]$ - вероятность события – совместного выполнения неравенств, указанных в скобках в n моментов времени. Для краткости записи совокупность случайных величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ объединяют в вектор и функцию $F(\vec{x}; t_1, \dots, t_n)$ называют n - мерной функцией распределения вероятностей (ФРВ) случайного сигнала. Рассуждая аналогично, приходим к понятию n - мерной функции плотности распределения вероятностей $W(\vec{x}; t_1, \dots, t_n)$. Вероятностный смысл многомерных ФРВ и ПРВ остается прежним. Отличие лишь в том, что все рассуждения и построения теперь следует рассматривать в n - мерном пространстве. В частности, дифференциальный n - мерный элемент вероятности $dF(\vec{x}; t_1, \dots, t_n) = W(\vec{x}; t_1, \dots, t_n) \cdot d\vec{x}$, где $d\vec{x} = dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$ дифференциальный элемент объема.

1.5. Моментные функции. Описание случайного сигнала с помощью ФРВ и ПРВ является исчерпывающим. Однако представить характер поведения случайного сигнала на их основе довольно сложно. В этом плане более наглядны *моментные функции*, которые в среднем определяют поведение ансамбля реализаций. В практике широко применяют функцию $m_x(t)$, которая определяет в любой момент времени t среднее (по всему множеству реализаций, т.е. по ансамблю) значение случайного сигнала. Несмотря на изменчивость во времени ее можно назвать постоянной составляющей случайного сигнала. Вычисление функции $m_x(t)$ предполагает весовое суммирование (в данном случае интегрирование) всех возможных значений сигнала с учетом вероятностей (5) их появления. В итоге получаем известное из теории вероятностей соотношение для математического ожидания случайной величины

$$m_x(t) = \overline{X(t)} = \mathbf{M}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x; t) dx, \quad (7)$$

где $\mathbf{M}[\bullet]$ - оператор (правило вычисления) математического ожидания; черта сверху – упрощенное обозначение оператора усреднения по ансамблю. Таким образом, «*математическое ожидание*» и «*среднее по ансамблю*» - это по существу тождественные понятия.

Вторая, не менее важная, моментная функция определяет среднюю мощность вариаций (отклонений) случайного сигнала относительно среднего значения в момент времени t . Величина отклонения (переменная составляющая) или центрированное значение сигнала есть $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Поскольку мощность пропорциональна квадрату тока (или напряжения), то ее среднее (по ансамблю) значение определено выражением

$$D_x(t) = \overline{\tilde{X}^2(t)} = \mathbf{M}[\tilde{X}^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 \cdot W(x; t) dx. \quad (8)$$

Величину средней мощности $D_x(t)$ переменной составляющей $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ сигнала называют *дисперсией случайного сигнала*. Можно считать, что дисперсия характеризует в сред-

нем степень рассеяния сигнала в момент времени t относительно его среднего значения. Фактические пределы интегрирования в (7) и (8) определяются областью значений x , где $W(x;t) \neq 0$, в общем случае это вся вещественная прямая, т.е. $(-\infty; \infty)$.

Отметим, что вычисление $D_x(t)$ и $m_x(t)$ требует знания одномерной ПРВ, которая не может характеризовать скорость изменения сигнала во времени, т.е. его спектральные (частотные) свойства. Для введения моментной функции, обладающей указанным свойством, необходимо привлечь 2-мерную ПРВ $W(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Моментная функция, которая связана со спектральными свойствами случайного сигнала, называется *автоковариационной функцией*. Автоковариационная функция (АКФ) $K_x(t_1, t_2)$ определяется как среднее (по ансамблю) величины $[\tilde{X}(t_1) \cdot \tilde{X}(t_2)]$, равной произведению центрированных значений сигнала в два момента времени $\tilde{X}(t_1)$ и $\tilde{X}(t_2)$. Таким образом, имеем

$$K_x(t_1, t_2) = \overline{\tilde{X}(t_1) \cdot \tilde{X}(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)] \cdot W(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Предлагается самостоятельно убедиться в том, что в *случае независимых величин*, когда

$$W(x_1, x_2; t_1, t_2) = W(x_1; t_1) \cdot W(x_2; t_2), \quad (10)$$

выражение (9) для АКФ тождественно равно нулю, т.е. в эти моменты времени значения случайного сигнала некоррелированы.

1.6. Случайные стационарные сигналы. Важный класс сигналов составляют *стационарные* сигналы. Свойство, которое определяет эти сигналы, состоит в том, что для них n -мерные ПРВ не изменяются при произвольном переносе начала координат по оси времени. Если это свойство выполняется только для $n \leq 2$, то случайный сигнал называют *не строго стационарным или стационарным «в узком смысле»*. В итоге для случайного стационарного сигнала ПРВ 1-го порядка от времени не зависит, а ПРВ 2-го порядка зависит лишь от модуля $|t_2 - t_1| = \tau$. Из выражений для моментных функций (7 - 9) следует, что среднее значение и дисперсия стационарного процесса суть постоянные величины, а автоковариационная функция есть функция одного аргумента, т.е.

$$\begin{aligned} m_x(t) = m_x = const; \quad D_x(t) = D_x = const; \\ K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

1.7. Эргодическое свойство случайных стационарных сигналов. Стационарные сигналы, у которых АКФ абсолютно интегрируема, обладают *эргодическим свойством*. Суть этого свойства в том, что вероятностные характеристики ($F(x)$, $W(x)$, m_x , D_x , $K(\tau)$ и др.), которые были определены выше, как *средние по ансамблю*, могут быть определены *по одной (любой) реализации* $x^{(k)}(t)$ случайного сигнала $X(t)$ путем усреднения по времени соответствующих

величин на интервале $t \in (0; T)$. Таким образом, усреднение по ансамблю и по времени дает один и тот же результат. Теоретически показано, что совпадение вероятностных характеристик возможно лишь при $T \rightarrow \infty$. Однако в действительности, необходимая для практики погрешность (5 – 10)% реализуется при конечных величинах T .

Эргодическое свойство, справедливость которого в общем случае не всегда очевидна, существенно упрощает вероятностные расчеты при экспериментальных исследованиях. Необходимо четко усвоить, что только в пределе при $T \rightarrow \infty$ не имеет значения то, какая реализация сигнала будет использована для вычисления его вероятностных характеристик. При конечной же величине временного интервала, а на практике это всегда так, *разные реализации случайного сигнала будут давать отличающиеся друг от друга результаты.*

Таким образом, фактически можно получить лишь *оценки* требуемых вероятностных характеристик. В отличие от истинных (средних по ансамблю) вероятностных характеристик случайных сигналов, таких как $F(x)$, $W(x)$, m_x , D_x , $K_x(\tau)$, их оценки обозначают иначе. Далее для оценок будем использовать следующие обозначения: $\hat{F}(x)$, $\hat{W}(x)$, \hat{m}_x , \hat{D}_x , $\hat{K}_x(\tau)$.

1.8. Вычисление оценок вероятностных характеристик случайных сигналов. Напомним, что случайный сигнал на конечном интервале времени $(0; T)$ можно представить последовательностью X_1, X_2, \dots, X_n из n случайных величин. Если случайный сигнал является стационарным, то все эти величины в отдельности имеют одну и ту же ПРВ, т.е. каждую из этих величин можно выбирать (генерировать) из одного и того же ансамбля. В простейшем случае, который и будем иметь в виду в этой работе, последовательные значения, извлекаемые из ансамбля, будут статистически независимыми, т.е. между ними практически нет вероятностной связи. В этом случае совокупность ковариационных моментов определяется из АКФ (9) и имеет вид

$$K_x(|t_i - t_j|) = K_{ij} = \begin{cases} D_x, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}, \quad i, j \in (1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

Оценки всех вероятностных характеристик будем получать в виде соответствующих средних арифметических значений, выполняя суммирование элементов k -ой выборочной реализации (выборки) по времени, т.е. по всем дискретным моментам t_i , например,

$$\hat{m}_x^{(k)} = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}; \quad \hat{D}_x^{(k)} = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n [x_i^{(k)} - \hat{m}_x^{(k)}]^2. \quad (13)$$

Для оценки ковариационной функции, которая теперь будет функцией дискретного аргумента j , получим

$$\hat{K}(j) = \frac{1}{(n-j)} \cdot \sum_{i=1}^{(n-j)} [x_i^{(k)} - \hat{m}_x^{(k)}] \cdot [x_{(i+j)}^{(k)} - \hat{m}_x^{(k)}]. \quad (14)$$

В целях упрощения записи в дальнейших выражениях для различных оценок принадлежность выборки к конкретной реализации указывать не будем, если в этом нет особой необходимости. Однако об этом следует помнить, поскольку именно по этой причине сами *оценки должны рассматриваться как случайные величины*. Таким образом, конкретный опыт дает лишь *одно значение этой случайной величины (оценки)* и судить о ее качестве по результатам единственного опыта, конечно же, «рискованно». Следует, очевидно, много раз повторять опыт и изучить поведение оценок в серии из R опытов.

Работа выполняется в среде Mathcad (версия не ниже 2001) с привлечением стандартных процедур, обеспечивающих генерацию последовательности заданного количества независимых случайных величин с заданными статистическими свойствами. Таким образом, имея навыки составления простейших программ, можно получать различные реализации n -мерного случайного вектора \vec{X} с конкретными значениями в некоторой k -ой реализации $\vec{x}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$. Каждую такую реализацию будем называть **выборкой**, количество ее элементов n называют **объемом выборки**.

2. Задание к работе

1. Образовать R выборок объемом N из независимых случайных величин (отсчетов), принадлежащих случайному стационарному сигналу $X(t)$ с одномерной ПРВ следующего вида:

1. *Равномерная ПРВ*: $W(x) = 1/(b-a)$; $x \in [a;b]$.
2. *Нормальная (гауссова) ПРВ*: $W(x) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) \cdot \exp[-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2]$; $x \in (-\infty; \infty)$.
3. *Экспоненциальная ПРВ*: $W(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)$; $x \in [0; \infty)$.
4. *ПРВ Релея*: $W(x) = (x/\sigma^2) \cdot \exp(-x^2/2\sigma^2)$; $x \in [0; \infty)$

2. Изобразить графически выборочные реализации сигнала для 2-х различных (по выбору) значений параметров, определяющих каждую из заданных ПРВ.

3. Вычислить теоретические значения математического ожидания m_x и дисперсии D_x для случайного сигнала с одномерными ПРВ, указанными выше.

4. Вычислить программно выборочные оценки \hat{m}_x и \hat{D}_x путем усреднения элементов k -ой выборки по времени в соответствии с (13). Сравнить результаты с теоретическими значениями величин. Сделать выводы.

5. Вычислить программно оценку ковариационной функции $\hat{K}(j)$ для целочисленных значений $j \in [0; J]$. Дать ответ на вопрос о том, чему равно значение $K(0)$ и соответственно $\hat{K}(0)$. Получить график для оценки нормированной АКФ, выполнив нормировку на величину $\hat{K}(0)$.

6. На основе процедуры $histogram(M, x)$ вычислить программно оценки ПРВ $\hat{W}(x)$. На одном рисунке представить графики оценки $\hat{W}(x)$ и теоретической ПРВ.

В качестве оценки ПРВ обычно рассматривают гистограмму. Процедура ее расчета имеет два параметра: M – количество разрядов (подинтервалов), на которое разбивают интервал выборочных значений от x_{\min} до x_{\max} ; x – массив выборочных значений (выборка), т.е. $x = \{x_i\}$, где $i = 1, 2, \dots, N$. Обращение к процедуре в виде $A := histogram(M, x^{(k)})$ вызывает в ЭВМ следующую последовательность действий: 1) – упорядочение k -ой выборки по возрастанию от x_{\min} до x_{\max} и определение левой и правой границ каждого из M подинтервалов; 2) – сортировку элементов k -ой выборки по M разрядам и подсчет частот – количества элементов выборки n_m , где $m = 1, 2, \dots, M$, попавших в каждый из M подинтервалов; 3) – формирование выходного массива A в виде матрицы размером $(M \times 2)$. В первом столбце этой матрицы расположены координаты середин всех M подинтервалов, обозначим их x_{om} ($m = 1, 2, \dots, M$). Поскольку подинтервалы имеют равную ширину Δx , то, очевидно, $\Delta x = A_{2,1} - A_{1,1}$. Во втором столбце расположены частоты n_m , причем $\sum_{m=1}^M n_m = N$.

Теоретическое значение вероятности P_m попадания случайной величины X в окрестность точки x_{om} длиной Δx равна площади фигуры, ограниченной кривой $W(x)$. Таким образом,

$$P_m = \int_{(x_{om} - \Delta x / 2)}^{(x_{om} + \Delta x / 2)} W(x) dx .$$

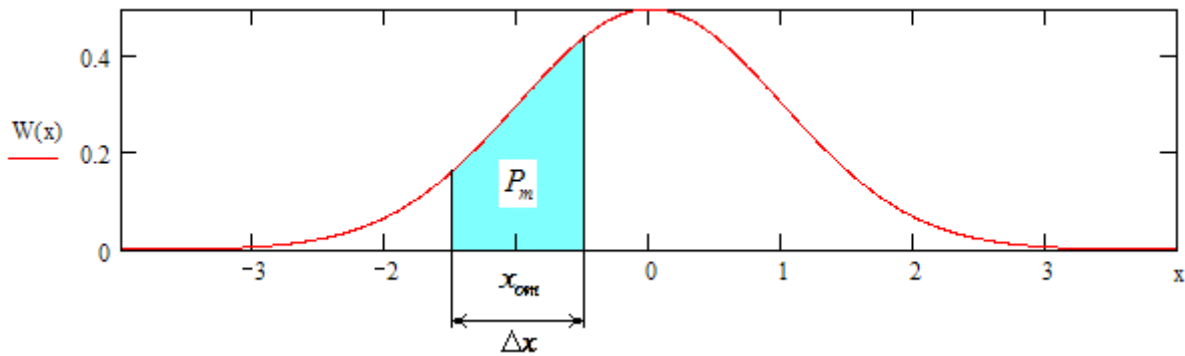


Рисунок 1. Кривая плотности вероятностей и область, площадь которой равна вероятности P_m попадания сигнала в некоторый момент времени в интервал $[(x_{om} - \Delta x/2); (x_{om} + \Delta x/2)]$.

В качестве оценки \hat{P}_m истинной (теоретической) вероятности P_m попадания случайного сигнала в интервал шириной Δx с центром в точке x_{om} можно принять величину $\hat{P}_m = n_m / N$, равную отношению количества удачных наблюдений n_m к их общей величине N . Соответственно, для оценки ПРВ в точке x_{om} можно использовать (3) в виде

$$\hat{W}(x_{om}) = n_m / (N \cdot \Delta x), \text{ где } m = 1, 2, \dots, M.$$

При выполнении данного пункта задания следует вывести на один график изображение оценки $\hat{W}(x_{om})$ (при этом используйте тип графика *solidbar*) и теоретическую кривую ПРВ, вычислив ее предварительно для множества середин подинтервалов $\{x_{om}\}$.

7. Изучить рассеяние (разброс) оценок среднего значения сигнала в зависимости от объема выборки N , выполнив необходимые расчеты при $N=5; 20; 100; 200$. Количество реализаций (опытов) полагать в этом случае равным $R=50$. Сделать выводы.

8. Изучить влияние параметров m_x и σ_x на поведение теоретической и экспериментальной ПРВ гауссового вида, выполнив расчет для следующих значений параметров: $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$ и 3 ; затем $m_x = 3$, $\sigma_x = 1$ и 3 .

9. Исследовать влияние соотношения объема выборки N и количества разрядов гистограммы M на поведение оценки ПРВ. Рекомендуется задать $M=10$ и 20 при $N=200$ и 2000 . При этом следует обратить внимание на п. 5 в замечаниях к работе.

10. Сделать выводы по результатам выполненных исследований.

В Приложении 1 приведена программа (отчет), содержащая выполнение основных (не всех) пунктов задания по работе. В заключение изложим некоторые рекомендации по выполнению задания:

1. Следует обратить внимание на термины и понятия, которые используются в разделе 1, и усвоить их смысл. Это *наиболее сложная* часть всей работы, которая требует знаний теории вероятностей и изучения материала курса лекций.
2. Весьма вероятно возникновение проблем с применением (программированием) пакета Mathcad. Обращайтесь к литературе, например, [2]. Проблемы эти временные, с ними сталкиваются и опытные программисты. Успех приходит после преодоления ошибок.
3. Все функции доступные в пакете Mathcad можно находить, обратившись в меню к значку « $f(x)$ ». В работе необходимы генераторы случайных величин (СВ): **runif(N,a,b)** – обеспечивает формирование выборки объема N с равновероятной ПРВ в интервале (a; b); **rnorm(N, m_x , σ_x)** – генератор СВ с гауссовой ПРВ, где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ - среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины и m_x - математическое ожидание; **rexp(N, λ)** – генератор СВ с экспоненциальной ПРВ, где λ - параметр, определяющий математическое ожидание и дисперсию СВ.
4. В программе для оценок использованы иные обозначения, нежели в описании к работе. В частности, $\hat{m}_x \equiv mxo$, $\hat{D}_x \equiv Dxo$, $\hat{K}_x(\tau) \equiv Ko(j)$, $\hat{W}(x_{om}) \equiv Wo_m$. Аргумент АКФ, равный модулю $|t_i - t_k|$ при представлении случайного сигнала дискретной временной последовательностью принимает значения, $j \cdot \Delta t = |i \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t| = |i - k| \cdot \Delta t$, т.е. j целочисленная переменная с максимальным значением $J = (0.1 \div 0.2) \cdot N$.
5. При выполнении п. 9 с большими значениями N возможно значительное увеличение времени счета вследствие существенных затрат времени на расчет оценки АКФ. Этого можно избежать, если перед расчетом $Ko(j)$ ввести локальное значение объема выборки $N1 < N$. При этом, конечно, необходимо внести коррекцию в расчетную формулу и обеспечить условие $J = (0.1 \div 0.2) \cdot N1$.

4.2 Задание по практике № 2

Статистические свойства смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссова шума

Цель работы: изучение статистических свойств огибающей и фазы смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссова шума»

1. Некоторые сведения из теории гауссовых сигналов

1.1 Определение и свойства гауссовых (нормальных) сигналов. Случайный сигнал $X(t)$

называют гауссовым, если его n -мерная ПРВ имеет вид

$$W(\vec{x}) = W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det K_x}} \cdot \exp[-0.5 \cdot Q(\vec{x})], \quad (1)$$

где $\det K_x$ - определитель ковариационной матрицы K_x ; многочлен в показателе экспоненты

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{x}_i \tilde{x}_j K_{ij}^{(-1)} \quad (2)$$

есть квадратичная форма (функция) от n переменных, в которой переменные $\tilde{x}_i = (x_i - m_i)$ - центрированные значения переменных и $K_{i,j}^{(-1)}$ - элементы матрицы K_x^{-1} которая является обратной к ковариационной матрице K_x

$$K_x(t_i - t_j) = \{K_{ij}\} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Элементы K_{ij} ковариационной матрицы K_x являются соответствующими моментами, т.е.

$$K_{ij} = \overline{(X_i - m_i) \cdot (X_j - m_j)}; \quad \text{при } i = j \quad K_{ii} = D_i = \sigma_i^2, \quad (4)$$

где m_i и σ_i^2 - среднее и дисперсия величины сигнала $X(t_i) = X_i$ в момент времени t_i .

Из (1, 2) для одномерной ПРВ случайного гауссова сигнала получается известное выражение

$$W(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (5)$$

Для двумерной ПРВ после несложных вычислений, связанных с обращением матрицы (2x2), получим выражение (ф. 1.39, 1.40 в [1])

$$W(x_1, x_2; k_{12}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \cdot \sqrt{(1 - k_{12}^2)}} \cdot \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2k_{12} + x_2^2}{2\sigma^2(1 - k_{12}^2)}\right], \quad \text{где } k_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma^2}. \quad (6)$$

Свойства нормального процесса отмечены в [1]. Здесь напомним, что, во-первых, n -мерная ПРВ полностью определена заданием АКФ $K_x(\tau)$ или, что равносильно, - ковариационной матрицы $K_x = \{K_{ij}\}$ при дискретном представлении сигнала. Во - вторых, из равенства нулю всех взаимных ковариационных моментов ($K_{ij} = 0$ для $i \neq j$) следует независимость системы n случайных отсчетов X_1, X_2, \dots, X_n . Действительно, в этом случае матрица (3) становится диагональной, обратная ей матрица также имеет диагональный вид. Это приведет к равенству нулю коэффициентов у слагаемых вида $\tilde{x}_i \tilde{x}_j$ в (2) при $i \neq j$, т.е. квадратичная форма будет иметь канонический вид. Соответственно показатель экспоненты будет содержать толь-

ко вторые степени каждой из n переменных и n – мерная ПРВ может быть представлена в виде (ф. 1.41 в [1])

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1) \cdot W(x_2) \cdots W(x_n), \quad (7)$$

что справедливо, если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n статистически независимы между собой.

1.2. Вероятностное описание высокочастотного сигнала, состоящего из суммы регулярной составляющей и стационарного узкополосного гауссова шума. Представим сигнал в виде

$$s(t) = s_{\text{рег}}(t) + v_{\text{ш}}(t) = A \cos(\omega_0 t - \beta) + V(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t)) \quad (8)$$

или в равносильной форме

$$s(t) = [A \cos \beta + V(t) \cos \varphi(t)] \cos \omega_0 t + [A \sin \beta + V(t) \sin \varphi(t)] \sin \omega_0 t, \quad (9)$$

где A, β - амплитуда и фаза регулярной компоненты сигнала (постоянные величины); $V(t), \varphi(t)$ - огибающая и фаза (случайные функции) узкополосного высокочастотного шума, энергетический спектр которого сосредоточен «вблизи» частоты ω_0 . Слагаемые в квадратных скобках соотношения (9) называют *квадратурными компонентами* радиосигнала $s(t)$. По условию *случайный шум есть гауссов процесс, поэтому его квадратурные компоненты $V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t)$ и $V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t)$ являются случайными совместно гауссовыми функциями.* Перепишем выражение (9) через квадратурные компоненты радиосигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) = U_x(t) \cdot \cos \omega_0 t + U_y(t) \cdot \sin \omega_0 t = U(t) \cos(\omega_0 t + \alpha(t)), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} U_x(t) &= A \cos \beta + V_x(t), \\ U_y(t) &= A \sin \beta + V_y(t). \end{aligned} \quad (11)$$

На рис. 1 соотношения (9 – 11) поясняет векторная диаграмма сигналов.

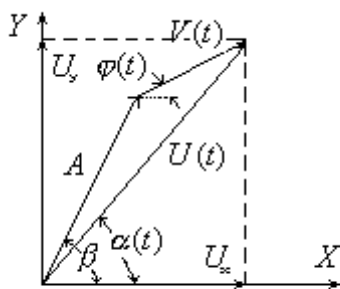


Рис. 1

Зададим вероятностные параметры шума. Будем считать, что шум $v_{\text{ш}}(t)$ имеет среднее значение равное нулю. В этом случае среднее значение его квадратурных составляющих также равно нулю, т.е.

$$\overline{V_x(t)} = \overline{V_y(t)} = 0. \quad (12)$$

Положим, что средняя мощность шумовых квадратурных процессов $V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t)$ и $V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t)$ одинакова и равна величине

$$\sigma^2 = \overline{V_x^2(t)} = \overline{V_y^2(t)}. \quad (13)$$

Взаимный ковариационный момент квадратурных составляющих шума

$$K_{V_x V_y} = \overline{V_x(t) \cdot V_y(t)} = 0, \quad (14)$$

т.е. они между собой в совпадающий момент времени не коррелированы.

Необходимо обратить внимание, что случайная величина сигнала $s(t)$ в один момент времени t определяется значением двух случайных величин $U_x(t)$ и $U_y(t)$ в этот же момент времени. Эти две величины определяют в (10) огибающую смеси регулярного сигнала и шума

$$U(t) = \sqrt{U_x^2(t) + U_y^2(t)} \quad (15)$$

и фазу

$$\alpha(t) = \arctg [U_y(t) / U_x(t)]. \quad (16)$$

Совместная ПРВ величин $U_x(t) = U_x$ и $U_y(t) = U_y$ в один момент времени имеет вид

$$W(u_x, u_y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{(u_x - m_x)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(u_y - m_y)^2}{2\sigma^2}}, \quad (17)$$

где $m_x = \overline{U_x} = A \cos \beta$ и $m_y = \overline{U_y} = A \sin \beta$ - средние (по ансамблю) значения квадратурных составляющих случайного радиосигнала $s(t)$, зависящие от амплитуды и фазы регулярного компонента сигнала.

На рис. 2 показана структурная схема формирования случайного радиосигнала $s(t)$, его огибающей $U(t)$ и фазы $\alpha(t)$.

1.3. Статистические свойства огибающей $U(t)$ и фазы $\alpha(t)$. Свойства огибающей и фазы изучаются в работе на уровне одномерных ПРВ и соответствующих моментов – математических ожиданий $\overline{U} = m_U$ и m_α и среднеквадратичных отклонений σ_U и σ_α . Все необходимые математические соотношения приведены в [1, п. 2.3]. Вид ПРВ $W(U)$ и $W(\alpha)$, а также соответствующие моменты огибающей и фазы фактически определяются величиной

$$a = A / \sigma,$$

которая задает отношение уровней регулярного сигнала и шума.

Векторная диаграмма на рис. 1 позволят качественно понять, что по мере увеличения A/σ интенсивность вариаций как огибающей U , так и фазы α уменьшается. Средние значения m_U и m_α приближаются соответственно к величине амплитуды A и фазы β регулярного сигнала.

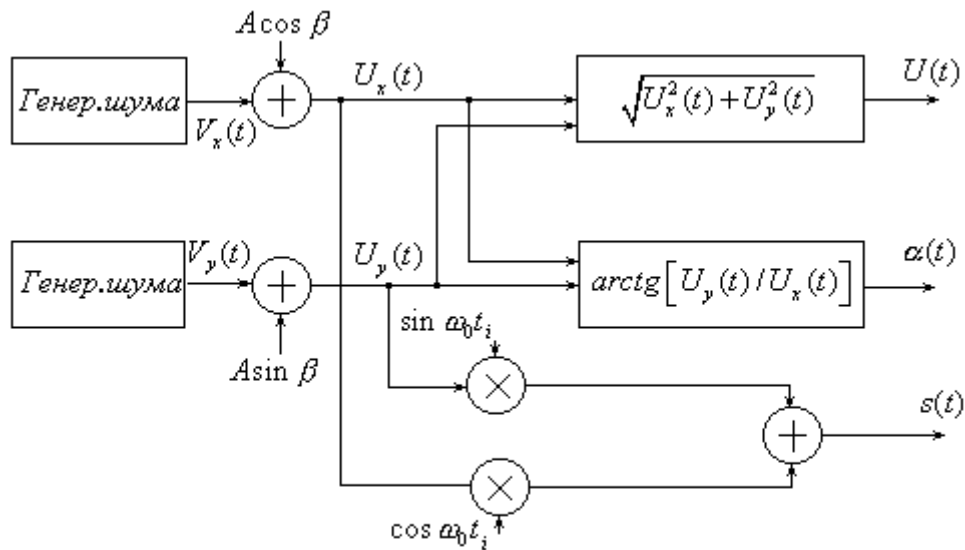


Рис. 2

2. Задание на работу

Самостоятельная работа выполняется на ПЭВМ. Она состоит в самостоятельной разработке шести фрагментов (Ф.1 – Ф. 6) исходной (заданной) программы, представленной в приложении № 2. Программа выполнена на основе пакета Mathcad.. При разработке фрагментов программы, которые помечены зеленым цветом, следует использовать: исходную программу, структурную схему (рис. 2), применять удобные (как на рис. 2) обозначения и использовать опыт, полученный при выполнении работы № 1. Все величины, которые предстоит вычислить по заданиям, указанным в Ф.1 – Ф.6, помечены в программе желтым цветом. При выполнении задания **не рекомендуется** работать в режиме «Automatic Calculation». Изменения режима работы осуществляются при вызове меню «Math». Запуск программы в ручном режиме производится нажатием клавиши F9.

Исходная программа содержит следующие составные части:

1. Блок генерации двух статистически независимых случайных последовательностей (выборок) квадратурных компонент смеси сигнала и гауссова шума. Для этого должны быть заданы *величины амплитуды, фазы регулярного сигнала*, и среднее квадратичное значение шума σ . Формирование двух независимых случайных последовательностей $U_x = (U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_i}, \dots, U_{x_N})$ и $U_y = (U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_i}, \dots, U_{y_N})$ квадратурных составляю-

щих осуществляется при двукратном обращении к процедуре $\text{norm}(N, 0, \sigma)$. Для просмотра этих последовательностей в блоке организован вывод двух графиков. Следует обратить внимание на средние значения квадратур. Они должны соответствовать значениям в (17). При построении графиков для удобства их восприятия следует задавать число отсчетов 200 – 400.

2. Блок вычисления выборочных значений огибающей и фазы высокочастотного сигнала (9). Для вычисления выборочных значений фазы следует использовать встроенную функцию $\text{atan2}(U_x, U_y)$, которая вычисляет фазу (в радианах) в интервале $[-\pi; \pi]$. Для просмотра огибающей и фазы в блоке организован вывод графиков одиночных реализаций (использовать тип линий «lines»). Следует обратить внимание на характер вариаций и средние значения огибающей U и фазы α при различных (малых и больших) величинах параметра a .
3. Блок анализа статистических свойств огибающей. В блоке вычисляются: \hat{m}_U - оценка математического ожидания огибающей (в программе используйте обозначение «omU»); $\hat{\sigma}_U$ - оценка среднего квадратичного значения огибающей (в программе используйте обозначение «oσU»); $\hat{W}(U)$ - оценка ПРВ огибающей (в программе используйте обозначение «oWU»). Оценки, полученные при выполнении данного пункта, следует сравнить с соответствующими теоретическими значениями параметров и ПРВ, которые приведены в [1, п. 2.3.1]. Значение модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(UA/\sigma^2)$, которая входит в выражение ПРВ $W(U)$, следует вычислить с помощью встроенной в Mathcad функции $I0(\cdot)$. Ее можно найти после вызова «f(x)» в разделе «Function Category», выбрав строку «Bessel», и далее в разделе «Function Name», выбрав строку «I0». При вычислении оценки ПРВ необходимо использовать процедуру $\text{histogram}(\bullet)$ и опыт ее применения в лабораторной работе № 1.
4. Блок анализа статистических свойств фазы. В блоке вычисляются: \hat{m}_α - оценка математического ожидания фазы (в программе используйте обозначение «omα»); $\hat{\sigma}_\alpha$ - оценка среднего квадратичного значения фазы (в программе используйте обозначение «oσα»); $\hat{W}(\alpha)$ - оценка ПРВ фазы (в программе используйте обозначение «oWα»). Оценки, полученные при выполнении данного пункта, следует сравнить с соответствующими теоретическими значениями параметров и ПРВ, которые приведены в [1, п. 2.3.2]. Значение интеграла вероятности $\Phi(x)$, который входит в выражение ПРВ $W(\alpha)$, следует вычислить с помощью встроенной в Mathcad функции $\text{pnorm}(x, 0, 1)$. Ее можно найти после вызова «f(x)» в разделе «Function Category», выбрав строку «All» и далее в разделе

«Function Name», выбрав строку «rplot». При вычислении оценки ПРВ необходимо использовать процедуру $histogram(\bullet)$ и опыт ее применения в работе № 1. Пункт 3 и 4 выполнять для значений $a=0; 2; 10$ и $\beta=60^0$. Объем выборки N полагать равным 5000 – 10000 при числе разрядов гистограммы 30 – 40.

5. Блок формирования дискретных значений $s_n = s(t_n)$ радиосигнала $s(t)$. Для этого представим (9) в дискретной форме

$$s(t_n) = s_n = [A \cos \beta + V_n \cos \varphi_n] \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{\Delta t}{T_0}) + [A \sin \beta + V_n \sin \varphi_n] \sin(2\pi \cdot n \cdot \frac{\Delta t}{T_0}), \quad (18)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$ - номер дискретного отсчета (N – объем выборки); $\frac{\Delta t}{T_0}$ - отношение интервала дискретизации к периоду высокой частоты (положить равным 0,25 – 0,125). Представить график функции $s(t_n)$. Количество отсчетов при построении графика функции (18) выбирать 100 – 400 и параметр $A/\sigma = 5 \div 10$. Для вывода графика использовать тип линии «lines».

6. Рассчитать по данным эксперимента зависимость СКО фазы от величины параметра $a = A/\sigma$ для значений $a = 0; 1; 3; 10; 50$. Фазу регулярного сигнала задать $\beta = 0$.
7. Организуйте в программе формирование оценки фазы полезного сигнала по выборке из 5 отсчетов смеси сигнала и шума при $A/\sigma = 2$. Какова точность (СКО) этой оценки? От чего она зависит? Рассчитайте ее теоретическое значение и определите объем выборки для достижения СКО оценки фазы 1 градус.
8. Сделать выводы на основе результатов работы. Отчет представить в виде листинга программы с выполненными фрагментами и выводами.

4.3 Задание по практике № 3

Оптимальное обнаружение полезного сигнала на фоне шума

Цель работы: Изучение структуры и характеристик оптимального обнаружителя полезного сигнала известной формы на фоне белого гауссова шума.

1. Основные положения байесовой теории оптимального обнаружения

1.1 Постановка задачи, критерий обнаружения и алгоритм обработки. Сигнал на входе приемника – обнаружителя на интервале $t \in (0; T)$ представим в виде

$$y(t) = \theta \cdot F[s(t); n(t)] + (1 - \theta)F[s(t); n(t)], \quad (1)$$

где θ - случайная (постоянная на интервале наблюдения) величина с двумя значениями 0 и 1; $s(t)$ - полезный сигнал, форма которого в общем случае полностью не известна «приемнику»; $n(t)$ - случайная помеха (шум); $F[s(t); n(t)]$ - оператор, определяющий способ взаимодействия полезного сигнала и шума при образовании входного сигнала приемника.

Проблема обнаружения полезного сигнала состоит в том, что приемник, получив сигнал $y(t)$, должен принять решение о том, чему равна величина θ . Поскольку входной сигнал $y(t)$ содержит шум, то обнаружение полезного сигнала, в особенности, если он по уровню сравним с шумом, является не простой задачей. Приемник, как впрочем, и человек, в подобной ситуации может давать ошибки. Интуитивно ясно, что *самый хороший (оптимальный) приемник должен в среднем давать меньше ошибок*. В математическом плане необходимо *найти формулы (алгоритм), по которым оптимальный приемник работает*, т.е. следует в явном виде записать выражение для сигнала на выходе приемника. В инженерном плане необходимо *определить структурную и далее функциональную схему этого приемника*, чтобы его можно было выполнить и использовать при решении задачи обнаружения. Такой приемник необходим в радиолокационных системах для обнаружения объектов, в системах охранной сигнализации и др. В системах цифровой связи имеет место фактически та же самая задача – задача различения двух ситуаций (сигналов).

Метод решения подобных задач дает статистическая теория проверки гипотез. Выражение (1) задает математическую (статистическую) модель входного сигнала. Очевидно, можно предполагать, что на *входе приемника* случайно могут сложиться две взаимоисключающие ситуации (гипотезы): нулевая гипотеза H_0 - параметр $\theta = 0$, т.е. во входном сигнале нет полезного сигнала $s(t)$ и противоположная (альтернативная) гипотеза H_1 - параметр $\theta = 1$, когда входной сигнал содержит полезный $s(t)$. На выходе приемника – обнаружителя (после *выполнения действий над входным сигналом*) также возможны две ситуации (два решения): нулевое решение \hat{H}_0 - приемник выдал результат об отсутствии полезного сигнала $s(t)$ во входном сигнале $y(t)$ и альтернативное решение \hat{H}_1 , при котором формируется результат о наличии сигнала $s(t)$ во входном сигнале $y(t)$.

Конечно, вероятностные свойства сигнала $y(t)$ для $t \in (0; T)$ должны отличаться в зависимости от того содержится или нет в нем полезный сигнал $s(t)$. В противном случае задача обнаружения теряет смысл. В байесовой теории обнаружения статистические свойства входного сигнала для двух гипотез H_0 и H_1 должны быть известны. При дискретном отборе данных на интервале $(0; T)$ эти свойства определены заданием n – мерных условных ПРВ:

$W(\mathbf{y}/H_0)$ и $W(\mathbf{y}/H_1)$. Предполагается, что до получения сигнала \mathbf{y} приемнику известны вероятности появления на входе каждой ситуации, т.е. $P(H_0) = p_0$ и $P(H_1) = p_1$ - априорные вероятности гипотез.

Определение оптимального алгоритма принятия решения, т.е. правила обработки, связано с введением количественного критерия оптимальности. В байесовой теории критерий оптимальности вводится следующим образом. Для каждой ситуации, в которой случайно может оказаться приемник – обнаружитель, назначается число C_{ij} - относительный штраф (плата за итог работы). В итоге имеем четыре возможных случайно возникающих в приемнике ситуации со своей платой за «работу». Перечислим их:

1. *Правильное обнаружение* – событие $(\hat{H}_1 \cdot H_1)$; плата C_{11} ; вероятность штрафа - $P(\hat{H}_1 \cdot H_1)$.
2. *Пропуск сигнала* – событие $(\hat{H}_0 \cdot H_1)$; плата C_{01} ; вероятность штрафа - $P(\hat{H}_0 \cdot H_1)$.
3. *Правильное не обнаружение* - событие $(\hat{H}_0 \cdot H_0)$; плата C_{00} ; вероятность штрафа - $P(\hat{H}_0 \cdot H_0)$.
4. *Ложная тревога* - событие $(\hat{H}_1 \cdot H_0)$; плата C_{10} ; вероятность штрафа - $P(\hat{H}_1 \cdot H_0)$.

Критерием оптимальности является средний риск (средний штраф) R – средний по ансамблю всех возможных сигналов на входе приемника. Таким образом, получаем

$$R = \mathbf{M}[C] = C_{10} \cdot P(\hat{H}_1 \cdot H_0) + C_{00} \cdot P(\hat{H}_0 \cdot H_0) + C_{01} \cdot P(\hat{H}_0 \cdot H_1) + C_{11} \cdot P(\hat{H}_1 \cdot H_1) \quad (2)$$

Оптимальный приемник работает так, что *обеспечивает наименьшую величину риска R* . В общем виде алгоритм работы оптимального приемника $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ предусматривает вычисление отношения правдоподобия $L(\mathbf{y})$ и принятие решения после сравнения полученной величины отношения с пороговым уровнем γ_0 . Аналитически оптимальный алгоритм записывают в общем виде так: приемник формирует решение

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H}_1, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) \equiv L(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} > \gamma_0, \\ \text{или} \\ \hat{H}_0, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) \equiv L(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \gamma_0, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\gamma_0 = p_0(C_{10} - C_{00}) / p_1(C_{01} - C_{11})$ – оптимальный порог. Подробный вывод этого результата приведен в [1, п.3.4].

1.2 Оптимальный алгоритм обнаружения для случая аддитивной смеси полностью известного полезного сигнала с белым гауссовым шумом. Для данного конкретного случая выражение (1) принимает вид

$$y(t) = \theta[s(t) + n(t)] + (1 - \theta) \cdot n(t), \quad (4)$$

где $n(t)$ - аддитивный белый гауссов шум. Таким образом, если $\theta = 1$, то входной сигнал

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad (5)$$

в противном случае $\theta = 0$ и тогда

$$y(t) = n(t). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) утверждают, что присутствие во входном сигнале $y(t)$ полностью известного полезного сигнала $s(t)$ приводит лишь к изменению (в каждый момент времени) среднего значения входного сигнала. Таким образом, n – мерные гауссовские условные ПРВ $W(y/H_0)$ и $W(y/H_1)$, соответствующие двум гипотезам H_0 и H_1 , отличаются средними значениями. В явном виде эти ПРВ приведены в [1, ф. 3.43]. После их подстановки в (3) и выполнения простых алгебраических преобразований получаем выражение для сигнала на выходе оптимального приемника. В итоге алгоритм принятия решения (алгоритм обнаружения) принимает следующий вид [1, ф. 3.48, 3.49]

$$\ln L[y(t)] = z = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \cdot s(t) dt \\ \geq Z_{II} \\ \frac{E_s}{N_0} \\ < \frac{E_s}{N_0} \end{array} \right\}, \quad (7)$$

где $Z_{II} = \ln(\gamma_0) + E_s / N_0$ - модифицированный порог; E_s - энергия сигнала; N_0 – спектральная плотность средней мощности шума.

Выражение (7) содержит операцию интегрирования произведения двух функций, которая характерна для вычисления корреляционной функции [1, ф. 1.11, 1.15а]. По этой причине приемное устройство, реализующее алгоритм обнаружения в виде (7) называют приемником корреляционного типа.

Структурная схема приемника – обнаружителя корреляционного типа показана на рис. 1. Устройство синхронизации, показанное на схеме, обеспечивает работу генератора опорного

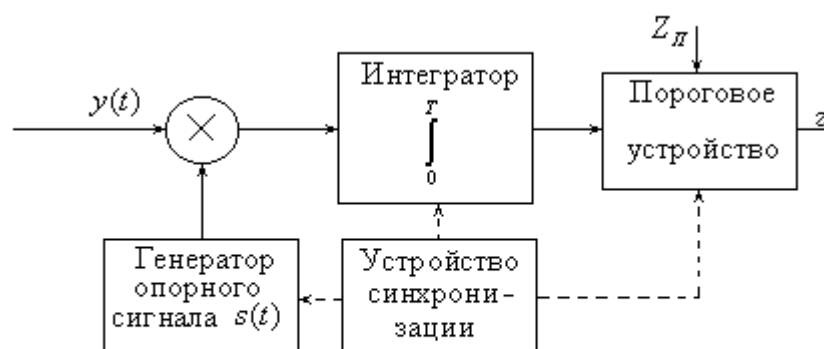


Рис. 1. Приемник – обнаружитель корреляционного типа

сигнала на том интервале времени, где ожидается полезный сигнал. Сравнение с порогом также происходит в момент окончания сигнала. Здесь следует помнить, что рассматривается задача обнаружения полностью известного сигнала, т. е. моменты времени начала и окончания полезного сигнала известны. Приемнику неизвестен лишь сам факт наличия или отсутствия сигнала на ожидаемом интервале времени.

1.3 Оптимальный приемник - обнаружитель с согласованным фильтром.

Известно, что сигнал $z(t)$ на выходе произвольного линейного фильтра получается в результате свертки входного сигнала $y(t)$ с импульсной реакцией $h(t)$. Представим свертку в виде

$$z(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot y(\tau) d\tau \quad (8)$$

Если предположить, что $h(t) = c \cdot s(t_0 - t)$ ($c = const$), то (8) можно переписать в виде

$$z(t) = c \cdot \int_0^t y(\tau) \cdot s[\tau - (t_0 - t)] d\tau. \quad (9)$$

Таким образом, для момента времени $t = t_0 = T$ сигнал на выходе фильтра, имеющего указанную выше импульсную характеристику, оказывается равным

$$z(t)|_{t=T} = c \cdot \int_0^T y(\tau) \cdot s(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Сравнение (10) и (7) показывает, что операцию формирования корреляционного интеграла в схеме приемника – обнаружителя полностью известного сигнала может выполнить линейный фильтр. Конечно, это не простой фильтр, так как требуется, чтобы его импульсная реакция

$$h(t) = c \cdot s(t_0 - t) \triangleq h_{opt}(t), \quad (11)$$

где c – коэффициент пропорциональности. Линейный фильтр с импульсной реакцией (11) называют *оптимальным согласованным фильтром*. По определению импульсная реакция $h(t) = 0$, если $t < 0$. Таким образом, если полезный сигнал $s(t)$ имеет конечную длительность T , то параметр $t_0 \geq T$. Свойства согласованного фильтра подробно рассмотрены в [1, п. 3.2]. Следует обратить внимание, что на выходе согласованного фильтра (СФ) в момент окончания полезного сигнала получается *наибольшее (из всех возможных других фильтров) отношение уровня полезного сигнала к шуму*. Это отношение по мощности составляет величину

$$q_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}, \quad (12)$$

где E_s – полная энергия полезного сигнала; N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности белого шума на входе приемника.

Изучим форму полезного сигнала (сигнальной части $z_s(t)$ полного выходного сигнала $z(t)$) на выходе СФ. Перепишем (9) в виде

$$z(t) = \int_0^t y(\tau) \cdot s[\tau - (t_0 - t)] d\tau = z(t) = \int_0^t [s(\tau) + n(\tau)] \cdot s[\tau - (t_0 - t)] d\tau \quad (13)$$

$$= z_s(t) + z_n(t),$$

где сигнальная часть

$$z_s(t) = c \cdot \int_0^t s(\tau) \cdot s[\tau + (t - t_0)] d\tau = c \cdot E_s \cdot k(t - t_0) \quad (14)$$

и $k(\bullet)$ - нормированная временная автокорреляционная функция (АКФ) полезного сигнала [1, п. 1.3.2].

Таким образом, полезный сигнал на выходе СФ совпадает по форме с временной АКФ полезного входного сигнала. Вид АКФ сигнала $s(t)$ может существенно отличаться от формы самого сигнала $s(t)$. Важным параметром временной АКФ сигнала является ее ширина δ_τ . Для радиосигналов это ширина огибающей АКФ. Выполняя работу, необходимо усвоить, что величина $\delta_\tau \sim 1/\Delta F$, где ΔF - ширина частотного спектра сигнала. Следует обратить внимание и сравнить форму полезного сигнала на входе и выходе СФ для случая простого одиночного радиоимпульса, радиоимпульса с ФКМ и ЛЧМ. Подробно эти вопросы рассмотрены в [1, п. 1.3].

Необходимо отметить, что все соотношения, связанные с преобразованием сигналов и шума в приемнике – обнаружителе представлены в программе в дискретной форме. Непрерывному сигналу $y(t)$ соответствует дискретная последовательность $y(n \cdot \Delta t) \equiv y(n)$, где Δt - временной интервал дискретизации и n номер отсчета. Интеграл свертки, определяющий связь выходного и входного сигналов в линейной динамической системе (фильтре) преобразуется в соответствующую сумму по индексу, связанному с переменной интегрирования. Если $t \rightarrow n \cdot \Delta t \equiv n$ и $\tau \rightarrow k \cdot \Delta t \equiv k$, интеграл свертки в дискретной форме имеет вид

$$z(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \Rightarrow z(n) = \sum_{k=0}^n h(k) \cdot y(n - k) \cdot \Delta t. \quad (15)$$

Верхний индекс у знака суммы может быть ограничен числом N . Его значение определяется длительностью импульсной реакции фильтра. При этом правая часть выражения (15) соответствует структуре дискретного фильтра типа КИХ - с конечной импульсной реакцией. Абсолютная величина Δt в программе принята равной единице. В этом случае временная длительность любой функции определяется количеством дискретных отсчетов.

1. 4 Разрешение сигналов по временной задержке. Задача разрешения сигналов состоит в том, что при поступлении нам вход приемника сигнала

$$y(t) = \theta_1 \cdot s_1(t; \tau_1) + \theta_2 \cdot s_2(t; \tau_2) + n(t), \quad t \in [t_0; T] \quad (16)$$

где θ_1 и θ_2 - случайные независимые величины с двумя значениями 0 и 1; τ_1 и τ_2 - временные положения (задержки) полезных сигналов. Если $y(t)$ содержит оба полезных сигнала и необходимо их раздельно обнаружить, то возникает задача взаимного разрешения сигналов в смысле их обнаружения. Очевидно, что результат ее решения при наличии шума зависит от соотношения уровней сигналов между собой и по отношению к шуму и, конечно, от того насколько «сильно» изменение параметра τ влияет на степень различия двух сигналов. В [1, п. 1.3] показано, мерой различия сигналов по неэнергетическим параметрам, к которым, в частности, относится временной сдвиг, является нормированная взаимная корреляционная функция сигналов по данному параметру. В данном случае, когда сигналы имеют одинаковую форму, это временная автокорреляционная функция (АКФ). Разрешающую способность приемника – обнаружителя определяют как наименьшую $\delta\tau$ разность временных положений сигналов, при которой на выходе приемника принимается решение о наличии двух полезных сигналов на интервале наблюдения. Различают [1, п. 6] величины $\delta\tau_P$ (разрешение по критерию Релея) и $\delta\tau_B$ (разрешение по критерию Вудворда).

В оптимальном обнаружителе возможность разрешения (в смысле обнаружения) двух сигналов известной формы с разными временными сдвигами определяется формой выходного отклика приемника. В схеме обнаружителя с согласованным фильтром она совпадает с АКФ полезного входного сигнала.

Выполняя задание необходимо обратить внимание на то, какие параметры сигнала определяют величину базы сигнала и как они связаны с параметрами функции неопределенности сигнала.

1. 5. Характеристики обнаружения оптимального приемника обнаружителя полностью известного сигнала. Качество работы приемника – обнаружителя обычно представляют в виде характеристик обнаружения, которые представляют семейство кривых в виде зависимостей вероятности правильного обнаружения D от величины $q_0 = \sqrt{2E_s / N_0}$ - отношения уровня сигнала к СКО шума на выходе СФ. Параметром семейства является вероятность ложной тревоги F . Теоретический расчет величин D и F предполагает вычисление вероятностей того, что уровень сигнала (10) или (13) на выходе приемника превысит пороговый уровень Z_0 в момент времени $t_0 \geq T + \tau_0$, где T - длительность сигнала на входе и τ_0 - время его прихода. Таким образом,

$$D = \int_{Z_0}^{\infty} W(z / H_1) dz \quad \text{и} \quad F = \int_{Z_0}^{\infty} W(z / H_0) dz, \quad (17)$$

где $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ условные ПРВ уровня сигнала $z(t_0) = z$ на входе порогового устройства соответственно при наличии и отсутствии полезного сигнала на входе приемника.

Сигнал $z(t)$ является линейным преобразованием входного сигнала (5) содержащего аддитивный гауссов шум $n(t)$. Именно поэтому $z(t)$ сохраняет гауссовские свойства и, следовательно, ПРВ случайной величины z полностью определяется заданием условного среднего и условной дисперсии, которые имеют вид (см. в [1] ф. 3.16 – 3.19 и п. 3.6.1 и 3.6.2):

$$M[z/H_1] = 2E_s / N_0, \quad M[z/H_0] = 0, \quad (18)$$

$$D_{z/H_1} = D_{z/H_0} = 2E_s / N_0.$$

Для гауссовых ПРВ вычисление интегралов (17) сводится к табличному интегралу вероятностей (подробнее см. [2, п. 2.3.2, 3.6.2]). В итоге получаем

$$F = 1 - \Phi(Z_0 / q_0) \quad \text{и} \quad D = 1 - \Phi\left(\frac{Z_0}{q_0} - q_0\right), \quad (19)$$

где $\Phi(\bullet)$ - интеграл вероятности.

Теоретический расчет характеристик обнаружения выполняется следующим образом: задаем уровень ложной тревоги F_i ; определяем с учетом (19) нормированный порог Z_0 / q_0 ; изменяем величину $q_0 = \sqrt{2E_s / N_0}$ и вычисляем с учетом (19) зависимость величины $D = f(q_0)$.

2. Задание на работу

В приложении № 3 приведен листинг программы, выполненной в среде Mathcad (версия не ниже 2001). Все фрагменты программы сопровождаются пояснениями.

В первом и втором разделах осуществляется формирование радиоимпульсов с простой и сложной (ФКМ) модуляцией. Здесь возможен режим работы с одним или двумя сигналами, что обеспечивается заданием уровня амплитуды каждого из них. Сигналы могут иметь различные временные положения.

В третьем разделе выполняется формирование импульсных реакций дискретных оптимальных согласованных фильтров для каждого типа сигнала. *В четвертом* разделе реализовано формирование случайной стационарной последовательности независимых дискретных отсчетов «белого» гауссова шума. *В пятом* разделе формируются входные сигналы в виде аддитивной смеси полезных (их в общем случае два) сигналов и шума. *В шестом* разделе программы выполняется формирование сигналов на выходе согласованных фильтров, имеющих конечную импульсную характеристику. *В седьмом* разделе формируются сигналы на выходе приемника - обнаружителя с корреляционной обработкой. *В восьмом* разделе формируются

два сложных импульсных сигнала с ЛЧМ с последующей обработкой в согласованном фильтре. Их амплитуды и временные положения также могут изменяться независимо.

Заголовки разделов программы отмечены синим цветом. Программа содержит семь фрагментов (Ф.1 – Ф.7), отмеченных зеленым цветом. Они размещены в тех местах исходной программы, где следует самостоятельно вносить изменения в текст программы.

Рабочее поле для внесения изменений в программу отмечено желтым цветом.

В программе представлены три типа входных сигналов: радиоимпульс простой модуляцией и прямоугольной огибающей (в программе сигналы $s1(n)$ и $s2(n)$); радиоимпульс со сложной (7 позиционный код Баркера) ФКМ – в программе сигналы $fs1(n)$ и $fs2(n)$ и импульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) (в программе сигналы $Ls1(n)$ и $Ls2(n)$).

В программе представлены три типа входных сигналов: радиоимпульс простой модуляцией и прямоугольной огибающей (в программе сигнал $s(n)$); радиоимпульс со сложной модуляцией (в программе сигнал $fs(n)$) – фазокодовая манипуляция (7 позиционный код Баркера) и радиоимпульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) (в программе сигнал $Ls(n)$).

Для выполнения работы необходимо:

1. Изучить теоретическую часть учебного курса [1; гл. 3] и раздел 1 данного описания.
2. Изучить программу, приведенную в Приложении № 3. Задание к работе состоит в решении следующих задач.

1. Определение параметров огибающей временной автокорреляционной функции радиосигналов.

При выполнении данного пункта необходимо подавать на вход СФ *одиночный полезный сигнал с амплитудой равной единице и задать отношение $(A/\sigma) = 100$* . Длительность полезного сигнала *должна соответствовать заданному варианту*.

Для каждого из 3-х заданных типов сигналов (простой радиоимпульс, ФКМ радиоимпульс и ЛЧМ импульс), необходимо измерить ширину δ_τ огибающей их автокорреляционной функции. Измерение ширины выполнить по положению первых нулей (вблизи максимального значения огибающей АКФ). Для сигнала с ФКМ следует измерить уровень бокового лепестка АКФ по отношению к ее значению в максимуме. Результаты измерений сравнить с теоретическими значениями соответствующих величин.

Для измерения координат любой точки на графиках функций используйте электронный визир. Он появляется на мониторе после «щелчка» правой кнопкой «мышки» на поле графика и вызова режима «TRACE».

При формулировке выводов по данному пункту работы следует:

1) отметить различие форм сигналов (в частности их длительности) на входе и выходе СФ и дать объяснение этих различий;

2) дать объяснение равенства максимальных значений полезных сигналов на выходе СФ при различных видах модуляции радиосигналов.

2. Исследование процессов в приемнике при корреляционной обработке сигнала.

2.1. Изучить форму сигнала на выходе коррелятора подавая на его вход радиосигналы с простой и ФКМ модуляцией (при большом отношении с/ш, как в п. 1). По итогам сделать выводы.

2.2. Изучить влияние шума на характер сигнала на выходе коррелятора при различных отношениях с/ш. Для этого следует наблюдать реализации сигнала на выходе корреляционного приемника при малом и большом отношениях уровней полезного сигнала и шума. Задайте уровни сигналов $A1$ и $Af1$ (при этом $A2 = Af2 = 0$) такими, при которых явно видны шумовые флуктуации сигнала на выходе приемника. С помощью курсора отметьте оператор генерации шума и затем, нажимая клавишу F9, наблюдайте различные реализации сигнала $zkor(nr)$ и $fzkor(nr)$. Изучите характер реализаций этих сигналов при условии, когда входной полезный сигнал отсутствует. Сделайте выводы о том, какие характеристики выходного сигнала приемника изменяются в зависимости от уровня полезного сигнала на входе.

2.3. Измерить средний уровень выходного сигнала приемника в максимуме и сравнить его с соответствующим уровнем на выходе СФ. Объяснить в каком плане приемник с СФ и приемник с корреляционной обработкой идентичны. По результатам сделать выводы.

2.4. Изучить влияние несовпадения временного положения полезного входного сигнала и опорного на работу коррелятора. Для этого необходимо внести изменения в программном фрагменте Ф.6. По результатам сделать выводы о последствиях нарушения синхронизации в канале опорного сигнала при корреляционном приеме.

3. Согласованная фильтрация видеосигнала.

В данном случае на вход фильтра следует подавать прямоугольные видеоимпульсы двух типов с равной длительностью. Для этого следует внести соответствующие дополнения в программу. Первый тип сигнала - *прямоугольный импульс положительной полярности*. Для его формирования следует внести изменения в Ф.1.

Второй тип сигнала - *два равной длительности прямоугольных разнополярных видеоимпульса, следующие друг за другом*. При этом общее число отсчетов на интервале равном длительности полезного сигнала остается неизменным. Для формирования этого сигнала следует внести изменения в Ф.3 и Ф.4.. Исходные данные задать такими же, как в п.1.

По итогам выполнения данного пункта следует сделать выводы на основе *сравнения результатов оптимальной обработки двух типов видеосигналов*.

4. Разрешение сигналов по времени задержки в оптимальном приемнике – обнаружителе.

Выполнение данного пункта предполагает, что полезный входной сигнал состоит из суммы двух сигналов $s_1(n; t_{01})$ и $s_2(n; t_{02})$, имеющих одинаковую форму и различные значения временной задержки.

Задание по п. 4 состоит в следующем.

Необходимо при заданной длительности двух полезных сигналов на входе приемника определить (экспериментально) минимальную разность их временных положений, при которой наблюдатель (экспериментатор) может уверенно фиксировать наличие двух максимумов в *выходном отклике* приемника. Это следует выполнить для двух типов сигналов: с простой модуляцией и ФКМ.

Результаты необходимо получить при равных значениях амплитуд сигналов $A_1 = A_2 = 1$ и $A_{f1} = A_{f2} = 1$ для двух величин СКО шума: $\sigma_1 = 0,1$ и $\sigma_2 = 1$. Выходной сигнал приемников можно наблюдать на рис. 2 и рис. 3.

Для приемника – обнаружителя сигнала с ЛЧМ данный пункт работы следует выполнить при следующих величинах параметров: $U_1 = U_2 = 1$; $\sigma = 1$; $q = 2$; $NT = 220$; $m = 5$; $\Delta = 80$. По итогам выполнения п. 4 следует сделать выводы.

5. Экспериментальное определение характеристик обнаружения приемника - обнаружителя

Данный пункт задания предусматривает численный (моделирование на ЭВМ) и теоретический расчет зависимости $D = f(q_0)$. При этом вероятность ложной тревоги F полагается равной заданной величине ($F_1 = 0.01$ и $F_2 = 0.05$). Листинг программы для выполнения п. 5 приведен в п. 7.3.2. Все изменения в программе, как и ранее, вносятся в тех местах, которые отмечены буквой «Ф». Методика теоретического расчета характеристик обнаружения изложена в п. 7.4.1.

Рассмотрим теперь методику выполнения имитационного эксперимента для расчета расчета характеристик обнаружения. В п. 7.4.1 (пп. 1.3) отмечено, что в программе, реализующей дискретный алгоритм обработки, временной интервал дискретизации $\Delta t = 1$. В учебном пособии [1, ф. 1.44, 1.45] показано, что дисперсия дискретного «белого шума» $\sigma^2 = N_0 \cdot f_g = N_0 / (2 \cdot \Delta t)$, т.е. численный расчет с дискретным шумом, имеющим $\sigma = 1$, соответствует белому шуму со спектральной плотностью мощности $N_0 = 2\sigma^2 = 2$. В программе

моделирования используется полезный сигнал в виде радиоимпульса с простой модуляцией $s(t) = A \sin(2\pi t / T_0)$ и $t \in (0; T_u)$, где T_0 и T_u - соответственно период высокой частоты и длительность импульса. Энергия этого сигнала

$$E_s = \int_0^{T_u} s^2(t) dt = \frac{A^2}{2} \cdot T_u = \frac{A^2}{2} \cdot n \cdot \Delta t = \frac{n \cdot A^2}{2}, \quad (20)$$

где n – количество интервалов дискретизации на длительности импульса (**в программе $n = NI$**). Таким образом, необходимая для расчетов величина

$$q_0 = \sqrt{2E_s / N_0} = \frac{A}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} = A \sqrt{n/2}. \quad (21)$$

Для поддержания $F = const$, как следует из (19), необходимо обеспечить постоянство нормированного порога $Z_0 / q_0 = C_F$, где C_F - постоянная величина, зависящая от заданного значения ложной тревоги F .

При выполнении численного моделирования с разными значениями величины q_0 следует в программе устанавливать величину порога $Z_0 = C_F \cdot q_0$ и согласно (21) величину амплитуды сигнала $A = q_0 / \sqrt{0.5n}$.

Фиксация факта (события) превышения в r -ой реализации выходным сигналом $Z_n^{(r)}$ порогового уровня Z_0 в момент времени $n = t_0$ выполняется, с помощью следующих операторов Mathcad

$$P := 0.81594$$

$$Z_0 := P$$

$$M_r := \sum_{n=t_0}^{t_0} \left[\left(Z_n^{(r)} \right) \geq Z_0 \right]$$

$$m := \sum_{r=1}^R M_r \quad m = \blacksquare$$

где P – численное значение порога; t_0 – целочисленное значение момента времени, в который фиксируется превышение порогового уровня Z_0 ; M_r – целочисленная величина, равная в r -ой реализации нулю или единице в зависимости от появления факта превышения порога P ; m – общее количество превышений порога в R различных реализациях.

Очевидно, что в случае, когда сигнал (5) на входе не содержит полезного сигнала (т.е. $A = 0$), число m равно количеству ложных тревог. Если на входе приемника верна гипотеза H_1 , то число m равно количеству правильных обнаружений сигнала. В качестве оценки \hat{F} вероятности ложной тревоги и оценки вероятности \hat{D} правильного обнаружения следует использовать величину m/R . Степень близости оценок \hat{F} и \hat{D} к истинным значениям вероятностей, конечно, зависит от количества опытов (реализаций) R .

Продолжительность выполнения расчетов на ЭВМ может оказаться достаточно большой, если число опытов R велико. Можно получить некоторую экономию времени, если положить $n = N1+1$. Для этого необходимо исправить пределы изменения текущего времени во всех расчетных формулах. Однако в этом случае невозможно наблюдать полный отклик СФ, поскольку его длительность равна $2N1$.

По итогам выполнения задания по п. 4 необходимо заполнить таблицу:

q_0	1	2	3	4
D				
\hat{D}				
\hat{m}_z				
\hat{D}_z				

В двух последних строках таблицы указываются величины оценок среднего и дисперсии сигнала на выходе приемника в момент времени, соответствующий максимальному отношению уровня полезной составляющей к СКО шума.

Замечание.

Выполнение работы может быть успешным, если исполнитель уверенно отвечает на следующие вопросы:

1. Что есть функция различия сигналов и каков ее смысл?
2. Какой параметр сигнала влияет на ширину временной автокорреляционной функции сигнала? Какой вид имеет автокорреляционная функция радиоимпульса с простой модуляцией и ФКМ? Каков вид огибающих автокорреляционных функций радиоимпульса с простой модуляцией и ФКМ?
3. Какова база сигналов, используемых в работе?
4. Почему в случае поступления ФКМ или ЛЧМ сигналов на вход СФ их длительность на выходе фильтра уменьшается (они сжимаются)?
5. Что определяет величину сжатия сигналов ФКМ и ЛЧМ при обработке в согласованном фильтре?
6. Какие параметры входного сигнала и белого шума определяют наибольшее отношение уровней сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра?
7. В какой момент времени можно зафиксировать наибольшее отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе согласованного фильтра и коррелятора?

4.4 Задание по практике № 4

Оценка неизвестных параметров полезных сигналов при наличии помех

Цель работы: изучение методов статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала при наличии помех.

1. Основные положения статистической теории оценок

1.1 Задача оценки неизвестных параметров сигнала при наличии помех. В радиолокационных, радионавигационных системах, а также в системах связи возникает необходимость определения информативных параметров λ , которые содержатся в полезном сигнале $s(t; \lambda)$. При измерении дальности до объекта таким параметром может быть время задержки сигнала на входе приемника относительно сигнала излученного передатчиком. В других случаях это может быть частота или начальная фаза сигнала. Желание иметь высокую точность измерения неизвестного параметра требует применения эффективных способов обработки сигналов, поступающих на вход приемников различных типов радиосистем. Среди множества факторов, которые влияют на точность измерительных РТС, особое место принадлежит собственному шуму приемника. Особое потому, что влияние шума, принципиально не может быть полностью исключено, какой бы ни была совершенной аппаратура. Таким образом, шумовая составляющая ошибки измерения параметра определяет предельные (потенциальные) возможности многих типов РТС и особенно тех, которые работают на частотах свыше 10 – 30 МГц.

Сигнал на входе приемника в случае единственного и не зависящего от времени параметра можно представить в виде

$$y(t; \lambda) = s(t; \lambda) + n(t) \quad , \text{где } t \in [0; T] \quad (1)$$

и T – временной интервал наблюдения (обработки). При дискретном отборе данных, как и ранее, полагаем, что на входе приемника имеем вектор \mathbf{y} . Процесс измерения параметра λ реализуется в виде определенных преобразований над входным сигналом. Результатом этих преобразований является *оценка параметра* - $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$. С математической точки зрения выражение $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$ определяет правило (алгоритм) обработки данных в «приемнике – измерителе».

Поскольку \mathbf{y} содержит шум и является случайным, то и оценка параметра непременно будет случайной величиной. Оценка имеет условную плотность распределения вероятностей $W(\hat{\lambda} / \lambda)$ и соответственно $\mathbf{M}[\hat{\lambda}] = m_{\hat{\lambda}}$ - математическое ожидание (среднее значение) и $D_{\hat{\lambda}}$ - дисперсию, которая характеризует рассеяние (вариации) оценки относительно ее среднего

значения. Однако качество оценки очевидно связано с ошибкой $\varepsilon = (\hat{\lambda} - \lambda)$ и ее свойствами как случайной величины. Среднее значение ошибки $m_\varepsilon = m_{\hat{\lambda}} - \lambda$. Если среднее значение оценки равно истинному значению параметра, то оценка называется *несмещенной* и для такой оценки среднее значение ошибки $m_\varepsilon = 0$. Рассеяние ошибки характеризует ее дисперсия

$$D_\varepsilon = M \left[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \right] = \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2. \quad (2)$$

В байесовской теории оценок качество оценки определяется *средним байесовским риском* R , который является *средним значением функции потерь* $C(\varepsilon)$, определяющей «стоимость» ошибки (за ошибки приходится «расплачиваться»). Чем больше ошибка ε , тем выше ее стоимость. На практике часто используют *квадратичную функцию потерь*, т.е. $C(\varepsilon) = \varepsilon^2$. В этом случае средний риск R с учетом (2) принимает вид

$$R = \overline{C(\varepsilon)} = \overline{(\hat{\lambda} - \lambda)^2} = \overline{\varepsilon^2} = D_\varepsilon + m_\varepsilon^2. \quad (3)$$

Таким образом, для несмещенной оценки средний риск при квадратичной функции потерь равен дисперсии ошибки.

1.2 Оптимальные байесовские оценки. Ясно, что желание найти оптимальную (в смысле байесовской теории) оценку связано с необходимостью минимизации среднего риска R . Подробно этот вопрос рассмотрен в [1, п. 4.2]. Известно, что выражение для оптимальной байесовской оценки при квадратичной функции потерь имеет вид

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda, \quad (4)$$

где $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ - условная ПРВ параметра λ после получения конкретного сигнала \mathbf{y} ; ее называют *апостериорной плотностью распределения параметра*. Эту плотность «приемник – измеритель» должен вычислить на основе *имеющейся информации о характере полезного сигнала, вероятностных свойствах помехи и полезного параметра*. Выражение (4), как следует из формы его записи, является средним значением параметра λ по условному распределению вероятностей $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$.

Содержательный смысл байесовской оптимальной оценки (4) состоит в следующем. Приемник, получив сигнал \mathbf{y} , рассчитывает вероятности всех возможных значений неизвестного параметра λ , который он должен оценить, и в качестве наилучшей оценки $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ выдает среднее арифметическое значение, но не простое, а взвешенное, в котором каждое ожидаемое значение λ учитывается с коэффициентом, равным вероятности его появления при конкретном входном сигнале \mathbf{y} . Подобной стратегии интуитивно следуют многие здравые люди. Правда, не все. Действительно, вполне разумно в качестве оценки выбрать и то значение па-

раметра, которому соответствует наибольшая вероятность. Можно показать, что такой стратегии также соответствует минимальный байесов риск, но функция стоимости ошибок в этом случае оказывается другой. Это простая функция потерь. Она равна нулю только вблизи $\varepsilon = 0$, затем скачком возрастает и остается постоянной при любых величинах ошибки.

Следует отметить одну особенность байесовской теории оценок. Она состоит в том, что полезный параметр λ , оставаясь *неизвестным*, полагается *случайным*. До получения сигнала \mathbf{y} «приемник – измеритель» должен знать ПРВ $W(\lambda)$ - *априорную плотность вероятностей* параметра. Во многих технических задачах такой подход оправдан. Действительно, если по каналу с шумом передаются сообщения в виде букв русского алфавита, то вполне оправдано, учитывая специфику текста, сообщить приемнику (еще до получения конкретного сигнала \mathbf{y}) вероятности наличия в переданном сигнале каждой буквы. Интуитивно ясно, что приемник, в котором при обработке поступившего сигнала эта информация учитывается должен давать меньше ошибок.

1.3 Оценки максимального правдоподобия. В соответствии с формулой Байеса апостериорную ПРВ $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ параметра λ можно записать в виде

$$W_\lambda(\lambda/\mathbf{y}) = \frac{W(\lambda) \cdot W_y(\mathbf{y}/\lambda)}{W(\mathbf{y})}. \quad (5)$$

Характер зависимости правой части (5) от переменной λ определяется произведением функций в числителе. Коль скоро имеют смысл байесовские оценки, обеспечивающие максимум апостериорной вероятности по λ , то это равносильно максимизации (по λ) произведения $W(\lambda) \cdot W_y(\mathbf{y}/\lambda)$. Очень часто априорная ПРВ $W(\lambda)$ имеет слабо выраженный максимум или вовсе не зависит от λ , например, все значения параметра априори равновероятны. Таким образом, вся «ответственность» за наличие максимума у апостериорного распределения вероятностей по аргументу λ приходится на функцию $L(\lambda) = W_y(\mathbf{y}/\lambda)$. Эту функцию называют *функцией правдоподобия выборки*. Соответственно оценки, определенные по правилу

$$\hat{\lambda}(\mathbf{y}) = \arg \left\{ \max_{\lambda} L(\lambda) \right\} = \hat{\lambda}_{МП}(\mathbf{y}) \quad (6)$$

называют *максимально правдоподобными оценками*. Для того, чтобы получить явное выражение для расчета оценки $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ или $\hat{\lambda}_{МП}(\mathbf{y})$ необходимо иметь математическую модель сигнала \mathbf{y} в виде явных выражений для ПРВ $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$ и $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$.

1.4 Оценки параметров по методу наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов фактически определяет способ сглаживания наблюдаемых данных, т.е. сигнала. Рассмотрим пример. Допустим, на вход измерителя поступает хаотический сигнал, показанный на рис. 1. Математическая модель этого сигнала имеет вид

$$y(t) = \lambda_0 \cdot \sin[2\pi \cdot \lambda_1 \cdot t] + n(t), \quad (7)$$

где $n(t)$ – помеха; λ_0 и λ_1 – неизвестные амплитуда и частота полезного гармонического сигнала. Приемник – измеритель не знает истинных значений λ_0 и λ_1 , он располагает математической моделью вида (7) и фактическим сигналом $y(t)$ на конечном интервале

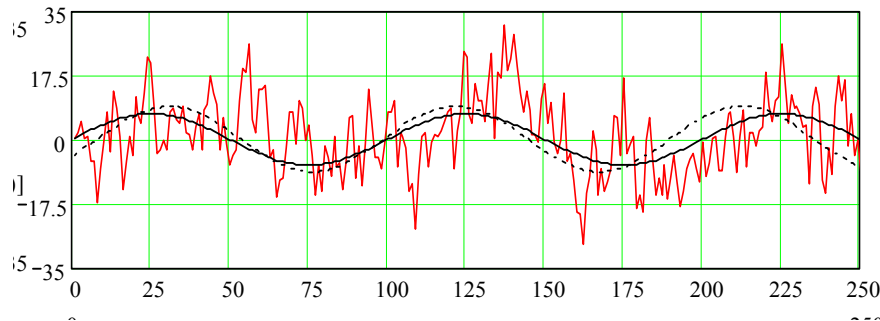


Рис.1

времени. Возникает вопрос: «Как определить наилучшие оценки $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1$ »? Можно предложить бесчисленное множество пар оценок, которые позволяют «отфильтровать», определяемый каждой парой, гармонический сигнал $\lambda_0 \cdot \sin[2\pi \cdot \lambda_1 \cdot t]$. Два таких сигнала показаны на рис.1. Какому из них отдать предпочтение?

Метод наименьших квадратов (МНК) предложил в 1795 г. Карл Фридрих. Гаусс, когда ему было 18 лет, и он решал задачу оценки параметров орбит комет на основе данных, полученных оптическим телескопом. Эти данные, конечно, содержали ошибки наблюдений. Алгоритм формирования оценок по МНК строится следующим образом. Допустим, есть некоторые оценки $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1$. Тогда, получив сигнал $y(t)$, можно в каждый момент времени t_i определить разность (невязку) $\tilde{n}(t_i) = [y(t_i) - \hat{\lambda}_0 \cdot \sin(2\pi \hat{\lambda}_1 \cdot t_i)]$. Видно, что в различные моменты времени невязка будет иметь разные знаки и величину. Однако важно учесть все имеющиеся невязки, причем их знак одинаково важен при подборе оценок. Таким образом, целесообразно образовать сумму квадратов невязок по всем моментам времени от $i = 1$ до $i = N$. В качестве же наилучших оценок следует предложить те, при которых указанная выше сумма будет иметь наименьшее значение. Итак, целевая функция для МНК имеет вид

$$J(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = \sum_{i=1}^N \tilde{n}^2(t_i) = \sum_{i=1}^N [y_i - \hat{\lambda}_0 \cdot \sin(2\pi \hat{\lambda}_1 \cdot t_i)]^2. \quad (8)$$

Оценки параметров по МНК должны доставлять целевой функции (8) минимум, т.е.

$$\hat{\lambda}_{0_МНК}, \hat{\lambda}_{1_МНК} \rightarrow \arg \left\{ \min_{\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1} J(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) \right\}. \quad (9)$$

Следует обратить внимание, что в наших рассуждениях нигде не упоминались вероятностные свойства помехи, которая в виде суммы входит в состав наблюдаемого сигнала $y(t)$. Вероятностные свойства оценок МНК, конечно же, зависят от свойств помехи. Оценки неизвестных

параметров по МНК при некоторых свойствах помехи являются строго оптимальными. Эти вопросы следует изучить в [1, пп. 4.2 – 4.4].

2. Задание на работу

Работа выполняется на ПЭВМ с использованием пакета Mathcad (версия не ниже 2001). Программа приведена в главе 7 учебного пособия «Статистические методы обработки сигналов в радиотехнических системах». Выполнение задания предусматривает следующие этапы.

1. Изучение основ статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала при наличии помех [1, п. 4.1 – 4.4].
2. Повторение приемов обработки данных с помощью пакета Mathcad, которые были использованы при выполнении задания на практике № 1.
3. Изучение текста программы, освоение используемых в работе обозначений.
4. Запись в явной форме (в отдельном текстовом окне) целевой функции для метода наименьших квадратов при выполнении первого опыта в пункте 1.1 программы, где входной сигнал $y_i = \lambda + n_i$ является суммой неизвестного постоянного во времени параметра λ и помехи.
5. Выполнение расчета СКО оценки параметра λ при числе опытов 100 для объема выборки $m=16$. Расчетную точку отобразите в программе на рисунке 1.
6. Определение теоретической [1, п. 4.4] зависимости СКО оценки параметра λ от объема выборки и представление ее в виде графика в программе на рис. 1.
7. Запись в явном виде (в отдельном текстовом окне) функции правдоподобия выборки для случая, когда выборка состоит из двух элементов z_{41} и z_{42} .
8. Определите графически три оценки максимального правдоподобия на рис.2 и рис. 3. Сравните характер поведения этих оценок и сделайте выводы.

В меню **Math** установите пошаговый режим выполнения программы. Установите курсор на оператор **rnorm**() в п.3 программы и, нажимая несколько раз клавишу F9, наблюдайте реализации функции правдоподобия на рис.2 и рис.3. По результатам наблюдений сделайте выводы.