

Федеральное агентство по образованию
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В.И. Тисленко

Статистические методы обработки сигналов в радиотехнических системах

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным отделением
учебно-методического объединения высших учебных заведений РФ
по образованию в области радиотехники, электроники,
биомедицинской техники и автоматизации
для межвузовского использования в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлениям подготовки
радиотехнических специальностей

Томск
ТУСУР
2007

УДК 621.37:519.2(075.8)

ББК 32.84я73

Т44

Рецензенты:

Красненко Н.П., д-р физ.-мат. наук, проф.,
вед. науч. сотр. ИМКЭС СО РАН;

Якубов В.П., д-р физ.-мат., наук, проф.,
зав. каф. радиофизики Томск. гос. ун-та

Тисленко В.И.

Т44 Статистические методы обработки сигналов в радиотехнических системах / В.И. Тисленко. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 245 с.

ISBN 5-86889-350-6

Изложены основы теории статистического синтеза оптимальных систем обнаружения, различения, оценки параметров и разрешения полезных сигналов при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. Показаны свойства радиосигнала как переносчика полезной информации в радиотехнических системах. Рассмотрены классические методы оценки параметров сигналов, их взаимосвязь, а также вопросы рекурсивной оценки параметров линейной регрессии и алгоритм оптимальной линейной фильтрации Калмана.

Приведены контрольные вопросы, подробное описание теории и программ в среде MathCad для выполнения лабораторного практикума на ПЭВМ по основным теоретическим разделам, что способствует эффективному самостоятельному изучению курса.

Содержание соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по дисциплине «Статистическая теория радиотехнических систем», входящей в учебные планы подготовки инженеров радиотехнических специальностей.

УДК 621.37:519.2(075.8)

ББК 32.84я73

ISBN 5-86889-350-6

© Тисленко В.И., 2007

© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2007

Оглавление

Введение	6
1. Сигналы и помехи в радиотехнических системах	
1.1. Общее описание сигналов и помех	9
1.2. Классификация сообщений и сигналов	12
1.3. Свойства радиосигнала как переносчика сообщения	22
1.3.1. Функция различия сигналов	22
1.3.2. Частотно-временная корреляционная функция сигнала	27
1.3.3. Ширина функции неопределенности вдоль осей времени и частоты	30
1.3.4. Примеры функций неопределенности импульсных сигналов	34
1.4. Стационарная случайная помеха с гауссовым распределением вероятностей. Белый шум	43
1.5. Контрольные вопросы	49
2. Статистические модели сигналов в РТС	
2.1. Радиоканал и его свойства	51
2.2. Полезный сигнал на выходе радиоканала	55
2.2.1. Модель сигнала в однолучевом канале	56
2.2.2. Модель сигнала в многолучевом канале	58
2.3. Нормальная (гауссовская) модель сигнала	60
2.3.1. Статистические свойства огибающей	61
2.3.2. Статистические свойства фазы	63
2.4. Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы	64
2.5. Контрольные вопросы	66
3. Основы статистической теории обнаружения и различения сигналов при наличии помех	
3.1. Краткая характеристика задач статистической теории	67
3.2. Согласованный линейный фильтр	71
3.3. Примеры построения согласованных фильтров	80
3.3.1. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса	80
3.3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ	81
3.3.3. Согласованный фильтр для пачки М когерентных радиоимпульсов гауссовой формы	82

3.4. Обнаружение и различение сигналов при наличии помех (байесовский метод)	85
3.5. Другие критерии оптимальности обнаружения и различения	90
3.6. Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссовского шума. Структура оптимальных устройств	91
3.6.1. Статистические характеристики качества различения	95
3.6.2. Статистические характеристики качества обнаружения	98
3.6.3. Общие черты задач «сыщика» и «оптимального обнаружителя»	102
3.7. Контрольные вопросы	103
4. Основы статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала	
4.1. Оценки параметров сигналов и их свойства	105
4.2. Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех	108
4.2.1. Байесовские оценки	108
4.2.2. Оценки максимального правдоподобия	112
4.2.3. Оценки неизвестных параметров методом наименьших квадратов	115
4.3. Статистические свойства оценок МНК	118
4.4. Пример оценки неизвестного скалярного параметра	119
4.5. Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы	125
4.6. Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссовского шума	129
4.7. Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия	130
4.8. Оптимальная оценка начальной фазы радиоимпульса	136
4.9. Информация по Фишеру. Неравенство Крамера-Рао	138
4.10. Контрольные вопросы	143
5. Рекурсивная фильтрация сообщений	
5.1. Среднеквадратичная регрессия	145
5.2. Линейная среднеквадратичная регрессия	146
5.3. Рекурсивная оценка параметров линейной регрессии	150
5.4. Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана	154
5.5. Контрольные вопросы к главе 5	161

6. Разрешение сигналов	
6.1. Общие положения	163
6.2. Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы	164
6.3. Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте	169
6.4. Контрольные вопросы к главе 6	173
7. Лабораторный практикум	
7.1. Лабораторная работа 1. Статистическое описание случайных сигналов	175
7.1.1. Теоретическая часть	175
7.1.2. Задание на лабораторную работу	182
7.1.3. Листинг программы	186
7.2. Лабораторная работа 2. Статистические свойства смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссовского шума	189
7.2.1. Теоретическая часть	189
7.2.2. Структура программы и задание на работу	193
7.2.3. Листинг программы в среде MatpCad	196
7.3. Лабораторная работа 3. Оптимальное обнаружение полезного сигнала на фоне шума	202
7.3.1. Теоретическая часть	202
7.3.2. Структура программы и задание на работу	210
7.3.3. Листинг программы	217
7.4. Лабораторная работа 4. Изучение методов оценки неизвестных параметров полезных сигналов при наличии помех	227
7.4.1. Теоретическая часть	227
7.4.2. Структура программы и задание на работу	233
7.4.3. Листинг программы	234
Литература	240
Основные соотношения	241

Введение

Сферы применения радиотехнических систем (РТС) в жизни современного общества весьма обширны: радиовещание, телевидение, стационарная и мобильная радиосвязь, системы управления самолетами, ракетами, космическими объектами, системы космического мониторинга состояния земной поверхности. Это некоторые основные области их использования, без которых прогрессивное развитие промышленности, транспорта, медицины и других отраслей трудно себе представить. Основной наиболее эффективных средств организации и ведения военных действий в современной армии также являются РТС. Известно, например, что стоимость радиоэлектронного оборудования современного самолета составляет около половины его стоимости в целом.

Содержание задач, решаемых РТС в процессе выполнения возложенных на них функций, связано, как правило, с передачей, приемом и преобразованием информации, переносчиком которой является радиосигнал. По информационному назначению независимо от области применения РТС разделяют на три основных класса: передачи информации; извлечения информации; противодействия (передаче или извлечению информации).

К первому классу относят РТС, предназначенные для передачи информации (сообщений) из одних пунктов пространства в другие. Это, прежде всего, системы радиосвязи, телевидения, а также радиотелеметрии.

Второй класс составляют РТС, основная функция которых состоит лишь в приеме (извлечении) полезной информации. Такая ситуация характерна для радиолокационных (РЛ) и радионавигационных (РН) систем, а также для РТС, используемых в радиоастрономии, радиометеорологии. В данном случае, в отличие от систем, относящихся к первому классу, полезное сообщение появляется не в самой РТС, а как бы вне ее. Характер сообщения в РТС извлечения информации по существу обусловлен физическими закономерностями распространения радиоволн в среде (запаздывание, рефракция, рассеяние, отражение, эффект Доплера и др.).

Последний класс образуют системы радиопротиводействия. Это несколько особый и важный класс систем. Особый, потому что используется обычно в РТС военного назначения, а важный, поскольку применение этих средств дает возможность парализовать работу других РТС, выполняющих функции передачи и извлечения информации.

Совершенствование радиолокационных и радионавигационных систем, систем радиосвязи и управления связано с повышением их дальности действия, точности и оперативности измерения параметров объектов, достоверности и скорости передачи информации, надежности. Среди множества проблем, возникающих при создании РТС, обладающих при прочих равных условиях максимально возможными дальностью, точностью, быстродействием, скоростью и достоверностью передачи информации, существует одна, связанная непосредственно с предметом изучения в курсе «Статистическая теория радиотехнических систем».

Сущность этой проблемы состоит в том, что основным реально действующим и принципиально неустранимым фактором, препятствующим реализации желаемых (неограниченно высоких) значений, указанных выше показателей РТС, является случайный характер сигналов на входе приемных устройств. Случайность (стохастичность) амплитуды, фазы и частоты входного сигнала обусловлена многими причинами. Это, прежде всего, тепловые флуктуации или хаотические движения носителей электрических зарядов в проводниках, шумы пространства (неба), окружающего антенну приемника, а также шумы, обусловленные, в частности, дробовым эффектом и другими флуктуационными явлениями в усилительных устройствах. При распространении радиоволн в реальных каналах также возникают случайные изменения амплитуды, фазы и частоты радиосигнала, обусловленные пространственно-временными вариациями электрических параметров среды.

Проектирование РТС без анализа и грамотного учета влияния указанных факторов не позволяет оценить и при необходимости реализовать предельные возможности радиосистем по основным показателям, определяющим их эффективность.

В курсе «Статистическая теория РТС» изучаются основные методы и способы оптимального обнаружения, различения, оценки параметров и фильтрации полезных сигналов, а также их разрешения при наличии помехи в виде белого гауссовского шума. По существу, это классика, знание которой минимально необходимо радиоинженеру для понимания принципов построения современных систем радиолокации, радиосвязи, радионавигации и др. Эти результаты составляют лишь малую часть того, чем располагает современная статистическая теория обработки сигналов. Ограниченный объем книги не позволил, в частности, в полной мере представить в ней материал по марковской теории фильтрации сообщений.

В пятом разделе пособия приведены основы теории среднеквадратичной регрессии и показана взаимосвязь процедуры оптимальной линейной фильтрации (алгоритм дискретного фильтра Калмана) с рекурсивной процедурой оценки параметров линейной регрессии.

Учебное пособие содержит описание 4-х лабораторных работ, направленных на изучение основных положений теории. В каждой работе приведено описание и листинг програмы. Программа написана в среде MathCad. Прилагаемый к пособию диск содержит исходные тексты программ.

Автор выражает уверенность в том, что при самостоятельной работе над контрольными вопросами и выполнении лабораторных компьютерных работ читатель овладеет основами статистической теории обработки сигналов в современных радиотехнических системах.

Содержание книги соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по данному курсу. Для его освоения необходимы знания теории вероятностей, теории цепей и сигналов, высшей математики и общей физики в объеме вузовских курсов для студентов радиотехнических специальностей.

1. СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1.1. Общее описание сигналов и помех

Радиотехнические системы относятся к классу информационных систем, поэтому все процессы в них целесообразно рассматривать с информационной точки зрения. Любые возмущения в РТС разделяют на три группы: *сообщения, сигналы и помехи*. К сообщениям относят процессы $\lambda(t)$ — функции времени, или поля $\lambda(t, x, y, z)$ — функции пространственных координат и времени, содержащие полезную для потребителя информацию, которая подлежит воспроизведению в системах передачи или извлечению в системах извлечения информации. Например, в системах связи — это речь, музыка (функции времени); при передаче ТВ-изображения — распределение яркости отраженного от объекта света (функция пространственных координат и времени). В РЛ- и РН-системах сообщениями обычно являются функции, определяющие изменение во времени дальности и угловых координат подвижного объекта в заданной системе координат. В общем случае сообщение может иметь векторный характер, т.е. $\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$.

Сигналом называется процесс $s(t, \lambda(t), \beta)$ или поле $e(t, x, y, z, \lambda(t), \beta)$, которые выполняют функцию *переносчика сообщения* $\lambda(t)$. Важно отметить, что термин «сигнал» предполагает существование временного процесса, а термин «поле» определяет пространственно-временной процесс, т.е. x, y, z — пространственные координаты.

Наряду с полезным сообщением в ряде случаев сигнал содержит совокупность неинформативных параметров β . Эти параметры называют мешающими, все или часть из них могут быть известны. В общем случае они также изменяются во времени и пространстве. Сигналы (иногда используют термин *радиосигналы*) существуют в цепях приемника и передатчика РТС в виде высокочастотных токов и напряжений, например, на выходе приемной антенны. Когда используют термин *поле*, то имеют в виду электромагнитную волну, распространяющуюся в пространстве.

Волна характеризуется векторами электрического и магнитного полей. Таким образом, скалярная функция $e(\cdot)$ соответствует одной из проекций вектора электрической напряженности поля. Приемная антенна осуществляет преобразование электромагнитной волны в радиосигнал $s(t, \lambda(t), \beta)$. С информационной точки зрения волна и радиосигнал выполняют функцию переносчика информации. В большинстве своем тактико-технические характеристики (ТТХ) РТС зависят как от способа модуляции радиосигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ сообщением $\lambda(t)$, так и от характера самого сообщения $\lambda(t)$.

Следует отметить, что в системах передачи информации модуляция высокочастотного сигнала сообщением $\lambda(t)$ реализуется в передатчике РТС. Поэтому эти системы называют также системами с *внутренней модуляцией*. В радиолокационных, радионавигационных, а также других РТС, относящихся к классу систем извлечения информации, полезное сообщение $\lambda(t)$ не содержится в сигнале, который излучает передатчик. Этот сигнал принято называть *зондирующим*.

В РЛ- и РН-системах электромагнитная волна (переносчик информации) как бы *приобретает сообщение в процессе распространения на трассе «излучатель — объект» и отражения от объекта*. Действительно, сообщение о дальности до объекта в РЛ-системах формируется вследствие задержки по времени сигнала на входе приемника по отношению к зондирующему. Сообщение о направлении на объект «вводится» в переносчик информации при приеме волны на пространственно протяженную антенную систему и, таким образом, зависит от способа построения самой антенны. В связи с отмеченными особенностями РТС извлечения информации называют также системами с *внешней модуляцией*.

Помехами называют процессы или поля, мешающие достоверному воспроизведению (извлечению) сообщения $\lambda(t)$. Характер взаимодействия сигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ и помехи $n(t)$ может быть различным и зависит от физической природы помехи. В общем виде результат их взаимодействия можно представить в виде сигнала $y(t, \lambda(t), \beta) = F[s(t, \lambda(t), \beta); n(t)]$, где $F[\cdot, \cdot]$ — оператор, определяющий способ комбинирования сигнала и помехи. Например, собственный шум приемно-усилительных устройств аддитивно взаимодействует с сигналом, т.е. суммируется с ним. Такая помеха называется *аддитивной* (от английского слова *addition* — сложение). Например, если сигналом является прямоугольный радиоимпульс, который находится на интервале $[0, T]$, то с учетом собственного шума колебание на входе приемника

$$y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t),$$

$$\text{где } s(t, \lambda, \beta) = \begin{cases} A \cos [\omega(t - \tau) + \varphi], & 0 \leq \tau \leq t \leq \tau + \tau_n \leq T, \\ 0, & t < \tau, \quad (\tau + \tau_n) \leq t. \end{cases}$$

Здесь полезный сигнал зависит от пяти параметров: амплитуды A , частоты ω , начальной фазы φ , длительности импульса τ_n и момента его появления τ . В практических задачах часто информативными и неизвестными заранее могут быть $\lambda_1 = \omega$; $\lambda_2 = \tau$; $\lambda_3 = \tau_n$, а мешающими — $\beta_1 = A$ и $\beta_2 = \varphi$.

При радиолокационном наблюдении объекта, находящегося в пространстве, содержащем случайные неоднородности (самолет и дождевые облака на трассе распространения радиоволн или корабль и взволнованная поверхность моря), также возникает помеха в виде радиосигналов, отраженных от капель дождя или случайно ориентированных участков поверхности моря. Однако в этом случае помеха не суммируется с сигналом от объекта, она *модулирует полезный сигнал*, то есть *влияет на него нелинейно*. Такие помехи называют *мультипликативными*, (от английского слова *multiply* — умножать). Действительно, простое увеличение мощности излученного сигнала приведет к ослаблению влияния собственного шума в случае аддитивной помехи и не приведет к желаемому результату в случае мультипликативной помехи, так как наряду с увеличением уровня сигнала, отраженного от объекта, возрастает и уровень помехи в виде отражений от облаков или моря.

Математическое описание помехи предполагает задание ее в виде случайной функции времени. В противном случае (при детерминированном описании) она оказывается полностью известной, и ее влияние можно полностью исключить. Вопрос о том, является ли отдельно взятый процесс сигналом или помехой, решается в зависимости от конкретной задачи. В этом плане математические способы описания сообщений, сигналов или помех одинаковы. Поэтому далее, где это удобно, будет использоваться единый термин «сигнал».

Важно отметить, что на вход приемника поступает результирующий сигнал $y(t, \lambda(t), \beta)$ и по своей физической природе в подавляющем большинстве практических задач — это случайный процесс. Таким образом, амплитуда, фаза и частота высокочастотного (ВЧ) сигнала $y(t, \lambda(t), \beta)$ в любой момент времени являются случайными величинами. Напомним, что определение случайной величины или случайного процесса как совокупности случайных величин предполагает задание некоторого

множества возможных значений (выборочного пространства), из которого производится случайный выбор конкретных (наблюдаемых) *реализаций*. На этом множестве должны быть определены вероятностные характеристики, которые показывают, как часто наблюдаются те или иные элементы выборочного пространства.

Важным положением теорий информации и связи является утверждение, что адекватная (полноценная или соответствующая природе явлений) постановка задачи анализа и синтеза РТС передачи или извлечения информации предполагает задание полезного сообщения $\lambda(t)$ как случайной функции или величины, если $\lambda(t) = \text{const}$. Действительно, предположение о том, что сообщение $\lambda(t)$ является детерминированной функцией, т.е. известной потребителю заранее, делает абсурдной передачу этого сообщения по каналу связи. Теряет смысл и задача измерения координат в РЛ- и РН-системах, если они заранее известны, то есть являются детерминированными функциями, определяющими изменение самих координат.

Таким образом, общий подход к математическому описанию воздействий в РТС различного назначения, а следовательно, и к решению задач анализа и синтеза систем и устройств обработки сигналов связан с использованием аппарата статистической радиотехники. Тем не менее, отсюда не следует, что теряет смысл изучение свойств переносчика информации — сигнала $s(t, \lambda(t), \beta)$ — при отсутствии помех. В частности, особый интерес представляет изучение влияния способа модуляции сигнала на возможность раздельного наблюдения двух сигналов, имеющих различные значения сообщений $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Уверенность в целесообразности подобного рассмотрения основана на том, что свойства сигналов, справедливые при отсутствии помех, сохраняются на приемлемом уровне при достаточном превышении сигнала над помехой. Далее мы покажем, что это имеет место в задачах, где помехой является собственный шум приемника.

1.2. Классификация сообщений и сигналов

Рассматривая классификацию сообщений и сигналов, будем полагать, что они не являются функциями пространственных координат и в качестве аргумента могут иметь переменную t (время).

Напомним, что по своей сути сообщение должно рассматриваться как категория, заранее неизвестная получателю. В этом смысле сообщение не может быть детерминированным, т.е. заведомо известным потребите-

лю. Роль последнего в РТС передачи информации выполняет, например, абонент на приемном конце линии связи. В РТС извлечения информации это может быть оператор РЛС, получающий информацию о координатах целей в зоне обзора.

Классификация сообщений представлена на рис. 1.1. В зависимости от характера изменения функции $\lambda(t)$ во времени сообщения бывают *случайные* и *квазидетерминированные*.



Рис. 1.1. Классификация типов сообщений $\lambda(t)$

Сообщение является *случайной* функцией, если оно представляет собой последовательность случайных величин, то есть в любой произвольный момент времени, где оно существует, его можно рассматривать как случайную величину. Согласно [1] — это такой процесс, в котором «случайность рождается в каждый момент времени». Статистическое описание случайной функции в общем случае предполагает задание многомерной плотности распределения вероятностей (ПРВ) значений сообщения $\lambda(t)$ в n моментов времени t_1, \dots, t_n . Если ввести в рассмотрение n -мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ с координатами $\lambda_j = \lambda(t_j)$, то следует

задать функцию $W(\lambda; t_1, t_2, \dots, t_n) = W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$. Здесь множество моментов времени t_i играет роль параметров функции. Если моменты времени t_1, \dots, t_n расположены равномерно через промежуток Δt в интервале $[0, T]$, на котором задан случайный процесс, то ПРВ $W(\lambda)$ при большом n можно приблизительно рассматривать как плотность вероятности для *реализации* случайного процесса. При $\Delta t \rightarrow 0$ число отсчетов $n \rightarrow \infty$ и n -мерная ПРВ в пределе (если он определен) переходит в *функционал* распределения вероятностей $W\{\lambda(t)\}$ случайного процесса $\lambda(t)$.

Во многих практических задачах оказывается достаточным знание одно- или двумерной ПРВ. Это позволяет задать математическое ожидание (среднее по ансамблю реализаций значение)

$$\mathbf{M}[\lambda(t)] = \overline{\lambda(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda; t) d\lambda$$

и ковариационную функцию

$$K_{\lambda}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\lambda_1 \cdot \lambda_2] - \overline{\lambda_1} \cdot \overline{\lambda_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 W(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

В тех случаях, когда необходимо знание n -мерной плотности вероятности, часто в качестве моделей для описания случайных сигналов и помех используются процессы, у которых многомерная плотность может быть определена через одно- или двумерную плотность вероятности. В частности, если моменты времени t_i выбраны так, что соответствующие им значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ оказываются статистически независимыми, то n -мерная плотность выражается через произведение одномерных, т.е.

$$W_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = W_1(\lambda_1, t_1) \cdot W_1(\lambda_2, t_2) \cdots W_1(\lambda_n, t_n).$$

В силу известной в теории вероятностей центральной предельной теоремы во многих задачах, связанных с анализом и синтезом устройств обработки сигналов, применяется вероятностная модель, соответствующая *нормальному (гауссовскому)* случайному процессу. Она удобна тем, что n -мерная ПРВ полностью определяется через двумерную плотность распределения вероятностей значений процесса $\lambda(t_1)$, $\lambda(t_2)$ для произвольных t_1 и t_2 .

Широкое применение в теории РТС находят удобные и простые модели случайных сигналов, которые строятся на основе так называемых

случайных *процессов без последействия*, или процессов Маркова. Случайный процесс $\lambda(t)$ называется марковским (первого порядка), если условная плотность вероятности процесса λ_n в момент времени t_n по всем предыдущим значениям $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$ зависит только от λ_{n-1} , то есть $W(\lambda_n / \lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1) = W(\lambda_n / \lambda_{n-1})$. Для марковского процесса n -мерная плотность вероятности может быть записана в виде

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = W(\lambda_1) \cdot W(\lambda_2 / \lambda_1) \cdot W(\lambda_3 / \lambda_2) \cdots W(\lambda_n / \lambda_{n-1}),$$

то есть она определена, если известна ПРВ начального значения процесса $\lambda_1 = \lambda(t_1)$ и условная ПРВ $W(\lambda / \lambda_{t-1})$, называемая *плотностью вероятности перехода*.

Сообщение является *квазидетерминированным*, если его задание представляет известную функцию времени t , содержащую один или несколько случайных параметров, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Например, математическую модель изменения координаты цели, допустим дальности $D(t)$, на интервале времени $(0; T)$ определяют в виде полинома

$$D(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

тогда $\lambda = \{a_0, a_1, a_2\}$. Очевидно, это допустимо, если возможно пренебречь случайными во времени вариациями дальности и считать ускорение постоянным на интервале наблюдения.

Ясно, что исчерпывающее описание *ансамбля сообщений* $\lambda(t)$ в данном случае возможно при задании многомерной плотности вероятности $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Частным случаем квазидетерминированного сообщения является константа — *случайная величина*, которая постоянна на интервале наблюдения. Такая модель сообщения определена заданием ПРВ $W(\lambda)$, она достаточно проста и удобна для описания реальных сообщений, которые «мало» и «медленно» изменяются на интервале наблюдения.

Достаточно часто в практических задачах рассматривают сообщение как *неизвестную постоянную и не случайную величину* или систему не случайных величин. В задачах такого типа нет необходимости вводить в рассмотрение плотность распределения вероятностей $W(\lambda)$. Данный подход оправдан, если есть уверенность в том, что априорное знание функции $W(\lambda)$, то есть ее знание до получения сигнала $Y(t; \lambda_0)$, содержащего информацию о конкретном истинном значении сообщения λ_0 , практически ничего не может дать потребителю. Он также

оправдан и в том случае, когда сообщение по своей физической природе не может рассматриваться как случайное. Например, в качестве сообщения в измерительной РТС может выступать неизвестная физическая константа — скорость света, и если ее предстоит измерить, то следует рассматривать как не случайную величину.

В качестве второго признака классификации будем использовать характер множества значений функции $\lambda(t)$ и ее аргумента t . В зависимости от непрерывного или дискретного множества значений функции $\lambda(t)$ различают *аналоговые* и *цифровые* сообщения. В каждом из этих вариантов множество значений переменной t может быть дискретным или непрерывным. В итоге получаем четыре основных типа сообщений:

1) *непрерывный случайный процесс* — процесс (сигнал), область значений и область определения которого непрерывные множества (рис. 1.2,а);

2) *непрерывный процесс с дискретным временем* — процесс, у которого область значений непрерывное множество, а область определения — дискретное. Сообщения такого типа образуются в результате формирования временных выборок (дискретных отсчетов) из непрерывного случайного процесса (рис. 1.2,б);

3) *дискретный случайный процесс* (дискретный процесс с непрерывным временем) — процесс, у которого область значений дискретное множество, а область значений аргумента t — непрерывное множество. Этот процесс образуется в результате квантования непрерывного процесса только по уровню (рис. 1.2,в);

4) *дискретная случайная последовательность* (дискретный процесс с дискретным временем) — процесс, у которого область значений сообщения и область определения аргумента t — дискретные множества (рис. 1.2,г). Сигналы подобного вида широко используются в современных РТС различного назначения, реализующих дискретные и цифровые методы обработки информации.

Рассмотрим классификацию сигналов-переносчиков сообщений в РТС (рис. 1.3). Высокочастотный (ВЧ) сигнал, не содержащий сообщение $\lambda(t)$ — немодулированное гармоническое колебание (несущая без модуляции), имеет вид

$$s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

где S_0 , ω_0 , φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза колебания.

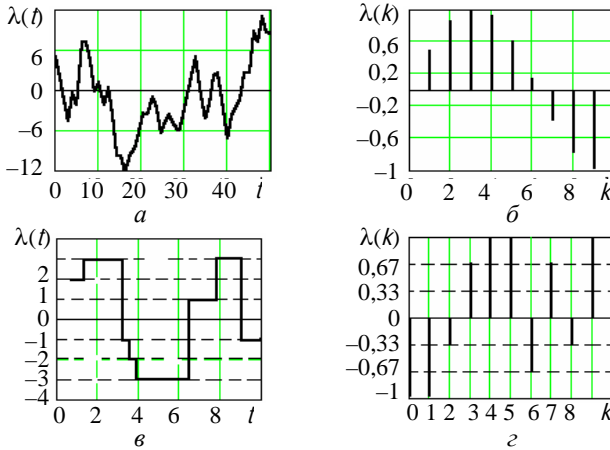


Рис. 1.2. Одиночные реализации различных типов сообщений

Сигнал, содержащий сообщение, в общем случае можно записать в виде

$$s(t) = S(t, \lambda(t)) \cos(\omega_0 t + \Phi(t, \lambda(t)) + \varphi_0), \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

где $S(t, \lambda(t))$ и $\Phi(t, \lambda(t))$ — функции, определяющие амплитудную и фазовую модуляцию ВЧ-сигнала сообщением $\lambda(t)$; T — длительность сигнала (время наблюдения), которая в реальных задачах конечна. Конкретный вид этих функций зависит от назначения РТС и способа ее построения.

При проектировании устройств обработки сигналов во всех типах РТС существенное значение имеет характер *высокочастотной структуры* сигнала $s(t, \lambda(t))$. По этому признаку все сигналы можно разделить на два типа: *когерентные* и *частично когерентные*, включая в них и полностью *некогерентные*. У когерентных сигналов изменение во времени их фазы полностью известно, то есть описывается детерминированной функцией. Это позволяет, например, производить компенсацию нежелательных фазовых сдвигов и осуществлять, в частности, синфазное сложение нескольких ВЧ-сигналов. В итоге можно увеличить мощность суммарного сигнала. Когерентное суммирование (накопление) часто используется в устройствах оптимального приема сигналов при наличии помех. В случае частично когерентных сигналов ВЧ-структура в определенной степени случайна. Таким образом, их сложение не приведет к аналогичному результату.

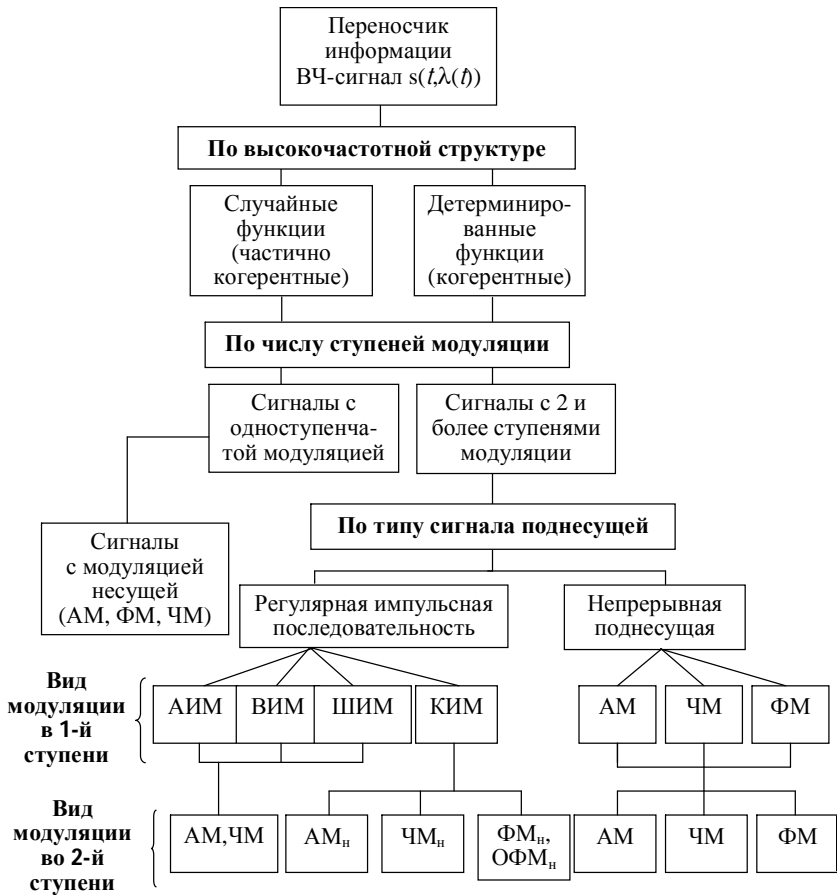


Рис. 1.3. Классификация сигналов-переносчиков сообщений

В зависимости от количества ступеней модуляции модулированные колебания $s(t, \lambda(t))$ могут быть двух типов: с одной ступенью модуляции и с двумя и более. На рис. 1.4 показана структурная модель формирования переносчика сообщения $s(t, \lambda(t))$ для обоих способов.

В случае одной ступени модуляции несущего колебания (1.1) сообщение $\lambda(t)$ непосредственно изменяет параметр радиосигнала. Различают амплитудную модуляцию (АМ), частотную модуляцию (ЧМ)

и фазовую модуляцию (ФМ) (рис. 1.4,*a*). Например, сигнал в системах радиовещания с ЧМ можно представить в виде

$$s(t, \lambda(t)) = S_0 \cos \{ \omega_0 t + \varphi [\lambda(t)] + \varphi_0 \},$$

где скорость изменения полной фазы, т.е. мгновенная частота, должна быть равной $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}[\lambda(t)] = \omega_0 + k \cdot \lambda(t)$ при $k = \text{const}$.

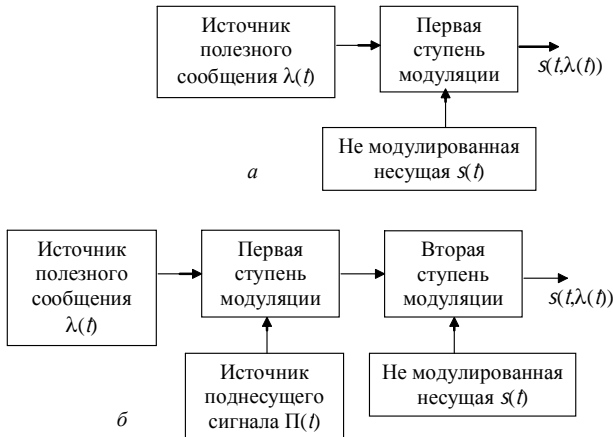


Рис. 1.4. Структурная модель формирования сигнала-переносчика информации: *a* — одна ступень модуляции; *b* — две ступени модуляции

Образец подобного сигнала показан на рис. 1.5,*a*. В РН-системах наземный маяк с непрерывным излучением создает на входе подвижного бортового приемника сигнал $s(t, \lambda(t)) = k \cos \{ \omega_0 [t - \lambda(t)/c] + \varphi_0 \}$, где k — коэффициент, учитывающий ослабление волны на трассе распространения; c — скорость света; $\lambda(t)$ — сообщение, определяемое изменением дальности $D(t)$ от передатчика (маяка) до подвижного объекта.

Сигналы с несколькими ступенями модуляции широко применяются в современных системах связи, радиолокации и радионавигации. Они имеют более сложную структуру. В частности, при 2-ступенчатой модуляции существуют два модулятора. В первой ступени происходит модуляция поднесущего сигнала $\Pi(t)$, во второй — модуляция несущего сигнала $s(t)$ (рис. 1.4,*b*).

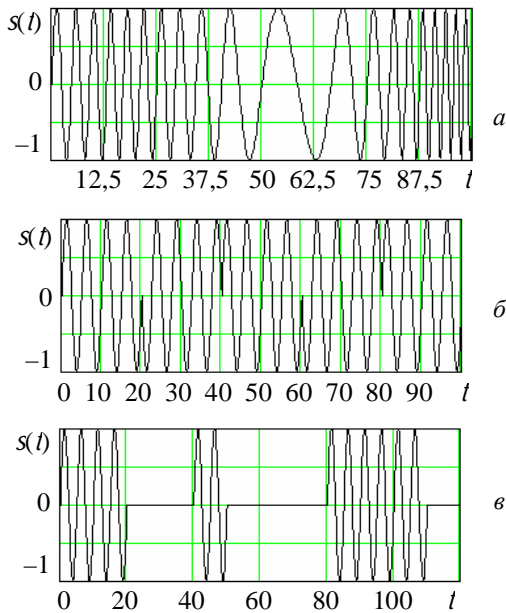


Рис. 1.5. Виды модуляции

ВЧ-сигнал $s(t, \lambda(t))$ может иметь поднесущую $\Pi(t)$ двух типов: регулярная последовательность импульсов; непрерывная функция.

При использовании в качестве $\Pi(t)$ регулярной (периодической) последовательности импульсов определенной формы возможны четыре основных вида импульсной модуляции в первой ступени:

амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) — сообщение $\lambda(t)$ изменяет амплитуду импульсов;

время-импульсная модуляция (ВИМ) — сообщение $\lambda(t)$ изменяет временное положение импульсов относительно опорной (немодулированной) последовательности;

широтно-импульсная модуляция (ШИМ), при которой сообщение управляет шириной (длительностью) импульсов, образующих поднесущую $\Pi(t)$;

кодowo-импульсная модуляция (КИМ), при которой по существу не происходит (в привычном смысле) модуляции какого-либо параметра импульсной последовательности $\Pi(t)$. Поясним подробнее этот вид модуляции.

Применение сигнала с КИМ в системах передачи информации предполагает дискретизацию полезного сообщения $\lambda(t)$ как по времени так и по уровню (рис. 1.2,з). Изменение характера сообщения выполняется в аналого-цифровом преобразователе. В итоге возможные значения сообщения образуют конечный набор (множество) величин.

В каждом периоде импульсной поднесущей $\Pi(t)$, в заданные моменты времени формируется импульсный код, соответствующий значению сообщения в данный момент времени. В простейшем случае кодовые комбинации образуются в виде систематического двоичного кода. В современных цифровых системах передачи информации широко применяются псевдослучайные последовательности (ПСП) импульсов. Состояние ПСП (конкретная реализация) на некотором текущем интервале времени также зависит от значения сообщения. Количество различных состояний ПСП, т.е. число отличающихся друг от друга реализаций счетно, конечно и должно обеспечить кодирование всех возможных значений сообщения $\lambda(t)$. Существуют различные типы ПСП. Широкое применение получили ПСП в виде M-последовательностей, что обусловлено простотой их формирования [2].

В случае, когда поднесущая $\Pi(t)$ является непрерывной функцией, в первой ступени обычно применяют один из трех основных видов модуляции: амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) или фазовую (ФМ).

Рассмотрим теперь виды модуляции во второй ступени — при образовании непосредственно ВЧ-сигнала $s(t, \lambda(t))$.

Во второй ступени модуляции при формировании ВЧ-сигнала $s(t, \lambda(t))$ с использованием импульсной поднесущей $\Pi(t)$, имеющей любую из трех типов модуляции (АИМ, ВИМ, ШИМ) обычно применяют АМ, ЧМ или ФМ. В РТС передачи информации, например, находят применение сигналы АИМ — ЧМ, ВИМ — АМ, ШИМ — ЧМ.

Формирование переносчика информации $s(t, \lambda(t))$ на основе поднесущей с КИМ осуществляется путем манипуляции (скачкообразного изменения) амплитуды, частоты или фазы несущего сигнала (1.1). При этом возможны сигналы с амплитудной манипуляцией ($АМ_n$), с частотной манипуляцией ($ЧМ_n$) или с фазовой манипуляцией ($ФМ_n$). Сигналы с $ФМ_n$ называют обычно сигналами с фазокодовой модуляцией (ФКМ). На рис. 1.5,б показан ВЧ-сигнал с КИМ и двухуровневой (0 или π) $ФМ_n$ несущей во второй ступени модуляции (сигнал с ФКМ); на рис.1.5,в — ВЧ-сигнал с двумя степенями модуляции типа ШИМ — АМ.

Во второй ступени модуляции в случае применения сигналов с непрерывной поднесущей $P(t)$ также, как правило, реализуют один из трех типов модуляции — АМ, ЧМ или ФМ. В частности, в РТС применяются комбинации ЧМ — ФМ, АМ — ЧМ и др.

При проектировании РТС передачи информации возникает задача выбора наиболее подходящего метода модуляции. В РТС извлечения информации, где процесс модуляции ВЧ-сигнала сообщением происходит вне системы, данная задача сводится к выбору целесообразной формы излучаемого (*зондирующего*) сигнала. Ряд важнейших ТТХ РТС зависит от свойств сигнала $s(t, \lambda(t))$. Рассмотрим эти свойства.

1.3. Свойства радиосигнала как переносчика сообщения

1.3.1. Функция различия сигналов

При любых способах формирования ВЧ-радиосигнала $s(t, \lambda)$, используемых в РТС различного назначения, предполагается, что сообщение $\lambda(t)$ содержится в каком-либо параметре сигнала $x(t)$. Характер взаимосвязи $x(t) = f[\lambda(t)]$ зависит от типа РТС и способа ее построения. В системах связи вид этой функции определен способом модуляции и модуляционной характеристикой передатчика.

На приемной стороне канала распространения радиоволн (РРВ) принятый радиосигнал подлежит обработке — происходит измерение параметра $x(t)$ — и в итоге определяется переданное сообщение $\lambda(t)$. В простейшем случае информативным является один параметр сигнала, например амплитуда, частота, фаза или временное положение. Существуют и другие типы РТС, в которых информативными могут быть одновременно несколько параметров ВЧ-сигнала.

Поскольку в канале РРВ или непосредственно в РТС возникают различного рода помехи, результат измерений всегда содержит ошибку, которая искажает сообщение. Степень искажения сообщения помехой зависит от уровня помехи и, что более важно, от способа модуляции ВЧ-сигнала.

Рассмотрим с математической точки зрения вопрос сравнения двух радиосигналов по устойчивости передаваемых ими сообщений к искажению из-за помех. Пусть на вход приемного устройства РТС поступает искаженный помехой сигнал $x(t, x_0)$, где x_0 — постоянный во времени

параметр, соответствующий сообщению λ_0 . Напомним, что в случае аддитивной помехи $y(t, \lambda_0) = s(t, \lambda_0) + n(t)$.

Очевидно, что возможность получения на входе приемника значения сообщения, отличающегося (вследствие влияния помех) от λ_0 , будет тем меньше, чем сильнее отличаются образцы сигнала $s(t, \lambda)$ друг от друга при двух различных значениях сообщения — λ_0 и произвольного λ . Таким образом, качество сигнала как переносчика информации определяется степенью различия функций $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$. По существу, необходимо иметь величину, которая зависит от «расстояния» между двумя функциями. Напомним, что в линейном n -мерном пространстве векторов в качестве меры различия векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} часто используют длину d разностного вектора $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Введем координатное представление векторов: $\mathbf{a} = \{a_i\}$; $\mathbf{b} = \{b_i\}$; $\mathbf{d} = \{d_i\}$, где переменные с индексами являются координатами соответствующего вектора. Длина вектора \mathbf{a} в n -мерном векторном пространстве определяется соотношением

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.3)$$

Тогда мера различия d , равная длине вектора \mathbf{d} , имеет вид

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}. \quad (1.4)$$

Введем аналогичное по содержанию понятие для сигналов. Будем рассматривать функции на конечном интервале времени $(0; T)$. Последовательность отсчетов функции $s(t_i, \lambda) = s_i$, взятых в моменты времени t_i , с интервалом дискретизации $\Delta t = T/n$, где n — число отсчетов, можно рассматривать как n -мерный вектор $\mathbf{s} = \{s_i\}$. Таким образом, при дискретном представлении функций $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$ в качестве меры их различия целесообразно использовать величину, равную

$$\sum_{i=1}^n [s(t_i, \lambda_0) - s(t_i, \lambda)]^2. \quad (1.5)$$

Очевидно, что величина (1.5) изменяется не только при различии форм сигналов, но и в случае, когда они отличаются только масштабом, т.е. $s(t, \lambda) = k s(t, \lambda_0)$. Для исключения влияния масштабного множителя

k на меру различия форм сигналов пронормируем величину (1.5) на квадрат модуля одного из векторов. В результате получим отношение следующего вида:

$$\frac{\sum_{i=1}^n [s(t_i, x_0) - s(t_i, x)]^2}{\sum_{i=1}^n s^2(t_i, x_0)}. \quad (1.6)$$

Запишем выражение (1.6) в непрерывной форме. Будем считать, что количество точек отсчета неограниченно растет, т.е. они сближаются. При этом соответствующие суммы переходят в интегралы. В итоге в качестве меры различия сигналов $s(t, x_0)$ и $s(t, x)$ получим величину

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T [s(t, x_0) - s(t, x)]^2 dt, \quad (1.7)$$

где

$$E_s(x_0) = \int_0^T s^2(t, x_0) dt \quad (1.8)$$

энергия сигнала при фиксированном значении информативного параметра x_0 , соответствующего сообщению λ_0 . При сравнении выражений (1.3) и (1.8) видно, что длина вектора, изображающего сигнал, равна квадратному корню из его энергии. В практических задачах мера различия, определенная по (1.7), обычно является функцией разности $\Delta x = (x_0 - x)$.

Функция различия $\varepsilon(\Delta x)$ принимает только положительные значения, проходит при $\Delta x = 0$ через нуль и возрастает (иногда немонотонно) с увеличением абсолютного значения аргумента Δx . Быстрое возрастание $\varepsilon(\Delta x)$ с увеличением Δx показывает, что даже малое изменение параметра x в образце сигнала приводит к резкому увеличению меры различия ε . Следовательно, это различие легко обнаружить и труднее исказить помехой. Сигналы с быстро нарастающей функцией различия $\varepsilon(\Delta x)$ могут обеспечить передачу сообщений с меньшими искажениями. Таким образом, по виду этой функции можно судить о качестве используемого сигнала $s(t, x)$ как переносчика сообщения.

По характеру влияния параметра x на величину энергии сигнала E_s все методы модуляции, используемые в РТС, можно отнести к двум груп-

пам. К первой (*неэнергетической*) относятся методы, при которых энергия сигнала не зависит от величины модулируемого параметра x . В эту группу входит большая часть практически используемых радиосигналов, при формировании которых в последней ступени модуляции не используется АМ, а также ряд сигналов с АМ в последней ступени, например: ВИМ — АМ. Ко второй группе (*энергетической*) относятся методы модуляции, при которых энергия сигнала E_s зависит от информативно-го параметра x . К ним относятся сигналы АМ, АИМ — АМ, ШИМ — АМ и др.

Поскольку при использовании неэнергетических методов модуляции энергия сигнала E_s и, соответственно, длина вектора сигнала в (1.8) не зависят от параметра x , то, очевидно, его изменение влечет только поворот вектора сигнала. Таким образом, в случае неэнергетических методов модуляции концы сигнальных векторов, соответствующих разным значениям параметра x , лежат на поверхности n -мерной сферы радиуса $\sqrt{E_s}$. В цифровых радиосистемах передачи информации (РСПИ) дискретному множеству значений параметра x и связанному с ним сообщению λ , соответствует конечное множество изолированных точек на сфере (сигнальных векторов).

Для неэнергетической модуляции выражение функции различия $\varepsilon(\Delta x)$ запишем в иной форме. Раскрывая квадрат в выражении (1.7), с учетом (1.8) получим

$$\varepsilon(\Delta x) = 2[1 - q(\Delta x)], \quad (1.9)$$

где

$$q(\Delta x) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0) \cdot s(t, x) dt. \quad (1.10)$$

Зависимость $q(\Delta x)$ в теории РТС носит название *сигнальной функции*. Из (1.10) следует, что модуль сигнальной функции не превышает единицы, т.е. $|q(\Delta x)| \leq 1$. Быстрое спадание функции $q(\Delta x)$ с увеличением $\Delta x = x_0 - x$ обусловлено таким поворотом сигнального вектора $\mathbf{s} = \{s_i\}$ при изменении параметра от значения x_0 к x , при котором резко увеличивается расстояние между сигналами. В этом случае приращение вектора сигнала вследствие добавления к нему вектора помехи приведет к меньшей ошибке при измерении параметра x .

Существуют сигналы, для которых функция $q(\Delta x)$ уменьшается немонотонно и имеет выбросы, сравнимые по уровню с единицей. Это

означает, что при некоторых значениях параметра X и, следовательно, сообщения λ , концы сигнальных векторов, находящиеся на n -мерной сфере сближаются в пространстве. Применение ВЧ-сигналов, сигнальная функция которых обладает подобным свойством, связано с опасностью появления больших (аномальных) ошибок даже при действии сравнительно малых помех.

В некоторых типах РТС радиосигнал содержит одновременно m различных сообщений, то есть сообщение является векторной функцией $\lambda(t) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)\}$. В этом случае возникает задача совместного измерения нескольких параметров радиосигнала. Очевидно, что при $m = 2$ сигнальная функция для неэнергетического способа модуляции принимает следующий вид:

$$q(x_0, v_0, x, v) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, x_0, v_0) s(t, x, v) dt, \quad (1.11)$$

где x_0, v_0, x, v — значения двух модулируемых параметров радиосигнала, соответствующие двум значениям векторного сообщения λ_0 и λ . Часто в практических задачах число переменных уменьшается до двух: $\Delta x = x_0 - x$ и $\Delta v = v_0 - v$, т.е. функция (1.11) зависит фактически от разности аргументов.

Для РТС передачи и извлечения информации важным является частный случай, когда полезное сообщение, являясь двумерным, содержится во временном положении сигнала и в сдвиге его частотного спектра. В РЛ- и РН-системах это соответствует режиму одновременного определения дальности и скорости объекта путем совместного измерения времени задержки и доплеровского смещения частоты радиосигнала в месте приема. В системах мобильной радиосвязи подобная задача связана с необходимостью временной синхронизации приемника при одновременном слежении за изменением несущей частоты радиосигнала, возникающим при взаимном перемещении пунктов передачи и приема. Рассмотрим свойства сигнальной функции (1.10) в этом частном и важном в инженерной практике случае.

1.3.2. Частотно-временная корреляционная функция сигнала

Допустим, что немодулированный сообщением радиосигнал имеет вид (1.2), $s(t) = S(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi_0]$, и является *узкополосным*. Напомним, что в этом случае функции амплитудной $S(t)$ и фазовой $\Phi(t)$ модуляции изменяются во времени значительно медленнее, чем $\cos(\omega_0 t)$. Для сигнала такого типа характерно отношение $(\Delta\omega/\omega_0) \ll 1$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра сигнала. Обращаясь к выражению (1.11), будем считать, что параметр $x_0 = t_0$ и соответствует временному положению сигнала t_0 ; параметр $\nu_0 = \omega_0$, то есть соответствует несущей частоте. Запишем измененные значения параметров $x = t_0 + \tau$ и $\nu = \omega_0 - \Omega$. Величина t_0 зависит от начала отсчета времени. Без потери общности дальнейших выводов, положим $t_0 = 0$. Отметим, что временное положение и частота узкополосного радиосигнала практически не влияют на его энергию. Получим в развернутой форме выражение функции (1.11).

Воспользуемся комплексным представлением сигнала в виде $s(t) = \text{Re}[\hat{S}(t)e^{j\omega_0 t}]$, где $\hat{S}(t) = S(t)e^{j\Phi(t)}$ — комплексная огибающая сигнала. Для записи сигнальной функции в комплексном виде используем соотношение $\text{Re}(\dot{u})\text{Re}(\dot{v}) = 0,5[\text{Re}(\dot{u}\dot{v}) + \text{Re}(\dot{u}\dot{v}^*)]$, где \dot{v}^* — комплексно сопряженная величина. В справедливости приведенного соотношения для любых комплексных величин можно убедиться непосредственной проверкой.

В рассматриваемом частном случае обозначим сигнальную функцию символом k . Используя формулу (1.11), представим выражение сигнальной функции в виде

$$\begin{aligned} k(\tau, \Omega) &= \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t-\tau); (\omega_0 - \Omega)] dt = \\ &= \frac{1}{2E_s} \int_0^T \text{Re} \left[S(t) e^{j\Phi(t)} e^{j\omega_0 t} S(t-\tau) e^{j\Phi(t-\tau)} e^{j(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)} \right] dt + \\ &+ \frac{1}{2E_s} \int_0^T \text{Re} \left[S(t) e^{j\Phi(t)} e^{j\omega_0 t} S(t-\tau) e^{-j\Phi(t-\tau)} e^{-j(\omega_0 - \Omega)(t-\tau)} \right] dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При объединении показателей степени в подынтегральном выражении первого слагаемого получим сумму вида $i[\Phi(t) + \Phi(t - \tau) + 2\omega_0 t - \Omega t - (\omega_0 - \Omega)\tau]$. Интегрирование по переменной t с учетом свойства узкополосности сигнала и быстроосциллирующих сомножителей $\cos(2\omega_0 t)$ и $\sin(2\omega_0 t)$ для первого слагаемого дает результат близкий к нулю. Объединяя показатели степени во втором слагаемом, получим сумму $i[\Phi(t) - \Phi(t - \tau) + \Omega t + (\omega_0 - \Omega)\tau]$. Видно, что подынтегральная функция второго слагаемого не содержит высокочастотных знакопеременных сомножителей, зависящих от переменной интегрирования t . Можно полагать, что результат интегрирования в (1.12) фактически определяет второе слагаемое, и сигнальная функция имеет вид

$$k(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt \right] e^{j(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}. \quad (1.13)$$

В координатах (τ, Ω) сигнальная функция (1.13) представляет некоторую поверхность, которая вдоль оси τ (при $\Omega = 0$) имеет характер частых затухающих колебаний с периодом $2\pi/\omega_0$.

Вычисление интеграла в (1.13) дает функцию двух переменных — τ и Ω , причем достаточно медленно изменяющуюся по τ по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$. Фактически выражение в квадратных скобках формулы (1.13) выполняет роль комплексной огибающей, и можно записать

$$k(\tau, \Omega) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{K}(\tau, \Omega) e^{j(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}, \quad (1.14)$$

где комплексная огибающая

$$\dot{K}(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E_s} \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt = |\dot{K}(\tau, \Omega)| e^{j\Psi(\tau, \Omega)}. \quad (1.15)$$

Модуль $|\dot{K}(\tau, \Omega)| = K(\tau, \Omega)$ по существу есть *огибающая сигнальной функции* (1.14), $\Psi(\tau, \Omega)$ — *фаза сигнальной функции*.

Следует отметить, что в рассмотренном частном случае, *сигнальная функция* $k(\tau, \Omega)$ является *частотно-временной корреляционной функцией* узкополосного сигнала (1.2). Сечение функции $k(\tau, \Omega = 0) = k(\tau)$ является *временной автокорреляционной функцией* (АКФ) узкополосного ВЧ-сигнала. Другое главное сечение $k(\Omega) = k(\tau = 0, \Omega)$ определяет *частотную автокорреляционную функцию* ВЧ-сигнала.

Для временной АКФ из (1.12) получаем выражение

$$k(\tau) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt \quad (1.15a)$$

или в комплексной форме с учетом (1.13)–(1.15)

$$k(\tau) = \frac{1}{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right] e^{i\omega_0 \tau} \right\} = \operatorname{Re} \left[\dot{K}(\tau) e^{i\omega_0 \tau} \right], \quad (1.16)$$

где $\dot{K}(\tau) = \frac{1}{2E_s} \left[\int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right]$ — комплексная огибающая автокорреляционной функции сигнала.

Огибающую $K(\tau, \Omega)$ функции (1.15) в литературе называют *функцией неопределенности* (ФН). Это название объясняется одним замечательным свойством данной функции, которое состоит в выполнении следующих равенств:

$$K(\tau = 0, \Omega = 0) = 1; \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau, \Omega) d\tau d\Omega = 1. \quad (1.16a)$$

Первое равенство есть следствие нормировки ФН (1.10) и (1.11). Второе обусловлено тем, что переменные τ и Ω являются при преобразовании Фурье взаимосвязанными (сопряженными) переменными (доказательство данного свойства приведено, например, в [6]).

Напомним (п. 1.3.1), что *возможность* ВЧ-сигнала обеспечить высокую точность измерения параметров (в данном случае это время задержки τ и частотный сдвиг Ω) при наличии помехи зависит от *крутизны спада* сигнальной функции (1.10) *вблизи точек* $\tau = 0$ и $\Omega = 0$. Однако условие (1.16a) означает, что объем, ограниченный поверхностью $K^2(\tau, \Omega)$, равен 2π . Следовательно, произвольно сжимать функцию $K(\tau, \Omega)$ нельзя. Другими словами, уменьшение ширины ФН по переменной τ с целью увеличения точности измерения времени задержки сигнала повлечет за собой ее расширение по переменной Ω и, как следствие, снижение точности измерения частоты сигнала. В этом состоит сущность известного *принципа неопределенности в радиолокации* [2,6,12].

Важно отметить, что аппаратная реализация возможности точного измерения параметров сигнала должна быть понята как *потенциальная возможность*. Ее достижение связано с применением особых (оптимальных) способов обработки сигналов, которые мы изучим в последующих главах. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие параметры радиосигнала определяют характер функции $K(\tau, \Omega)$ в окрестности ее главного максимума.

1.3.3. Ширина функции неопределенности вдоль осей времени и частоты

В инженерной практике важными являются следующие параметры сигнала: *энергия*, *длительность* и *ширина частотного спектра*. В соответствии с выражениями (1.2) и (1.8) запишем выражение энергии узкополосного ВЧ-сигнала, имеющего конечную энергию:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos^2 [\omega_0 t + \Phi(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos [2(\omega_0 t + \Phi(t))] dt. \end{aligned}$$

Значение второго интеграла для реальных сигналов оказывается близким к нулю так как подинтегральное выражение содержит быстроосциллирующий (знакопеременный) множитель. Учтем, что действительная огибающая $S(t) = |\dot{S}(t)|$ и удовлетворяет известному равенству Парсеваля [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega,$$

где $\dot{G}(\omega)$ — спектральная функция (преобразование Фурье) комплексной огибающей $\dot{S}(t) = S(t)e^{j\Phi(t)}$ сигнала $s(t)$. Таким образом, энергия сигнала

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.17)$$

то есть зависит от вида функций $|\dot{S}(t)|^2$ и $|\dot{G}(\omega)|^2$. Физический смысл соотношения (1.17) состоит в том, что полная энергия E_s непрерывно распределена по времени или по частоте, то есть в спектральной области. В бесконечно малом интервале dt в момент времени t ее величина $dE(t) = 0,5 S^2(t) dt$; в бесконечно малой полосе частот $df = (1/2\pi) d\omega$ — $dE(f) = 0,5 |\dot{G}(f)|^2 df$. Умножение на 0,5 обусловлено использованием комплексного представления сигналов: мнимая и действительная составляющие комплексной амплитуды сигнала имеют равные энергии и соответственно равноправны положительные и отрицательные частоты при спектральном представлении действительного сигнала.

Введем два параметра, которые характеризуют функции $|\dot{S}(t)|^2$ и $|\dot{G}(\omega)|^2$: длительность сигнала ΔT и ширину полосы частотного спектра сигнала $\Delta\Omega$. Математические выкладки выполняются просто, если начало отсчета времени и частоты поместить в точки, соответствующие «центрам масс» фигур, образуемых нормированными функциями

$$\frac{|\dot{S}(t)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \quad \text{и} \quad \frac{|\dot{G}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.18)$$

В этом случае величины ΔT^2 и $\Delta\Omega^2$ могут быть определены как меры рассеяния (дисперсии) соответствующих функций (1.18). В итоге получаем

$$\Delta T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\dot{S}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt} \quad \text{и} \quad \Delta\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (1.19)$$

Параметры ΔT и $\Delta\Omega = 2\pi \cdot \Delta F$ характеризуют рассеяние ВЧ-сигнала во времени и по частоте (относительно несущей ω_0). По аналогии с соответствующей величиной в теории вероятностей их называют *среднеквадратическими длительностью и полосой частот сигнала*. Эти параметры определяют помехоустойчивость и точность РТС различных типов при наличии помех. Заметим, что в энергетических расчетах чаще

используют понятие *эффективной длительности* сигнала ΔT_3 , которое более наглядно. Величина ΔT_3 определяет энергию $E_s = P \cdot \Delta T_3$, где P — средняя мощность сигнала. Физически реальные сигналы имеют конечную энергию, поэтому для функций $s(t)$ с конечной длительностью и соответственно с неограниченным по полосе частотным спектром ΔT_3 равно фактической длительности сигнала T_s .

Если функция $s(t)$ неограничена во времени и имеет конечную среднюю мощность, ее эффективную длительность определим иначе. Пронормируем функцию $s(t)$ и представим огибающую $S(t) = \sqrt{2P} \cdot S_0(t)$, где $S_0(t)$ — нормированная (не имеющая размерности) огибающая, причем $\Delta T_3 = \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2(t) dt$ и, очевидно, $E_s = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = P \cdot \Delta T_3$. Величину ΔT_3 , имеющую размерность

времени, иногда называют *интегральной шириной сигнала*. Смысл этой величины для импульса гауссовской формы поясняет рис. 1.6, из которого следует, что $\Delta T_3 = 2$ и равно основанию прямоугольника, площадь которого также равна 2. Конечно, величины ΔT_3 и ΔT взаимосвязаны. Например для радиоимпульса с прямоугольной огибающей, имеющей длительность $\Delta T_3 = T_s$, среднеквадратическая длительность $\Delta T = \Delta T_3 / 2\sqrt{3}$; для радиоимпульса с гауссовской огибающей $\Delta T = \Delta T_3 / \sqrt{2\pi}$ [8].

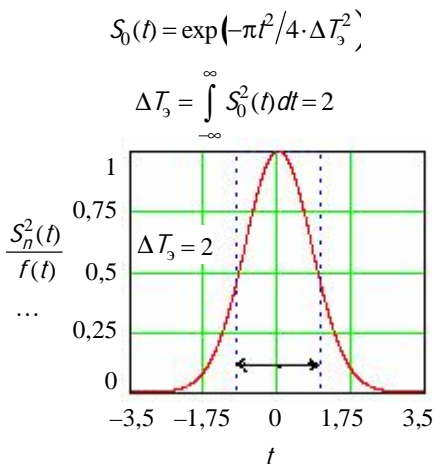


Рис. 1.6. Эффективная длительность ΔT_3 сигнала с нормированной огибающей $S_0(t)$

Например для радиоимпульса с прямоугольной огибающей, имеющей длительность $\Delta T_3 = T_s$, среднеквадратическая длительность $\Delta T = \Delta T_3 / 2\sqrt{3}$; для радиоимпульса с гауссовской огибающей $\Delta T = \Delta T_3 / \sqrt{2\pi}$ [8].

К числу основных характеристик сигнала относится величина B — *база сигнала*, равная произведению среднеквадратичной длительности сигнала на среднеквадратичную ширину его спектра:

$$B = \Delta T \cdot \Delta F = \Delta T \cdot \Delta \Omega / 2\pi.$$

В теории сигналов показано, что для *любых сигналов* значение базы $B \geq (1/4\pi)$ [6]. Неравенство $B \geq (1/4\pi)$ известно как *соотношение неопределенностей*.

В зависимости от величины базы сигналы бывают *простые* и *сложные*. Для реальных сигналов с простой модуляцией B имеет порядок единицы и практически не зависит от способа определения их длительности и ширины спектра, у сложных — база $B \gg 1$. В отличие от минимального значения базы, ее максимальное значение теоретически не ограничено. Практические ограничения при использовании сигналов с большой базой связаны с аппаратной реализацией устройств формирования сложных сигналов. В настоящее время в РТС используются ЧМ- и ФМ-сигналы, база которых имеет порядок 10^5 .

Рассмотрим параметрическое описание ФН радиосигнала, содержащего сообщение в виде задержки τ и частотного сдвига Ω , т.е. найдем представление ФН через параметры сигнала ΔT и ΔF . Если функцию $|\dot{K}(\tau, F)|^2$ в окрестности точки ($\tau = 0$; $F = 0$) разложить в двойной ряд Тейлора и ограничиться членами не выше второго порядка (квадратичное приближение), то можно получить следующее соотношение [6, 8]:

$$|\dot{K}(\tau, F)|^2 \cong 1 - \Delta F^2 \cdot \tau^2 - 2\rho \cdot \tau F - \Delta T^2 \cdot F^2, \quad (1.20)$$

где $F = \Omega/2\pi$; ρ — коэффициент частотно-временной связи,

$$\rho = \frac{2\pi}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} t\Phi'(t) |\dot{S}(t)|^2 dt. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что $\rho = 0$, если сигнал не имеет фазовой модуляции, то есть $\Phi'(t) = 0$. Для определения параметров, характеризующих ширину пика ФН, приравняем левую часть (1.20) уровню c^2 . В итоге получаем уравнение линии уровня. По форме оно совпадает с уравнением эллипса. Анализ показывает, что ширина эллипса вдоль оси временной задержки τ и соответственно ширина центрального пика функции неопределенности вдоль оси τ равна

$$\delta_\tau = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F}, \quad (1.22)$$

и при $c^2 = 0,75$ имеем $\delta_\tau = \frac{1}{\Delta F}$.

Ширина эллипса и, значит, ширина пика ФН вдоль оси частот F составляет

$$\delta_F = \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta T}, \quad (1.23)$$

при $c^2 = 0,75$ $\delta_F = \frac{1}{\Delta T}$.

Величины δ_τ и δ_F , определяя ширину главных сечений ФН, равны соответственно ширине огибающей временной и частотной АКФ сигнала. Эти два параметра играют важную роль при расчете потенциальных характеристик РТС.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. Уменьшение ширины главного пика ФН вдоль оси времени эквивалентно сужению огибающей временной автокорреляционной функции $K(\tau)$ и возможно при расширении частотного спектра ВЧ-сигнала $s(t)$.

2. Для простых ВЧ-сигналов, имеющих базу $B = \Delta T \cdot \Delta F \approx 1$, расширение частотного спектра связано с уменьшением их длительности, что при постоянной мощности P ведет к уменьшению энергии сигнала $E_S = P \cdot \Delta T$ и в соответствии с принципом неопределенности возрастанию ширины главного пика ФН по оси частот.

3. Применение сложных сигналов ($B \gg 1$) позволяет расширить частотный спектр сигнала и тем самым уменьшить ширину огибающей временной АКФ $K(\tau)$ при одновременном увеличении длительности сигнала, что дает возможность повысить энергию сигнала без увеличения его мощности и уменьшить ширину пика ФН по оси частот.

1.3.4. Примеры функций неопределенности импульсных сигналов

Рассмотрим ФН типичных импульсных радиосигналов.

Радиоимпульс с прямоугольной огибающей и простой модуляцией. Представим сигнал, имеющий амплитуду S_0 , начальную фазу φ_0 и длительность $T_S = \tau_n$ в виде

$$s(t) = \text{Re} \left[\dot{S}(t) e^{j\omega_0 t} \right],$$

где $\dot{S}(t) = \frac{\sqrt{2} e^{i\varphi_0}}{\sqrt{\tau_n}} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau_n}\right)$; *прямоугольная функция*

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 0,5 \\ 0 & |x| \geq 0,5 \end{cases}.$$

Введенная нормировка $\left(\mathcal{S}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\tau_n}\right)$ обеспечивает величину энергии

$$E_s = 0,5 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 dt = 1.$$

Радиоимпульс $s(t)$ при $\varphi_0 = \pi$, $\tau_n = 1$ показан на рис. 1.7. Подставляя в (1.15) выражение его комплексной огибающей и выполняя интегрирование, получим ФН прямоугольного радиоимпульса в виде [2, 6]:

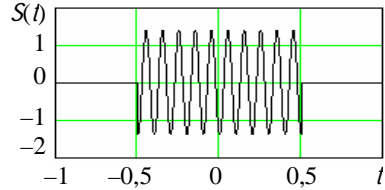


Рис. 1.7. Прямоугольный радиоимпульс $s(t)$

$$K(\tau, F) = \left| \dot{K}(\tau, F) \right| = \left| \left(\frac{\tau_n - |\tau|}{\tau_n} \right) \frac{\sin \left[\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n) \right]}{\pi F \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n)} \right|, \quad |\tau| < \tau_n. \quad (1.24)$$

Поверхность, соответствующая ФН (1.24) имеет явно выраженный главный максимум (рис. 1.8,а). Вдоль оси временной задержки τ ФН имеет конечную протяженность, что следует из способа образования корреляционной функции. Действительно, в (1.15) в подынтегральном выражении огибающая $S(t)$ умножается на свою копию $S(t - \tau)$, сдвинутую по оси времени на τ , и при $|\tau| \geq \tau_n$ результат интегрирования равен нулю. На рис.1.8,б показаны проекции сечений $K(\tau, F) = \text{const}$ на плоскость $(F\tau)$ — линии уровня. Видно, что в области высокой корреляции (0,6–0,7 и выше) линии уровня близки к окружностям.

На рис. 1.9,*а* приведены сечения ФН $K(\tau) = K(\tau, F = \text{const})$ — огибающие временной корреляционной функции при различных значениях доплеровского сдвига. При $F = 0$ получаем огибающую временной АКФ прямоугольного радиоимпульса, которая согласно (1.24) имеет вид

$$K(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_H}, \quad \tau \in (-\tau_H, \tau_H). \quad (1.25)$$

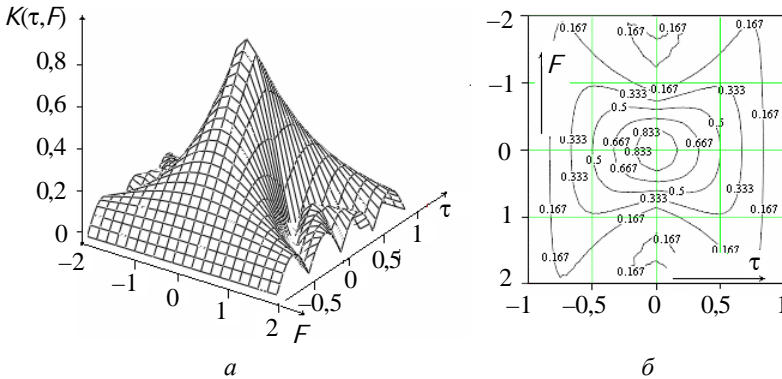


Рис. 1.8. Функция неопределенности прямоугольного радиоимпульса: *а* — поверхность ФН (огибающая частотно-временной корреляционной функции); *б* — линии уровня функции неопределенности

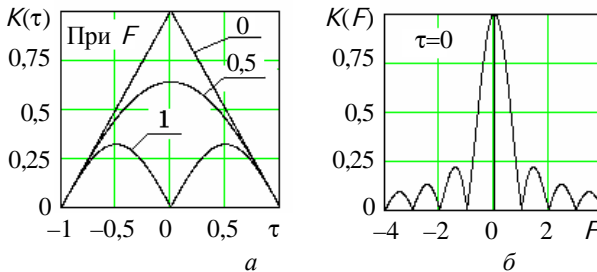


Рис. 1.9. Сечения огибающей частотно-временной корреляционной функции радиоимпульса ($\tau_H = 1$)

На рис. 1.9,*б* показано главное сечение ФН $K(\tau = 0, F) = K(F)$ — огибающая частотной автокорреляционной функции прямоугольного радиоимпульса с простой модуляцией. Выражение для нее следует из (1.15) и согласно (1.24) имеет вид

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} |\dot{S}(t)|^2 e^{j2\pi Ft} dt \right| = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_n)}{\pi F \tau_n} \right|, \quad F \in (-\infty, \infty). \quad (1.26)$$

Соотношение (1.26) — преобразование Фурье от квадрата огибающей сигнала. Таким образом, *частотная АКФ сигнала не зависит от его фазовой структуры и определяется только формой огибающей радиоимпульса.*

На рис. 1.10 изображена временная АКФ радиоимпульса, соответствующая выражениям (1.15а), (1.16). Она является четной осциллирующей функцией с частотой сигнала ω_0 и имеет конечную длительность, вдвое превышающую длительность сигнала $s(t)$. Следует обратить внимание на то, что вблизи главного максимума функции $k(\tau)$ расположены близкие по величине локальные максимумы, следующие через интервалы, равные периоду ВЧ-сигнала.

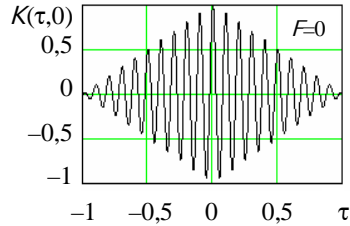


Рис. 1.10. Корреляционная функция прямогоугольного радиоимпульса $\tau_n = 1$

Гауссовский радиоимпульс с внутриимпульсной линейной ЧМ.

Представим радиоимпульс с гауссовой огибающей и линейной ЧМ (ЛЧМ) в виде

$$s(t) = S_m e^{-k^2 t^2} \cos(\omega_0 t + bt^2 + \varphi_0), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.27)$$

где $S(t) = S_m \exp(-k^2 t^2)$ — огибающая радиоимпульса; S_m — значение огибающей в максимуме; k — параметр, определяющий длительность сигнала; b — параметр частотной модуляции. Мгновенная частота сигнала (1.27) изменяется по линейному закону $\omega(t) = \omega_0 + 2bt$, где $2b$ — скорость изменения частоты. При длительности импульса ΔT и девиации частоты $\Delta\omega_M$, скорость изменения частоты $2b = \Delta\omega_M / \Delta T$. Обычно ширина спектра сигнала с ЛЧМ равна девиации частоты, то есть $\Delta\Omega = \Delta\omega_M$. Таким образом, база сигнала $B = \Delta F \Delta T = 2b \Delta T^2 / 2\pi$. На рис. 1.11 показан сигнал с ЛЧМ для значений $S_0 = 1,3$; $k = 2 \text{ мкс}^{-1}$, $b = 20 \text{ рад/мкс}$. Расчет длительности сигнала по формуле (1.19) дает величину $\Delta T = 1/2k = 0,25 \text{ мкс}$, то есть $B \approx 0,4$. Конкретные величины параметров заданы для удобства восприятия рисунка.

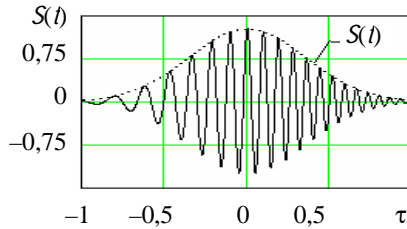


Рис. 1.11. Радиоимпульс гауссовской формы с ЛЧМ

Подстановка в (1.15) комплексной амплитуды сигнала (1.27) дает выражение ФН в виде

$$K(\tau, F) = \exp \left\{ -0,5 \left[k^2 \tau^2 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(F + \frac{b\tau}{\pi} \right)^2 \right] \right\}, \quad \tau, F \in (-\infty, \infty). \quad (1.28)$$

Уравнению (1.28) соответствует гауссовская поверхность ФН (рис. 1.12,а). На рис. 1.12,б показаны линии равного уровня. В данном случае их форма *эллиптическая*, это характерно для сигналов с ЛЧМ. Рассмотрим главные сечения ФН, поскольку они определяют ширину эллипсов вдоль главных осей τ и F . Из (1.28) при $F=0$ получаем огибающую временной АКФ гауссовского радиоимпульса

$$K(\tau) = \exp \left[-0,5 \left(k^2 + \frac{b^2}{k^2} \right) \tau^2 \right]. \quad (1.29)$$

На рис. 1.13 функция $K(\tau)$ показана в виде огибающей для АКФ $k(\tau)$ радиосигнала, которая, как и сам сигнал, является высокочастотной (см. 1.16). Необходимо отметить, что *функция $k(\tau)$ в отличие от сигнала $S(t)$ не имеет фазовой модуляции*.

Принципиально важным для построения оптимальных систем обработки сигналов является тот факт, что огибающая $K(\tau)$ оказывается более узкой, чем огибающая $S(t)$ исходного радиоимпульса. Это видно при сравнении рис. 1.11 и 1.13. Определим величину сжатия по

времени функции $K(\tau)$ по сравнению с $S(t)$ в виде отношения $k_{\text{сж}} = \frac{\Delta T}{\Delta \tau}$, где ΔT и $\Delta \tau$ — среднеквадратические длительности функций $S(t)$ и

$K(\tau)$ соответственно. Как было показано выше, $\Delta T = 1/2k$. Вычисление длительности огибающей АКФ согласно (1.19) дает результат

$$\Delta_\tau = \frac{1}{k\sqrt{2\left(1 + \frac{b^2}{k^4}\right)}} = \frac{1}{k\sqrt{2(1 + 16\pi^2 B^2)}}. \quad (1.30)$$

В итоге коэффициент сжатия функции $K(\tau)$, равен

$$k_{\text{сж}} = \sqrt{0,5 + 8\pi^2 B^2}, \quad (1.31)$$

отсюда при $B \gg 1$ $k_{\text{сж}} \approx 2\pi B\sqrt{2}$. Он фактически зависит только от базы сигнала.

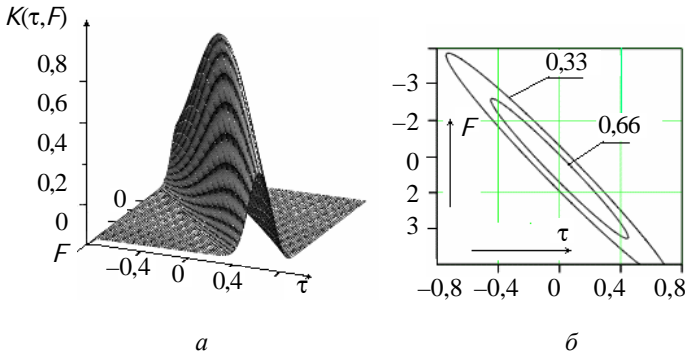


Рис. 1.12. Функция неопределенности радиоимпульса с гауссовой огибающей: *a* — поверхность неопределенности (огибающая частотно-временной корреляционной функции); *б* — линии уровня функции неопределенности

Для гауссовского радиоимпульса с простой модуляцией база $B = \Delta T \cdot \Delta F = 1/4\pi$ [6]. Согласно (1.31) в этом случае $k_{\text{сж}} = 1$ (сжатие отсутствует). В нашем примере $B \approx 0,4$ и $k_{\text{сж}} \approx 3,6$. В РТС применяются сигналы с базой до нескольких сотен тысяч.

Второе главное сечение ФН, соответствующее огибающей частотной АКФ, получаем из (1.28). При $\tau = 0$ имеем

$$K(F) = |\dot{K}(\tau = 0, F)| = \exp\left(-0,5 \frac{\pi^2 F^2}{k^2}\right). \quad (1.32)$$

Ширина этой функции зависит только от длительности радиоимпульса (параметр k). Таким образом, наличие любой ЧМ не изменяет ее вид, поскольку $K(\Omega)$ связана взаимным Фурье-преобразованием с функцией $|\dot{S}(t)|^2$ (см. 1.26), которая не учитывает фазовый множитель комплексной огибающей. Функция (1.32) имеет также гауссовскую форму (рис. 1.14). Среднеквадратичная ширина функции $K(\Omega)$, вычисленная по (1.19), дает результат

$$\Delta_F = k\sqrt{2}. \quad (1.33)$$

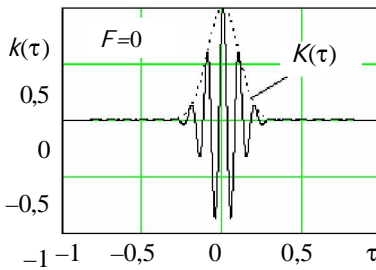


Рис. 1.13. Временная АКФ сигнала $s(t)$ с ЛЧМ.
 $K(\tau)$ — огибающая АКФ

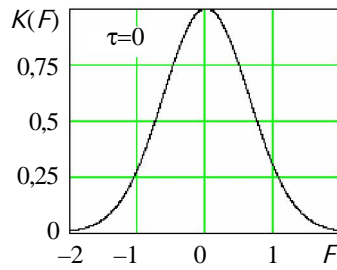


Рис. 1.14. Огибающая частотной АКФ сигнала $s(t)$ с ЛЧМ

Из (1.33) следует, что чем протяженнее радиосигнал, тем уже главный пик ФН по оси доплеровского сдвига частоты.

Прямоугольный радиоимпульс с фазокодовой модуляцией. Расширение частотного спектра радиоимпульса при заданной длительности возможно как с помощью внутриимпульсной ЧМ так и ФКМ. Относительная простота фазового кодирования сигналов и преимущества, связанные с постоянством амплитуды при генерации и усилении сигналов, обеспечили ФМ-импульсам широкое применение. Радиоимпульс прямоугольной формы с ФКМ можно задать в виде

$$s(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad 0 \leq t \leq n\Delta, \quad (1.34)$$

где $n\Delta = \tau_{\text{и}}$ — длительность импульса, составленного из n парциальных импульсов, имеющих ширину Δ и начальную фазу φ_i ; функция

$$P_i(t) = \begin{cases} P[t - (i-1)\Delta] = 1, & (i-1)\Delta \leq t \leq i\Delta, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (1.35)$$

Наибольшее применение получили ФКМ-сигналы, фазы которых могут принимать только два значения: 0 или π (*бинарные коды*). Если в сигнале используется большее число значений фаз φ_i в пределах $(0; 2\pi)$, то такие сигналы называются *многофазными*. Учитывая, что изменение фазы на π приводит к перемене знака ВЧ-заполнения на противоположный, сигнал (1.34) с бинарным фазовым кодом имеет вид

$$s(t) = \Pi(t) \sin(\omega_0 t), \quad (1.36)$$

где $\Pi(t)$ — последовательность (импульсно-временной код), состоящая из n единичных положительных и отрицательных импульсов. В качестве примера на рис. 1.15, *a* показан радиоимпульс с бинарным фазовым кодом Баркера ($n=7$) и соответствующая ему модулирующая последовательность $\Pi(t)$. Кодовую последовательность символов можно условно записать в виде: +1+1+1-1-1+1-1 (рис. 1.16).

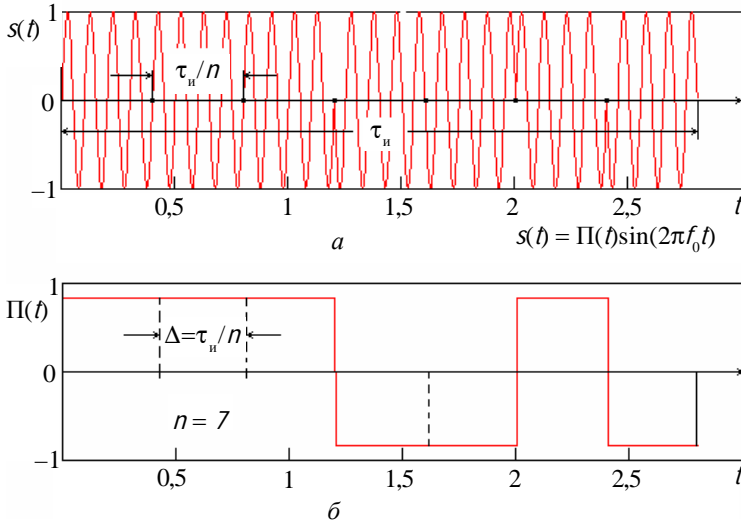


Рис. 1.15. Радиоимпульсы с ФКМ (*a*) и функция модуляции (манипуляции) фазы $\Pi(t)$ (*б*)

Определим главное сечение ФН при $\Omega = 0$, то есть функцию $K(\tau)$. Если согласно формуле (1.15а) перемножить две сдвинутых по времени

на разные величины τ функции вида (1.36) и выполнить интегрирование (рис. 1.16,а), то получим, как и в случае одиночного прямоугольного радиоимпульса (см. рис. 1.9,а), огибающую АКФ треугольного вида. Существенное отличие будет в том, что для сигнала с ФКМ функция $K(\tau)$ будет иметь 7 (по числу парциальных импульсов) максимумов (лепестков). Максимум главного лепестка ($\tau = 0$) при отсутствии в (1.15а) нормировки равен $nE_1 = 7E_1$, где E_1 — энергия парциального импульса длительностью Δ . Максимумы шести боковых лепестков одинаковы и равны E_1 . Эти лепестки получатся при сдвиге τ , кратном 2Δ , когда число совпадающих по фазе φ_j парциальных импульсов равно 1. В нормированном виде АКФ показана на рис. 1.16,б. Ее протяженность в силу конечной длительности сигнала равна $2\tau_n$.

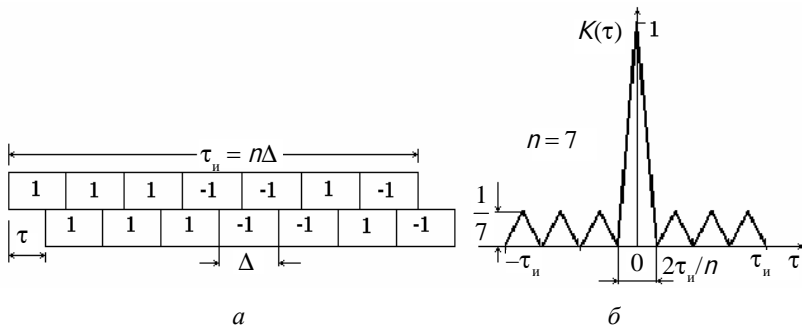


Рис. 1.16. Главное сечение $K(\tau, \Omega = 0) = K(\tau)$ ФН радиоимпульса с ФКМ:
 а — условное изображение двух копий сигнала;
 б — огибающая временной АКФ-сигнала

Сравним АКФ $K(\tau)$ (см. рис. 1.9,а) — сигнала с простой модуляцией и прямоугольной огибающей — с АКФ аналогичного по длительности, но сложного сигнала с ФКМ (см. рис. 1.16,б). Видно, что ширина второй из них, определяемая по первым нулям, равна $2\tau_n/n$, а первой — $2\tau_n$. Таким образом, АКФ $K(\tau)$ сигнала с ФКМ сжимается в $n=7$ раз по сравнению с длительностью сигнала. Если учесть, что ширина спектра сложного сигнала с ФКМ $\Delta F \approx 1/\Delta$ и его длительность $\Delta T \approx n \cdot \Delta$, то база сигнала $B = \Delta F \cdot \Delta T \approx n$, то есть равна коэффициенту сжатия.

При практическом применении ФКМ-сигналов важно обеспечить требуемый уровень боковых лепестков ФН. Как показано выше, он зависит от числа парциальных импульсов и равен $1/n$. Таким свойством облада-

ют и другие коды Баркера [6]. Они могут быть построены только для $n \leq 13$. Для получения больших n применяют другие коды (в частности, M -последовательности), у которых ФН (главное сечение при $\Omega = 0$) в промежуточных точках не превышает $1/\sqrt{n}$. Известны M -последовательности, состоящих из несколько десятков тысяч элементов.

При больших $n = \tau_n / \Delta$ ФКМ-сигнал имеет высокую информативность и вместе с этим высокую надежность, определяемую малым уровнем боковых лепестков, что позволяет однозначно различать сигналы, отличающиеся друг от друга большими сдвигами по времени.

Второе главное сечение ФН $K(\Omega)$ — огибающая частотной АКФ сигнала, как было показано выше, не зависит от фазовой структуры ВЧ-сигнала и определяется как Фурье-преобразование от квадрата модуля комплексной огибающей радиосигнала (1.26). Таким образом, для сигнала с ФКМ и огибающей прямоугольной формы, получаем

$$K(F) = \left| \frac{\sin(\pi F \tau_u)}{\pi F \tau_u} \right|, \text{ при } F \in (-\infty, \infty).$$

Ширина этой функции по первым нулям равна $2/\tau_n$, Гц (см. рис. 1.9,б). Например при $\tau_n = 10$ мс имеем $\Delta F_K = 200$ Гц и, если $n = 10^4$, то $\Delta = \tau_n / n = 2$ мкс; автокорреляционная функция $K(\tau)$ такого сигнала в 10^4 раз уже, чем АКФ равного по длительности сигнала без ФКМ.

Рассмотрим статистические свойства типовой случайной помехи — собственного шума приемно-усилительных устройств.

1.4. Стационарная случайная помеха с гауссовским распределением вероятностей. Белый шум

Увеличению достоверности и скорости передачи информации в системах связи и точности измерения координат объектов в РЛ- и РН-системах препятствуют три фактора: 1) неизбежное наличие внешних и внутренних помех; 2) искажения сигналов при распространении радиоволн; 3) техническое несовершенство устройств.

Улучшение параметров радиоэлементов и применение цифровой техники существенно снизили влияние последнего фактора. Внешние помехи поступают на вход приемника вместе с полезным сигналом. Они

возникают как следствие естественных электромагнитных процессов, происходящих в атмосфере, ионосфере и космосе, а также в результате преднамеренных действий противника по созданию помех (пассивные отражатели и генераторы помех).

Наряду с внешними помехами имеются внутренние, которые возникают в различных элементах передающих и приемных устройств. К ним относятся флуктуационные шумы ламп, полупроводниковых приборов и сопротивлений потерь, нестабильности напряжений питания, микрофонный эффект и др. Конкретный вид помех зависит от условий работы РТС. Однако общим и характерным является наличие собственного флуктуационного шума приемника и теплового шума пространства, окружающего приемную антенну. Эти шумы аддитивно смешиваются с полезным сигналом на входе приемника.

Полное статистическое описание случайной помехи $x(t)$ предполагает задание n -мерной совместной плотности распределения вероятностей (ПРВ) $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $x(t_i) = x_i$ ($i = 1, \dots, n$) — значение помехи в момент времени t_i . Во многих практически важных случаях помеха может рассматриваться как *случайный стационарный процесс (ССП) с гауссовским распределением вероятностей*. Напомним кратко вероятностный смысл этих понятий.

Свойство стационарности случайного процесса состоит в том, что вид n -мерной функции ПРВ $W(\cdot)$ не изменяется при произвольном переносе начала отсчета времени. Другими словами ПРВ не изменится, если все моменты времени сместить на произвольную величину Δt . Это означает, что одномерная ПРВ $W(x; t_i) = W(x)$ не зависит от времени, то есть в каждый отдельный момент времени случайный процесс $x(t)$ имеет одинаковые вероятностные свойства. Важными параметрами стационарной помехи являются: средний по ансамблю реализаций уровень — математическое ожидание

$$\mathbf{M}[x(t)] = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \text{и средняя по ансамблю полная мгновенная мощность } \mathbf{M}[x^2(t)] &= \overline{x^2(t)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2W(x)dx = \text{const.} \end{aligned}$$

Видно, что эти параметры не изменяются во времени. Помеха, воздействующая на вход приемных устройств РТС, в большинстве случаев не имеет постоянной составляющей, т.е. ее среднее значение $\chi(t) = 0$. Далее это условие будем считать выполненным.

Одномерная ПРВ не позволяет описать характер развития процесса во времени то есть скорость его изменения и, соответственно, спектральные свойства. Для этого необходимо привлечь хотя бы двумерную ПРВ, которая для ССП зависит не от двух моментов времени t_1 и t_2 , а от их разности $t_1 - t_2 = \tau$, причем знак τ не имеет значения. Таким образом, АКФ стационарной помехи со средним значением, равным нулю, есть

$$K_x(t_1, t_2) = \overline{\chi(t_1) \cdot \chi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1 \chi_2 W(\chi_1, \chi_2; t_1, t_2) d\chi_1 d\chi_2 = K_x(\tau). \quad (1.37)$$

Случайный процесс называют *гауссовским* или *нормальным*, если ПРВ произвольного порядка имеет вид квадратичной экспоненты. Одномерная ПРВ в этом случае равна (при $\chi(t) = 0$)

$$W(\chi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}}, \quad \chi \in (-\infty, \infty), \quad (1.38)$$

где σ — среднеквадратическое значение помехи (эффективное значение переменной составляющей процесса). Двумерная ПРВ представляет собой гауссовскую поверхность

$$W(\chi_1, \chi_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{(1 - k_x^2(\tau))}} \exp[-0,5Q(\chi_1, \chi_2; \tau)], \quad (1.39)$$

где $k_x(\tau) = K_x(\tau)/\sigma^2$ — нормированная автокорреляционная функция помехи; квадратичная форма в показателе экспоненты имеет вид

$$Q(\chi_1, \chi_2; \tau) = \frac{\chi_1^2 - 2\chi_1\chi_2k_x(\tau) + \chi_2^2}{\sigma^2[1 - k_x^2(\tau)]}. \quad (1.40)$$

В n -мерном случае форма (1.40) имеет аналогичную структуру: содержит в числителе вторые степени всех переменных χ_j , а также перекрестные слагаемые вида $a_{ij}\chi_i\chi_j$, где $a_{ij} = 2k(t_j - t_i)$ — коэффициенты, определяемые видом АКФ; знаменатель равен некоторой постоянной величине, определяемой конкретным выбором t_1, t_2, \dots, t_n . Таким образом, для задания n -мерной ПРВ гауссовской помехи достаточно знания АКФ помехи $K_x(\tau)$.

Нормальный стационарный случайный процесс имеет несколько примечательных свойств.

1. Статистические свойства процесса полностью и однозначно определены заданием его АКФ, так как знание $K_x(\tau)$ позволяет записать n -мерную ПРВ.

2. Статистическая независимость совокупности отсчетов x_j гауссовского процесса в n моментов времени следует из соотношения $k_{ij} = k(t_j - t_i) = \overline{x_i x_j} = 0$ для $\forall i, j = 1, \dots, n$. Для $n = 2$ этот вывод следует из сопоставления (1.38) и (1.39). Действительно, если при некотором τ функция $k_x(\tau) = 0$, то $W(x_1, x_2) = W(x_1) \cdot W(x_2)$, а это есть условие статистической независимости случайных величин x_1 и x_2 . Таким образом, совместная ПРВ системы n взаимно некоррелированных гауссовских случайных величин равна

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1) \cdot W(x_2) \cdot \dots \cdot W(x_n) = \prod_{i=1}^n W(x_i). \quad (1.41)$$

Подставляя в (1.41) выражение одномерной ПРВ из (1.38), получим

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]. \quad (1.42)$$

3. При линейном преобразовании гауссовского процесса свойство гауссовости сохраняется, изменяется только вид АКФ $K_x(\tau)$.

Особое место нормальных процессов в задачах синтеза и анализа РТС обусловлено тем, что реальные радиопомехи и, в частности, собственный шум приемно-усилительных устройств, образуются в результате суперпозиции большого числа случайных элементарных колебаний. В итоге вероятностные свойства суммарного процесса в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей удовлетворительно согласуются со свойствами гауссовского процесса. Напомним, что смысл упомянутой теоремы сводится к утверждению асимптотической нормальности суммы случайных слагаемых с произвольными ПРВ по мере увеличения их числа.

Спектральные методы анализа воздействия помех на характеристики РТС основаны на известной теореме Винера — Хинчина, в соответствии с которой для АКФ стационарного случайного процесса справедлива пара преобразований Фурье

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \text{и} \quad G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (1.43)$$

где $G_x(\omega)$ — *спектральная плотность мощности помехи*. Размерность этой функции можно установить, записав соотношение для средней мощности помехи $K_x(0) = \sigma^2$, Вт. Из (1.43) получаем $K_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega$, т.е. подынтегральное выражение $G_x(f) df$ имеет смысл средней бесконечно малой мощности в полосе df вблизи частоты f . Следовательно, функция $G_x(f)$ измеряется в ваттах на герц, или джоулях, поэтому функцию $G_x(\omega)$ называют также *энергетическим спектром помехи*, или коротко — *спектром помехи*. Физический смысл этого понятия следует из того, что ССП $K(t)$ состоит из непрерывного множества гармонических составляющих со случайными амплитудами и фазами, их средняя мощность в полосе df вблизи частоты f равна $G_x(f) df$.

Рассмотрим стационарную помеху, спектр которой можно считать почти постоянным вплоть до некоторой верхней частоты $\omega_b = 2\pi f_b$, вблизи которой спектр падает до нуля. Зададим такой спектр соотношениями

$$G_x(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad |\omega| \leq \omega_b; \quad G_x(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_b, \quad (1.44)$$

где N_0 — спектральная плотность помехи. С помощью (1.43) найдем АКФ

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 \omega_b}{2\pi} \left[\frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau} \right]; \quad K_x(0) = \sigma^2 = \frac{N_0 \omega_b}{2\pi}. \quad (1.45)$$

На рис. 1.17 и 1.18 представлены спектр и АКФ помехи для следующих значений параметров: $N_0 = 10^{-8}$ Дж; $f_b = 100$ МГц.

Корреляционная функция при $\tau = 0$ имеет пик, величина которого равна средней мощности помехи. Функция $K_x(\tau)$, осциллируя, уменьшается ориентировочно как функция τ^{-1} . Из формулы (1.45), и это подтверждает рис. 1.18, следует, что случайные отсчеты помехи $x(t_i) = x_i$, ($i = 1, \dots, n$), соответствующие моментам времени t_i , которые разделены промежутками, кратными $\Delta t = \pi/\omega_b$, строго некоррелированы. В приведенном примере $\Delta t = 1/(2 f_b) = 0,005$ мкс.

В инженерных расчетах особое значение имеет предельный случай, когда $f_b \rightarrow \infty$. Практически эта ситуация возникает, когда верхняя

частота помехи f_B много больше частот сигналов, на которые рассчитана РТС. Для предельного случая АКФ помехи

$$K_X(\tau) = \lim_{\omega_B \rightarrow \infty} \left[\frac{N_0 \omega_B}{2\pi} \left(\frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau} \right) \right] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (1.46)$$

где $\delta(\tau)$ — δ -функция Дирака. Помеха, имеющая АКФ вида (1.46), называется *белым шумом*. Таким образом, у белого гауссовского шума любые два сколь угодно близких по времени значения некоррелированы и, следовательно, статистически независимы.

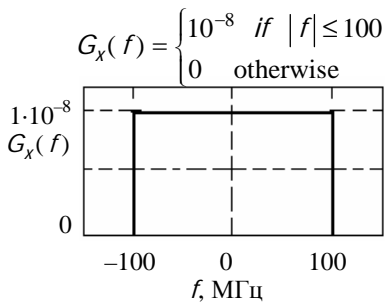


Рис. 1.17. Энергетический спектр шума с ограниченной полосой частот

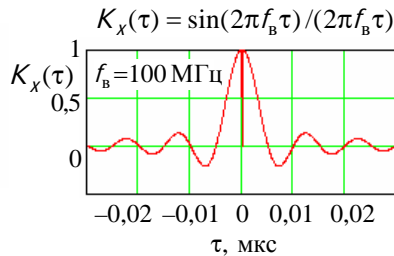


Рис. 1.18. Автокорреляционная функция шума с ограниченной полосой частот

В приемных устройствах на частотах выше 30–50 МГц собственный шум превышает уровень внешних естественных помех. Его мощность

$$P_{\text{ш}} = \sigma^2 = kT \cdot \Delta F_3 k_{\text{ш}},$$

где k — постоянная Больцмана, равная $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T — температура в градусах Кельвина; $k_{\text{ш}}$ — коэффициент шума приемника; ΔF_3 — эффективная полоса пропускания приемника. Допустим, в РЛС используется импульсный сигнал со сложной модуляцией: база $B = 10^4$; $\tau_{\text{и}} = 1$ мс; $k_{\text{ш}} = 3$. Тогда полоса ΔF_3 составит 10 МГц и мощность шума на входе приемника $P_{\text{ш}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7 \cdot 300 \cdot 3 \approx 12,5 \cdot 10^{-14}$ Вт.

1.5. Контрольные вопросы

1. В чем принципиальное отличие сигнала и помехи?
2. Почему РТС извлечения информации относят к системам с внешней модуляцией, а РТС передачи информации — к системам с внутренней модуляцией?
3. В чем отличие аддитивной помехи от мультипликативной?
4. В чем различие детерминированного и статистического подходов к решению задач анализа и синтеза РТС? Почему детерминированный подход не состоятелен?
5. Перечислите функции и параметры, задание которых связано с понятием статистического описания случайной функции.
6. В чем отличие детерминированной, квазидетерминированной и случайной функций?
7. В чем отличие аналогового и цифрового сообщений?
8. Запишите общее выражение сигнала-переносчика сообщения.
9. В чем отличие сигналов с одноступенчатой и двухступенчатой модуляцией? Приведите примеры осциллограмм.
10. Что есть функция различия сигналов и каков ее смысл?
11. Запишите выражение функции различия двух сигналов по одному информативному параметру x , когда он не является энергетическим. По двум параметрам?
12. Запишите в общем виде частотно-временную корреляционную функцию узкополосного радиосигнала.
13. Запишите выражение временной автокорреляционной функции узкополосного радиосигнала в действительной и комплексной форме.
14. Запишите выражение комплексной огибающей временной АКФ узкополосного радиосигнала и обоснуйте тот факт, что это медленная (в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$) функция времени.
15. Что есть функция неопределенности радиосигнала, каковы ее свойства?
16. В чем сущность принципа неопределенности в радиолокации?
17. Какие параметры радиосигнала определяют ширину ФН вдоль осей «время — частота»? Как влияет энергия сигнала на ФН?
18. Что есть база радиосигнала, и в чем различие сигналов с простой и сложной модуляцией?

19. Почему для сигнала с простой модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени при постоянной мощности непременно приводит к снижению энергии этого сигнала?

20. Почему для сигнала со сложной модуляцией уменьшение ширины пика ФН по оси времени при постоянной мощности не приводит к снижению энергии этого сигнала?

21. В каком случае ширина огибающей радиосигнала и ширина огибающей временной АКФ примерно одинаковы? Когда они могут различаться на несколько порядков?

22. Изобразите графически временную АКФ одиночного радиоимпульса с прямоугольной огибающей и простой модуляцией.

23. Изобразите графически временную АКФ одиночного ФКМ радиоимпульса с прямоугольной огибающей? Какова величина боковых максимумов этой функции по сравнению с главным пиком?

24. Почему для полноты вероятностного описания случайного сигнала необходимо привлечение плотностей распределения вероятностей более чем 1-го порядка?

25. Какая функция определяет спектральные свойства случайного стационарного процесса? Поясните ее вероятностный смысл и укажите физическую единицу измерения.

26. Какой случайный процесс называют нормальным, каковы его особенности?

27. Что означает тот факт, что шум белый?

28. Что означает тот факт, что шум стационарный и гауссовский?

29. Какое влияние оказывает фазовая или частотная модуляция сигнала на вид частотной автокорреляционной функции сигнала и почему?

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ В РТС

2.1. Радиоканал и его свойства

Условия функционирования любой РТС предполагают наличие радиоканала или среды распространения радиоволн. Средой распространения радиоволн могут быть атмосфера, моря и океаны, а также недра Земли. Характер и условия РРВ в канале существенно зависят от частотного диапазона и физических свойств среды. Например, радиосвязь на больших расстояниях между объектами, находящимися под водой, осуществляется в сверхдлинном диапазоне волн ($\lambda \geq 10$ км), что связано с их малым затуханием в канале. Это приводит к ряду ограничений на возможность достижения требуемых тактико-технических характеристик радиосистем в этом диапазоне. В частности, снижается скорость передачи информации, невозможно применение остронаправленных антенн и, следовательно, определение координат объектов из одного пункта.

Широкий класс РТС используют радиоканал «Земля — Космос». Это системы передачи данных на борт космических аппаратов, РЛС измерения параметров орбиты, спутниковые системы, обеспечивающие навигацию объектов на Земле, системы обзора (мониторинга) земной поверхности, работающие в оптическом, тепловом и радиодиапазоне волн. Среда РРВ для этого класса РТС включает тропосферу, стратосферу, ионосферу и часть космического пространства.

Электрофизические свойства среды РРВ изменяются в пространстве и во времени. Известно, что диэлектрическая и магнитная проницаемость тропосферы и ионосферы зависят от активности Солнца и погодных условий. В итоге параметры радиоволны на выходе радиоканала (амплитуда, фаза, частота, состояние поляризации) испытывают случайные пространственно-временные изменения (вариации). Причем эти изменения вычислить заведомо и полностью исключить невозможно, поскольку они имеют случайный характер.

В тропосферных радиоканалах типа «Земля — Земля» или «Земля — воздух» свойства волны в месте приема зависят от подстилающей поверхности (суши или моря), профиль и параметры которой также

случайны. Отражения от поверхности существенно осложняют работу корабельных и самолетных РТС связи и локации, использующих УКВ ($1 \text{ см} \leq \lambda \leq 10 \text{ м}$). Проблема обнаружения и измерения координат объектов с малой отражательной способностью на фоне мешающих отражений от земли, моря или облаков является актуальной задачей теории и практики разработки бортовых РЛС. Свойства подстилающей поверхности также оказывают влияние на точность и дальность действия РТС связи и навигации, использующих длинные, средние и короткие волны.

На рис. 2.1 в качестве примера схематически показаны два типа радиоканалов — канал, характерный для РТС передачи информации, и для измерительных РЛ- и РН-систем (РТС извлечения информации), когда передатчик и приемник совмещены в одном пункте. В последнем случае сам объект РЛ-наблюдения также входит в состав канала. Приведенный пример не исчерпывает всего разнообразия типов радиоканалов.



Рис. 2.1. Структура типичных радиоканалов для РТС передачи информации (а); для измерительных РТС (б): ПРД — передатчик; ПРМ — приемник

Характер и степень искажения радиоволн при распространении в каналах зависят как от свойств сигнала (частоты, длительности, ширины спектра), так и от типа канала РРВ. При всем многообразии типов радиоканалов и физических явлений, происходящих в них при РРВ, следует обратить особое внимание на возможную зависимость показателя преломления от частоты в некоторых средах. В таком канале возникает *дисперсия волн*. Ее суть в том, что скорость распространения фазового фронта *монохроматической волны* (фазовая скорость) оказывается зависящей от частоты. В итоге различные спектральные составляющие волнового пакета (импульса) при распространении в пространстве получают фазо-

вые сдвиги, которые нелинейно зависят от их частоты. В этом случае скорость переноса энергии (*групповая скорость*) не равна фазовой и происходит искажение огибающей пакета — закона модуляции сигнала. Степень искажений возрастает при увеличении ширины спектра сигнала и длины трассы РРВ. Ионосфера, водная среда, различные виды грунтов являются *диспергирующими* каналами РРВ.

С точки зрения достижения наилучшей помехоустойчивости и достоверности передачи информации в системах связи, а также точности измерения координат объектов РЛ- и РН-системами важно знать статистические свойства сигнала на входе приемника и правильно их учесть при построении РТС. Рассмотрим в самом общем виде подход к обоснованию вероятностной модели радиоканала.

В рассуждениях будем иметь в виду каналы РРВ, в которых явление дисперсии практически отсутствует. К таковым относится, в частности, тропосферный радиоканал, который используется различными по назначению РТС.

Реальная тропосфера представляет собой радиоканал со случайными неоднородностями, в качестве которых выступают, например, неоднородности индекса коэффициента преломления воздуха. При обосновании математических моделей сигналов на выходе каналов часто применяется феноменологический подход к задаче распространения волн, базирующийся на лучевых представлениях. Наличие неоднородностей в среде вызывает рассеяние волн. Каждый отдельный луч соответствует пути, по которому волна распространяется и достигает приемной антенны. Если каждый луч прежде, чем попасть в область приема, испытывает более чем одно взаимодействие с неоднородностью, то происходит *многократное рассеяние*.

Вероятностные характеристики параметров волны на входе приемной антенны и сигнала на выходе можно получить, если представить модель канала в виде конечного набора пространственно-временных фильтров со случайными комплексными коэффициентами передачи $K_i(t, \omega, \mathbf{r})$, где i — номер парциального фильтра; t — время, аргумент t означает зависимость коэффициента передачи от времени; наличие аргумента ω означает неравномерность частотной характеристики фильтра, то есть в общем случае его импульсная реакция не является δ -функцией. Зависимость $K_i(t, \omega, \mathbf{r})$ от вектора пространственных координат \mathbf{r} означает, что коэффициент передачи «вдоль i -го луча» зависит от ориентации луча в пространстве и, следовательно от положения точки приема. В некоторых

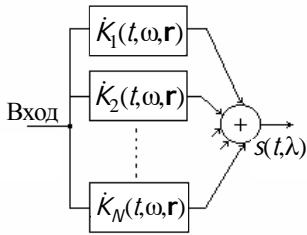


Рис. 2.2. Структура многолучевого радиоканала с однократным рассеянием

случаях можно не учитывать эффекты многократного рассеяния. *Однократному рассеянию соответствует модель параллельного распространения волн* (рис. 2.2). При многократном рассеянии волн механизм образования поля в месте приема более сложный (рис. 2.3). В общем случае существует последовательно-параллельный механизм формирования поля в месте приема. В частном случае, например в оптических каналах связи и локации, можно допустить, что атмосфера проявляет себя как последовательность линз со случайно меняющимися свойствами. Очевидно, и это подтверждают эксперименты, что модель с последовательным механизмом (рис. 2.3,а) в этом случае более оправдана.

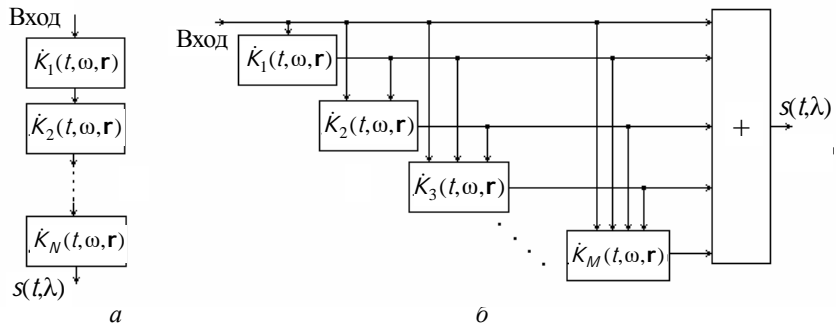


Рис. 2.3. Модель многолучевого радиоканала с многократным рассеянием: а — с последовательным механизмом распространения передаваемых сигналов; б — с последовательно-параллельным механизмом

В инженерных задачах обычно ограничиваются заданием вероятностной модели канала в виде одномерных распределений вероятностей и корреляционных свойств сигнала $s(t, \lambda)$ на входе приемника. При обосновании вероятностной модели полагают, что число рассеивателей N , формирующих суммарный сигнал, велико. Для модели с однократным рассеянием (см. рис. 2.2) общий коэффициент передачи канала

$$\dot{K}_{\Sigma}(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \dot{K}_i(t, \omega, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N K_{x_i}(t, \omega, \mathbf{r}) + i \sum_{i=1}^N K_{y_i}(t, \omega, \mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где два слагаемых являются действительной и мнимой составляющими (квадратурами) комплексного коэффициента передачи канала. При однократном рассеянии лучи на приеме могут рассматриваться как независимые и примерно равные по своему вкладу в общий сигнал. Тогда при достаточно большом N выполняются условия центральной предельной теоремы, согласно которой *совместное распределение квадратурных составляющих комплексного коэффициента передачи является гауссовским*.

При многократном рассеянии и структуре модели канала (см. рис. 2.3,а) представим коэффициент передачи l -го парциального фильтра в виде $K_l = \gamma_l e^{i\theta_l} = e^{\mu_l} e^{i\theta_l}$, то есть $\mu_l = \ln(\gamma_l)$, где γ_l — коэффициент передачи парциального фильтра по амплитуде; θ_l — сдвиг фазы в l -м фильтре. Тогда общий коэффициент передачи канала

$$\dot{K}_\Sigma(t, \omega, \mathbf{r}) = \prod_{l=1}^N \dot{K}_l(t, \omega, \mathbf{r}) = e^{\sum_{l=1}^N \mu_l} \cdot e^{i \sum_{l=1}^N \theta_l} = \gamma e^{i\theta}, \quad (2.2)$$

где $\ln(\gamma) = \sum_{l=1}^N \mu_l$ — логарифм модуля коэффициента передачи канала;

$\theta = \sum_{l=1}^N \theta_l$ — общий сдвиг фазы в канале. Как и ранее, при $N \rightarrow \infty$ можно ожидать выполнения условий центральной предельной теоремы. Таким образом, случайные величины $\ln(\gamma)$ и θ должны иметь гауссовское распределение вероятностей. Экспериментальные исследования в ряде случаев подтверждают эти предположения.

2.2. Полезный сигнал на выходе радиоканала

Комплексный коэффициент передачи канала $\dot{K}(\omega, t, \mathbf{r})$, являясь случайной функцией частоты, времени и пространства, определяет характер и степень искажений электромагнитного поля в месте приема и соответственно радиосигнала на выходе приемной антенны. Большое значение для определения искажений временной и частотной структуры сигнала имеют корреляционные свойства радиоканала. Их удобно характеризовать интервалами корреляции канала по частоте $\Delta F_{\text{корр}}$, по времени $\Delta \tau_{\text{корр}}$ и по пространству $\Delta r_{\text{корр}}$.

В общем случае в многолучевом канале искажения сигнала бывают двух типов. Во-первых, происходит *рассеяние импульсного сигнала во времени* — длительность импульса увеличивается. Причина этого явления связана с конечной полосой частот $\Delta F_{\text{корр}}$ и нелинейностью фазо-частотной характеристики. Память канала, как и обычного линейного фильтра, равна $\Delta T_{\text{кан}} \approx 1/\Delta F_{\text{корр}}$. Таким образом, при длительности сигнала на входе канала ΔT его длительность на выходе составит $\Delta T_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta T^2 + \Delta T_{\text{кан}}^2}$. Во-вторых, вследствие перемещения неоднородностей во времени происходит модуляция сигнала и, значит, расширение его спектра (*рассеяние сигнала по частоте*). Величина расширения спектра $\Delta f_{\text{кан}} \approx 1/\Delta \tau_{\text{корр}}$, то есть чем больше интервал временной корреляции, тем медленнее вариации амплитуды и фазы и тем менее выражено расширение частотного спектра. Таким образом, при ширине спектра сигнала на входе канала ΔF , его ширина на выходе составит $\Delta F_{\text{вых}} \approx \sqrt{\Delta F^2 + \Delta f_{\text{кан}}^2}$. Рассмотрим несколько типичных моделей сигнала на входе приемника РТС.

2.2.1. Модель сигнала в однолучевом канале

Рассмотрим условия, при которых радиоканал можно рассматривать как однолучевой [10].

1. При выполнении условий $\Delta T \gg \Delta T_{\text{кан}}$, то есть $\Delta T \cdot \Delta F_{\text{корр}} \gg 1$, а $\Delta F \gg \Delta f_{\text{кан}}$, что равносильно $\Delta F \cdot \Delta \tau_{\text{корр}} \gg 1$, частотная и временная структура сигнала остаются неизменными и, следовательно, в модели канала РРВ (2.1) или (2.2) фактически существует только один луч, что и соответствует *однолучевой модели канала*. Таким образом, полезный сигнал на входе приемника $s(t, \lambda)$ отличается от излученного тем, что получает ослабление при распространении и временную задержку, то есть

$$s(t) = \gamma S(t - \tau) \cos [\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)], \quad (2.3)$$

где γ — коэффициент затухания; τ — задержка. Искажения формы сигнала при этом отсутствуют. Модель сигнала (2.4) соответствует неискажающему (идеальному) каналу, который характерен для РТС, работающих в условиях, близких к свободному пространству (трассы прямой видимости, космос).

2. При достаточно продолжительном наблюдении необходимо учитывать вариации затухания $\gamma(t)$ и времени задержки $\tau(t)$. В этом случае

$$s(t) = \gamma(t) S[t - \tau(t)] \cos \left\{ \omega_0 [t - \tau(t)] + \Phi [t - \tau(t)] \right\}. \quad (2.4)$$

Отметим существенную особенность, связанную с изменением задержки $\tau(t)$. Этот процесс относительно медленный, поэтому его можно приближенно представить в виде $\tau(t) \approx \tau_n + \beta t$, где τ_n — начальная задержка и β — скорость изменения задержки. Изменение задержки за счет слагаемого βt на интервале наблюдения, равном длительности сигнала, как правило, мало и не оказывает существенного влияния на комплексную огибающую сигнала. Поэтому можно положить

$$\dot{S}(t - \tau_n - \beta t) \approx \dot{S}(t - \tau_n).$$

Введем некоторое номинальное, или среднее, время задержки τ_0 и представим $\tau_n = \tau_0 + \theta / \omega_0$, где θ — изменение фазы ВЧ-сигнала в интервале $(-\pi; \pi)$; малые изменения задержки, соответствующие вариациям фазы в интервале $(-\pi, \pi)$, оказывают в (2.5) существенное влияние только на аргумент $\omega_0 [t - \tau(t)]$. Искажения комплексной огибающей по прежнему малы, то есть $\dot{S}(t - \tau_n) \approx \dot{S}(t - \tau_0)$. Действительно, допустим на несущей частоте $f_0 = 1000$ МГц изменению фазы ВЧ-сигнала на $\pm\pi$ соответствуют вариации задержки, равные половине периода колебаний, то есть 0,0005 мкс. При распространении волны в пространстве такое изменение фазы происходит на пути, равном половине длины волны (в данном случае 15 см).

С учетом указанных выше допущений принимаемый сигнал (2.4) имеет вид

$$s(t, \lambda) = \operatorname{Re} \left\{ \gamma(t) \dot{S}(t - \tau_0) \exp \left[i \left((\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0 \tau_0 - \theta \right) \right] \right\}, \quad (2.5)$$

где $\Omega = \beta \omega_0$ — доплеровское смещение частоты.

В радиоканалах, типичных для РЛ- и РН-систем, изменение задержки $\tau(t) = 2D(t)/c$, где $D(t) = D_0 + V_r t + \Delta D(t)$ — расстояние до подвижного объекта; V_r — радиальная скорость движения цели; $\Delta D(t)$ — случайные изменения длины трассы, обусловленные блужданием эффективного центра отражения по дальности (дальномерный шум), и изменения длины трассы за счет рефракции радиоволн в неоднородной тропосфере. Очевидно, что $\Omega = 2\pi \cdot 2V_r f_0 / c$.

Отметим два частных случая модели (2.5), которые встречаются в практических задачах.

1. Пусть параметры Ω, τ_0 и $\gamma(t) = \gamma$ постоянны, причем γ и θ заранее неизвестны и являются случайными неинформативными величинами. В этом случае принятый сигнал имеет вид

$$s(t) = \gamma S(t - \tau_0) \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0 \tau_0 - \theta]. \quad (2.6)$$

Модель сигнала (2.6), в которой *амплитуда и фаза — случайные величины*, используется при рассмотрении некогерентных линий радиосвязи на трассах прямой видимости, а также в РЛ- и РН-системах при анализе их работы в условиях прямой видимости цели на достаточно коротких интервалах времени, не превышающих, как правило, нескольких десятков миллисекунд.

2. Пусть множитель $\gamma(t)$ и фаза $\theta(t)$ являются случайными функциями времени. Тогда получаем сигнал

$$s(t) = \gamma(t) S(t - \tau_0) \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \Phi(t - \tau_0) - \omega_0 \tau_0 - \theta(t)]. \quad (2.7)$$

Случайная комплексная функция $\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)e^{\theta(t)}$ является мультипликативной помехой. Ее статистические свойства обычно определяют заданием двумерной ПРВ для составляющих $\gamma(t) \cos \theta(t)$ и $\gamma(t) \sin \theta(t)$ и их корреляционных свойств. В РЛ- и РН-системах модель (2.7) со случайной амплитудой и фазой удовлетворительно описывает свойства отраженного от цели сигнала на интервалах времени до десятков секунд. Необходимо, чтобы объект находился в дальней зоне антенны. Это позволяет считать его «точечным» и не учитывать многолучевой характер отражений от различных участков поверхности объекта. Вариации уровня и фазы сигнала, реально существующие вследствие случайных смещений объекта в пространстве, при этом остаются, и модель их учитывает.

2.2.2. Модель сигнала в многолучевом канале

В соответствии с представлением сигнала (2.7) в однолучевом канале представим случайный сигнал на выходе приемной антенны при многолучевом ПРВ в виде суммы

$$\begin{aligned} s_{\text{сл}}(t, \lambda) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N \gamma_l(t) \dot{S}(t - \tau_{0l}) \exp [j((\omega_0 - \Omega_l)t - \omega_0 \tau_{0l} - \theta_l)] \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N V_l(t) \cdot \exp[\omega_0 t + \theta_l(t)] \right\} = \operatorname{Re} \left\{ V(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

где $v_l(t)$ и $\theta_l(t)$ — случайные амплитуда и полная фаза l -го парциального сигнала на выходе приемной антенны; $\hat{S}(t)$ — комплексная амплитуда излученного полезного сигнала; $\dot{V}(t) = V(t)e^{i\varphi(t)}$ — комплексная амплитуда сигнала на входе приемника при многолучевом механизме РРВ в канале ($V(t)$ — огибающая и $\varphi(t)$ — фаза). Рис. 2.4 иллюстрирует формирование огибающей и фазы в многолучевом канале.

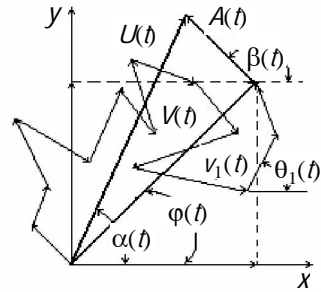


Рис. 2.4. Формирование огибающей и фазы сигнала в многолучевом канале

Для изучения статистических свойств случайного сигнала (2.8) представим его в виде

$$s_{\text{сл}}(t, \lambda) = \text{Re} \left\{ \left[V_x(t) + iV_y(t) \right] e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad (2.9)$$

где

$$V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t) = \sum_{l=1}^N v_l(t) \cos[\theta_l(t)] \quad (2.10)$$

и

$$V_y(t) = V(t) \sin[\varphi(t)] = \sum_{l=1}^N v_l(t) \sin[\theta_l(t)] \quad (2.11)$$

квадратурные составляющие (компоненты) ВЧ-сигнала на входе приемника. Обычно полагают, что случайные величины $v_l(t)$ и $\theta_l(t)$ статистически независимы, причем фаза $\theta_l(t)$ имеет равномерную ПРВ в интервале $(-\pi; \pi)$. Таким образом, *каждое слагаемое в (2.10) и (2.11) имеет среднее, равное нулю. В итоге и квадратурные составляющие $V_x(t)$ и $V_y(t)$ являются случайными процессами с нулевым средним.*

Для многих реальных каналов с многолучевым механизмом РРВ можно допустить, что случайные парциальные сигналы $s_l(t, \lambda)$, соответствующие различным лучам, имеют примерно равную интенсивность, статистически независимы и их число велико (в среднем $N \gg 10^3$). В этих условиях согласно центральной предельной теореме теории вероятностей случайные процессы (2.10) и (2.11), определяющие свойства сигнала (2.9), является совместно гауссовскими.

Поскольку сигнал на входе канала РРВ является узкополосным (см. п. 1.3.2), то $V_x(t)$ и $V_y(t)$ — медленные в сравнении с $\cos(\omega_0 t)$ функции. Сигнал вида (2.9) называют *гауссовским узкополосным случайным процессом*.

В РТС применяются сигналы с различными видами модуляции (АМ, ЧМ, ФМ и др.). В приемных устройствах систем осуществляются линейные и нелинейные преобразования амплитуды, частоты и фазы сигнала. В связи с этим при проектировании РТС необходимо знать ПРВ огибающей, фазы или частоты сигнала на входе приемника, а также их корреляционные свойства. Рассмотрим некоторые из этих характеристик.

2.3. Нормальная (гауссовская) модель сигнала

Полезный сигнал на входе приемника, рассматриваемый нами на некотором интервале времени $(0; T)$, наряду со случайной компонентой (2.9) содержит (в общем случае) также *регулярный* ВЧ-сигнал, параметры которого *не являются случайными на интервале наблюдения*. Физические причины этого различны и связаны с характером канала РРВ. В частности, для тропосферных каналов в диапазоне УКВ с длиной трассы, превышающей дальность радиогоризонта, характерно наличие в месте приема сигнала, обусловленного явлением дифракции при РРВ над сферической поверхностью Земли, и (или) сигнала, который появился в результате отражения волны от крупномасштабных и слоистых неоднородностей диэлектрической проницаемости среды.

В итоге принятый сигнал (рис. 2.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} s(t, \lambda) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \beta(t)] + V(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= [A_x(t) + V_x(t)] \cos \omega_0 t + [A_y(t) + V_y(t)] \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.12)$$

или

$$s(t) = U_x(t) \cos \omega_0 t + U_y(t) \sin \omega_0 t = U(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)], \quad (2.13)$$

где $A(t)$ и $\beta(t)$ — огибающая и фаза регулярного сигнала; $A_x(t)$ и $A_y(t)$ — его квадратурные составляющие; $U_x(t)$ и $U_y(t)$ — квадратурные компоненты суммарного сигнала на входе приемника; $U(t)$ и $\alpha(t)$ — огибающая и фаза этого сигнала.

Для удобства записи выражений введем следующие обозначения: $U_x(t) \triangleq x$ и $U_y(t) \triangleq y$. Из (2.12) видно, что регулярный сигнал определяет величины математических ожиданий процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$.

Обозначим

$$\mathbf{M}[U_x(t)] = A(t) \cos \beta(t) \triangleq m_x(t) \text{ и}$$

$$\mathbf{M}[U_y(t)] = A_y(t) \sin \beta(t) \triangleq m_y(t).$$

Рассмотрим совместную (2-мерную) ПРВ гауссовых процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$ в один момент времени. Она отличается от (1.39) и (1.40) наличием не нулевых средних значений и имеет вид

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-k^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-k^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2k(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}, \quad (2.14)$$

где σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсии (средние мощности) процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$; $k = [1/\sigma_x\sigma_y] \cdot \mathbf{M}[(x-m_x)(y-m_y)]$ — нормированный корреляционный момент процессов $U_x(t)$ и $U_y(t)$ в совпадающий момент времени. Заметим, что в целях упрощения записи зависимость средних m_x и m_y от времени в (2.14) не указана.

Перейдем к рассмотрению ПРВ огибающей и фазы суммы регулярно и случайного ВЧ-сигналов.

2.3.1. Статистические свойства огибающей

Известно несколько вариантов гауссовой модели (2.14). Рассмотрим наиболее простой из них в плане математических преобразований. Положим $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $k=0$ и определим совместную ПРВ огибающей U и фазы α . С этой целью перейдем в полярную систему координат, то есть подставим в (2.14) $x = U \cos \alpha$; $m_x = A \cos \beta$ и $y = U \sin \alpha$; $m_y = A \sin \beta$. Далее раскроем квадраты выражений в показателях экспонент и проведем группирование членов. Учтем, что якобиан преобразования декартовых координат в полярные равен U . Перепишем (2.14) в виде

$$W(U, \alpha) = \frac{U}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{U^2 + A^2 - 2UA\cos(\alpha - \beta)}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.15)$$

В этом выражении $U \in (0; \infty)$ и $\alpha \in (-\pi; \pi)$. Выполнив интегрирование в (2.15) по α , получим ПРВ огибающей

$$W(U) = \int_{-\pi}^{\pi} W(U, \alpha) d\alpha = \frac{U}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{U^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{UA}{\sigma^2}\right), \quad (2.16)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, которая получается здесь в результате вычисления интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{UA}{\sigma^2} \cos(\alpha - \beta)} d\alpha = 2\pi I_0\left(\frac{UA}{\sigma^2}\right). \quad (2.17)$$

В предельном случае $(A/\sigma) \ll 1$ (сильные вариации случайной составляющей сигнала по сравнению с уровнем регулярной) можно считать, что $I_0(UA/\sigma^2) \approx 1$ при этом (2.16) переходит в распределение

$$W(U) = \frac{U}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}; \quad U \geq 0. \quad (2.18)$$

Распределение огибающей (2.18) называется *распределением Рэлея*, а распределение (2.16) — *обобщенным распределением Рэлея*, или *распределением Райса*.

Определим математическое ожидание $\mathbf{M}[U] = m_U$ и дисперсию $\mathbf{M}[(U - m_U)^2] = \sigma_U^2$ огибающей. В соответствии с правилами теории вероятностей имеем

$$m_U = \int_0^{\infty} U W(U) dU \quad \text{и} \quad \sigma_U^2 = \int_0^{\infty} (U - m_U)^2 W(U) dU. \quad (2.19)$$

Подстановка в (2.19) ПРВ (2.16) и вычисление интегралов приводят к следующему результату [11]:

$$\left. \begin{aligned} m_U &= \sigma(1 + \frac{a^2}{4})\sqrt{\pi/2} \quad \text{и} \quad \sigma_U = \sqrt{2 - \pi/2}(1 + \frac{a^2}{4}), \quad \text{при } a < 1, \\ m_U &\approx A\sqrt{1 + 1/2a^2} \approx A; \quad \sigma_U \approx \sigma, \quad \text{при } a > 3. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Величина $a = A/\sigma$, определяющая характеристики огибающей, называется *параметром когерентности*. Чем больше параметр когерентности, тем ближе временная структура сигнала на входе приемника к структуре регулярного сигнала.

На рис. 2.5 показаны кривые ПРВ нормированной на σ огибающей при разных величинах параметра когерентности. Видно, что при $a \geq 3$ ширина кривой плотности практически неизменна и близка по форме к гауссовской кривой.

2.3.2. Статистические свойства фазы

Определим ПРВ фазы путем интегрирования совместного распределения (2.16) по переменной U . Опуская подробности, приведем конечный результат [11]

$$W(\alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/2} \times \left[1 + e^{a^2 \cos(\alpha-\beta)/2} \Phi[a \cos(\alpha-\beta)] \sqrt{2\pi} a \cos(\alpha-\beta) \right], \quad (2.21)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

Видно, что аргументом функции $W(\cdot)$ фактически является разность $(\alpha - \beta)$, по отношению к ней это четная функция и ее вид определяется параметром когерентности. На рис. 2.6 показаны кривые ПРВ фазы для разных величин a .

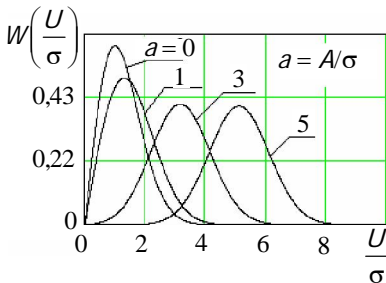


Рис. 2.5. Плотность распределения вероятностей нормированной огибающей сигнала

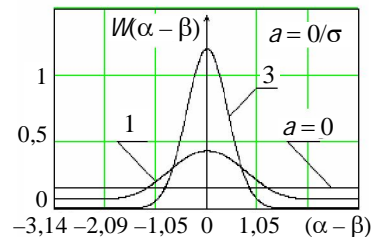


Рис. 2.6. Плотность распределения вероятностей фазы сигнала

Видно, что по мере увеличения уровня регулярного сигнала, имеющего фазу β , фаза α суммарного сигнала в меньшей степени изменяется относительно величины β . Распределение вероятностей при этом сужается, поскольку происходит уменьшение дисперсии вариаций фазы α . При отсутствии регулярного сигнала ($a = 0$) из (2.22) следует, что ПРВ фазы является равномерной. Таким образом, любые значения фазы α в интервале $\pm\pi$ равновероятны.

Можно показать, что при больших уровнях регулярного сигнала ($a \geq 3$) ПРВ фазы приближается к гауссовской с параметрами $m_\alpha = \beta$ и $\sigma_\alpha = 1/a$. Например, при $a = 5$ среднеквадратическое отклонение фазы $\sigma_\alpha = 0,2$ рад $\approx 11,5^\circ$.

2.4. Корреляционные и спектральные свойства огибающей и фазы

Из соотношений (2.12) и (2.13) следует, что статистические свойства гауссова сигнала $s(t, \lambda)$ определяются свойствами его квадратурных составляющих $U_x(t)$ и $U_y(t)$, для которых функции $A_x(t)$ и $A_y(t)$ (квадратуры регулярного сигнала) в любой момент времени t выполняют роль средних значений. Таким образом, корреляционные свойства сигнала $s(t, \lambda)$ зависят от корреляционных свойств случайной компоненты (2.9). Эти свойства определены, если заданы АКФ и взаимно корреляционные функции (ВКФ) квадратурных составляющих $V_x(t)$ и $V_y(t)$.

Можно показать [11], что случайная компонента (2.9) является стационарным процессом в том случае, если квадратурные процессы $V_x(t)$ и $V_y(t)$ стационарны, и их АКФ и ВКФ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \overline{V_x(t) \cdot V_x(t + \tau)} &= \overline{V_y(t) \cdot V_y(t + \tau)} = \sigma^2(\lambda) \rho(\tau; \lambda); \\ \overline{V_x(t) \cdot V_y(t + \tau)} &= -\overline{V_x(t + \tau) \cdot V_y(t)} = \sigma^2(\lambda) \varrho(\tau; \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где $\rho(\tau; \lambda)$ — нормированная АКФ квадратурных процессов; $\varrho(\tau; \lambda)$ — нормированная ВКФ квадратурных процессов. Высокочастотный сигнал $s_{\text{сл}}(t, \lambda)$ имеет при этом АКФ вида

$$K_{\text{сл}}(\tau; \lambda) = \sigma^2(\lambda) k(\tau; \lambda) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau; \lambda)], \quad (2.23)$$

где $k(\tau; \lambda) = \sqrt{\rho^2(\tau; \lambda) + \varrho^2(\tau; \lambda)}$ — модуль (огибающая) нормированной АКФ; $\psi(\tau; \lambda) = \arctg[\varrho(\tau; \lambda) / \rho(\tau; \lambda)]$ — фаза АКФ. Отметим, что в (2.22)

и (2.23) показана зависимость от сообщения λ . Это обусловлено тем, что случайный сигнал на входе приемника появился в результате преобразования в канале РРВ полезного сигнала, содержащего сообщение $\lambda(t)$.

Вычисление АКФ огибающей $K_U(\tau; \lambda)$ и фазы $K_\alpha(\tau; \lambda)$ сигнала (2.12), (2.13) связано с выполнением довольно трудоемких преобразований. Эти результаты составляют основу теории случайных узкополосных гауссовских сигналов. В систематическом виде они приводятся, например, в [11]. Изложим в общем виде порядок получения функций $K_U(\tau; \lambda)$ и $K_\alpha(\tau; \lambda)$.

1. Необходимо записать в явном виде 2-мерную (для двух моментов времени) совместную гауссовскую ПРВ значений квадратурных составляющих $U_x(t_1), U_x(t_2), U_y(t_1), U_y(t_2)$; обозначим ее $\mathcal{W}[U_{x1}, U_{x2}, U_{y1}, U_{y2}; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$, где $\tau = t_2 - t_1$.

2. Преобразовать указанную выше ПРВ в 2-мерную совместную ПРВ огибающей и фазы, т.е. выполнить переход от декартовой системы координат к полярной. В итоге получим плотность $\mathcal{W}[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)]$.

3. Вычислить 2-мерные ПРВ огибающей и фазы, выполнив интегрирование по соответствующим переменным:

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{W}[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2; \\ & \mathcal{W}[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{W}[U_1, U_2, \alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2. \end{aligned}$$

4. Вычислить АКФ огибающей

$$K_U(\tau; \lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty U_1 U_2 \mathcal{W}[U_1, U_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] dU_1 dU_2 - m_{U_1} m_{U_2}$$

и АКФ фазы

$$K_\alpha(\tau; \lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{W}[\alpha_1, \alpha_2; K(\tau; \lambda), \psi(\tau; \lambda)] d\alpha_1 d\alpha_2 - m_{\alpha_1} m_{\alpha_2}.$$

Энергетические спектры огибающей $G_U(\omega)$ и фазы $G_\alpha(\omega)$ вычисляются согласно (1.43) как преобразования Фурье от соответствующих АКФ.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что есть радиоканал для радиосистем, каковы механизмы его влияния на свойства сигнала на входе приемного устройства РТС? Приведите примеры.
2. В чем отличие моделей однолучевого и многолучевого радиоканалов?
3. Поясните графически формирование квадратурных составляющих высокочастотного сигнала в многолучевом радиоканале.
4. Покажите взаимосвязь квадратурных составляющих с огибающей и фазой радиосигнала.
5. Запишите выражение для одномерной ПРВ огибающей и назовите параметры, которые определяют вид этой функции.
6. Какой параметр характеризует величину СКО огибающей (или фазы) смеси регулярного и случайного сигналов относительно их средних значений?
7. Сделайте эскиз ПРВ фазы смеси регулярного и случайного сигналов для двух значений параметра когерентности $a_1 > a_2$.
8. Изобразите предполагаемую осциллограмму огибающей смеси регулярного сигнала и шума для двух значений параметра когерентности: $a_1 = 0$ и $a_2 \gg 0$.

3. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

3.1. Краткая характеристика задач статистической теории РТС

Современные РТС решают достаточно сложные задачи, связанные с передачей, извлечением и разрушением полезной информации при наличии помех. Основой разработки перспективных РТС являются методы теории статистического синтеза, которые позволяют найти оптимальную систему обработки сигналов. Можно выделить несколько специфических этапов разработки РТС: структурный, логический, схемотехнический, конструкторский и технологический. Наиболее важным из них является этап структурного синтеза РТС. Его результат состоит в разработке структурной схемы РТС, определяющей облик будущей системы и требования к основным параметрам подсистем и устройств. Особенность этапа состоит в том, что многие задачи трудно поддаются формализации в отличие от таковых на прочих этапах, где успешно используются системы автоматизации проектирования.

Задача синтеза РТС, в общем случае, предусматривает *выбор типа сигналов и оптимизацию способа их обработки*. Для пассивных РТС тип сигнала определен объектом наблюдения. Для активных РТС (радиолокационных, радионавигационных, передачи информации и др.) выбор типа сигнала имеет принципиальное значение, так как от способа модуляции ВЧ-сигнала зависят его свойства и соответственно многие показатели качества РТС. В частности, изменяются параметры функции неопределенности радиосигнала (см. гл. 1), определяющие возможность различения сигналов по времени задержки и частоте. Следует отметить особенность РТС извлечения информации, в которых, как отмечалось ранее, модуляция электромагнитного поля в месте приема полезным сообщением $\lambda(t)$ определяется в процессе взаимодействия волны с объектом и далее с антенной системой приемника.

В частности, если $\lambda(t)$ — угловая координата объекта, то способ модуляции этим сообщением сигнала в месте приема $s(t; \lambda(t))$ зависит от пространственной структуры антенной системы приемника. Таким образом, оптимальный выбор типа сигнала в РЛ- и РН-системах в определенной мере связан с выбором пространственной структуры РТС — количества пунктов приема и типа антенн. Задачи данного типа являются предметом теории пространственно-временного синтеза РТС.

Аналитические методы синтеза формы сигнала, учитывающие реальные ограничения на систему, разработаны недостаточно полно. Тем не менее, возможен синтез сигнала с оптимальной автокорреляционной функцией, имеющей минимум боковых лепестков. В сложных случаях на практике часто используется обычный метод перебора.

Оптимизация способа обработки (приема) сигнала предполагает определение *алгоритма и структуры* устройства, обеспечивающих, при заданных условиях работы РТС наилучший для заданного критерия результат решения некоторой функциональной задачи. Математическая формулировка задачи статистического синтеза оптимальной системы обработки включает следующие этапы.

1. *Разработку и обоснование статистической модели полезных сигналов и помех, воздействующих на систему в выбранном сечении.* Это могут быть воздействия на выходе антенной системы заданного типа или каких-либо устройств НЧ-тракта РТС. В общем случае необходимо определить статистическую модель электромагнитного поля в месте расположения РТС. Конкретная форма соотношений, определяющих модель, зависит от условий работы РТС (характера канала РРВ, диапазона радиоволн, типа помех и др.), степени априорной информации о свойствах сигнала и помех и их функциональном взаимодействии.

2. *Формулировку критерия оптимальности системы обработки.* Критерий оптимальности должен соответствовать той цели, ради которой создается конкретная РТС.

3. *Математическую формулировку задачи оптимизации.* Здесь предполагается аналитическая запись выражений, определяющих величину критерия, и формулировку ограничений, если таковые имеются.

Следует отметить, что все РТС в процессе нормальной работы выполняют ряд функциональных задач. Успешное выполнение каждой из них, как правило, безусловно необходимо для нормальной работы системы. Например, для РЛ- и РН-систем характерны следующие функциональные задачи:

- поиск, обнаружение и различение объектов в зоне обзора;
- захват и сопровождение объекта по дальности, скорости, угловым координатам;
- передача данных о текущих параметрах объектов в пункт обработки данных для принятия решения.

Очевидно, что критерий оптимальности (эффективности), определяющий качество работы РТС, должен учитывать результат выполнения каждой из перечисленных задач. В этом смысле критерий должен быть *обобщенным (комплексным)*. В действительности положение еще сложнее, так как следует учитывать также стоимость производства РТС, надежность функционирования, сложность эксплуатации и ремонта, массогабаритные параметры и т.д. Задача анализа (сравнения) известных систем по совокупности показателей качества может быть решена, а вот математической теории синтеза оптимальных (в смысле обобщенного критерия) систем пока не существует.

Рассмотрим кратко содержание основных функциональных задач. Для определенности будем полагать, что сигнал на входе приемника (наблюдаемый сигнал) $y(t) = s(t, \lambda) + n(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Задача обнаружения. Пусть неизвестным является только сам факт наличия или отсутствия сигнала $s(t, \lambda)$ в наблюдаемом сигнале $y(t)$. В этом случае представим $y(t)$ в виде

$$y(t) = \theta s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

где параметр обнаружения θ — случайная величина, которая принимает одно из двух значений: $\theta = 0$ (сигнал отсутствует); $\theta = 1$ (сигнал присутствует). Необходимо по принятой реализации $y(t)$ на интервале $[0; T]$ наилучшим способом принять решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \lambda)$ в смеси (3.1). В результате решения задачи должны быть определены оптимальный алгоритм принятия решения о величине параметра θ , структурная схема обнаружителя и его качественные характеристики. Подобные задачи типичны для РЛ- и РН-систем.

Задача различения сигналов. В простейшей задаче различения наблюдаемый процесс $y(t)$ на входе приемника имеет вид

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda_2) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

где θ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения одно из двух значений: $\theta = 0$ ($y(t)$ содержит сигнал $s_2(t, \lambda_2)$) и $\theta = 1$ ($y(t)$ содержит сигнал $s_1(t, \lambda_1)$). Результатом решения задачи является *наилучшее* правило (алгоритм) обработки сигнала (3.2) и структура устройства,

которые обеспечивают принятие решения о том, какой из двух сигналов присутствует на входе. В частном случае при $s_2(t, \lambda_2) = 0$ задача различения сводится к задаче обнаружения. Задача различения двух сигналов характерна для цифровых двоичных систем связи, в которых сигналы $s_1(t, \lambda_1)$ и $s_2(t, \lambda_2)$ соответствуют передаче 0 и 1. В общем случае наблюдаемый сигнал $\mathcal{U}(t)$ может содержать один из m возможных сигналов $s_1(t, \lambda_1), s_2(t, \lambda_2), \dots, s_m(t, \lambda_m)$.

Задача оценки параметров сигнала. Предположим, что какой-либо параметр λ сигнала $s(t, \lambda)$ является случайной величиной с априорной ПРВ $W(\lambda)$. Конкретное значение этого параметра на интервале наблюдения постоянно и неизвестно. Задача оценки состоит в том, чтобы определить *наилучший* способ (алгоритм) обработки наблюдаемого сигнала $\mathcal{U}(t)$ и в итоге получить оценку λ^* неизвестного параметра λ . Мера близости оценки к истинному значению параметра определяется выбором критерия оптимальности. Необходимо также определить структуру устройства обработки (измерителя) и предельную точность оценки λ^* . Данная задача типична для измерительных РТС — локационных, навигационных и др.

В общем случае полезный сигнал зависит от нескольких неизвестных параметров λ и задача сводится к их совместной оценке. Например в РЛ-системах сигнал, отраженный от объекта содержит информацию о дальности (время задержки), скорости (доплеровский сдвиг частоты) и угловых координатах. Задачей измерителя является получение *наилучших* оценок этих величин.

Задача фильтрации сообщений. Термин «фильтрация» здесь означает выделение. В задачах данного типа информативный параметр $\lambda(t)$ полезного сигнала $s(t, \lambda(t))$ является функцией времени с известными статистическими характеристиками. Решение задачи состоит в определении алгоритма и устройства обработки сигнала $\mathcal{U}(t)$, которые обеспечивают получение *наилучшей* оценки $\lambda^*(t)$. Задача сводится к оценке постоянного параметра λ , если за время наблюдения T сообщение изменяется пренебрежимо мало. Фильтрация сообщений реализуется в системах радиосвязи и телеметрии (выделение речевого сигнала или сигналов о состоянии физических объектов), а также в РЛ- и РН-системах, где необходимо непрерывно получать информацию об изменяющихся во времени координатах кораблей, самолетов, космических объектов.

Задача разрешения сигналов. В данном случае наблюдаемый сигнал на входе приемника $\mathcal{U}(t)$ представляет собой сумму помехи и мини-

мум двух возможно налагающихся сигналов $s_1(t, \lambda_1)$, и $s_2(t, \lambda_2)$. По смыслу параметры λ_1 и λ_2 идентичны. Допустим $\lambda_1 = \{\tau_1, \Omega_1\}$, $\lambda_2 = \{\tau_2, \Omega_2\}$ и сигналы отличаются друг от друга только информативными параметрами (одним или более), то есть $\lambda_1 - \lambda_2 = \delta_\lambda$. Наблюдаемый сигнал $y(t) = \theta_1 s_1(t, \lambda_1) + \theta_2 s_2(t, \lambda_2) + n(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, где случайные величины θ_1 и θ_2 независимы и могут принимать значения 0 и 1.

Допустим $y(t)$ содержит оба сигнала, тогда возникает задача оценки параметров сигнала $s_1(t, \lambda_1)$ в присутствии $s_2(t, \lambda_2)$. Если качество оценок $\hat{\lambda}_1$ остается при этом выше допустимого, то первый сигнал разрешается в смысле оценки параметра (одного или двух). При необходимости раздельного обнаружения сигналов говорят о задаче взаимного разрешения сигналов в смысле обнаружения.

Задача распознавания образов. Этот класс задач связан с разработкой алгоритмов и устройств, позволяющих по наблюдаемому сигналу $y(t)$ после обнаружения полезных сигналов определить их принадлежность к соответствующим объектам — источникам полезных сигналов. В зависимости от характера сигналов и априорной информации об объектах задачи распознавания весьма разнообразны. В частности, это распознавание речи, где 32 различных объекта (буквы русского алфавита), или в РЛ-системах задачи распознавания типа самолетов, кораблей, головных частей баллистических ракет и др.

В заключение отметим два обстоятельства.

1. *В силу наличия помех в наблюдаемом сигнале $y(t)$ исчерпывающий подход для решения всех функциональных задач, которые возникают в РТС, состоит в использовании методов статистической теории решений при наличии помех.*

2. *Качество РТС при решении перечисленных выше задач можно обнаружить только в длинном ряду испытаний, выполнив статистическое усреднение по ансамблю случайных возмущений (помех и др.), то есть критерий эффективности РТС должен иметь также статистический смысл.*

3.2. Согласованный линейный фильтр

Рассмотрим задачу оптимизации характеристик линейного фильтра по критерию отношения мощностей сигнала и шума на его выходе при подаче на вход аддитивной смеси полезного сигнала и шума.

Пусть на вход линейного фильтра поступает сигнал $y(t) = s(t) + n(t)$ в виде суммы полезного сигнала $s(t)$ и стационарного белого

гауссовского шума $\mathcal{N}(t)$, двухсторонняя спектральная плотность которого $G_n(\omega) = N_0/2$ [Вт/Гц] для $\omega \in (-\infty, \infty)$. Введем следующие обозначения: $\dot{k}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ — комплексный коэффициент передачи фильтра ($K(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра); $\varphi(\omega)$ — фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра; $\dot{g}(\omega) = g(\omega)e^{i\psi(\omega)}$ — комплексный частотный спектр полезного сигнала ($g(\omega)$ — амплитудно-частотный спектр); $\gamma(\omega)$ — фазо-частотный спектр. Временные и спектральные функции связаны взаимными преобразованиями Фурье

$$\dot{k}(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} h(\tau); \quad s(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{g}(\omega), \quad (3.3)$$

где $h(\tau)$ — импульсная реакция фильтра; символ $\underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}}$ обозначает прямое и обратное Фурье-преобразование между функциями. Полезный сигнал на выходе фильтра $s_{\text{вых}}(t) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} [\dot{k}(\omega)\dot{g}(\omega)]$, его величина в момент времени t_0 равна

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega)\dot{g}(\omega)e^{i\omega t_0} d\omega. \quad (3.4)$$

Средняя мощность шума на выходе фильтра на частоте f в полосе df равна $dP_{n_{\text{вых}}}(f) = \frac{N_0}{2} |\dot{k}(\omega)|^2 df$. Соответственно полная мощность шума на выходе фильтра

$$\sigma_{n_{\text{вых}}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dP_{n_{\text{вых}}}(f) = \frac{N_0}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.5)$$

Определим величину q^2 — отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе фильтра в момент t_0 :

$$q^2(t_0) = \frac{s_{\text{вых}}^2(t_0)}{\sigma_{n_{\text{вых}}}^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega)\dot{g}(\omega)e^{i\omega t_0} d\omega \right|^2}{\pi N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{k}(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию $\dot{k}_{opt}(\omega)$, при которой отношение (3.6) достигает максимума. Эту задачу можно решить, используя неравенство Шварца — Буняковского.

Неравенство Шварца — Буняковского утверждает, что если имеются две в общем случае комплексные функции $\dot{u}(x)$ и $\dot{v}(x)$, то выполняется неравенство [13]

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(x) \dot{v}(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(x)|^2 dx, \quad (3.7)$$

причем знак равенства достигается только тогда, когда

$$\dot{v}(x) = c \cdot \dot{u}(x), \quad (3.8)$$

где c — некоторая постоянная; $\dot{u}^*(x)$ — функция, комплексно сопряженная $\dot{u}(x)$. Для нашего случая перепишем неравенство (3.7) следующим образом:

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^*(\omega) \cdot \dot{v}(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.9)$$

Сопоставляя выражения (3.6) и (3.9), с учетом (3.8) получаем, что максимальное значение $q_{\max}(t_0)$ достигается на выходе оптимального фильтра с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{k}_{opt}(\omega) = c \dot{g}^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = c g(\omega) e^{-\dot{\gamma}(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что комплексная частотная характеристика оптимального линейного фильтра полностью определяется частотным спектром полезного сигнала. Причем АЧХ этого фильтра $K_{opt}(\omega) = |\dot{k}_{opt}(\omega)| = c g(\omega)$, то есть пропорциональна амплитудному спектру полезного сигнала. ФЧХ фильтра имеет вид: $\Phi_{opt}(\omega) = -\gamma(\omega) - \omega t_0$.

Вычислим величину $q_{\max}(t_0)$. Для этого подставим (3.10) в (3.6) и в итоге получим

$$q_{\max}^2(t_0) = q_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.11)$$

Оптимальный фильтр, имеющий такие характеристики, называют *согласованным линейным фильтром*.

Совпадение формы АЧХ фильтра с амплитудно-частотным спектром сигнала обеспечивает наилучшее выделение тех участков спектра сигнала, на которых отношение уровней сигнала к шуму выше. *Форма сигнала на выходе фильтра при этом искажается*. Однако это не имеет значения, поскольку критерий оптимальности состоит не в точном воспроизведении формы сигнала, а в формировании наибольшего пика выходного сигнала на фоне шума. Важную роль в связи с этим играет ФЧХ фильтра $\varphi_{opt}(\omega)$. Поясним ее роль.

Подставим в (3.4) коэффициент передачи (3.10) и запишем выражение сигнала на выходе согласованного фильтра (СФ)

$$\left. \begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \\ s_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\omega) \cos[\omega(t-t_0)] d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Второе уравнение в (3.12) получается из первого, так как $|\dot{g}(\omega)|^2$ есть коэффициент передачи фильтра по мощности, то есть это четная функция аргумента ω , поэтому в преобразовании Фурье остается только действительная часть. Из (3.12) следует, что *форма сигнала на выходе СФ является четной функцией аргумента $(t-t_0)$, зависит от амплитудно-частотного спектра входного сигнала и не зависит от его фазо-частотного спектра*.

Эта любопытная ситуация объясняется тем, что взаимные фазовые сдвиги спектральных составляющих входного сигнала, определяемые функцией $\gamma(\omega)$ компенсируются ФЧХ СФ. Поэтому все гармонические составляющие выходного сигнала в момент времени $t=t_0$ одновременно достигают амплитудных значений и, суммируясь, поскольку фильтр линейный, дают пик выходного сигнала, равный согласно (3.12)

$$s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{g}(\omega)|^2 d\omega = c E_s. \quad (3.13)$$

Если бы ФЧХ фильтра не компенсировала фазовых сдвигов спектральных составляющих входного сигнала, то максимумы различных гар-

моник сигнала на выходе не совпали бы во времени. В этом случае пик выходного сигнала оказался бы меньше и, возможно, был бы не один.

Определим импульсную реакцию согласованного фильтра (3.10):

$$\begin{aligned} h_{opt}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}_{opt}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}^*(-\omega) e^{j\omega(t_0-t)} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{j\omega(t_0-t)} d\omega. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая, что входной сигнал

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

получим

$$h_{opt}(t) = c s(t_0 - t). \quad (3.15)$$

Таким образом, *импульсная характеристика согласованного фильтра полностью определяется формой сигнала («согласована» с сигналом)*.

Чтобы представить себе функцию $h_{opt}(t)$, обратимся к рис. 3.1. На нем изображены импульсный сигнал $s(t)$, возникший в момент времени $t_0 = 2$, а также сигнал $s(t + t_0)$ (при $t_0 = 8$ он появляется раньше сигнала $s(t)$) и его зеркальное отображение $s(t_0 - t) = h_{opt}(t)$, то есть константа $c = 1$.

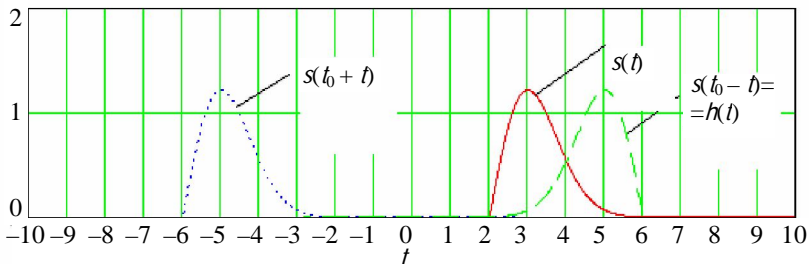


Рис. 3.1. Формирование импульсной реакции СФ

Рассмотрим структуру отклика СФ, когда на его вход воздействует колебание

$$y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.16)$$

где λ_0 — значение информативного параметра в полезном сигнале на входе фильтра. В общем случае λ_0 не является временной задержкой.

Допустим, что импульсная характеристика СФ согласована с полезным сигналом с точностью до информативного параметра, т.е. его значение для функции $h_{opt}(t)$ отлично от λ_0 и равно λ .

Напряжение на выходе СФ с учетом (3.15), (3.16) представим в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(t-\tau)y(\tau)d\tau = c \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda)y(\tau)d\tau = \\ &= \frac{cN_0}{2} [z_s(t, \lambda) + z_n(t, \lambda)], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $z_s(t, \lambda)$ и $z_n(t, \lambda)$ — *сигнальная и шумовая функции*,

$$\left. \begin{aligned} z_s(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda)s(\tau, \lambda_0)d\tau, \\ z_n(t, \lambda) &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda)n(\tau)d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Сравнение выражение (1.15а) для АКФ сигнала с (3.17) и (3.18) позволяет сделать важный вывод. *Выходной сигнал СФ с точностью до константы с соответствует взаимной корреляционной функции между принятым колебанием $y(t)$ и полезным сигналом $s(t, \lambda)$. Сигнальная же функция $z_s(t, \lambda)$ с точностью до константы совпадает при условии $\lambda = \lambda_0$ с автокорреляционной функцией полезного сигнала.*

Максимальное значение сигнальная функция имеет в точке $t = t_0$, $\lambda = \lambda_0$. В соответствии с (3.18) оно равно

$$z_s(t_0, \lambda_0) = z_{s_{\max}} = \frac{2}{N_0} E_s. \quad (3.19)$$

В важном для практики случае, когда информативный параметр λ является временным положением сигнала, выражение для сигнальной функции имеет вид

$$z_s(t; \tau_0, \tau_\phi) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t - \tau_\phi) s(\tau - \tau_0) d\tau, \quad (3.20)$$

где τ_0 и τ_ϕ — соответственно временной сдвиг входного сигнала и значение сдвига, на который «настроен» СФ. Определим момент времени, когда выражение (3.20) имеет максимум. Поскольку функция $z_s(t; \tau_0, \tau_\phi) \sim k(t)$, то есть пропорциональна АКФ сигнала, то положение максимума совпадает с моментом времени, при котором разность аргументов у двух копий сигналов в (3.20) равна нулю. Видно, что разность аргументов равна $[t_0 + (\tau_0 - \tau_\phi) - t]$ и обращается в ноль, когда $t = t_0 + (\tau_0 - \tau_\phi)$. Таким образом, положение максимума просто сдвинется во времени, величина же его останется неизменной и равной (3.19). Отметим, что если бы параметр λ имел смысл частотного сдвига Ω или какой-либо другой, то уровень максимума сигнала на выходе СФ оказался бы зависящим от разности $(\lambda_0 - \lambda_\phi)$.

Поскольку форма сигнала на выходе СФ повторяет АКФ $k(\tau)$, то при подаче на его вход прямоугольного радиоимпульса выходной сигнал соответствует сигналу на рис. 1.10. При подаче на вход радиоимпульса с ЛЧМ и гауссовской огибающей сигнал на выходе СФ «теряет» ЧМ и сжимается в B раз (см. рис. 1.13). Огибающая сигнала на выходе СФ, которая может быть выделена с помощью линейного детектора, очевидно, повторяет функцию $K(\tau)$, т.е. имеет треугольную форму для прямоугольного радиоимпульса (см. рис. 1.9) и сжатую в B раз по длительности гауссоиду для гауссовского ЛЧМ-радиоимпульса (см. рис. 1.13).

Определим дисперсию (мощность) шума на выходе СФ. Из (3.18) следует, что $\overline{z_n(t, \lambda)} = 0$, так как $\overline{n(t)} = 0$. Для дисперсии имеем выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[z_n(t, \lambda)] &= \overline{z_n^2(t, \lambda)} = D_{z_n} = \\ &= \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) \overline{n(\tau)n(\tau_1)} d\tau d\tau_1 = \\ &= \frac{4}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 + \tau - t, \lambda) s(t_0 + \tau_1 - t, \lambda) K_n(\tau_1 - \tau) d\tau d\tau_1. \end{aligned}$$

Подставляя в него АКФ белого шума (1.46) и выполняя интегрирование с учетом свойств δ -функции, получим

$$D_{z_n}(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t_0 + \tau - t, \lambda) d\tau.$$

В момент времени $t = t_0$ для неэнергетического параметра λ мощность шумовой функции равна

$$D_{z_n} = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (3.21)$$

Для задач в инженерной практике важно знать отношение максимального значения сигнала к среднеквадратическому значению шума. Это отношение на выходе СФ определим, используя (3.19) и (3.21). В итоге получим

$$\frac{z_{s_{\max}}}{\sqrt{D_{z_n}}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = q_0. \quad (3.22)$$

Как и следовало ожидать, полученный результат совпадает с (3.11) для $q_{\max}(t_0)$.

Обсудим вопрос о том, какое значение может принимать момент отсчета t_0 . Если сигнал $s(t)$, на который «настроен» СФ, возникает в момент времени τ_0 и заканчивается при $t = \tau_0 + \tau_n$ (на рис. 3.1 $\tau_0 = 2$ и $\tau_n \approx 3,5$), то с учетом условия физической реализуемости фильтра ($h(t) = 0$ при $t \leq 0$), момент максимального отношения сигнал/шум может быть достигнут при $t_0 \geq \tau_0 + \tau_n$. Физически это означает, что только в этом случае для формирования максимального пика сигнала на выходе может быть использована вся энергия входного сигнала $s(t)$ — фильтр как бы «накапливает сигнал». Увеличение t_0 свыше $(\tau_0 + \tau_n)$ не изменяет величину пика. Он лишь позже появится на выходе; и это, как правило, нежелательно.

При проектировании РТС удобно использовать отношение сигнал/шум, пересчитанное ко входу системы. Выполним это для согласованного фильтра. Пусть ΔF_s — эффективная полоса пропускания СФ, равная эффективной ширине спектра сигнала $s(t)$. Мощность шума на входе в эффективной полосе пропускания СФ равна $P_n = N_0 \Delta F_s$, а мощность сигнала на входе СФ равна $P_s = E_s / \Delta T_s$, где ΔT_s — эффективная длительность сигнала. Подставляя эти величины в формулу (3.21), получим

$$q_{\max}(t_0) = \frac{z_{s_{\max}}}{\sqrt{D_{z_n}}} = \sqrt{2\Delta F_3 \Delta T_3 (P_s / P_n)} \text{ или}$$

$$\frac{P_s}{P_n} = \frac{q_0^2}{2B}, \quad (3.23)$$

где $B \approx \Delta F_3 \Delta T_3$ — база сигнала; $\frac{P_s}{P_n}$ и $q_{\max}^2(t_0)$ — отношение мощностей сигнал/шум соответственно на входе и выходе СФ. Из соотношения (3.23) следует, что *при заданной энергии сигнала E_s и равномерной спектральной плотности мощности шума, равной N_0 , увеличение ΔF_3 и ΔT_3 порознь не влияет на отношение сигнал/шум на выходе СФ. Это отношение можно увеличить за счет увеличения базы сигнала.* Таким образом, использование сложных сигналов в РТС и применение СФ обеспечивает работоспособность систем при отношении сигнал/шум на входе в $2B$ раз меньшем требуемого на выходе системы. Эти выводы справедливы, если помеха (шум) является *аддитивной гауссовской и «белой», а форма полезного сигнала полностью известна.*

В заключение отметим важное обстоятельство. Сравнение выражения (1.10) для сигнальной функции $q(\Delta x)$, определяющей функцию различия сигналов $\varepsilon(\Delta x)$ по параметру x или по сообщению λ , связанному с ним, с сигнальной функцией $z_s(t, \lambda)$, формируемой на выходе СФ, показывает:

1) среднее напряжение на выходе СФ в момент отсчета $t = t_0$ пропорционально величине сигнальной функции $q(\Delta \lambda)$, определяющей степень различия двух сигналов $s(t, \lambda)$ и $s(t, \lambda_0)$, где $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$;

2) формирование сигнальной функции $q(\Delta \lambda)$ с использованием СФ предполагает «развертывание» напряжения на выходе фильтра по λ , что в общем случае связано с применением совокупности СФ, настроенных на различные значения сообщения λ ;

3) сигнальная составляющая напряжения на выходе СФ повторяет по форме временную АКФ сигнала $s(t)$;

4) величина максимального отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра не зависит от формы полезного сигнала и определяется только его энергией и спектральной плотностью шума на входе.

3.3. Примеры построения согласованных фильтров

3.3.1. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

На рис. 3.2 показана структурная схема устройства, реализующего функции СФ, когда на его вход воздействует сигнал вида $s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t)$ при $t \in [0, \tau_{\text{и}}]$. Оно состоит из усилителя, линии задержки на время $\tau_{\text{и}}$, вычитающего устройства и колебательного контура с достаточно малым затуханием. Предполагается, что $\tau_{\text{и}}$ равно целому числу периодов ВЧ-сигнала.

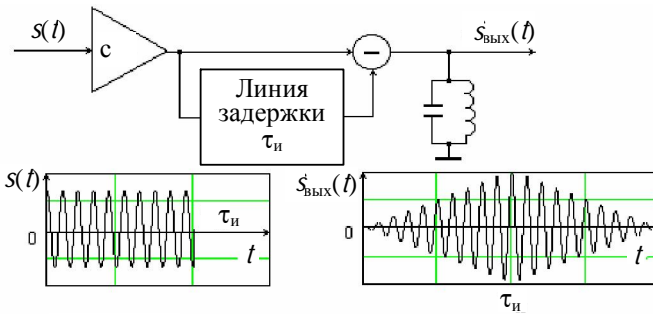


Рис. 3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

Пусть на вход устройства поступает прямоугольный радиоимпульс, тогда на контуре высокой добротности происходит линейное нарастание амплитуды напряжения в течение длительности импульса сигнала и весьма медленное затухание колебаний после его окончания. В результате вычитания двух переходных процессов на выходе получается треугольный импульс (см. рис. 3.2), повторяющий по форме АКФ сигнала. При этом максимальное значение импульса в момент $t \geq \tau_{\text{и}}$ равно энергии $E_s = c^2 (S_0^2 / 2) \tau_{\text{и}}$.

В инженерной практике часто используют приближенно оптимальные фильтры (квазиоптимальные), поскольку их реализация оказывается проще. В частности, для прямоугольного радиоимпульса можно использовать полосовой фильтр с АЧХ, близкой к прямоугольной форме, и линей-

ной ФЧХ в полосе пропускания. Полосовой фильтр близок к СФ, если его полоса $\Delta F_{\text{пр}} = 1,37/\tau_{\text{и}}$. Проигрыш в отношении сигнал/шум по мощности для такого фильтра составляет около 1,2 раза.

3.3.2. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса с ФКМ

Определим структурную схему СФ для ФКМ-импульса с семипозиционным кодом Баркера (рис. 1.15,а). На рис. 3.3,а показано условное обозначение этого сигнала. Используя выражение (3.15), получим импульсную реакцию СФ (рис. 3.3,б).

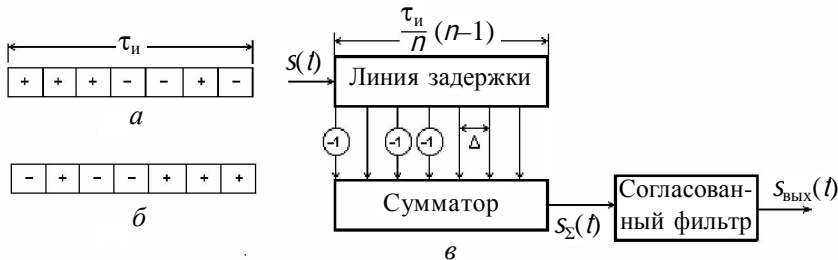


Рис. 3.3. Обработка ФКМ-радиоимпульса в согласованном фильтре: а — модулирующая функция ФКМ-сигнала; б — модулирующая функция импульсной реакции СФ; в — СФ для радиоимпульса с ФКМ

Устройство оптимальной обработки ФКМ сигнала (рис. 3.3,в) состоит из широкополосной линии задержки с семью равноотстоящими отводами (с интервалом задержки Δ), общего сумматора, к которому часть отводов подключена через инверсные каскады, а остальные — непосредственно, и линейного фильтра, согласованного с парциальным радиоимпульсом длительностью $\Delta = \tau_{\text{и}}/7$.

Работу СФ поясняет рис. 3.4, на котором показаны этапы формирования радиоимпульса $s_{\text{вых}}(t)$. На рис. 3.4,а с учетом инверсных каскадов схематически показаны радиоимпульсы с ФКМ на входе сумматора. Результат их суммирования представлен на рис. 3.4,б, а огибающая выходного сигнала СФ — на рис. 3.4,в. Максимум сигнала $s_{\text{вых}}(t)$ равен $7E_1$, где E_1 — энергия парциального импульса.

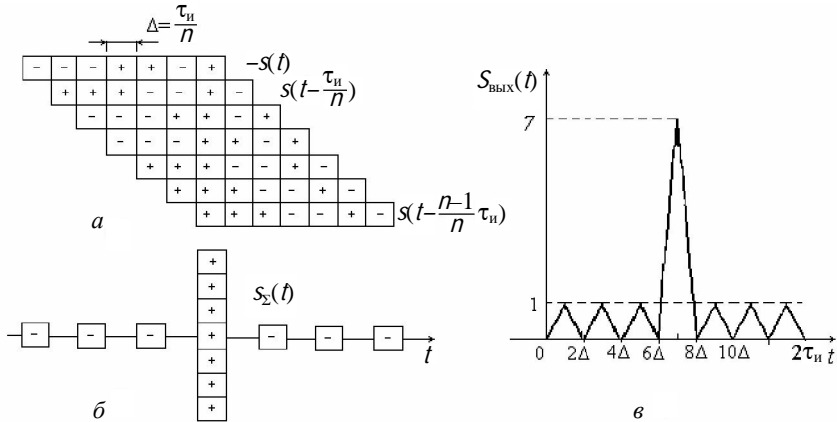


Рис. 3.4. Формирование сигнала на выходе СФ: *a* — копии ФКМ-импульса на выходах линии задержки; *б* — ФКМ-сигнал на выходе сумматора; *в* — огибающая ФКМ-радиосигнала на выходе СФ

3.3.3. Согласованный фильтр для пачки M когерентных радиоимпульсов гауссовской формы

Представим входной сигнал, состоящий из M периодически следующих когерентных радиоимпульсов (рис. 3.5,*a*) в виде

$$s(t) = \sum_{n=0}^{M-1} s_1(t - nT), \quad 0 \leq t \leq MT, \quad (3.24)$$

где $s_1(t)$ — одиночный радиоимпульс заданной формы с энергией E_1 и длительностью τ_n ; T — период следования импульсов. Спектр сигнала (3.24) равен

$$\begin{aligned} \dot{g}(\omega) &= \int_0^{MT} s(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=0}^{M-1} \int_{nT}^{(n+1)T} s_1(t - nT) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_0^T s_1(x) e^{-i\omega(x+nT)} dx = \dot{g}_1(\omega) \sum_{n=0}^{M-1} e^{-i\omega nT}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\dot{g}_1(\omega) \Leftrightarrow s_1(t)$ — спектр одиночного импульса. Подставим в (3.10) общую длительность пачки $t_0 = \tau_n + (M-1)T$ и с учетом спектра пачки (3.25) найдем коэффициент передачи оптимального фильтра в виде

$$\dot{k}_{opt}(\omega) = c \dot{k}_1(\omega) \dot{k}_2(\omega); \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_1(\omega) &= \dot{g}_1^*(\omega) e^{-i\omega\tau_n}; \\ \dot{k}_2(\omega) &= \sum_{m=0}^{M-1} e^{-i\omega mT} = \frac{1 - \exp(-i\omega MT)}{1 - \exp(-i\omega T)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первый множитель в (3.26) $\dot{k}_1(\omega)$ есть коэффициент передачи СФ для одиночного радиоимпульса. Каждое слагаемое второго множителя соответствует коэффициенту передачи звена, обеспечивающего задержку сигнала на время mT . Применение формулы суммы конечного числа элементов геометрической прогрессии дает выражение (3.27). Видно, что, $\dot{k}_2(\omega)$ есть коэффициент передачи многоотводной линии задержки с суммированием задержанных сигналов. Общее время задержки в линии — $(M-1)T$. Структурная схема СФ для пачки радиоимпульсов, соответствующая формуле (3.26), приведена на рис. 3.5,б. При подаче на вход СФ δ -импульса на выходе сумматора получается последовательность M (по числу отводов) радиоимпульсов, каждый из которых по форме повторяет импульсную реакцию фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. На рис. 3.5,в условно показан процесс оптимальной фильтрации пачки из $M=4$ импульсов с симметричной огибающей гауссовской формы. Огибающая пачки радиоимпульсов на выходе сумматора $S_{\text{вых opt}}(t)$ имеет треугольную форму, длительность по нулям $2MT$ и число импульсов $2M-1$.

Рассмотрим частотную интерпретацию работы СФ пачки. Определив из (3.27) модуль $|\dot{k}_2(\omega)|$, найдем АЧХ второго звена СФ в виде

$$K_2(f) = \left| \frac{\sin(\pi f MT)}{\sin(\pi f T)} \right|. \quad (3.28)$$

Частотная характеристика (3.28) является гребенчатой (рис. 3.6,а) с периодически повторяющимися через интервал $1/T$ зубцами, ширина которых по нулям $2/(MT)$. В случае идеальной линии задержки АЧХ (3.28) существует на всей оси частот. Результирующая АЧХ $K(f) = K_1(f) K_2(f)$ практически ограничена по спектру колокольной (гауссовской) характеристикой $K_1(f)$ фильтра, согласованного с одиночным импульсом пачки. Очевидно, что отношение сигнал/шум по мощности в момент максимума сигнала на выходе СФ равно

$$\frac{2E_s M}{N_0} = \frac{2E_{\text{пачки}}}{N_0}, \quad (3.29)$$

что соответствует результатам подразд. 3.2.

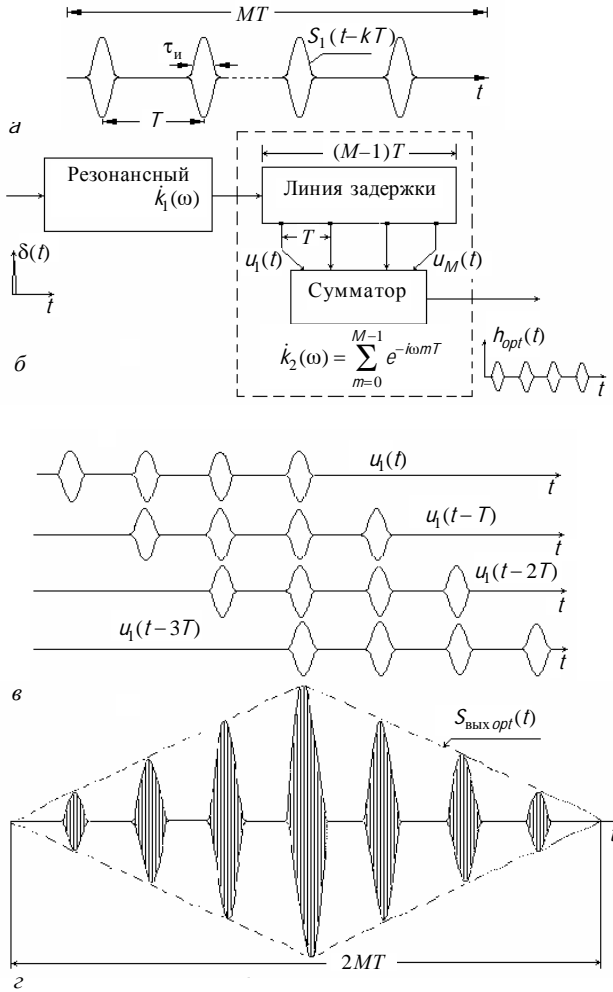


Рис. 3.5. Согласованная фильтрация пачки когерентных радиоимпульсов гауссовской формы: *а* — пачка импульсов; *б* — структура СФ для пачки; *в* — последовательности импульсов на выходах линии задержки и сумматора ($M=4$); *г* — радиоимпульсы на выходе сумматора

Напомним, что выигрыш в отношении сигнал/шум получается за счет синфазного суммирования импульсных колебаний сигнала в определенный момент времени. Спектральные составляющие шума суммируются со случайными фазами. *Гребенчатая структура АЧХ СФ, совпадаю-*

щая со структурой амплитудно-частотного спектра когерентной пачки импульсов, обеспечивает прохождение через СФ только части спектральных составляющих помехи. Наименьшее усиление СФ имеет на тех участках спектра, где уровень сигнальных составляющих мал.

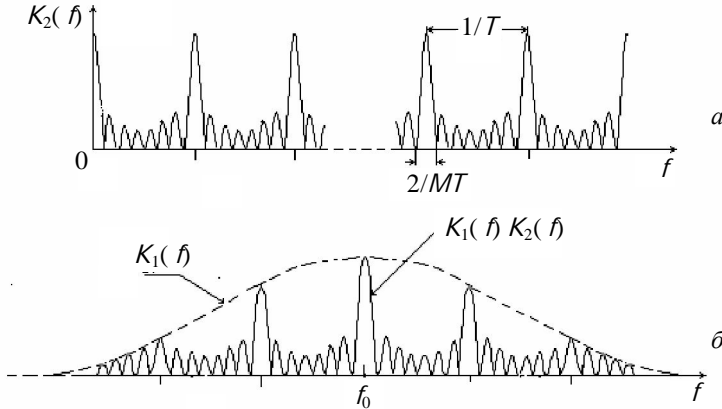


Рис. 3.6. Гребенчатая АЧХ схемы оптимального суммирования (а) и результирующая АЧХ (б) согласованного фильтра для когерентной пачки радиоимпульса

3.4. Обнаружение и различение сигналов при наличии помех (байесовский метод)

Статистическая теория принятия решений при наличии помех включает два основных раздела: *статистическую теорию проверки гипотез* и *статистическую теорию оценок неизвестных параметров*. Для решения задач оптимального обнаружения, различения и классификации сигналов применяют аппарат статистической теории проверки гипотез. В 30-х годах XX века американский математик Джон Нейман и английский математик Карл Пирсон заложили основы теории проверки гипотез.

Рассмотрим две наиболее простые задачи, связанные с бинарным различением и обнаружением сигналов. В этом случае в приемнике реализуется алгоритм принятия решения в пользу одной из двух возможных гипотез: H_0 или H_1 . В цифровых РСПИ эти гипотезы соответствуют передаче по каналу связи на интервале $[0; T]$ одного из двух полезных сигналов $s_0(t, \lambda_0)$ или $s_1(t, \lambda_1)$. В РЛ- и РН-системах при решении задачи обнаружения гипотеза H_0 означает отсутствие полезного сигнала, то есть $s_0(t, \lambda) = 0$. Таким образом, задача различения является более

общей. Рассмотрим эту задачу и применим для ее решения байесовский метод [13], основоположником которого является американский математик А. Вальд.

Постановка задачи. Наблюдаемый сигнал на входе приемника представим в виде

$$y(t) = \theta F[s_1(t, \lambda_1); n(t)] + (1 - \theta) F[s_0(t, \lambda_0); n(t)]; \quad t \in [0, T], \quad (3.30)$$

где θ — случайная величина со значениями 0 и 1; $F[s_i(t, \lambda_i); n(t)]$ — оператор, определяющий способ взаимодействия полезного сигнала $s(\cdot)$ и помехи $n(t)$.

Априорные вероятности значений случайной величины θ известны: $P(\theta = 0) = p_0$ и $P(\theta = 1) = p_1$. Статистические свойства помехи и сигналов предполагаются также заданными. Таким образом, при дискретном отборе данных на интервале $[0, T]$ могут быть определены n -мерные условные ПРВ (см. подразд. 1.4)

$$\left. \begin{aligned} W(y_1, y_2, \dots, y_n / H_0) &= W(\mathbf{y} / H_0), \\ W(y_1, y_2, \dots, y_n / H_1) &= W(\mathbf{y} / H_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

где H_0 и H_1 — две случайные гипотезы (события), соответствующие двум возможным состояниям наблюдаемого сигнала. Оптимальный различитель на основе обработки сигнала $y(t)$ должен *лучшим способом принять решение* о том, какая из двух гипотез реализовалась в конкретном наблюдении. Фактические данные наблюдений в статистике называют *выборкой*; в нашем случае это n -мерный вектор $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, где $y_i = y(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Решение задачи. Очевидно, система различения из-за влияния помех может *случайно* «попасть» в одну из четырех ситуаций.

1. Состояние на входе — верна гипотеза H_1 . Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_1 .

2. Состояние на входе — верна гипотеза H_1 . Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_2 .

3. Состояние на входе — верна гипотеза H_2 . Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_2 .

4. Состояние на входе — верна гипотеза H_2 . Состояние на выходе (решение) — верна гипотеза \hat{H}_1 .

Видно, что ситуации 1 и 3 соответствуют правильному различению сигналов, а 2 и 4 — ошибочному.

Для определения *количественного критерия эффективности различения* назначим плату за результат работы системы. Очевидно, плата зависит от состояния на входе и выходе и определяется потерями, которые несет лицо, использующее результаты различения сигналов. Введем платежную матрицу $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$, где $i, j = 0, 1$; первый индекс определяет принятую гипотезу на выходе (решение), второй — гипотезу на входе. Без потери общности рассуждений будем полагать плату за ошибки положительной, то есть $C_{10}, C_{01} > 0$, а за верные решения $C_{00}, C_{11} \leq 0$. Элементы C_{ij} записаны в таблицу.

Выход	Вход	
	H_0	H_1
\hat{H}_0	C_{00}	C_{01}
\hat{H}_1	C_{10}	C_{11}

Критерий оптимальности различителя. В качестве критерия используем величину средней платы, т.е. ее математическое ожидание потерь. В теории принятия решений эту величину называют *средним риском* R . По правилу вычисления среднего дискретной случайной величины C получим

$$R = \mathbf{M}[C] = C_{00}P(H_0 \cdot \hat{H}_0) + C_{11}P(H_1 \cdot \hat{H}_1) + C_{01}P(H_1 \cdot \hat{H}_0) + C_{10}P(H_0 \cdot \hat{H}_1), \quad (3.32)$$

где $P(H_i \cdot \hat{H}_j) = P(H_i) \cdot P(\hat{H}_j | H_i)$ — вероятность совместного появления событий H_i и \hat{H}_j ; $P(\hat{H}_j | H_i)$ — условная вероятность принятия решения \hat{H}_j в предположении, что на входе верна гипотеза H_i .

Для наглядности дальнейших рассуждений используем геометрическую интерпретацию задачи. На рис. 3.7 условно показано n -мерное евклидово пространство с осями координат ov_i ($i = 1 \div n$). Множество возможных выборочных значений \mathbf{y} обозначим \mathbf{Y} (иногда его называют *пространством наблюдений*). Любому выборочному вектору $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ соответствует точка с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$. Одна из них (y_j) показана на рисунке.

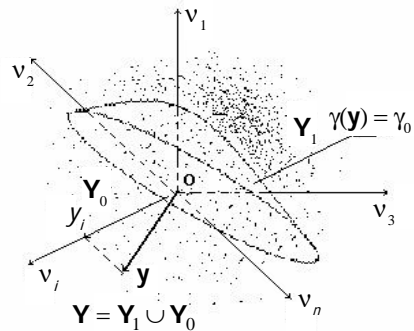


Рис. 3.7. Пространство наблюдений

Очевидно, что решающее правило в бинарном случае сводится к тому, чтобы найти способ разбиения множества \mathbf{Y} на сумму двух непересекающихся подмножеств \mathbf{Y}_0 и \mathbf{Y}_1 , то есть $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{Y}_1$. И далее, если $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$, то принимается решение \hat{H}_0 ; если $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_1$, то принимается решение \hat{H}_1 . Конкретное разбиение в n -мерном пространстве определено заданием уравнения поверхности, которое, в общем случае, имеет вид $\gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = \gamma_0$, где $\gamma_0 = \text{const}$. Таким образом, для всех $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_0$ выполняется неравенство $\gamma(\mathbf{y}) < \gamma_0$ и для $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_1$ соответственно $\gamma(\mathbf{y}) > \gamma_0$. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное решающее правило: функцию $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ и ее пороговое значение — величину γ_0 . Заметим, что любое преобразование наблюдаемых данных в статистических задачах называют *статистикой*.

Важно отметить, что статистика $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ *осуществляет редукцию исходных данных*: на входе наблюдатель располагает n -мерным вектором \mathbf{y} , который содержит информацию о переданном сигнале; на выходе после обработки получена скалярная величина γ . Очевидно, что при таком взаимно неоднозначном преобразовании первичная информация, в общем случае, может быть частично утрачена. Удивительно, однако, то, что существуют такие *статистики* (их называют *достаточными*), которые, *несмотря на редукцию первичных данных*, не ведут к потере полезной информации, содержащейся в них. Интуитивно понятно, что оптимальное решающее правило должно обладать этим замечательным свойством.

Оптимальное решающее правило найдем из условия *минимума среднего риска* (МСР) (3.32). Запишем выражения для условных вероятностей в виде интегралов от соответствующих n -мерных условных ПРВ по области \mathbf{Y}_0 :

$$\left. \begin{aligned} P(\hat{H}_0 / H_0) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n; \\ P(\hat{H}_1 / H_0) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n; \\ P(\hat{H}_0 / H_1) &= \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n; \\ P(\hat{H}_1 / H_1) &= 1 - \int \dots \int_{\mathbf{Y}_0} \int \int W(y_1, \dots, y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Подставив выражения (3.33) в формулу (3.32), после группирования слагаемых с учетом того, что $P(H_0) = p_0$ и $P(H_1) = p_1$, получим

$$R = p_0 C_{10} + p_1 C_{11} + \int \dots \int_{Y_0} [p_1 (C_{01} - C_{11}) W(\mathbf{y} / H_1) - p_0 (C_{10} - C_{00}) W(\mathbf{y} / H_0)] d\mathbf{y}. \quad (3.34)$$

Первые два слагаемых в (3.34) постоянны и от выборки \mathbf{y} не зависят. Подынтегральное выражение при любых \mathbf{y} есть разность положительных величин, поскольку $C_{01} > C_{11}$, $C_{10} > C_{00}$ и условные функции ПРВ $W(\mathbf{y} / H_j) \geq 0$. Таким образом, минимум среднего риска (3.34) можно обеспечить, если для всех $\mathbf{y} \in Y_0$ выполняется условие

$$[p_1 (C_{01} - C_{11}) W(\mathbf{y} / H_1) - p_0 (C_{10} - C_{00}) W(\mathbf{y} / H_0)] < 0. \quad (3.35)$$

Преобразуя неравенство (3.35) так, чтобы в правой части оказались постоянные величины, получим правило принятия решения \hat{H}_0

$$\gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y} / H_1)}{W(\mathbf{y} / H_0)} < \frac{p_0 (C_{10} - C_{00})}{p_1 (C_{01} - C_{11})}. \quad (3.36)$$

Таким образом, оптимальный различитель двух сигналов обрабатывает наблюдаемый сигнал \mathbf{y} и формирует на выходе решение

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_1, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y} / H_1)}{W(\mathbf{y} / H_0)} > \gamma_0; \\ \hat{H}_0, \text{ если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y} / H_1)}{W(\mathbf{y} / H_0)} < \gamma_0, \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

где оптимальный порог $\gamma_{0opt} = p_0 (C_{10} - C_{00}) / p_1 (C_{01} - C_{11})$.

Смысл отношения условных ПРВ в (3.37) состоит в том, что оно пропорционально отношению соответствующих вероятностей. Вычислив его для конкретной выборки \mathbf{y} , различитель «может судить» о том, какая из двух гипотез более правдоподобна. По этой причине функцию $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ в специальной литературе называют *отношением правдоподобия* и обозначают, как правило, $L(\mathbf{y})$, что связано с английским словом *likelihood* — правдоподобие.

Структура устройства, которое реализует оптимальный алгоритм различения сигналов, определяется конкретным видом условных ПРВ.

3.5. Другие критерии оптимальности обнаружения и различения

Можно предположить, что при изменении критерия оптимальности правило принятия оптимального решения, то есть способ обработки входного сигнала, может быть другим. Во всяком случае, повседневный опыт это подтверждает. Например, от критерия оценки работы сотрудника зависит стратегия его поведения. Покажем, что байесов критерий (МСР) является вполне общим, т.е. к нему сводятся другие не менее целесообразные критерии. Предварительно представим (3.32) для величины R в виде

$$R = C_{00} p_0 P(\hat{H}_0 / H_0) + C_{11} p_1 P(\hat{H}_1 / H_1) + C_{01} p_1 P(\hat{H}_0 / H_1) + C_{10} p_0 P(\hat{H}_1 / H_0). \quad (3.38)$$

Критерий минимума взвешенной вероятности ошибки. Выше отмечалось, что в бинарной задаче проверки гипотез возможны четыре исхода, из которых два ошибочных и два верных. В теории проверки гипотез *ошибкой 1-го рода* называют случайное событие, состоящее в том, что система принимает решение \hat{H}_1 в пользу гипотезы H_1 в то время как верна гипотеза H_0 . Вероятность этой ошибки $P(\hat{H}_1 / H_0)$. *Ошибка 2-го рода* состоит в появлении события \hat{H}_0 при условии, что верна гипотеза H_1 . Вероятность этой ошибки $P(\hat{H}_0 / H_1)$. Очевидно, что вполне разумной является стратегия минимизации взвешенной вероятности ошибочных решений. Критерий, очевидно, определяется величиной

$$K_{\text{ош}} = k_1 P(\hat{H}_1 / H_0) + k_2 P(\hat{H}_0 / H_1), \quad (3.39)$$

где k_1 и k_2 — весовые коэффициенты, зависящие от потерь, которые возникают вследствие допущенных ошибок. Сравнивая (3.38) и (3.39), видим что величина $K_{\text{ош}} = R$, если $C_{11} = C_{00} = 0$; $k_1 = p_0 C_{10}$; $k_2 = p_1 C_{01}$. Следовательно, данный критерий есть частный случай критерия МСР.

Критерий идеального наблюдателя. Критерий состоит в том, что в системе принятия решений необходимо обеспечить минимум полной вероятности ошибочных ситуаций. В соответствии с формулой полной вероятности имеем

$$P_{\text{ош}} = \rho_0 P(\hat{H}_1 / H_0) + \rho_1 P(H_0 / H_1). \quad (3.40)$$

Идеальный наблюдатель полагает $\rho_0 = \rho_1 = 0,5$. По существу (3.40) — весовой критерий, когда $k_1 + k_2 = 1$, и обе ошибки одинаково опасны. Подобная ситуация характерна для различения сигналов в цифровых системах связи, где $s_0(t)$ и $s_1(t)$ используются для передачи «0» и «1». Таким образом, этот критерий также следует из критерия МСР.

Критерий Неймана — Пирсона. Для РЛ-систем характерна ситуация, когда сигнал $s_0(t) = 0$, то есть необходимо различать две гипотезы: H_0 — на входе только шум (в зоне обзора цели нет) и H_1 — на входе РЛ-приемника есть сигнал $s_1(t)$. Как правило, вероятности ρ_0 и ρ_1 (отсутствия и наличия цели) неизвестны. Вероятность же ошибки 1-го рода $P(\hat{H}_1 / H_0) = F(\text{fals})$, называемая *вероятностью ложной тревоги*, не должна превосходить заранее заданного значения.

Оптимальный РЛ-приемник обнаружения должен обеспечить максимальную величину *вероятности правильного обнаружения* $P(\hat{H}_1 / H_1) = 1 - P(\hat{H}_0 / H_1) = D$ (detection) при заданной величине F . Это условие носит название *критерия Неймана — Пирсона*. Данный критерий также следует из критерия МСР, как частный случай [1].

Таким образом, для всех перечисленных выше критериев способ обработки остается неизменным, т.е. *оптимальный различитель (обнаружитель) формирует величину $L(y)$ — отношение правдоподобия. Отличие устройств обработки при различных критериях оптимальности состоит в выборе элементов платежной матрицы, которые влияют только на величину порога γ_{opt}* (3.36).

3.6. Различение двух детерминированных сигналов на фоне белого гауссовского шума. Структура оптимальных устройств

Сигнал на входе приемника представим в виде (3.30) и будем полагать, что он состоит из аддитивной смеси точно известного полезного сигнала $s_0(t, \lambda_0)$ или $s_1(t, \lambda_1)$ и собственного шума приемника $n(t)$. Получим

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_0(t, \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.41)$$

Важное условие, при котором мы решаем задачу, состоит в том, что *предполагаются точно известными и моменты начала и окончания временного интервала, в котором находится полезный сигнал $s(t)$* . Неизвестно лишь какой это сигнал: $s_0(t)$ или $s_1(t)$.

Гауссовский белый стационарный шум $n(t)$ имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ (см. (1.46)).

Определим в явном виде отношение правдоподобия (3.37) для дискретной выборки из наблюдаемого сигнала (3.41). Для двух гипотез на входе приемника имеем

$$\left. \begin{aligned} H_0 \Rightarrow \theta = 0: & \quad y_i = s_{0i} + n_i; \quad i = 1, \dots, m, \\ H_1 \Rightarrow \theta = 1: & \quad y_i = s_{1i} + n_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

где $s_{0i} = s_0(t_i)$, $n_i = n(t_i)$.

Будем считать, что энергетический спектр шума сосредоточен в полосе $\pm f_b$. Тогда при интервале дискретизации $\Delta t = 1/(2f_b)$ согласно рис. 1.18 отсчеты гауссовского шума статистически независимы. Дисперсия шума $\sigma_n^2 = N_0 f_b = N_0/(2\Delta t)$. Регулярный сигнал выполняет роль среднего значения — $H_0: \bar{y}_i = s_{0i}$; $H_1: \bar{y}_i = s_{1i}$. С учетом (1.42) m -мерные условные ПРВ выборочного вектора \mathbf{y} для двух гипотез имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H_0: \quad W(\mathbf{y} / H_0) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{0i})^2 \right]; \\ H_1: \quad W(\mathbf{y} / H_1) &= \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - s_{1i})^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где $m = T/\Delta t$ — число отсчетов на интервале наблюдения. Подставляя (3.43) в (3.37), после выполнения простых алгебраических преобразований получим

$$L(\mathbf{y}) = \exp \left[-\frac{\Delta t}{N_0} \left(\sum_{i=1}^m s_{1i}^2 - \sum_{i=1}^m s_{0i}^2 \right) \right] \exp \left[\frac{2\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^m y_i (s_{1i} - s_{0i}) \right]. \quad (3.44)$$

Выражение (3.44) определяет искомое отношение правдоподобия для задачи различения двух сигналов с полностью известными параметрами на фоне помехи в виде квазизелого шума. Оно допускает простой предельный переход к случаю белого шума, когда $f_b \rightarrow \infty$, а $\Delta t \rightarrow 0$. При

этом суммы в показателе степени первого сомножителя перейдут в интегралы, численно равные энергии различаемых сигналов,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m s_{1i}^2 \cdot \Delta t \right) &= \int_0^T s_1^2(t, \lambda_1) dt = E_{s1}(\lambda_1), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^m s_{0i}^2 \cdot \Delta t \right) &= \int_0^T s_0^2(t, \lambda_0) dt = E_{s0}(\lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Сумма в показателе второго сомножителя перейдет в интеграл

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^m (y_i s_{1i} - y_i s_{0i}) \Delta t \right] = \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt. \quad (3.46)$$

Полагая, что энергия сигналов E_{s1} и E_{s0} не зависит от параметра λ , отношение правдоподобия окончательно может быть представлено в виде

$$L[y(t)] = \exp\left(-\frac{E_{s1} - E_{s0}}{N_0}\right) \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) [s_1(t, \lambda_1) - s_0(t, \lambda_0)] dt\right). \quad (3.47)$$

Предельная форма (3.47) отношения правдоподобия (3.44) называется *функционалом отношения правдоподобия*. Процедура различения сигналов, состоящая в сравнении $L[y(t)]$ с порогом γ_0 , может быть заменена испытанием любой монотонной функции от этого отношения на соответствующий порог. Упрощение алгоритма оптимального различения достигается после логарифмирования (3.47). Выполнив его, оставим в левой части решающего правила (3.37) слагаемые, зависящие от наблюдаемой реализации $y(t)$. В итоге оптимальное правило различения принимает следующий вид:

$$z = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt - \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \right] \begin{cases} \hat{H}_1 \\ > z_{\Pi} \\ \hat{H}_0 \\ < z_{\Pi} \end{cases} \quad (3.48)$$

где

$$z_{\Pi} = \ln \gamma_0 + (E_{s1} - E_{s0}) / N_0 — \quad (3.49)$$

модифицированный порог.

Структура каждого из интегралов в (3.48) совпадает со структурой выражения (1.15а), определяющего корреляционную функцию. По этой причине приемное устройство, реализующее для различения двух полностью известных сигналов алгоритм вида (3.48), называют *корреляционным приемником*.

Из (3.48) следует, что для вынесения решения о наличии на входе приемника сигнала $s_1(t, \lambda_1)$ или $s_0(t, \lambda_0)$ необходимо реализацию $y(t)$ перемножить с копией каждого из ожидаемых сигналов, проинтегрировать произведение, вычесть выходные сигналы интеграторов в момент $t = T$ и результат сравнить с порогом. Если пороговый уровень превышен, то принимается решение о наличии на входе $s_1(t)$; в противном случае — решение о наличии $s_0(t)$. Для критерия идеального наблюдателя и величинах энергии $E_{s1} = E_{s0}$, что имеет место, например, при ЛЧМ- и ФКМ-сигналах, порог $z_{\text{П}} = 0$. Таким образом, оптимальный приемник фактически принимает решение по знаку разности выходных сигналов интеграторов. На рис. 3.8,а показана структурная схема оптимального различителя, соответствующая алгоритму (3.48). Генераторы опорного сигнала (ГОС) формируют копии ожидаемых сигналов; устройство синхронизации (УС) обеспечивает тактирование работы различителя — запуск ГОС и считывание уровней сигналов

$$z_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t, \lambda_1) dt \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_0(t, \lambda_0) dt \quad (3.50)$$

с выхода интеграторов в момент $t = T$.

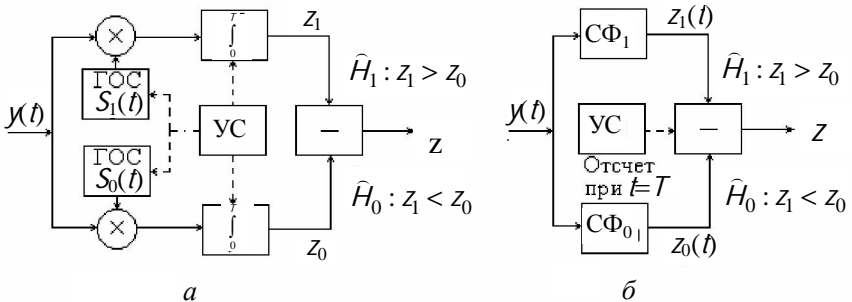


Рис. 3.8. Структурные схемы оптимальных различителей:

а — вариант с применением корреляторов;

б — вариант с применением согласованных фильтров

При сравнении (3.50) и (3.17) видно, что величины z_1 и z_0 можно получить как выходной сигнал $z(t, \lambda)$ СФ в момент времени $t = t_0$. Структурная схема различителя с использованием СФ приведена на рис. 3.8,б. Синхронизатор обеспечивает сравнение выходных напряжений СФ в момент времени $t = t_0 = T$. Рассмотренная задача типична для цифровых систем передачи информации. В РЛ- и РН-системах гипотезе H_0 соответствует ситуация, когда $y(t) = n(t)$, т.е. объекта в зоне обзора нет, и на входе приемника присутствует только собственный шум. Очевидно, что структура оптимального РЛ-обнаружителя является частным случаем различителя. Алгоритм обработки в этом случае содержит один канал.

3.6.1. Статистические характеристики качества различения

Критерий качества решения задачи различения определен выражением (3.40). Вероятности двух ошибочных решений для критерия идеального наблюдателя (порог $z_{\text{П}} = 0$) согласно (3.48) равны

$$P(\hat{H}_1/H_0) = \int_0^{\infty} W(z/H_0) dz, \quad P(\hat{H}_0/H_1) = \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz, \quad (3.51)$$

где $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ — условные ПРВ сигнала $z = z_1 - z_0$ на выходе разностного блока (см. (3.48), (3.50)). Если на входе верна гипотеза H_1 , то случайная величина сигнала на выходе различителя

$$z = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_0(t)] dt. \quad (3.52)$$

Являясь линейным преобразованием гауссовского шума, величина z также будет гауссовской. Расчет условного среднего значения и условной дисперсии величины z выполним по способу, который использовался при выводе (3.21). В итоге получим

$$\mathbf{M}[z/H_1] = \frac{2E_s}{N_0}(1 - k_s), \quad D_{z/H_1} = \frac{4E_s}{N_0}(1 - k_s), \quad (3.53)$$

где величина

$$k_s = \frac{1}{E_s} \int_0^T s_1(t) s_0(t) dt \quad (3.54)$$

является по смыслу коэффициентом взаимной корреляции между сигналами $s_1(t)$ и $s_0(t)$.

Если на входе верна гипотеза H_0 , то случайная величина

$$z = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_0(t) + n(t)][s_1(t) - s_0(t)] dt \quad (3.55)$$

имеет гауссовскую ПРВ с параметрами

$$\mathbf{M}[z/H_0] = -\frac{2E_s}{N_0}(1-k_s) \quad \text{и} \quad D_{z/H_0} = \frac{4E_s}{N_0}(1-k_s). \quad (3.56)$$

Условные ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ показаны на рис. 3.9. Полная вероятность ошибочного различения сигналов для «идеального наблюдателя» равна

$$P_{\text{ош}} = 0,5 \left[\int_0^{\infty} W(z/H_0) dz + \int_{-\infty}^0 W(z/H_1) dz \right]. \quad (3.57)$$

Вероятности двух ошибок различения (3.51) численно равны площадям заштрихованных областей (рис. 3.9). Интегрирование в (3.57) гауссовских ПРВ сводится, как известно, к интегралу вероятности $\Phi(x)$. После вычислений получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{(\overline{E_s}/N_0)(1-k_s)}\right). \quad (3.58)$$

Интеграл вероятности $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей функцией аргумента поэтому при заданном отношении сигнал/шум наибольшую помехоустойчивость (меньшую вероятность ошибки) будут иметь сигналы, для которых коэффициент взаимной корреляции минимален. Величина k_s изменяется от минус 1, при $s_1(t) = -s_0(t)$ (противоположные сигналы), до плюс 1, при $s_1(t) = s_0(t)$. В случае, когда $k_s = 0$, говорят, что сигналы ортогональны. Одинаковые сигналы ($k_s = 1$), очевидно, невозможно различить по форме, и поэтому $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(0) = 0,5$.

Наиболее эффективно различимы сигналы, одинаковые по форме и противоположные по знаку, т.е. для них $k_s = -1$. На рис. 3.10,а показаны результаты расчета по формуле (3.58). Зависимость $P_{\text{ош}} = f[2E_s/N_0]$ при оптимальных методах приема сигналов называют кривыми потенциальной помехоустойчивости.

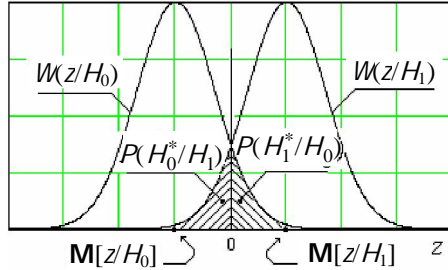


Рис. 3.9. Гауссовская плотность распределения вероятностей сигнала z для двух гипотез: H_1 — наличие сигнала $s_1(t)$; H_0 — наличие сигнала $s_0(t)$

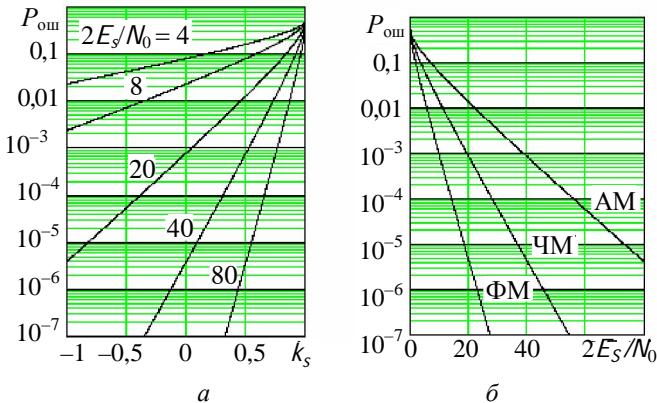


Рис. 3.10. Зависимость полной вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ от коэффициента взаимной корреляции k_s между детерминированными сигналами (а) и кривые потенциальной помехоустойчивости (б) для АМ, ЧМ, ФМ

На рис. 3.10,б приведены эти кривые для трех видов модуляции:

– АМ с сигналами $s_1(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ и $s_0(t) = 0$;

– ЧМ с сигналами $s_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ и $s_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, причем обычно $(\omega_1 - \omega_0) \cdot T \gg 1$ и $k_s = 0$;

– ФМ с сигналами $s_1(t) = A \cos(\omega t)$ и $s_0(t) = -A \cos(\omega t)$, то есть $k_s = -1$. Из графиков следует, что при заданной энергии элементарных сигналов наибольшую потенциальную помехоустойчивость имеет ФМ-сигналы.

3.6.2. Статистические характеристики качества обнаружения

Вычислим показатели, определяющие качество работы оптимального обнаружителя. В РЛ-системах для задач обнаружения гипотеза $H_0: y(t) = n(t)$. Выражения сигнала z на выходе корреляционного приемника для двух гипотез следуют из (3.52) и (3.55). Условные ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ также остаются гауссовыми. Их параметры (среднее значение и дисперсия) рассчитываются тем же способом, что и при выводе формулы (3.21). В итоге получаем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}[z/H_1] &= 2E_s/N_0; & D_{z/H_1} &= 2E_s/N_0; \\ \mathbf{M}[z/H_0] &= 0; & D_{z/H_0} &= 2E_s/N_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

На рис. 3.11 показаны условные ПРВ; они имеют гауссовскую форму и отличаются, согласно (3.59), только положением.

В соответствии с критерием Неймана — Пирсона необходимо задать *вероятность ложной тревоги (fals)* $F = P(\hat{H}_1/H_0)$, то есть вероятность превышения порогового уровня z_{Π} случайной величиной z когда на входе приемника имеется только шум

$$F = \frac{1}{\sqrt{2E_s/N_0} \sqrt{2\pi}} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(2E_s/N_0)}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}}{\sqrt{2E_s/N_0}}\right). \quad (3.60)$$

Вероятность правильного обнаружения (detection) $D = P(\hat{H}_1/H_1)$, при этом оказывается равной

$$D = \frac{1}{q_0 \sqrt{2\pi}} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} e^{-\frac{(z-q_0)^2}{2q_0^2}} dz = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}}{q_0} - q_0\right), \quad (3.61)$$

где $q_0 = \sqrt{2E_s/N_0}$ — отношение сигнал/шум по напряжению на выходе коррелятора при $t = T$ или на выходе СФ при $t = t_0$.

На рис. 3.11 заштрихованы площади, соответствующие величинам D и F . Видно, что желание одновременного уменьшения F и увеличения D является противоречивым. При заданном значении F из (3.60) следует определить нормированный порог z_{Π}/q_0 и затем согласно (3.61) вычислить вероятность правильного обнаружения D . Семейство кривых $D = f(q_0)$ при $F = \text{const}$ называют *характеристиками обнару-*

жения. Эти характеристики для оптимального обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами следуют из (3.60), (3.61) и приведены на рис. 3.12. Они позволяют для заданных значений F и D определить необходимое отношение сигнал/шум q_0 .

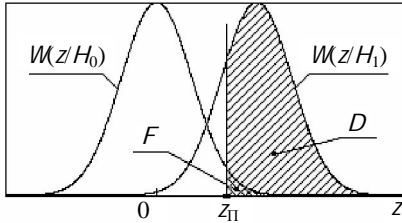


Рис. 3.11. Нормальные ПРВ при наличии и отсутствии сигнала: D — вероятность правильного обнаружения; F — вероятность ложной тревоги

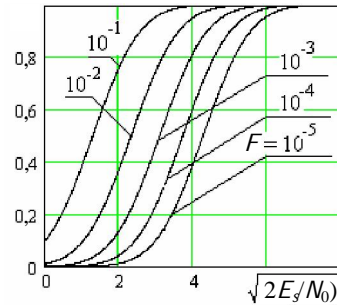


Рис. 3.12. Характеристики обнаружения детерминированного сигнала

Теория обнаружения утверждает, что *никакой другой способ обработки, кроме оптимального*, не может обеспечить лучшего сочетания параметров F , D , q_0 . В этом и есть сила и практическая польза результатов теории.

Результаты третьей главы показывают ту важную роль, которую выполняет согласованный фильтр (или коррелятор) при извлечении полезной информации о наличии сигнала известной формы в смеси с шумом. Повторим, что *эффект улучшения отношения сигнал/шум на выходе СФ по сравнению с таковым на входе объясняется по существу когерентным (синфазным) сложением составляющих полезного сигнала и некогерентным суммированием шума*. Например, в случае ФКМ-сигнала, состоящего из M парциальных импульсов, комплексная амплитуда напряжения в максимуме на выходе *когерентного сумматора* после линии задержки с M отводами (см. рис. 3.3–3.4) равна $\dot{S}_\Sigma = M\dot{S}_1$ (\dot{S}_1 — комплексная амплитуда парциального импульса). Соответственно, мощность полезного сигнала $P_\Sigma = M^2 S_1^2 / 2$. Поскольку шумы *некогерентны* и суммируются по мощности, то их средняя

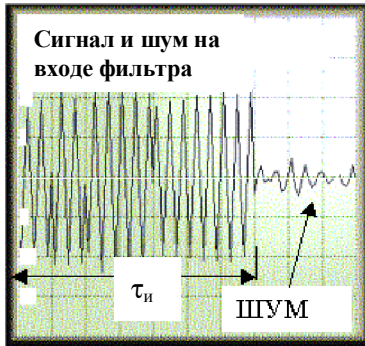
мощность в полосе $\Delta F_{\text{опт}}$ фильтра, согласованного с парциальным импульсом длительностью $\Delta = \tau_{\text{и}} / M$, равна $P_n = M \sigma_n^2 = M N_0 \cdot \Delta F_{\text{опт}}$. Полоса $\Delta F_{\text{опт}} \approx 1/2\Delta$, так как у СФ частотная зависимость коэффициента передачи по мощности есть функция вида $|\sin x / x|^2$. Для отношения сигнал/шум по мощности на выходе СФ получим: $q_0^2 = P_{\Sigma} / P_n = 2 E_s / N_0$, где полная энергия сигнала $E_s = \tau_{\text{и}} \cdot S_1^2 / 2$.

На рис. 3.13 приведены осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ-сигнала (7-позиционный код Баркера). Длительность сигнала $\tau_{\text{и}}$ соответствует семи клеткам на экране. На рис. 3.13а,б показан ВЧ-процесс (смесь сигнала и шума) на входе фильтра и огибающая на выходе фильтра при отношении уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума, равному примерно 10. Очевидно, что проблема обнаружения такого сильного сигнала практически отсутствует. Она возникает, когда сигнал на входе СФ сравним по уровню с шумом, и это видно на рис. 3.13,в,д. Положение существенно улучшается на выходе фильтра (рис. 3.13,з,е).

Следует обратить внимание на боковой всплеск слева от главного максимума (рис. 3.13,е). В данном случае он соответствует боковому лепестку временной автокорреляционной функции полезного сигнала (см. рис. 3.4). Однако в реальной РЛ-системе, когда число целей заведомо неизвестно, этот боковой максимум может принадлежать другому объекту, сигнал от которого более слабый. Это означает, в частности, что уровень боковых лепестков ФН сигнала имеет важное значение в плане достоверности получаемой в РТС информации. Он должен иметь вполне определенную величину, зависящую от динамического диапазона полезных сигналов на входе.

3.6.3. Общие черты задач «сыщика» и «оптимального обнаружителя»

Алгоритмы обнаружения и различения сигналов, полученные выше, по своей логической структуре сходны с процедурой, которую реализует детектив при поиске-обнаружении преступника (полезный сигнал) в большой толпе (шуме) людей. Действительно, он заведомо изучает облик и повадки преступника, собирает всю *априорную информацию* о нем. В самой благоприятной (простой) ситуации он имеет его фотографию (*опорный сигнал*) и точно знает, где и когда (например, в каком кафе и в какое время), как правило, появляется сигнал-преступник.



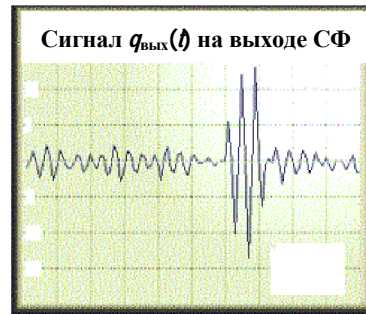
а



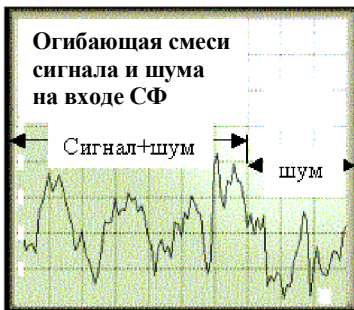
б



в



г



д



е

Рис. 3.13. Осциллограммы процессов при согласованной фильтрации ФКМ-сигнала в смеси с гауссовским шумом: а, б — на входе фильтра отношение сигнал/шум; в, е — отношение сигнал/шум

Все действия (рассуждения) и принятие решения осуществляет мозг детектива (вычислительное устройство). Проблема в том, что реально всегда существует помеха («люди — шум»), и неизвестно точно, есть ли там преступник в данный момент.

Задача обнаружения, конечно, будет намного сложнее, если информация о сигнале станет не такой полной. Радиосигнал может иметь неизвестное время прихода (и преступник тоже) или, например, неизвестную и случайную амплитуду и начальную фазу (преступник также может изменить черты лица). Наконец и шум может быть не белый и не гауссовский — люди могут быть в кафе, на пляже, где они и преступник тоже в темных очках. Что должен сделать сыщик, не нарушая закон, чтобы побудить посетителей снять очки, дабы повысить вероятность правильного обнаружения? Оптимальный алгоритм обнаружения при этом окажется другим. В теории обнаружения получены значимые результаты для различных, встречающихся на практике, ситуаций.

Легко представить, что число обоснованно разнообразных задач обнаружения велико. Однако следует уяснить два очевидных обстоятельства: ставить задачу обнаружения (различения), *ничего не зная о сигнале*, не имеет смысла, и эффективность обнаружителя (различителя) всегда будет выше, если он *наиболее полно учитывает априорную информацию об ожидаемом сигнале и шуме*.

Читателю, который проявит глубокий интерес к задачам теории обнаружения сигналов, можно рекомендовать для изучения [7, 9, 13].

После изучения теоретического материала разд. 3 следует перед выполнением контрольной работы 2 ответить на контрольные вопросы, представленные в подразд. 3.7.

3.7. Контрольные вопросы

1. Назовите основные задачи статистической теории радиосистем.
2. В чем суть задачи оптимизации РТС, каковы основные этапы ее решения?
3. Изложите постановку задачи оптимизации характеристик линейного фильтра, решением которой является согласованный фильтр.
4. Если $\hat{g}(\omega)$ есть комплексный частотный спектр полезного сигнала $s(t)$, то какой вид имеют комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра и его импульсная реакция?

5. Объясните работу согласованного фильтра на физическом уровне.
6. Какие величины определяют максимальное отношение уровня сигнала к среднеквадратичному значению шума на выходе согласованного фильтра?
7. В какой момент времени на выходе согласованного фильтра можно получить наибольшее превышение полезного сигнала над шумом?
8. Какую форму имеет полезный сигнал на выходе согласованного фильтра, если входной сигнал есть: одиночный прямоугольный видеоимпульс; радиоимпульс с прямоугольной огибающей; одиночный радиоимпульс с ФКМ?
9. Изобразите структурную схему согласованного фильтра для радиоимпульса с ФКМ; для пачки радиоимпульсов с простой модуляцией.
10. Изложите постановку задачи в байесовской теории синтеза оптимального приемника-раличителя (обнаружителя) двух полезных сигналов на фоне помехи.
11. Каков смысл величин, определяющих платежную матрицу в задаче синтеза оптимального приемника-различителя?
12. Что есть средний байесовский риск в задаче синтеза: оптимального приемника-различителя двух сигналов; приемника-обнаружителя полезного сигнала на фоне шума?
13. Запишите в общем виде оптимальное решающее правило приемника-различителя двух сигналов на фоне помехи.
14. Почему отношение двух плотностей распределения вероятностей, участвующих при формировании решения на выходе оптимального приемника-различителя, называют отношением правдоподобия?
15. Дайте формулировку критерия «идеального наблюдателя»; критерия Неймана — Пирсона.
16. Изобразите структуру оптимального приемника-различителя двух полностью известных полезных сигналов $S_0(t)$ и $S_1(t)$, поступающих на вход приемника вместе с белым гауссовским шумом.
17. Изобразите структуру оптимального приемника-обнаружителя полностью известного сигнала, поступающего на вход приемника вместе с белым гауссовским шумом.
18. Почему в структуре оптимального приемника-различителя (обнаружителя) полностью известных сигналов возможно применение согласованных фильтров?
19. В каких координатах представляют графики кривых, определяющих статистические характеристики качества бинарного приемника-различителя?

20. Какие из перечисленных четырех случайных событий в приемнике-обнаружителе являются противоположными: ложная тревога; пропуск сигнала; правильное обнаружение; неправильное обнаружение?

21. Изобразите графически ПРВ $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ выходного сигнала оптимального приемника-различителя (обнаружителя) и укажите площади под кривыми плотности вероятностей, определяющие вероятности принятия ошибочных решений.

22. Докажите, что интеграл свертки, определяющий для линейного фильтра связь выходного сигнала с входным, превращается в корреляционный интеграл, если линейный фильтр согласован с входным сигналом.

23. В чем сходство и различие выходных сигналов приемника, выполненного по схеме корреляционной обработки и с согласованным фильтром?

24. Каковы последствия нарушения синхронизации при оптимальном приеме сигналов с использованием корреляционного приемника?

4. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

4.1. Оценки параметров сигналов и их свойства

В этом разделе будут рассмотрены основные аспекты второй обширной области теории статистических решений — теории оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех. Фактически в прикладной теории РТС представляют интерес оптимальные методы демодуляции сигналов (*первичной обработки*), если *информационное сечение* обозначено на входе приемника. Если же оно выбрано в НЧ-тракте РТС (*вторичная обработка*), то интерес представляют оптимальные алгоритмы выделения (*фильтрации*) НЧ-сообщений или их параметров. В последнем случае помехи должны быть приведены ко входу НЧ-тракта РТС.

В целях простоты изучения будем считать, что информативное сообщение $\lambda(t)$ является скалярным и постоянно на интервале обработки. Обозначим его неизвестное и постоянное значение λ . В общем случае полезный сигнал может также содержать один или несколько мешающих параметров β .

В теории оценивания известны два различных подхода к построению оценок параметров. Первый из них ориентирован на получение *интервальной оценки*. В этом случае для заданной *доверительной вероятности* P_d в устройстве обработки сигнала $y(t)$ формируются две величины $\hat{\lambda}_н$ и $\hat{\lambda}_в$, определяющие нижнюю и верхнюю *границы доверительного интервала*, для которого выполняется условие

$$P\left[\lambda \in (\hat{\lambda}_н; \hat{\lambda}_в)\right] = P_d.$$

Таким образом, доверительный интервал — промежуток, который с вероятностью P_d «накрывает» неизвестное значение параметра λ .

Второй подход предполагает формирование *точечных оценок*. Задача оценивания параметра λ теперь состоит в том, чтобы по принятой (*наблюдаемой*) реализации сигнала $y(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t)$; $t \in (0; T)$ получить достаточно близкую к λ величину $\hat{\lambda} = E\{y(t)\}$. Здесь E — функционал, определяющий преобразование реализации $y(t)$, заданной на интервале $(0; T)$, в скалярную величину $\hat{\lambda}$, которую называют *оценкой параметра* λ . Под оценкой параметра $\hat{\lambda}$ обычно понимают некоторое *правило (способ)* получения $\hat{\lambda}$ по конкретной реализации входного сигнала.

Являясь неизвестным, параметр λ может в зависимости от конкретной задачи рассматриваться как случайная величина, постоянная на интервале обработки, либо как неизвестная и не случайная величина. Например, в РЛ- и РН-системах при оценке дальности до случайно расположенной цели за время приема одного или нескольких отраженных радиопульсов (обычно это не более 10–40 мс), можно считать, что параметр $\lambda \equiv D = \text{const}$ и является случайной величиной. В подобных случаях ПРВ параметра λ до приема сигнала $y(t)$ называют *априорной* и обозначают $W_\lambda(\lambda)$.

Оценка $\hat{\lambda}$, будучи результатом преобразования конкретной реализации $y(t)$, содержащей шум, является случайной величиной. Изучая свойства оценок, обычно выделяют следующие: 1) несмещенность оценки; 2) эффективность оценки; 3) состоятельность или сходимость оценки. Поясним подробнее эти свойства.

Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно математическому ожиданию оцениваемого параметра. Оценка является *безусловно несмещенной*, если $\mathbf{M}[\hat{\lambda}] = \mathbf{M}[\lambda]$. Если же среднее значение оценки вычисляют при фиксированном λ и справедливо равенство $\mathbf{M}[\hat{\lambda} / \lambda] = \lambda$, то оценка является *условно несмещенной*.

Очевидно, процесс оценивания сопровождается ошибками. Разность $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$ есть *ошибка оценки*. Среднее значение $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - \bar{\hat{\lambda}}$ называют *смещением оценки*. Для несмещенных оценок $\bar{\varepsilon} = 0$.

Рассеяние (разброс) ошибки характеризуют средним значением квадрата ошибки

$$\mathbf{M}[\varepsilon^2] = \overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4.1)$$

где $W(\varepsilon)$ — ПРВ ошибки оценивания. Величина $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ имеет размерность оцениваемого параметра и называется *среднеквадратичной ошибкой (СКО) оценки*. Если в (4.1) использовать условную ПРВ $W(\varepsilon/\lambda)$, то есть распределение вероятностей ошибки при фиксированном значении неизвестного параметра λ , то получим *условную среднеквадратичную ошибку* $\sigma_{\varepsilon/\lambda}$.

В некоторых случаях удобно использовать величину дисперсии ошибки

$$D_\varepsilon = \mathbf{M} \left[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \right] = \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2. \quad (4.2)$$

Из выражения (4.2) видно, что для *несмещенных оценок* ($\bar{\varepsilon} = 0$) понятия дисперсии оценки и среднего квадрата ошибки тождественны.

Несмещенная оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую из всех возможных оценок дисперсию.

Оценка называется *состоятельной в среднеквадратичном смысле*, если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{(\hat{\lambda}_T - \lambda)^2} = 0, \quad (4.3)$$

где $\hat{\lambda}_T$ означает, что оценка получена в результате обработки реализации $\mathcal{U}(t)$, длительность которой T . Другими словами, для состоятельной оценки средний квадрат ошибки при $T \rightarrow \infty$ приближается к нулю.

В случае оценки векторного параметра $\lambda^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (знак транспонирования T у вектора означает запись его в виде строки) устройство обработки (измеритель) формирует вектор оценок $\hat{\lambda}^T = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$. Соответственно имеем вектор ошибок оценок $\varepsilon^T = (\lambda - \hat{\lambda})^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$. Рассеяние ошибок в векторном случае характеризует *дисперсионная матрица ошибок оценивания*. Например, РЛ-системы часто работают в режиме совместного измерения дальности D и радиальной скорости V цели. Ковариационная матрица ошибок в 2-мерной задаче оценивания имеет вид

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \mathbf{M} \left[\varepsilon \cdot \varepsilon^T \right] = \begin{vmatrix} \overline{\varepsilon_D^2} & \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} \\ \overline{\varepsilon_D \varepsilon_V} & \overline{\varepsilon_V^2} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

На главной диагонали матрицы \mathbf{K}_ϵ расположены средние квадраты ошибок по дальности и скорости; элементы другой диагонали равны корреляционному моменту ошибок двух параметров. Эта матрица симметрическая. Ее определитель, как правило, не равен нулю.

4.2. Основные способы формирования оценок неизвестных параметров сигналов при наличии помех

4.2.1. Байесовские оценки

В разд. 3 отмечалось, что при решении задач синтеза структуры устройств обработки следует максимально учитывать реальную априорную информацию о статистических свойствах сигналов и помех. Степень полноты этой информации определяется содержанием конкретной задачи. Рассмотрим последовательно несколько способов построения оценок параметров в порядке уменьшения полноты априорной информации, требуемой для получения оценки.

Будем считать, что наблюдаемый сигнал $y(t) = F[s(t, \lambda); n(t)]$; $t \in [0; T]$, т.е. он получен в результате определенного взаимодействия сигнала $s(t, \lambda)$, зависящего от одного информативного параметра λ и случайной помехи $n(t)$. Параметр λ является случайным и остается постоянным на интервале наблюдения. Его априорная ПРВ $W(\lambda)$ известна.

Статистические свойства помехи также известны. Это означает, что при дискретном отборе данных с шагом по времени Δt на интервале наблюдения $(0; T)$ может быть задана m -мерная ПРВ помехи $W_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = W_n(\mathbf{n})$. Статистические свойства полезного сигнала определены заданием m -мерной условной ПРВ $W_s(\mathbf{s} / \lambda)$.

Таким образом, при заданном операторе F и известных статистических свойствах сигнала и помехи определена m -мерная условная ПРВ наблюдаемого случайного сигнала $W_y(\mathbf{y} / \lambda)$, а также совместная ПРВ $W(\mathbf{y}, \lambda) = W_y(\mathbf{y} / \lambda)W_\lambda(\lambda)$.

Параметр λ в задаче построения байесовских оценок является аналогом номера гипотезы в проблеме выбора решения при различении сигналов. Однако теперь λ есть непрерывная (или дискретная) случайная величина. Аналогом потерь (в задаче различения), связанных

с принятием гипотезы \hat{H}_i , когда в действительности справедлива гипотеза H_j , в задаче оценки является *функция потерь* $C(\varepsilon)$. Значение этой функции определяет потери, которые несет потребитель оценок вследствие ошибки $\varepsilon = \lambda - \hat{\lambda}$, обусловленной расхождением оценки $\hat{\lambda}$ с истинным параметром λ .

В качестве критерия оптимальности оценок выступает *байесовский риск* R , который определяется как *статистическое среднее функции потерь по всем возможным реализациям наблюдаемого сигнала и оцениваемого параметра*. Таким образом, получаем

$$R = \mathbf{M} [C(\varepsilon)] = \overline{C[\lambda - \hat{\lambda}(\mathbf{y})]} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C[\lambda - \hat{\lambda}(\mathbf{y})] W(\mathbf{y}, \lambda) d\mathbf{y} d\lambda, \quad (4.5)$$

где $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$ — оценка, являющаяся функцией наблюдаемого сигнала (выборки) при дискретном отборе данных. Интегрирование по \mathbf{y} в (4.5) является m -кратным, то есть $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_m$.

Оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$, минимизирующая средний риск (4.5), называется *байесовской*, а получающееся при этом минимальное значение R_{\min} среднего риска — *байесовским риском*.

Согласно формуле Байеса представим совместную ПРВ в виде

$$W(\mathbf{y}, \lambda) = W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y}) W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

где $W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})$ — апостериорная ПРВ параметра при конкретной выборке наблюдаемого сигнала \mathbf{y} . Подставим (4.6) в (4.5) и запишем выражение для среднего риска иначе:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{\infty} C[\hat{\lambda}(\mathbf{y}) - \lambda] W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.7)$$

Внутренний интеграл в (4.7) вычисляется при фиксированном значении выборки \mathbf{y} и является по существу условным апостериорным средним (по множеству значений λ) функции потерь. По смыслу это *условный (апостериорный) байесовский риск*. Обозначим его $R_{\lambda}(\mathbf{y})$, что означает зависимость условного риска от \mathbf{y} при заданном способе формирования $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$. В итоге (4.7) примет вид

$$R = \overline{R_\lambda(\mathbf{y})} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) R_\lambda(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.8)$$

Функция $W_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \geq 0$ определяет свойства входного сигнала и явно от λ не зависит. Поэтому минимум среднего риска R можно обеспечить путем минимизации условного риска

$$R_\lambda(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} C[\hat{\lambda}(\mathbf{y}), \lambda] W_\lambda(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda \quad (4.9)$$

за счет оптимального способа построения оценки $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$.

Обсудим возможный вид функции потерь. Здравый смысл позволяет считать целесообразным задание $C(\varepsilon)$ со следующими свойствами: 1) $C(0) = 0$ (безошибочная оценка не влечет потери); 2) $C(\varepsilon) = C(-\varepsilon)$ (потери не зависят от знака ошибки); 3) $C(\varepsilon)$ — функция неубывающая (с увеличением ошибки потери растут или могут быть постоянными). Этим требованиям удовлетворяют три классических функции: квадратичная, модульная и простая (рис. 4.1).

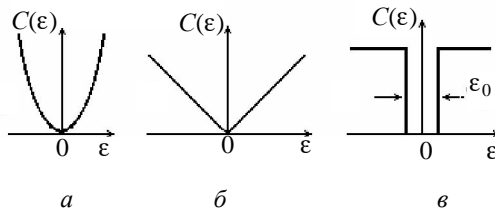


Рис. 4.1. Типичные функции потерь при оценке скалярного параметра: *a* — квадратичная; *б* — модульная; *в* — простая

Определим вид байесовской оценки при квадратичной функции потерь. Выражение (4.9) принимает при этом следующий вид:

$$R_\lambda(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \hat{\lambda})^2 W_\lambda(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.10)$$

Видно, что байесовская оценка $\hat{\lambda}_B$, обеспечивающая минимум (4.10), будет иметь минимальную среднеквадратичную ошибку. Полагая

выполненными условиями дифференцирования интеграла по параметру (оценке), вычислим производную от условного риска (4.10) по оценке и приравняем ее нулю. В итоге получим уравнение

$$\left. \frac{\partial R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y})}{\partial \hat{\lambda}} \right|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_B} = \hat{\lambda}_B - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, байесовская оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ при квадратичной функции потерь имеет минимум СКО и определяется в виде

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что оценка $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ равна апостериорному среднему значению параметра λ по распределению вероятностей $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ при фиксированном значении выборки \mathbf{y} .

Рассмотрим байесовскую оценку параметра λ при использовании функции потерь модульного типа. Подставив $C(\varepsilon) = |\hat{\lambda} - \lambda|$ в (4.9), имеем

$$\begin{aligned} R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda} - \lambda| W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda^*} (\hat{\lambda} - \lambda) W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda - \int_{\lambda^*}^{\infty} (\hat{\lambda} - \lambda) W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \end{aligned}$$

Приравняв производную от условного риска по $\hat{\lambda}$ нулю, получаем уравнение для оценки

$$\int_{\hat{\lambda}_B}^{\infty} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda = \int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_B} W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.13)$$

Из (4.13) видно, что байесовская оценка при модульной функции потерь совпадает с определением медианы апостериорного распределения вероятностей $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ неизвестного параметра λ .

Простая функция потерь вида (рис. 4.1, в) определяется выражением

$$C(\lambda, \hat{\lambda}) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| < \varepsilon_0, \\ 1 & \text{при } |\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

При использовании этой функции полагается, что оценки, образуемые измерительной РТС, одинаково хороши, если ошибка не превышает по модулю ε_0 (потери равны нулю), и одинаково плохи, если модуль ошибки превышает ε_0 . Применение функции потерь (4.14) оправдано, например, в системе радионаведения, когда поражение цели происходит при любом промахе не превышающем некоторой величины.

Представим средний риск для функции потерь (4.14) в виде

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, \hat{\lambda}) d\lambda d\hat{\lambda} = \iint_{|\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon_0} W(\lambda, \hat{\lambda}) d\lambda d\hat{\lambda} = P\left[|\lambda - \hat{\lambda}| > \varepsilon_0\right].$$

Из данного выражения видно, что минимизация среднего риска эквивалентна минимуму вероятности того, что модуль ошибки превысит заданное значение ε_0 . Для определения решающего правила перепишем выражение условного риска в виде

$$R_{\hat{\lambda}}(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{(\hat{\lambda} - \varepsilon_0)} W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda + \int_{(\hat{\lambda} + \varepsilon_0)}^{\infty} W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda. \quad (4.15)$$

Дифференцируя (4.15) по $\hat{\lambda}$ и приравнявая производную нулю, найдем условие, определяющее оценку:

$$W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})\big|_{\lambda = \hat{\lambda} - \varepsilon_0} = W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})\big|_{\lambda = \hat{\lambda} + \varepsilon_0}. \quad (4.16)$$

Таким образом, оптимальная оценка должна обеспечивать равные значения апостериорной ПРВ в точках $(\hat{\lambda} + \varepsilon_0)$ и $(\hat{\lambda} - \varepsilon_0)$. Если функция $W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})$ симметрична относительно некоторого $\lambda = \tilde{\lambda}$, то байесовская оценка совпадает с центром симметрии, т.е. $\hat{\lambda}_B = \tilde{\lambda}$. Можно показать, что по мере уменьшения величины ε_0 байесовская оценка при простой функции потерь приближается к значению параметра λ_{\max} , при котором апостериорная ПРВ $W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})$ максимальна.

4.2.2. Оценки максимального правдоподобия

Байесовская оценка при простой функции потерь соответствует положению максимума функции $W_{\lambda}(\lambda / \mathbf{y})$ и может быть определена как корень уравнения

$$\left. \frac{\partial W(\lambda / \mathbf{y})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.17)$$

Поскольку логарифм есть монотонно возрастающая функция аргумента, то часто более удобно решать уравнение

$$\left. \frac{\partial \ln [W(\lambda / \mathbf{y})]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.18)$$

Используем известное соотношение для любой условной ПРВ $W(\lambda / \mathbf{y}) = W(\lambda) W(\mathbf{y} / \lambda) / W(\mathbf{y}) = kW(\lambda)W(\mathbf{y} / \lambda)$, где $k = W(\mathbf{y})$ — константа, не зависящая от λ , и подставим его в (4.18). В итоге уравнение для оценки примет вид

$$\left. \frac{\partial \ln [W(\mathbf{y} / \lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_B} + \left. \frac{\partial \ln [W(\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_B} = 0. \quad (4.19)$$

Во многих практических задачах априорная неопределенность о параметре велика, т.е. функция $W(\lambda)$ достаточно широкая — имеет слабо выраженный максимум по λ или вовсе его не имеет. В этом случае второе слагаемое в (4.19) близко к нулю. В итоге оценка по максимуму апостериорной вероятности совпадает с небайесовской оценкой по максимуму функции $L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y} / \lambda)$. Функцию $L(\lambda)$ называют *функцией правдоподобия* (ФП). Оценки параметров, определенные этим способом, называют оценками *максимального правдоподобия* (МП). Таким образом, *функция правдоподобия есть функция неизвестного параметра λ и важно изменение ее значений при изменении параметра, подлежащего оцениванию при заданном сигнале \mathbf{y} .*

Отметим, что существуют различные ситуации (например, измерение радиолокатором скорости вращения планеты), когда нет смысла предполагать, что параметр λ выбирается случайным образом из некоторого множества, на котором можно разумным способом задать априорную ПРВ. В этом случае использование оценок МП в сравнении с байесовскими в большей степени соответствует содержанию подобных задач.

При наличии в полезном сигнале случайных неинформативных параметров β ФП принимает вид $L(\lambda; \beta) = W(\mathbf{y} / \lambda; \beta)$. Определение МП оценки $\hat{\lambda}_{МП}$ в этом случае предполагает вычисление безусловной ПРВ выборки путем статистического усреднения, то есть

$$W(\mathbf{y}/\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{y}/\lambda; \beta) W(\beta) d\beta = L(\lambda),$$

где $W(\beta)$ — совместная ПРВ совокупности параметров β . Интегрирование при этом выполняется по области возможных значений β .

Поиск оценок МП связан, в общем случае, с решением одного или, в случае векторного параметра λ , системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\left. \frac{\partial \ln [W(\mathbf{y}/\lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{МП}} = 0. \quad (4.20)$$

Процесс определения МП оценки равносильен выбору среди семейства ПРВ $W(\mathbf{y}/\lambda)$, образованного значениями параметра $\lambda \in \Lambda$, такой $W(\mathbf{y}/\hat{\lambda}_{МП})$, которая для конкретной выборки \mathbf{y} доставляет максимальную вероятность (плотность вероятностей). Отсюда проистекает название — «*максимально правдоподобная оценка*». Любое значение λ , отличное от $\hat{\lambda}_{МП}$, для которого $L(\lambda; \mathbf{y}) < L(\hat{\lambda}_{МП}; \mathbf{y})$, приводит к меньшей вероятности по отношению к исходным данным, поэтому оно менее удовлетворительно.

Оценки МП постоянных параметров могут иметь ряд примечательных свойств — они асимптотически (при увеличении объема выборки) состоятельны, эффективны и их ПРВ $W(\hat{\lambda}/\lambda)$ является гауссовской. Поэтому метод построения оценок по максимуму ФП находит широкое практическое применение. Указанные свойства оценок МП реализуются в случае, если ФП обладает свойством *регулярности*. Суть этого свойства в том, что должно выполняться тождество [6]

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \lambda} W(\mathbf{y}/\lambda) d\mathbf{y},$$

то есть ПРВ $W(\mathbf{y}/\lambda)$ должна допускать дифференцирование по параметру под знаком интеграла. В указанном тождестве $T(\mathbf{y})$ является произвольной интегрируемой функцией. В практических задачах нарушение тождества часто связано с наличием у функции $W(\mathbf{y}/\lambda)$ (как функции \mathbf{y}) точек разрыва, положение которых изменяется в зависимости от λ .

В простейшем случае уравнение правдоподобия (4.20) является линейным и его решение можно найти аналитически. В общем случае

где \mathbf{y} — m -мерный вектор-столбец наблюдений с координатами $y_i = \mathcal{Y}(t_i)$; \mathbf{n} — m -мерный вектор-столбец помехи с координатами $n_i = \mathcal{N}(t_i)$; \mathbf{F} — матрица размерностью $m \times r$ вида

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0(t_1) & f_1(t_1) & \dots & f_{r-1}(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(t_m) & f_1(t_m) & \dots & f_{r-1}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Для заданных моментов времени t_k и известных функций $f_i(t_k)$ матрица \mathbf{F} является числовой.

Допустим, что $\hat{\lambda}$ есть некоторая оценка, тогда $(\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\lambda}) = \tilde{\mathbf{n}}$ — вектор остаточной помехи. Данный вектор называют вектором *невязок наблюдений*; по существу он является вектором оценок помехи. Критерий оптимальности (целевая функция) для оценок МНК определяется в виде

$$J(\hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{n}_i R_{ij} \tilde{n}_j = (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\lambda})^T \mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\lambda}), \quad (4.25)$$

где \mathbf{R} — положительно определенная и симметрическая матрица весовых коэффициентов размерностью $m \times m$. Из (4.25) видно, что скалярная функция $J(\hat{\lambda})$ является функцией r переменных. Для единичной матрицы весов ($\mathbf{R} = \mathbf{E}$ — единичная матрица) значение целевой функции

$$J(\hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i^2, \text{ то есть равно сумме квадратов значений невязок по всем}$$

моментам времени. Для оптимальной по МНК оценки должно выполняться условие

$$J(\hat{\lambda}_{\text{МНК}}) = \min_{\hat{\lambda}} [J(\hat{\lambda})].$$

Таким образом, если оптимальная оценка существует, то она может быть определена как корень уравнения

$$\left. \frac{\partial J(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} \right|_{\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_{\text{МНК}}} = 0. \quad (4.26)$$

Выполняя перемножение в (4.25) по правилам алгебры матриц, получим целевую функцию в виде

$$J(\hat{\lambda}) = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \hat{\lambda} + \hat{\lambda}^T \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F} \hat{\lambda}. \quad (4.27)$$

Второе и третье слагаемые в (4.27) зависят от оценки, причем второе является линейной формой по отношению к $\hat{\lambda}$, а третье — квадратичной. Вычисление производной (4.26) с учетом (4.27) дает уравнение для оценки

$$\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}) \hat{\lambda}. \quad (4.28)$$

Решая (4.28) матричным методом, получаем выражение оценки МНК:

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{y}, \quad (4.29)$$

где $\mathbf{L} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}$ — матрица размерностью $r \times m$, определяющая линейное преобразование вектора наблюдений \mathbf{y} .

Важно отметить, что *оптимальная по МНК оценка вектора неизвестных параметров сводится к линейному оператору (оператору \mathbf{L}) над входными данными*. Очевидно, это следствие линейности модели наблюдаемого сигнала и аддитивности помехи.

Получение оценки согласно (4.29) предполагает обращение матрицы $\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F}$ размерностью $r \times r$. Рассмотрим структуру этой матрицы для случая $\mathbf{R} = \mathbf{E}$. Выполним перемножение матриц, получим

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m f_0^2(t_i) & \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_1(t_i) \dots \sum_{i=1}^m f_0(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_1^2(t_i) \dots \sum_{i=1}^m f_1(t_i) f_{r-1}(t_i) \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_0(t_i) & \sum_{i=1}^m f_{r-1}(t_i) f_1(t_i) \dots \sum_{i=1}^m f_{r-1}^2(t_i) \end{vmatrix}. \quad (4.30)$$

Обращение матрицы (4.30) реализуется просто, если она является диагональной. Для этого необходимо, чтобы семейство функций $f_0(t), f_1(t), \dots, f_{r-1}(t)$ обладало свойством дискретной ортогональности,

то есть $\sum_{i=1}^m f_k(t_i) f_l(t_i) = 0$ для любых $k \neq l$. Например, полиномы

Чебышева обладают этим свойством. При этом необходимо временной интервал наблюдения $(0;T)$ привести к интервалу $(-1;1)$ и временные отсчеты формировать в моменты $t_i = \cos[(2i-1)\pi/2m]$, где $i = 1, 2, \dots, m$, причем $m > k, l$.

4.3. Статистические свойства оценок МНК

Определим смещение и дисперсию оценок МНК. Вычислим математическое ожидание оценки $\mathbf{M}[\hat{\lambda}_{\text{МНК}}]$. Для этого в (4.29) подставим выражение вектора наблюдений (4.23) и представим уравнение оценки в виде

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} (\mathbf{F} \lambda + \mathbf{n}) = \lambda + \mathbf{L} \mathbf{n}, \quad (4.31)$$

где \mathbf{L} — матрица, определяющая оператор оценки в (4.29). Таким образом, из (4.31) вектор ошибок оценивания

$$\varepsilon_{\text{МНК}} = (\hat{\lambda}_{\text{МНК}} - \lambda) = \mathbf{L} \mathbf{n} \quad (4.32)$$

и его статистическое среднее $\mathbf{M}[\varepsilon_{\text{МНК}}] = \mathbf{M}[\mathbf{L} \mathbf{n}] = \mathbf{L} \mathbf{M}[\mathbf{n}]$. Из этого следует, что среднее значение ошибки обращается в нуль при $\mathbf{M}[\mathbf{n}] = 0$, то есть оценки МНК являются несмещенными, если помеха $n(t)$, введенная в модель наблюдений (4.21), имеет нулевое среднее.

Определим ковариационную матрицу вектора ошибок (4.32) в виде

$$\mathbf{K}_{\varepsilon_{\text{МНК}}} = \mathbf{M}[\mathbf{n} \mathbf{n}^T] = \overline{\mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{L}^T} = \mathbf{L} \mathbf{K}_n \mathbf{L}^T, \quad (4.33)$$

где \mathbf{K}_n — ковариационная матрица помехи. В развернутой форме с учетом выражения для \mathbf{L} матрица (4.33) имеет вид

$$\mathbf{K}_{\varepsilon_{\text{МНК}}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{K}_n \mathbf{R} \mathbf{F} (\mathbf{F}^T \mathbf{R} \mathbf{F})^{-1}. \quad (4.34)$$

Обсудим вопрос, связанный с выбором весовой матрицы \mathbf{R} , которая определяет коэффициенты R_j в выражении (4.25) для критерия оптимальности J . Очевидно, что существенный вклад в J вносят большие по величине невязки, которые возникают при большой интенсивности помехи. В связи с этим для снижения их влияния целесообразно задать весовые коэффициенты обратно пропорциональными интенсив-

ности помехи. Можно строго показать [4], что при выборе $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$ оценки параметров по МНК для линейной задачи вида (4.21) имеют минимальную дисперсию ошибки. Очевидно, что получение таких оценок требует априорной информации о корреляционных свойствах помехи, то есть необходимо знать матрицу \mathbf{K}_n .

Подставим в (4.34) оптимальную весовую матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$. В итоге ковариационная матрица ошибок принимает простой вид

$$\mathbf{K}_{\epsilon_{\text{МНК opt}}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{K}_n \mathbf{F})^{-1}. \quad (4.35)$$

Задача формирования оценок МНК усложнится, если математическая модель (4.21) будет нелинейной по параметрам. В этом случае целевая функция, равная $J(\lambda) = \sum_{i=1}^m [y_i - s(t_i; \lambda)]^2$, не является квадратичной функцией от переменных $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$.

Поиск аналитического решения системы уравнений вида (4.26) с целью определения выражения для оценок МНК в нелинейных задачах, как правило, оказывается безуспешным. Проблема обычно решается подходящим численным методом. Возможность применения МНК в конкретной задаче зависит от скорости сходимости и точности выбранного численного метода. Большое значение при этом имеют оценки на первом шаге итеративного процесса поиска корней (начальное приближение) и сведения о характере целевой функции.

4.4. Пример оценки неизвестного скалярного параметра

Рассмотрим простую задачу оценивания, когда выборочный вектор наблюдаемого сигнала \mathbf{y} образован совокупностью отсчетов вида

$$y_i = \lambda + n_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.36)$$

где n_i — дискретный отсчет стационарного гауссовского шума с равномерным энергетическим спектром $S_n(\omega) = N_0 / 2$ [Вт/Гц] в полосе $\omega \in (-2\pi f_b; 2\pi f_b)$ и средним $\overline{n_i} = 0$; λ — неизвестный параметр.

Найдем МП оценку параметра λ . Прежде получим в явном виде функцию правдоподобия $L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y} / \lambda)$. Будем полагать, что интервал

дискретизации $\Delta t = 1/(2 f_B)$. Тогда согласно (1.45) дискретная последовательность n_i ($i = 1, \dots, m$) является последовательностью статистически независимых случайных величин. Из (4.36) следует, что y_i ($i = 1, \dots, m$) есть стационарная гауссовская последовательность независимых случайных величин со средним $\overline{y_i} = \lambda$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{y} / \lambda) &= \prod_{i=1}^m W(y_i / \lambda) = \frac{1}{\sigma_n^m (2\pi)^{m/2}} \prod_{i=1}^m \exp \left[-\frac{(y_i - \lambda)^2}{2\sigma_n^2} \right] = \\ &= K \exp \left[-0,5 \sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

где K — постоянная, не зависящая от λ ; $\sigma_n^2 = \overline{n_i^2} = N_0 f_B$ — дисперсия дискретного шума.

Из (4.37) найдем логарифм функции правдоподобия

$$\ln [L(\lambda)] = \ln [W(\mathbf{y} / \lambda)] = \ln K - 0,5 \sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^m (y_i - \lambda)^2. \quad (4.38)$$

Таким образом, уравнение правдоподобия имеет вид

$$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda} = \sum_{i=1}^m y_i - m\lambda = 0,$$

и в итоге для МП оценки параметра λ получаем

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i. \quad (4.39)$$

Выражение оценки (4.39) по существу является средним арифметическим выборочных отсчетов.

Найдем по МНК оценку параметра λ . В соответствии с (4.22) и (4.23) матрица \mathbf{F} размерности $m \times r$ имеет m строк и один столбец. Определим весовую матрицу $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1} = \sigma_n^{-2} \cdot \mathbf{E}$, тогда целевая функция (4.25) для оценок МНК примет вид

$$J(\hat{\lambda}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\lambda})^2,$$

который с точностью до постоянной совпадает с выражением (4.38) для логарифма функции правдоподобия. Непосредственно из выражения (4.29) для оценки МНК получаем

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}}(\mathbf{y}) = \left[|1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot |1 \ 1 \ 1 \dots 1| \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i.$$

Сравнивая полученную оценку с выражением (4.39) для $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$, видим, что в данном случае они полностью совпадают. Внимательное рассмотрение проделанных выше простых преобразований показывает, что совпадение оценок обусловлено, во-первых, линейностью математической модели, во-вторых, гауссовым характером ПРВ аддитивного шума.

Найдем дисперсию оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}$. Отметим, что согласно (4.36) дисперсия единичного отсчета $D_{y_i} = \sigma_n^2$. Учтем, что дисперсия суммы некоррелированных случайных величин, равна сумме их дисперсий. В итоге получим

$$\mathbf{D} \left[\hat{\lambda}_{\text{МНК}} \right] = \mathbf{D} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \right] = \frac{\sigma_n^2}{m}. \quad (4.39a)$$

Отсюда следует, что рассеяние оценки МНК при неограниченном увеличении объема m выборки становится бесконечно малым.

Определим байесовскую оценку параметра λ . Предположим теперь, что неизвестный параметр λ является случайной величиной с гауссовской априорной ПРВ, параметры которой m_λ и σ_λ , то есть

$$W'_\lambda(\lambda) = \left[\frac{2}{(\sigma_\lambda \sqrt{2\pi})} \right] \exp \left[-0,5 \sigma_\lambda^2 (\lambda - m_\lambda)^2 \right]. \quad (4.40)$$

Полагаем также, что λ статистически не зависит от помехи $\eta(t)$. В этом случае безусловная m -мерная ПРВ выборочного вектора \mathbf{y} в (4.23) также является гауссовской с параметрами $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{m}_y = \mathbf{F}m_\lambda$ и диагональной корреляционной матрицей вида $\mathbf{K}_y = (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)\mathbf{E}$, то есть

$$W(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)^{m/2}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}m_\lambda)}{2(\sigma_\lambda^2 + \sigma_n^2)} \right]. \quad (4.41)$$

Условная ПРВ $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$ (функция правдоподобия) соответствует (4.37) и в матричной форме имеет вид

$$W_y(\mathbf{y}/\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma_n^m} \exp \left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{F}\lambda)}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (4.42)$$

Подставляя (4.40)–(4.42) в (4.6), найдем апостериорную ПРВ $W_\lambda(\lambda/\mathbf{y})$, которая также имеет гауссовский вид. Выполнив группирование слагаемых в показателе экспоненты функции $W(\lambda/\mathbf{y})$, получим выражение для апостериорного математического ожидания параметра, то есть для оптимальной байесовской оценки в следующем виде:

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \frac{\frac{m_\lambda}{\sigma_\lambda^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m y_i}{\frac{1}{\sigma_\lambda^2} + \frac{m}{\sigma_n^2}} = \frac{m_\lambda + \eta \sum_{i=1}^m y_i}{1 + m\eta}, \quad (4.43)$$

где m — объем выборки; m_λ — среднее значение параметра λ ; $\eta = \frac{\sigma_\lambda^2}{\sigma_n^2}$ — отношение априорной дисперсии оцениваемого параметра к дисперсии помехи.

Рассмотрим (4.43) в двух предельных формах.

1. При $\eta \rightarrow 0$, когда $\sigma_\lambda \rightarrow 0$ или $\sigma_n \rightarrow \infty$, оценка $\hat{\lambda}_B \rightarrow m_\lambda$. Действительно, поскольку в первом случае параметр λ как бы априорно точно задан, и реальные данные не могут дать новой информации, а во втором случае интенсивность помехи так велика, что обработка выборочных данных теряет смысл, то в обоих случаях байесовская оценка параметра приравнивается заданному среднему значению m_λ .

2. При $\sigma_\lambda \rightarrow \infty$ (априорная информация отсутствует) в итоге имеем

$$\hat{\lambda}_B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i = \hat{\lambda}_{МП},$$

то есть байесовская оценка совпадает с оценкой МП.

Рассмотрим вопрос о наличии смещения байесовских оценок. Введем величину относительного смещения условной (при заданном λ) байесовской оценки

$$\delta = \frac{\overline{\hat{\lambda}_{\text{Б}}/\lambda} - \lambda}{\lambda}, \quad (4.44)$$

где $\overline{\hat{\lambda}_{\text{Б}}/\lambda} = \mathbf{M}[\hat{\lambda}_{\text{Б}}/\lambda]$ — условное среднее оценки (4.43). Из (4.36) условное среднее $\mathbf{M}[y_i/\lambda] = \lambda$. Учитывая это, найдем среднее оценки (4.43) и выделим из полученного соотношения величину (4.44). В итоге получим

$$\delta(m) = \frac{\delta_\lambda}{1 + m\eta}, \quad (4.45)$$

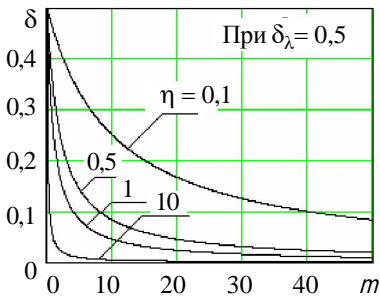


Рис. 4.2. Зависимость относительного смещения δ условной байесовской оценки параметра λ от объема выборки m

где $\delta_\lambda = (m_\lambda - \lambda)/\lambda$ — относительное отклонение случайного параметра от его среднего значения m_λ . На рис. 4.2 показана зависимость $\delta(m)$.

Таким образом, условная байесовская оценка при фиксированном объеме выборки в общем случае имеет смещение, тем большее, чем меньше величина η и чем сильнее оцениваемый параметр отклонился от среднего.

Дисперсия байесовской оценки

$$D_{\hat{\lambda}_{\text{Б}}} = \overline{(\lambda - \hat{\lambda}_{\text{Б}})^2},$$

также как и сама

оценка, определяется после приведения ПРВ $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$ к стандартной гауссовской форме и имеет вид

$$D_{\hat{\lambda}_{\text{Б}}} = \frac{\sigma_\lambda^2}{1 + m(\sigma_\lambda^2/\sigma_n^2)}. \quad (4.46)$$

Полагая в этом выражении $\sigma_\lambda^2 \rightarrow \infty$, что эквивалентно отсутствию априорной информации, когда $\hat{\lambda}_{\text{Б}} \rightarrow \hat{\lambda}_{\text{МП}}$, получаем соотношение для дисперсии оценки МП скалярного параметра λ в виде

$$D_{\hat{\lambda}_b} = \frac{\sigma_n^2}{m} = D_{\hat{\lambda}_{МП}}. \quad (4.47)$$

Данное выражение, как и следовало ожидать, совпадает с (4.39а) для дисперсии оценки МНК.

В заключение сделаем замечание, связанное с формой представления оператора формирования оценки. Вычисление оценок в соответствии с (4.39) или (4.29) предполагает наличие (запоминание) в вычислителе полного (m -мерного) выборочного вектора \mathbf{y} и последующую его обработку. В случае необходимости продолжения наблюдения (прием), предстоит все вычисления повторить заново. В большинстве практических задач это ведет к неоправданному завышению требований к объему памяти и производительности вычислителя. По этой причине в реальных устройствах такой (*параллельный*) способ используется редко. Широкое применение находят *последовательные* алгоритмы обработки, в которых оценка параметра $\hat{\lambda}_k$ на текущем k -м шаге по времени образуется в виде суммы двух слагаемых: оценки на предыдущем шаге $\hat{\lambda}_{(k-1)}$ и поправки (обновления), зависящей от нового наблюдения y_k , полученного на текущий момент времени $t_k = k \cdot \Delta t$. Покажем это на примере алгоритма (4.39).

Оценку на текущем k -м шаге можно представить в следующей форме:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k \right] = \frac{1}{k} \left[(k-1) \cdot \hat{\lambda}_{(k-1)} + y_k \right] \text{ или}$$

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{(k-1)} + \frac{1}{k} \left[y_k - \hat{\lambda}_{(k-1)} \right]; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

Формирование оценки согласно (4.48) предполагает принудительное введение начального значения оценки λ_0^* . В данном случае это может быть первое выборочное значение y_1 , то есть алгоритм начнет работать с шага $k = 2$. Отметим, что $\hat{\lambda}_{(k-1)}$ есть оценка параметра λ на момент времени k , но получена она по всем наблюдениям до этого момента. Структура выражения (4.48) является типичной для последовательных алгоритмов оценивания параметров. На рис. 4.3 она показана в виде схемы устройства, в состав которого входит дискриминатор с изменяющимся во времени коэффициентом усиления.

Рассмотренный частный пример позволяет сформулировать следующие общие закономерности теории оценок:

1) байесовские оценки параметров по максимуму апостериорной ПРВ $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ и максимально правдоподобные оценки сближаются по мере уменьшения количества априорной информации о параметре;

2) условные байесовские оценки (при фиксированном значении неизвестного параметра) имеют смещение, которое уменьшается при увеличении объема выборки;

3) оценки параметров по методу наименьших квадратов являются несмещенными, если аддитивная помеха имеет нулевое среднее значение;

4) оценки по методу наименьших квадратов при соответствующем выборе матрицы весовых коэффициентов $\mathbf{R} = \mathbf{K}_n^{-1}$ в линейных по параметрам моделях наблюдений с аддитивной гауссовой помехой являются строго оптимальными и обеспечивают минимум дисперсий оценок.

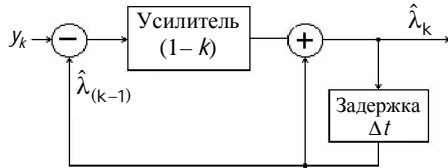


Рис. 4.3. Структурная схема последовательного алгоритма оценки постоянной величины

4.5. Общая структурная схема оптимального измерителя параметра сигнала известной формы

В п. 4.2.1 отмечалась общность задач различения гипотез и оценки параметров. Оптимальная процедура обработки наблюдаемого сигнала $y(t)$ в задаче различения (обнаружения) сигналов предполагает образование статистики в виде отношения правдоподобия $L(\mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/H_1)/W(\mathbf{y}/H_0)$ и функции правдоподобия $L(\lambda) = W(\mathbf{y}/\lambda)$ в задаче оценки параметра.

Пусть гипотеза H_1 связана с наличием полезного сигнала $s(t, \lambda)$, а H_0 — с его отсутствием. Поскольку $W(\mathbf{y}/H_0)$ в данном случае от λ не зависит и $W(\mathbf{y}/H_1) \equiv W(\mathbf{y}/\lambda)$, то отношение правдоподобия и функция правдоподобия совпадают с точностью до постоянного множителя, не зависящего от λ . Этот факт позволяет при решении задач оценки параметров сигнала использовать, результаты, полученные в подразд. 3.6.

Допустим на интервале времени $[0; T]$ наблюдается сигнал $y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t)$, где $s(t, \lambda_0)$ — полезный сигнал, известный с точностью до параметра, истинное значение которого λ_0 ; $n(t)$ — стационарный белый гауссовский шум. Используя (3.47) при $s_0(t) = 0$ и полагая параметр λ не энергетическим, представим функционал правдоподобия параметра λ в виде

$$L(\lambda) = \text{const} \cdot \exp[z(\lambda)],$$

где

$$z(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t, \lambda) dt + C \quad (4.49)$$

логарифм ФП. В дальнейшем всегда постоянная C как не существенная не участвует в записи $z(\lambda)$.

Важно отметить, что явная зависимость от λ в (4.49) обусловлена тем, что только опорный (ожидаемый) сигнал $s(t, \lambda)$ функционально связан с λ .

Формирование максимально правдоподобной оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ предполагает определение λ , при котором (4.49) имеет глобальный максимум. Эта оценка, если она существует, является корнем уравнения правдоподобия

$$\left. \frac{d}{d\lambda} [z(\lambda)] \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{\text{МП}}} = 0. \quad (4.50)$$

Аппаратное решение уравнения (4.50) можно реализовать различными способами.

Первый из них предполагает фиксацию (запоминание) принятого сигнала $y(t)$ с последующим расчетом $z(\lambda)$ для заданного множества значений $\{\lambda_i\}$, где $i = 1, \dots, M$ и $\lambda_i \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$. В качестве оценки выбирается $\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \arg \left(\max_{i \in 1, \dots, M} z(\lambda_i) \right)$, то есть одно из M значений λ_i , при котором ФП имеет наибольшую величину. Данный способ связан с большими затратами времени и редко применяется.

Второй способ реализуется в многоканальном (параллельном) вычислителе (рис. 4.4). Оптимальный измеритель состоит из генератора сетки M опорных сигналов и M идентичных каналов, в каждом из которых формируется логарифм ФП для некоторого значения параметра λ_i .

В решающем устройстве происходит сравнение множества $\{z(\lambda_i)\}$ и выбор номера канала с наибольшим значением уровня входного сигнала. Следовательно, оценка $\hat{\lambda}_{МП} = \arg \left[\max_{\lambda_i} z(\lambda_i) \right]$. Количество каналов, очевидно, оказывает влияние на точность измерения параметра λ .

Следует отметить, что в структуре оптимального измерителя (см. рис. 4.4), подобно оптимальному различителю (см. подразд. 3.6), реализуется вычисление *корреляционных интегралов*. В подразд. 3.2 при рассмотрении преобразования полезного сигнала в согласованном фильтре было показано, что они совпадают с операцией формирования корреляционного интеграла. Таким образом, оптимальный измеритель корреляционного типа может быть выполнен на основе применения, в общем случае, системы СФ.

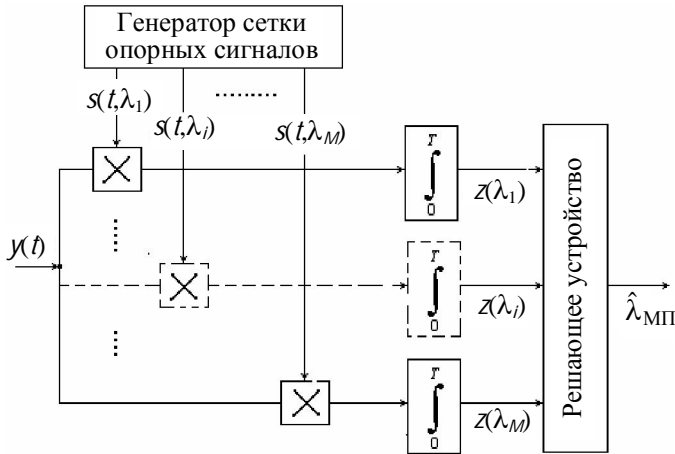


Рис. 4.4. Общая структурная схема устройства формирования МП оценки параметра известного сигнала

Существует косвенный метод получения оценки с использованием дискриминаторов. При этом предполагается, что известно опорное значение оцениваемого параметра $\lambda_{оп}$, попадающее в область сигнального выброса ФП. Представим логарифм ФП (4.49) рядом Тейлора в окрестности точки $\lambda_{оп}$

$$z(\lambda) \approx z(\lambda_{оп}) + \left. \frac{d}{d\lambda} z(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_{оп}} (\lambda - \lambda_{оп}) + \left. \frac{d^2}{2 d\lambda^2} z(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_{оп}} (\lambda - \lambda_{оп})^2.$$

Обозначим производные логарифма ФП в точке $\lambda_{\text{оп}}$ символами

$$A_{\text{оп}} = \frac{d}{d\lambda} z(\lambda_{\text{оп}}) \quad \text{и} \quad B_{\text{оп}} = \frac{d^2}{d\lambda^2} z(\lambda_{\text{оп}}). \quad (4.51)$$

Подставим (4.51) в (4.50) и запишем уравнение правдоподобия

$$A_{\text{оп}} + B_{\text{оп}}(\hat{\lambda}_{\text{МП}} - \lambda_{\text{оп}}) = 0,$$

из которого следует выражение для оптимальной оценки в виде

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \lambda_{\text{оп}} - \frac{A_{\text{оп}}}{B_{\text{оп}}}. \quad (4.52)$$

Структурная схема оптимального дискриминатора, построенного в соответствии с уравнением (4.52), приведена на рис. 4.5. Первый (верхний) канал оптимального дискриминатора формирует сигнал рассогласования, а второй регулирует коэффициент усиления в зависимости от мощности сигнала и помехи. Первый канал называют дискриминатором, а второй — блоком точности. Основное применение дискриминаторы находят в схемах следящих измерителей. И в этом случае значение опорного параметра обычно формируется в отдельном блоке поиска.

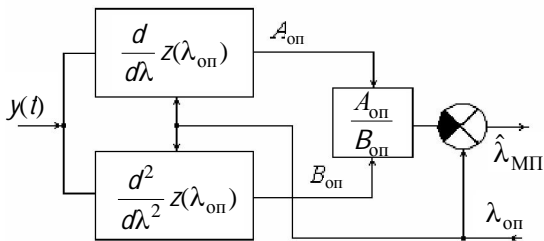


Рис. 4.5. Структурная схема оптимального дискриминатора

4.6. Оптимальная оценка амплитуды детерминированного сигнала при наличии белого гауссовского шума

Рассмотрим задачу оценки амплитуды a радиоимпульса известной формы $s(t; a) = a s_1(t)$, поступающего в сумме с гауссовым белым шумом $n(t)$, на вход приемного устройства-измерителя. Сигнал на входе приемника

$$y(t) = a s_1(t) + n(t) = a S_0(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.53)$$

где $S_0(t)$ — функция, определяющая форму нормированной огибающей; a — амплитуда сигнала (максимальное значение функции $a S_0(t)$ на интервале наблюдения); ω — несущая частота; $\Phi(t)$ — закон ФМ; φ — начальная фаза. Считаем, что все параметры сигнала (4.53) кроме a известны.

На основании (3.47) запишем функционал правдоподобия энергетического параметра a . В данном случае $E_{s_0} = 0$; $s_0(t) = 0$, в итоге имеем

$$L(\lambda) = \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) a s_1(t) dt\right), \quad (4.54)$$

где $E_s = a^2 \int_0^T s_1^2(t) dt = a^2 E_1$ — энергия сигнала; E_1 — энергия весовой функции $s_1(t)$. Уравнение правдоподобия принимает следующий вид:

$$\frac{d}{d\hat{a}} [\ln L(\hat{a})] = -\frac{2\hat{a}E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s_1(t) dt = 0.$$

Корень уравнения есть МП оценка параметра a :



$$\hat{a}_{\text{МП}} = \frac{1}{E_1} \int_0^T y(t) s_1(t) dt. \quad (4.55)$$

Рис. 4.6. Структура оптимального измерителя амплитуды полностью известного радиоимпульса

Соотношение (4.55) определяет структуру оптимального измерителя (рис. 4.6). Она состоит из генератора весовой функции $s_1(t)$,

интегратора за время обработки ($0 \div T$) и масштабного усилителя с коэффициентом ($1/E_1$).

Определим среднее и дисперсию полученной оценки. Полагая истинное значение амплитуды равным a_0 , найдем

$$\mathbf{M}[\hat{a}_{\text{МП}}] = \frac{1}{E_1} \int_0^T [a_0 s_1(t) + \mathbf{M}[n(t)]] s_1(t) dt = a_0,$$

то есть оценка $\hat{a}_{\text{МП}}$ несмещенная.

Для определения дисперсии оценки $D_{\hat{a}_{\text{МП}}}$ положим максимальное значение нормированной огибающей $\max[S_n(t)] = 1$ и представим энергию весовой функции согласно п. 1.3.3 в виде

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt = \frac{1}{2} \tau_n,$$

где τ_n — величина, равная в данном случае интегральной длительности нормированной огибающей радиосигнала

$$\tau_n = \int_0^T S_0^2(t) dt.$$

В итоге для дисперсии оценки получаем соотношение [9]

$$D_{\hat{a}_{\text{МП}}} = \mathbf{M}[(\hat{a}_{\text{МП}} - a_0)^2] = \int_0^T \int_0^T K_n(t_2 - t_1) s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{\tau_n}. \quad (4.56)$$

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды сигнала с известными остальными параметрами пропорциональна интенсивности белого шума и обратно пропорциональна длительности радиоимпульса.

4.7. Статистические характеристики оценок максимума правдоподобия

Вычисление дисперсии оптимальных оценок при произвольном отношении сигнал/шум часто является весьма сложной задачей. Практический же интерес представляет режим работы измерительной РТС, в кото-

ром обеспечивается достаточно высокая точность. В противном случае измерения просто теряют смысл. В большинстве случаев СКО параметра не превышает 5–10 % от измеряемой величины. Высокая точность в оптимальных РТС обеспечивается при достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности мощности белого шума: обычно $q_0 = \sqrt{2E_s / N_0} \geq (3 \div 5)$.

При больших величинах q_0 для определения статистических характеристик оценки $\hat{\lambda}_{\text{ОМП}}$ успешно применяется метод малого параметра, под которым понимают величину $\varepsilon = q_0^{-1}$ [9]. Рассмотрим кратко этот метод, полагая параметр λ незнергетическим.

Подставим в формулу (4.49) для логарифма ФП сигнала $y(t) = s(t, \lambda_0) + n(t)$ и запишем $z(\lambda)$ в развернутой форме:

$$\begin{aligned} z(\lambda) = \ln [L(\lambda)] &= \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t, \lambda) dt = z_s(\lambda; \lambda_0) + z_n(\lambda) = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t; \lambda_0) s(t, \lambda) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (4.57)$$

где $z_s(\lambda; \lambda_0)$ и $z_n(\lambda)$ — сигнальная и шумовая составляющие логарифма функционала правдоподобия (ЛФП); λ_0 — истинное значение параметра. Отметим, что постоянная величина в (4.57), как и ранее, отброшена поскольку не влияет на конечный результат.

При полезном входном сигнале $s(t; \lambda_0)$ известной формы сигнальная функция $z_s(\lambda; \lambda_0)$ является неслучайной. По существу $z_s(\lambda; \lambda_0)$ совпадает с сигнальной функцией (см. (1.10), (1.11)) при изучении меры различия сигналов. В соответствии со свойствами этой функции, она имеет максимум при $\lambda = \lambda_0$.

Случайный характер ФП $L(\lambda)$ обусловлен слагаемым $z_n(\lambda)$, для которого согласно (4.57) среднее значение $\overline{z_n(\lambda)} = 0$. По этой причине положение максимума ЛФП $z(\lambda)$, то есть корень уравнения правдоподобия и соответственно оценка $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$, оказываются случайными (изменяются при различных реализациях $y(t)$ на интервале наблюдения). Очевидно, что в первом приближении можно положить

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \lambda_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}, \quad (4.58)$$

где $\tilde{\lambda}$ — случайная поправка, обусловленная наличием шума. Видно, что влияние $\tilde{\lambda}$ на оценку при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю, то есть при $q_0 \rightarrow \infty$ имеем $z_n \rightarrow 0$ и $\hat{\lambda}_{\text{МП}} \rightarrow \lambda_0$.

Метод малого параметра [9] предполагает введение функции

$$\Psi(\lambda) = \varepsilon^2 \frac{d}{d\lambda} z(\lambda),$$

которая определяет скорость изменения ЛФП по параметру λ и явно зависит от малого параметра ε .

На рис. 4.7 условно показаны логарифм ФП и его сигнальная часть. Представим функцию $\Psi(\lambda)$ в окрестности истинного значения λ_0 в виде ряда Тейлора. Тогда при учете в разложении только линейной части ряда значение $\Psi(\hat{\lambda}_{\text{МП}}) = 0$ можно представить в виде

$$\Psi(\hat{\lambda}_{\text{МП}}) = \Psi(\lambda_0) + \frac{d\Psi(\lambda_0)}{d\lambda} (\hat{\lambda}_{\text{МП}} - \lambda_0) = 0. \quad (4.59)$$

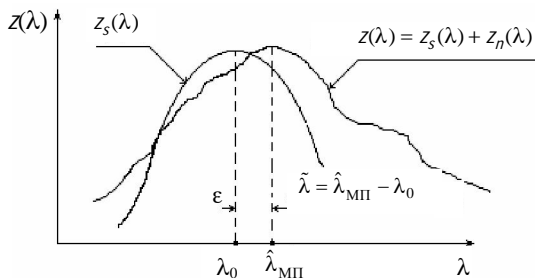


Рис. 4.7. Логарифм ФП $z(\lambda)$ и его сигнальная функция $z_s(\lambda; \lambda_0)$

После введения соответствующих нормировок для $z_s(\lambda; \lambda_0)$ и $z_n(\lambda)$ из (4.59) с учетом (4.58) получаем алгебраическое уравнение для случайной поправки $\tilde{\lambda}$ в виде

$$B \tilde{\lambda} = -A, \quad (4.60)$$

где $B = \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} [z_s(\lambda; \lambda_0)] \right|_{\lambda=\lambda_0}$; $A = \left. \frac{d}{d\lambda} [z_n(\lambda)] \right|_{\lambda=\lambda_0}$.

Величина B определяет кривизну нормированной сигнальной функции

$$\bar{z}_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{q_0^2} z_s(\lambda; \lambda_0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t; \lambda_0) s(t; \lambda) dt \quad (4.61)$$

в точке $\lambda = \lambda_0$.

Сравнение (4.61) с (1.10) показывает, что $\bar{z}_s(\lambda; \lambda_0)$ эквивалентно функции $q(\Delta x) = q(x, x_0)$, определяющей различие двух копий сигнала, отличающихся значениями информативных параметров.

Величина A является случайной и в первом приближении определяет нормированное приращение логарифма ФП, обусловленное влиянием шума. Нормированная шумовая функция $\bar{z}_n(\lambda) = z_n(\lambda) / q_0$ и ее среднее $\bar{z}_n = 0$.

Для определения среднего и дисперсии оценки $\hat{\lambda}_{МП}$ найдем соответствующие характеристики поправки $\tilde{\lambda}$. Согласно (4.60) $\bar{A} = 0$, так как $\bar{z}_n = 0$. Таким образом, *в первом приближении при большом отношении $2E_s / N_0$ максимально правдоподобная оценка параметра является несмещенной.*

Непосредственной проверкой можно показать, что корреляционная функция $\bar{z}_n(\lambda_1) \bar{z}_n(\lambda_2) = \bar{z}_s(\lambda_1; \lambda_2)$. Таким образом, величина дисперсии $D_A = \overline{A^2}$ определяется в данном случае значением второй производной от нормированной сигнальной функции и имеет вид

$$D_A = - \left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} [z_s(\lambda_1; \lambda_2)] \right|_{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0}. \quad (4.62)$$

В (4.62) знак минус обусловлен тем, что вторая производная от сигнальной функции в максимуме отрицательна. Окончательно с учетом (4.60), (4.62) и (4.58) для дисперсии МП оценки неэнергетического параметра получим

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}_{МП}] = \frac{\varepsilon^2 D_A}{B^2} = - \frac{1}{(2E_s / N_0) \left[\partial^2 \bar{z}_s(\lambda; \lambda_0) / \partial \lambda^2 \right]_{\lambda = \lambda_0}}. \quad (4.63)$$

Таким образом, при большом отношении $q_0^2 = 2E_s / N_0$ дисперсия МП оценки параметра λ обратно пропорциональна величине этого отношения и значению кривизны нормированной сигнальной части логарифма функции правдоподобия по параметру λ в точке $\lambda = \lambda_0$.

Важно отметить, что (4.61) совпадает также с АКФ полезного сигнала по параметру λ (см. п. 1.3.2). В частности, когда λ является задержкой τ , получаем $Z_s(\lambda) \equiv k(\tau)$, при $\lambda = \Omega$ имеем $Z_s(\lambda) \equiv k(\Omega)$. Таким образом, дисперсия МП-оценки неэнергетического сигнала λ обратно пропорциональна кривизне нормированной АКФ сигнала по параметру λ в точке максимума.

Применение формулы (4.63) для расчета дисперсии максимально правдоподобной оценки параметра сигнала иногда может дать результат, достижение которого в реальном измерителе практически теряет смысл. В частности, подобная ситуация возникает при оценке времени задержки τ_0 ВЧ-радиоимпульса $s(t - \tau_0)$ с полностью известными параметрами. Рассмотрим подробнее суть вопроса.

Как следует из подразд. 4.5 формирование оценки $\hat{\tau}_{МП}$ предполагает наличие в устройстве обработки генератора опорного сигнала $s(t - \tau)$. Поскольку фактически необходимо определить взаимное положение двух сигналов на оси времени, то момент начала отсчета времени при этом не имеет значения и можно полагать $\tau_0 = 0$.

На основе (4.57) с учетом (4.61) нормированная сигнальная функция в задаче оценке временной задержки сигнала имеет вид

$$\bar{z}_s(\tau; \tau_0 = 0) = \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t) s(t - \tau) dt,$$

который полностью совпадает с выражением (1.15а) для временной автокорреляционной функции $k(\tau)$ ВЧ-сигнала $s(t)$. В подразд. 3.2 было показано, что сигнальная часть отклика на выходе согласованного фильтра также повторяет по форме АКФ $k(\tau)$. Вид этой функции для радиоимпульсов с прямоугольной и гауссовской огибающей показан на рис. 1.10, 1.11.

Формула (4.63) для дисперсии МП оценки параметра утверждает, что дисперсия обратно пропорциональна кривизне функции $k(\tau)$ в точке $\tau = 0$. В случае узкополосных ВЧ-сигналов, когда несущая ω_0 значительно превышает полосу $\Delta\omega$ и огибающая $K(\tau)$ в уравнении (1.16) практически постоянна на интервале времени, равном периоду

ВЧ-сигнала, величина $k''(\tau=0)$ фактически определяется множителем $\cos(\omega_0\tau)$ и равна $-\omega_0^2$. Таким образом, для частот, превышающих сотни мегагерц и более, можно, казалось бы, достигнуть точности измерения времени задержки порядка единиц наносекунд. Однако это, как правило, не возможно. Причиной тому является наличие *близко расположенных соседних пиков сигнальной функции*. Они не позволяют реализовать надежное (однозначное) измерение временной задержки.

Выход из положения состоит в том, чтобы оценку $\hat{\tau}_{МП}$ получать по положению максимума огибающей $K(\tau)$. Необходимость использования огибающей сигнальной функции $z_s(\tau)$ возникает и в том случае, когда полезный сигнал содержит неизвестную начальную фазу. Для выделения огибающей $K(\tau)$ в оптимальном измерителе используется амплитудный детектор. В случае, когда функция $z_s(\tau)$ образуется с помощью согласованного фильтра, детектор подключается к его выходу.

Таким образом, при расчете дисперсии $\mathbf{D}[\hat{\tau}_{МП}]$ в (4.63) следует использовать вторую производную $K''(\tau=0)$. Определим ее величину через спектральную функцию $\dot{G}(\omega)$ комплексной огибающей сигнала $\dot{S}(t)$.

Для этого предварительно покажем справедливость соотношения

$$2E_s \cdot \dot{K}(\tau) \stackrel{F}{\underset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} |\dot{G}(\omega)|^2.$$

Запишем преобразование Фурье по переменной t от произведения функций $\dot{S}(t) \cdot \dot{S}^*(t-\tau)$, рассматривая τ в качестве параметра.

В итоге получим $\dot{I}(\omega; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) e^{-i\omega t} dt$ и отметим, что согласно (1.16) $2E_s \cdot \dot{K}(\tau) = \dot{I}(0; \tau)$. В соответствии со свойствами преобразования Фурье справедливы соотношения

$$\dot{S}(t) \stackrel{F}{\underset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{G}(\omega); \quad \dot{S}^*(t) \stackrel{F}{\underset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{G}^*(-\omega); \quad \dot{S}^*(t-\tau) \stackrel{F}{\underset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{G}^*(-\omega) e^{-i\omega\tau}.$$

Известно также, что Фурье-образ произведения двух функций времени является сверткой Фурье-образов этих функций. Таким образом, для функции $\dot{I}(\omega; \tau)$ запишем интеграл свертки в виде

$$\dot{\Gamma}(\omega; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{G}^*(x-\omega) e^{i(x-\omega)\tau} dx.$$

из которого при $\omega = 0$ непосредственно следует

$$\dot{\Gamma}(0; \tau) = \dot{K}(\tau) = \frac{1}{2E_s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Выполняя вычисление второй производной от этого выражения по τ и учитывая (1.19), получим

$$K''(\tau = 0) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega = -\Delta\Omega^2,$$

где $\Delta\Omega$ — среднеквадратичная полоса частот радиосигнала, равная среднеквадратичной ширине энергетической спектральной плотности $|\dot{G}(\omega)|^2$ комплексной огибающей сигнала $\dot{S}(t)$. Напомним, что точка начала отсчета частоты ($\omega = 0$) совмещена при этом с центром масс нормированной функции (1.18). В итоге для дисперсии оценки времени задержки получим

$$\mathbf{D}[\hat{\tau}_{\text{МП}}] = \frac{1}{(2E_s / N_0) \Delta\Omega^2}. \quad (4.63a)$$

В радиолокационных и радионавигационных системах измерение времени задержки сигнала на входе приемника относительно сигнала, излученного передатчиком, позволяет определить дальность до объекта. Формула (4.63a) позволяет *вычислить дисперсию оптимальной оценки дальности, связанную с влиянием аддитивного собственного шума приемника.*

4.8. Оптимальная оценка начальной фазы радиоимпульса

Определим оптимальный алгоритм приемника-измерителя начальной фазы φ радиоимпульса вида (4.53). На основании (4.57) запишем уравнение правдоподобия для неэнергетического параметра φ

$$\left. \frac{d}{d\varphi} \ln [L(\varphi)] \right|_{\hat{\varphi}_{\text{МП}}} = \frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) aS(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] dt \right\} \Bigg|_{\hat{\varphi}_{\text{МП}}} = 0.$$

Для оценки $\hat{\varphi}_{\text{МП}}$ получаем уравнение

$$\int_0^T y(t) S(t) \sin [\omega t + \Phi(t) + \hat{\varphi}_{\text{МП}}] dt = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \sin(\hat{\varphi}_{\text{МП}}) \int_0^T y(t) S(t) \cos [\omega t + \Phi(t)] dt + \\ & + \cos(\hat{\varphi}_{\text{МП}}) \int_0^T y(t) S(t) \sin [\omega t + \Phi(t)] dt = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Из (4.64) окончательно получаем

$$\hat{\varphi}_{\text{МП}} = -\arctg \left\{ \frac{\int_0^T y(t) S(t) \sin [\omega t + \Phi(t)] dt}{\int_0^T y(t) S(t) \cos [\omega t + \Phi(t)] dt} \right\}. \quad (4.65)$$

Из (4.65) следует структурная схема оптимального устройства формирования оценки $\hat{\varphi}_{\text{МП}}$. На рис. 4.7 она приведена для случая гармонического радиосигнала, когда нет амплитудной и фазовой модуляции ($S(t) = S_0$ и $\Phi(t) = 0$). По своей структуре данный приемник-измеритель, как и в подразд. 4.5, является измерителем *корреляционного типа*.

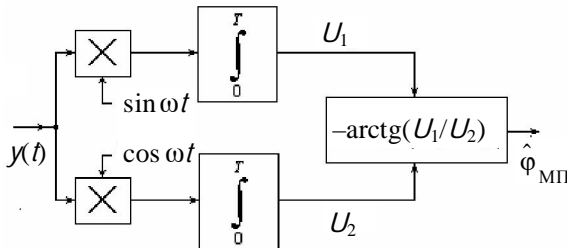


Рис. 4.7. Оптимальный измеритель начальной фазы гармонического радиосигнала

Используя соотношение (4.63), вычислим дисперсию оценки $D_{\varphi_{\text{МП}}}$. С этой целью, учитывая (4.57), запишем нормированную сигнальную функцию (4.61)

$$\begin{aligned} \tilde{z}_s(\lambda; \lambda_0) &= \frac{z_s(\lambda; \lambda_0)}{q_0^2} = \\ &= \frac{2}{N_0 q_0^2} \int_0^T a^2 S^2(t) \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi] \cos[\omega t + \Phi(t) + \varphi_0] dt = \\ &= \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в (4.63), в итоге получим

$$D_{\varphi_{\text{МП}}} = \frac{1}{q_0^2}. \quad (4.66)$$

Таким образом, дисперсия МП оценки начальной фазы радиосигнала обратно пропорциональна отношению сигнал/шум по мощности и не зависит от вида амплитудной и фазовой модуляции радиоимпульса.

Напомним, что величина $q_0^2 = 2E_s / N_0$ соответствует максимально-му отношению мощностей сигнала и шума на выходе согласованного с полезным сигналом фильтра.

4.9. Информация по Фишеру.

Неравенство Крамера – Рао

Нельзя не обратить внимания на то, что определение МП оценок параметров сигнала и анализ их точности в наших выкладках всякий раз приводил к необходимости рассмотрения логарифма функционала правдоподобия $\ln[L(\lambda)] = \ln[W(\mathbf{y}/\lambda)]$. Можно предположить, что этот факт обусловлен гауссовским видом ПРВ аддитивного шума. Однако это не так и суть указанного совпадения несколько глубже. Она связана с понятием количества информации о неизвестном параметре λ , которое содержится в случайной выборке \mathbf{y} . Это понятие играет фундаментальную роль, и было введено в теорию оценок Р.А. Фишером.

Рассмотрим понятие количества информации. Будем полагать, что выборка образована совокупностью $\{y_i\}$ n независимых случайных величин с одинаковой ПРВ. Таким образом, условная ПРВ выборки (она же функция правдоподобия параметра λ) имеет вид

$$L(\lambda; \mathbf{y}) = W(\mathbf{y} / \lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i / \lambda). \quad (4.67)$$

Причем в силу условия нормировки ПРВ

$$\int_{\mathbf{Y}} L(\lambda; \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1. \quad (4.68)$$

Последующие выкладки и результаты связаны с предположением о *регулярности* ФП (см. также п. 4.2.2). Они состоят в том, что $L(\lambda; \mathbf{y})$, а также ее первая и вторая производные по параметру λ должны быть непрерывны по λ равномерно относительно \mathbf{y} , и ФП должна допускать дифференцирование под знаком интеграла в (4.68). Следует отметить, что эти требования выполняются для многих важных вероятностных моделей, встречающихся в практических задачах, в частности для ПРВ Гаусса и Пуассона, а также биномиального, γ -распределения вероятностей и др.

Рассмотрим случайную величину

$$v(\mathbf{y}; \lambda) = \frac{\partial \ln [L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln [W(y_i / \lambda)]}{\partial \lambda}, \quad (4.69)$$

которую называют *вкладом* (или *функцией вклада*) выборки \mathbf{y} [5]. Каждое i -е слагаемое в правой части (4.69) определяет *вклад i -го наблюдения*, $i = 1, \dots, n$. Будем полагать, что случайная величина V имеет конечный второй момент, то есть $\mathbf{M}[V^2(\mathbf{y}; \lambda)] < \infty$ для всех $\lambda \in \Lambda$, где Λ — интервал возможных значений неизвестного параметра. При выполнении условий регулярности ФП путем дифференцирования тождества (4.68) по параметру λ найдем

$$0 = \int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial L(\lambda; \mathbf{y})}{\partial \lambda} \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial [\ln L(\lambda; \mathbf{y})]}{\partial \lambda} W(\mathbf{y} / \lambda) \, d\mathbf{y} = \mathbf{M}[v(\mathbf{y}; \lambda)]. \quad (4.70)$$

Таким образом, для регулярных моделей выборочных данных среднее значение *вклада* (математическое ожидание производной от ЛФП по λ) равно нулю.

Количество *информации по Фишеру о параметре λ* , содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} объема n определяется соотношением

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M} \left[v^2(\mathbf{y}; \lambda) \right] = \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln [W(\mathbf{y} / \lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \quad (4.71)$$

или с учетом (4.67)

$$i_n(\lambda) = \mathbf{M} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [W(y_i / \lambda)] \right)^2 \right].$$

Величина $i_{n-1} = i_1$ называется *количеством (фишеровской) информации, содержащимся в одном наблюдении*. Из (4.71) для нее получим

$$i_1(\lambda) = \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln [W(y_1 / \lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right]. \quad (4.72)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что общее количество информации i_n в независимой выборке \mathbf{y} , есть сумма величин i_i в отдельных элементах y_i . Почему так получается? Вообще говоря, это не противоречит здравому смыслу, поскольку информация по мере увеличения полезных независимых наблюдений, накапливается. Но почему «придуманные» формулы подтверждают это? Ответ почти очевиден. Причин здесь две. Во-первых, вероятность совместного появления выборки $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, состоящей из независимых элементов y_i , в соответствии с правилами теории вероятностей равна произведению вероятностей. Во-вторых, Р.А. Фишер, как и читатель, не смог бы предложить какую-либо простую функцию, кроме логарифмической, которая обладает свойством «превращать произведения в суммы», то есть $\ln [x_1 \cdot x_2 \cdots x_i \cdots x_n] = \ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)$. Именно поэтому понятие информации оперирует логарифмом функции правдоподобия. Вид распределения вероятностей выборки при этом не имеет никакого значения. Отсюда следует важный «житейский» вывод о том, что если некто решил добыть достоверную информацию о чем-либо (или о ком-либо), то ему для этого следует использовать независимые источники информации. В противном случае велик риск того, что придется пожинать плоды субъективизма. В частности, по причине статистической зависимости элементов выборки будет получена недостоверная и далекая от истинной картины информация об объекте интереса. Именно к этому случаю относится расхожее высказывание: «есть истина, есть ложь и есть статистика». Однако к научной статистике оно не имеет равным счетом никакого отношения.

Для $i_1(\lambda)$ в практических расчетах удобно использовать эквивалентное представление. Оно получается после повторного дифференцирования (4.70) по λ и имеет вид

$$i_1(\lambda) = -\mathbf{M} \left[\left[\frac{\partial^2 \ln [W(Y_1 / \lambda)]}{\partial \lambda^2} \right] \right]. \quad (4.73)$$

Из соотношений (4.71) и (4.72) следует $i_n(\lambda) = n i_1(\lambda)$, то есть общее количество информации увеличивается пропорционально объему выборки.

Рассмотрим пример вычисления функции $i_1(\lambda)$. Для этого обратимся к задаче из подразд. 4.4, где выборочные значения $y_i = \lambda + n_i$. Шум имеет гауссовскую ПРВ — $N(0; \sigma_n^2)$, и величина y_i также является гауссовской. Таким образом, в этом случае вклад одного наблюдения

$$i(Y_1; \lambda) = \frac{\partial \ln [W(Y_1 / \lambda)]}{\partial \lambda} = \frac{Y_1 - \lambda}{\sigma_n^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln [W(Y_1 / \lambda)]}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\sigma_n^2}.$$

Отсюда по формуле (4.73) получаем $i_1(\lambda) = 1/\sigma_n^2$, что не противоречит здравому смыслу. Действительно, чем меньше дисперсия шума, тем большую информацию несет случайное выборочное наблюдение y_i об оцениваемом параметре λ .

В статистической теории оценок существует теорема [3], которая утверждает, что при выполнении условий регулярности для ФП и существовании $i_n(\lambda)$, ПРВ случайной величины $T = \sqrt{n}(\hat{\lambda}_{\text{МП}} - \lambda)$, где $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ — единственный корень уравнения правдоподобия, сходится (по мере увеличения объема выборки n) к нормальному распределению с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left[W \left(\frac{Y_i}{\lambda} \right) \right] \right)^2 \right]} = \frac{1}{i_1}. \quad (4.74)$$

Это означает, что при больших n оценка МП является несмещенной то есть $\mathbf{M}[\hat{\lambda}_{\text{МП}}] = \lambda$ и ее дисперсия равна

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}_{\text{МП}}] = \sigma_{\hat{\lambda}_{\text{МП}}}^2 = \frac{1}{n \cdot I_1}. \quad (4.75)$$

Подчеркнем, что при *любых* видах ПРВ $W(\mathbf{y}/\lambda) = \prod_{i=1}^n W(y_i/\lambda)$, удовлетворяющих условиям регулярности, асимптотически выполняется (4.74). Это поясняет и оправдывает название «количество информации», введенное Р. Фишером для величины, находящейся в знаменателе.

Рассмотрим без доказательства известное в теории оценок и важное для практических приложений неравенство Крамера — Рао. Оно утверждает, что для *дисперсии несмещенной оценки* $\hat{\lambda}$ параметра λ при произвольном объеме выборки n выполняется соотношение

$$\sigma_{\hat{\lambda}}^2 \geq [I_n(\lambda)]^{-1}, \quad (4.76)$$

где $I_n(\lambda) = n I(\lambda)$, если выборка независимая.

Это неравенство определяет *нижнюю границу дисперсий любых несмещенных оценок параметра* λ . Условием его справедливости является только наличие свойств регулярности у функции $L(\mathbf{y}) = W(\mathbf{y}/\lambda)$.

С неравенством (4.76) связано понятие *эффективности оценки*. Несмещенная оценка параметра λ называется *эффективной*, если ее выборочная дисперсия достигает границы Крамера — Рао. Соотношения (4.74), (4.75) утверждают, что оценка МП асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) несмещена и эффективна.

Значимость результата (4.76) для практики разработки измерительных РТС состоит в следующем. Инженер в конкретной задаче может использовать различные алгоритмы обработки сигналов и далеко не всегда их привлекательность связана с оптимальностью (в смысле дисперсии ошибки). Возможно, они более просты в технической реализации или, наконец, просто интуитивно ясны по структуре. Однако ответы на вопросы о том, исчерпаны ли ресурсы измерительной системы по точности и реализованы ли ее предельные возможности, очень часто важны и многое определяют.

Допустим, что выбранный вариант построения системы управления воздушным движением обеспечивает СКО ошибки вывода самолета на полосу посадки 100 м, в то время как, предельно достижимая (потенциальная) СКО при тех же свойствах входных сигналов могла бы

быть 15 м. Очевидно ресурс системы по точности далеко не исчерпан. Последствия применения системы посадки в первом варианте связаны с риском при наличии низкой облачности, поскольку пилот, в случае непопадания в зону посадки, ограничен в выполнении маневра. Конечно возможно расширение полосы, но это часто неприемлемо, например, если аэродром — авианосец.

Таким образом, целесообразно предложить способ обработки сигналов, позволяющий приблизить точность системы посадки к потенциально возможной.

4.10. Контрольные вопросы

1. Изложите в общем виде постановку задачи в статистической теории оценивания.
2. Что есть смещение оценки неизвестного параметра сигнала?
3. Запишите выражение для среднеквадратической ошибки параметра сигнала.
4. Поясните свойство состоятельности оценок.
5. Изложите постановку задачи оценки параметра сигнала в байесовской теории оценивания.
6. Какой смысл имеет функция потерь в байесовской теории оценивания и каковы основные типы этих функций?
7. Что есть байесовский риск в теории оценивания?
8. Запишите в общей форме выражение байесовского риска.
9. Каков содержательный смысл априорной ПРВ $W(\lambda)$ и апостериорной ПРВ $W(\lambda / y_1, y_2, \dots, y_n)$ оцениваемого параметра λ ?
10. Запишите в общей форме выражение байесовской оценки при квадратичной функции потерь.
11. Как изменится вид байесовской оценки при назначении простой функции потерь?
12. Что есть функция правдоподобия и оценка параметра по максимуму правдоподобия?
13. Запишите выражение, связывающее апостериорную ПРВ оцениваемого параметра и функцию правдоподобия. Запишите в общем виде уравнение правдоподобия.
14. Запишите в общей форме математическую модель наблюдаемого сигнала, которая содержит аддитивную помеху и является линейной по отношению к одному (двум, трем) неизвестным параметрам.

15. Каков смысл и вид целевой функции при определении оценок по методу наименьших квадратов (МНК)?

16. В чем особенность оператора, определяющего оценку $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ в случае линейной по параметрам модели наблюдаемого сигнала?

17. Выполните необходимые преобразования и получите выражение для оценки постоянного параметра методом наименьших квадратов.

18. Каково условие несмещенности оценок по МНК?

19. Какие величины определяют СКО оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}(\mathbf{y})$ постоянного параметра λ , если выборка состоит из n некоррелированных отсчетов наблюдаемого сигнала $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, если $y_i = \lambda + n_i$?

20. Изобразите в общем виде структуру оптимального измерителя неизвестного параметра полезного сигнала, поступающего на вход приемника-измерителя в смеси с аддитивным гауссовским шумом и поясните функции отдельных элементов измерителя.

21. Запишите выражение для дисперсии оценки $\hat{\lambda}_{\text{МП}}$ неизвестного постоянного параметра λ сигнала $y_i = \lambda + n_i$, поступающего в смеси с «белым» дискретным гауссовским шумом на вход измерителя и перечислите величины, которые определяют ее значение.

22. Запишите в общей форме функцию правдоподобия параметра λ для случая выборки, состоящей из n статистически независимых отсчетов y_1, y_2, \dots, y_n наблюдаемого сигнала $y(t)$, который является аддитивной суммой полезного сигнала $s(t, \lambda)$ и белого гауссовского шума.

23. Что есть вклад выборки \mathbf{y} и как его определяют? Каков вклад отдельного наблюдения y_p являющегося элементом статистически независимой выборки?

24. Как определяют количество информации по Фишеру о параметре λ , содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} объема n ?

25. Какими свойствами обладают максимально правдоподобные оценки неизвестного параметра при выполнении условий регулярности для функции правдоподобия?

26. Запишите неравенство Крамера — Рао. Что определяет это неравенство? Каковы условия выполнения неравенства?

5. РЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ

5.1. Среднеквадратичная регрессия

Байесовская теория оценок неизвестных параметров λ , содержащихся в данных \mathbf{y} , основана на предположении о случайном характере оцениваемого параметра и наблюдаемых данных. В подразд. 4.7 показано, что оптимальная байесовская оценка, которая имеет наименьшую СКО, получается при обработке данных оператором условного среднего в виде

$$\hat{\lambda}_B = \mathbf{M}[\lambda / \mathbf{y}] = \int \dots \int \lambda W(\lambda / \mathbf{y}) d\lambda = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (5.1)$$

Конкретный вид $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ полностью определяется апостериорной ПРВ $W(\lambda / \mathbf{y})$. В общей теории статистики, имеющей дело с произвольными по своей природе случайными величинами, выражение (5.1) называют *оптимальной среднеквадратичной регрессией величины λ на величину \mathbf{y}* (размерность величин не имеет значения). По существу в радиотехнических задачах выражение (5.1) определяет алгоритм работы оптимального (в смысле минимума среднего риска при квадратичной функции потерь) фильтра. Раскрытие этого оператора в явной форме, удобной для реализации в реальном масштабе времени, представляет в общем случае непростую задачу. Во всяком случае только в 1960-х годах прошлого века в основном в трудах Р.Л. Стратоновича и Р. Калмана в решении этой задачи был сделан фундаментальный прорыв — получены дифференциальные и разностные уравнения, определяющие оптимальную оценку соответственно для аналоговых и дискретных систем обработки. Эти уравнения (для текущей оценки $\hat{\lambda}_B(k)$ и ковариационных моментов ошибки оценивания) в случае дискретных систем имеют рекурсивную форму и, таким образом, наилучшим способом ориентированы для реализации на ЭВМ.

В линейных задачах с гауссовскими λ и \mathbf{y} эти результаты получены при строгом решении задачи оптимальной байесовской фильтрации. В произвольном случае при негауссовских λ и (или) \mathbf{y} задача не имеет решения в замкнутой форме. Могут быть реализованы только квазиоптимальные рекурсивные процедуры обработки данных.

5.2. Линейная среднеквадратичная регрессия

Рассмотрим подробно задачу оценки параметров линейной регрессии. Прежде приведем один простой, но важный для дальнейших рассуждений результат, когда λ и y — скалярные случайные величины. Итак, пусть Λ и Y — случайные величины. В данном случае важно различать случайную величину, обозначаемую прописной буквой, и ее конкретное значение — строчной буквой.

Интерес к линейным процедурам обработки обусловлен их простотой, поэтому ограничим себя этими способами формирования оценок и будем полагать, что оператор условного среднего задан в виде линейной регрессии (в общем случае она не оптимальна)

$$\widehat{\Lambda}_{\text{lin}} = f(Y) = \mathbf{M}[\Lambda / Y] = a + bY, \quad (5.2)$$

где a и b — неизвестные коэффициенты, определяющие правило обработки. Найдем такие a и b , при которых дисперсия ошибки окажется минимальной. Для дисперсии ошибки имеем

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon}(a, b) &= M \left\{ \left[\Lambda - \widehat{\Lambda}_{\text{lin}}(Y) \right]^2 \right\} = \mathbf{M} \left[(\Lambda - a - bY)^2 \right] = \\ &= \overline{\Lambda^2} + a^2 + b^2 \overline{Y^2} - 2b\overline{\Lambda \cdot Y} - 2a\overline{\Lambda} + 2ab\overline{Y}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где для краткости записи оператор статистического усреднения $\mathbf{M}[\bullet]$ записан в виде $\overline{(\bullet)}$. Будем считать, что в рамках корреляционной теории статистические свойства скалярных случайных величин Λ и Y известны, то есть заданы их начальные, центральные и смешанные моменты до второго порядка. Здесь же напомним (см. подразд. 2.3), что это является исчерпывающей информацией, если совместная ПРВ этих величин гауссовская.

Для определения оптимальных коэффициентов уравнения линейной регрессии решим систему линейных уравнений относительно переменных a и b :

$$\begin{cases} \frac{\partial D_{\varepsilon}(a, b)}{\partial a} = a - \overline{\Lambda} + b\overline{Y} = 0; \\ \frac{\partial D_{\varepsilon}(a, b)}{\partial b} = b\overline{\Lambda^2} - \overline{\Lambda \cdot Y} + a\overline{Y} = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Введем обозначения и запишем известные из теории вероятностей соотношения:

$$\bar{\Lambda} = m_{\lambda}; \quad \bar{Y} = m_y; \quad D_{\lambda} = \sigma_{\lambda}^2 = \overline{\Lambda^2} - m_{\lambda}^2; \quad D_y = \sigma_y^2 = \overline{Y^2} - m_y^2; \quad (5.5)$$

$$k_{\lambda,y} = \frac{1}{\sigma_{\lambda}\sigma_y} (\overline{\Lambda \cdot Y} - \bar{\Lambda} \cdot \bar{Y}) \rightarrow \overline{\Lambda \cdot Y} = K_{\lambda,y} + m_{\lambda}m_y, \quad (5.6)$$

где $K_{\lambda,y} = \sigma_{\lambda}\sigma_y k_{\lambda,y}$ — ненормированный взаимный ковариационный момент величин Λ и Y . В итоге с учетом обозначений (5.5), (5.6) решение системы (5.4) имеет вид

$$a_{opt\ lin} = m_{\lambda} - K_{\lambda,y} D_y^{-1} m_y; \quad (5.7)$$

$$b_{opt\ lin} = K_{\lambda,y} D_y^{-1}. \quad (5.8)$$

Можно строго показать, что (5.7), (5.8) действительно обеспечивают минимум величины дисперсии ошибки $D_{\epsilon}(a, b)$.

Подставим выражения (5.7), (5.8) в (5.2) и, выполнив простые алгебраические преобразования, получим *уравнение линейной среднеквадратичной регрессии*, которая определяет линейную оценку случайного информативного параметра Λ как функцию одного случайного наблюдения Y в виде

$$\hat{\Lambda}_{lin} = f(Y) = m_{\lambda} + K_{\lambda,y} D_y^{-1} (Y - m_y). \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) имеет здравый смысл. Пусть, в частности, Λ есть количество детей в семье и Y — средний доход на одного члена семьи. По ансамблю семей эти величины случайны. Необходимо по данным о доходе конкретной семьи $Y = y$, который она будет иметь в определенный момент времени, дать оценку количества детей. Из уравнения (5.9) видно, что если величины Λ и Y не коррелированы ($K_{\lambda,y} = 0$), то знание дохода Y не учитывается при *линейном прогнозе*, поскольку не содержит полезной информации о величине Λ . В качестве *линейной оценки* следует использовать известное среднее $\hat{\lambda}_{lin} = m_{\lambda}$, что обеспечит минимум СКО ошибки *линейной оценки*. Если доход имеет значительное рассеяние ($D_y = \sigma_y^2 \rightarrow \infty$), то знание величины y также не следует учитывать, так как при этом условии

$$K_{\lambda,y} D_y^{-1} = \left(k_{\lambda,y} \frac{\sigma_{\lambda}}{\sigma_y} \right) \rightarrow 0$$

и второе слагаемое в (5.9) исчезает. Во всех других случаях знание конкретного $Y = y$ позволит точнее прогнозировать $\hat{\lambda}_{lin} = f(y)$.

Из уравнения (5.9) достаточно просто установить факт несмещенности безусловной оценки $\widehat{\Lambda}_{\text{lin}}$. Для этого следует определить статистическое среднее (среднее по ансамблю) левой и правой частей уравнения (5.9). Поскольку $\bar{Y} = m_y$, то $\widehat{\Lambda}_{\text{lin}} = m_\lambda$. Дисперсия линейной оценки также следует из (5.9) и имеет вид

$$D_{\widehat{\lambda}_{\text{lin}}} = K_{\lambda y}^2 D_y^{-1} = K_{\lambda y} D_y^{-1} K_{y\lambda}. \quad (5.10)$$

Сделаем важное замечание. Поскольку в случае совместно гауссовских Λ и Y их вероятностное поведение полностью определено заданием средних значений, дисперсий и ковариации, то можно предположить, что строго оптимальный оператор условного среднего (5.2) в случае гауссовских распределений имеет линейный вид. В подразд. 4.4 этот результат имел место в задаче байесовской оценки скалярного параметра λ по выборке \mathbf{y} объема m .

Конечно, значительный практический интерес представляют задачи в случае многомерных случайных величин. В задачах, связанных с проектированием устройств обработки сигналов в радиотехнических системах, вектор Λ может состоять из параметров, определяющих траекторию движения объекта. В системах связи ими могут быть последовательные отсчеты речевого сигнала. Вектор \mathbf{Y} есть совокупность наблюдаемых (подлежащих обработке) сигналов.

В многомерном случае необходимые преобразования в обозримом виде можно выполнить в матричной форме. Для записи ПРВ гауссовского случайного вектора \mathbf{x} , имеющего вектор среднего значения \mathbf{m}_x и матрицу ковариаций \mathbf{K}_x , будем использовать обозначение

$$N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_x, \mathbf{K}_x) \triangleq \left[\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}_x} \right]^{-1} \exp \left(-0,5 \|\mathbf{x} - \mathbf{m}_x\|_{\mathbf{K}_x^{-1}} \right),$$

где $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}_x\|_{\mathbf{K}_x^{-1}}$ — квадратичная форма с матрицей \mathbf{K}_x^{-1} . При необходимости наряду с обозначением \mathbf{K}_x будет использовано иное обозначение — $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \triangleq \mathbf{K}_x$.

Пусть λ и \mathbf{y} имеют совместную гауссовскую ПРВ:

$$W(\lambda, \mathbf{y}) = N \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{m}_\lambda \\ \mathbf{m}_y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\lambda\lambda} & \mathbf{K}_{\lambda y} \\ \mathbf{K}_{y\lambda} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix} \right), \quad (5.11)$$

где $\mathbf{K}_{\lambda\lambda}, \mathbf{K}_{yy}$ — автоковариационные матрицы векторов λ и \mathbf{y} ; $\mathbf{K}_{\lambda y}$ и $\mathbf{K}_{y\lambda}$ — взаимные ковариационные матрицы этих векторов. Найдем в матричной форме выражение для апостериорной ПРВ $W(\lambda / \mathbf{y})$, по которой определим $\mathbf{m}_{\lambda/y}$. В общем виде для условной ПРВ справедливо соотношение

$$W(\lambda / \mathbf{y}) = \frac{W(\lambda, \mathbf{y})}{W(\mathbf{y})} \infty \sqrt{\frac{\det \mathbf{K}_{yy}}{\det \mathbf{K}}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{\lambda} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \right\|_{\mathbf{K}^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{m}_{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{K}_{yy}}^2 \right), \quad (5.12)$$

где блочная ковариационная матрица

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\lambda\lambda} & \mathbf{K}_{\lambda y} \\ \mathbf{K}_{y\lambda} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix}.$$

Запишем для \mathbf{K} тождественное соотношение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\lambda\lambda} & \mathbf{K}_{\lambda y} \\ \mathbf{K}_{y\lambda} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{\lambda y} \mathbf{K}_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{yy} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

которое можно подтвердить непосредственной проверкой.

Учтем правило $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ и правило обращения треугольной матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Запишем в блочном виде матрицу \mathbf{K}^{-1} и введем ее в выражение (5.12). После группировки слагаемых в показателе экспоненты найдем в матричной форме апостериорную ПРВ $W(\lambda / \mathbf{y})$. Эта функция имеет следующий вид:

$$W(\lambda/\mathbf{y}) = N\left(\lambda; \mathbf{m}_\lambda + \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y), \mathbf{K}_{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda}\right). \quad (5.13)$$

Таким образом, в случае совместно гауссовских векторных наблюдений \mathbf{y} и полезного сообщения λ оптимальная байесовская оценка полезного сообщения определена соотношением

$$\hat{\lambda}_B = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{m}_\lambda + \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y). \quad (5.14)$$

Ковариационная матрица ошибки оптимальной оценки согласно (5.13) равна

$$\mathbf{D}_{\hat{\lambda}_B} = \mathbf{K}_{\lambda\lambda} - \mathbf{K}_{\lambda y} \cdot \mathbf{K}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{y\lambda}. \quad (5.15)$$

Сравнивая векторно матричные выражения (5.14), (5.15) с аналогичными по смыслу выражениями (5.9), (5.10), видим, что первые являются обобщением результатов, полученных для скалярного случая.

5.3. Рекурсивная оценка параметров линейной регрессии

Рассмотрим вновь задачу оценки векторного параметра λ при наличии линейных скалярных наблюдений с аддитивной помехой (см. (4.21)). Теперь полагаем, что λ — случайный вектор. Запишем уравнение наблюдений (4.21) в виде

$$y_t = \mathbf{h}_t^T \cdot \lambda + \eta_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

где $\mathbf{h}_t^T = \{f_0(t), f_1(t), \dots, f_{r-1}(t)\}$ — известный r -мерный вектор; λ — r -мерный вектор неизвестных параметров; η_t — случайная погрешность (ошибка) наблюдения. Случайную последовательность ошибок полагаем стационарной с параметрами

$$\mathbf{M}[\eta_t] = 0 \quad \text{и} \quad D_{\eta_t} = \sigma^2 \quad \text{для} \quad \forall t.$$

Алгоритмы в рекурсивной форме требуют инициализации, то есть задания начального значения. Будем считать, что начальная оценка $\hat{\lambda}_0 = \mathbf{M}[\lambda]$ и ее ковариационная матрица

$$\mathbf{K}(\hat{\lambda}_0) = \mathbf{M}\left[(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0)(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0)^T\right] \equiv \mathbf{K}_0 \quad (5.17)$$

известны (эту матрицу также называют дисперсионной матрицей ошибки оценки). Очевидно, к моменту времени t вся полезная информация о неизвестном параметре λ содержится в выборке $\mathbf{Y}_t^T = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$. Априорная информация представлена двумя величинами $\{\hat{\lambda}_0; \mathbf{K}_0\}$ — начальной оценкой и ее ковариационной матрицей. По мере поступления наблюдений, то есть в текущем времени, рекурсивный алгоритм должен формировать пару $\{\hat{\lambda}_t; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)\}$, причем на каждом предыдущем $(t-1)$ -м моменте времени пара $\{\hat{\lambda}_{t-1}; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_{t-1})\}$ может рассматриваться как априорная информация по отношению к паре в момент времени t .

Выше было показано, что при задании вероятностных свойств наблюдений и информативного сообщения в рамках корреляционной теории можно найти линейную оценку $\hat{\lambda}_t = \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}_t$ и ее ковариацию $\mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)$.

Таким образом, для линейной оценки желаемая рекурсивная форма алгоритма оценивания может быть получена на основе соотношений (4.48), (5.14). Рекурсивный алгоритм должен реализовать процесс пересчета $\{\hat{\lambda}_{t-1}; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_{t-1})\} \Rightarrow \{\hat{\lambda}_t; \mathbf{K}(\hat{\lambda}_t)\}$ и при этом учесть отличие апостериорных оценок и их ковариаций от априорных, обусловленное получением новой информации — текущего (в данной задаче скалярного) наблюдения y_t .

С учетом замечаний, сделанных выше, рекурсивную форму линейной оценки векторного сообщения следует представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_t &= \mathbf{M}[\lambda / \mathbf{Y}_t] = \\ &= \mathbf{M}[\lambda / \mathbf{Y}_{t-1}] + \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}^{-1}(y_t, y_t) \cdot \{y_t - \mathbf{M}[y_t / \mathbf{Y}_{t-1}]\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Рассмотрим смысловое содержание всех элементов соотношения (5.18).

Очевидно, $\mathbf{M}[\lambda / \mathbf{Y}_{t-1}] = \hat{\lambda}_{t-1}$ есть условная оценка вектора параметров на текущий момент времени t , которая образуется на основе всех наблюдений, поступивших к моменту $(t-1)$. По существу, это экстраполяция (прогноз) вектора параметров на шаг вперед. По отношению к моменту времени t с учетом уравнения наблюдений (5.12) можно установить смысл выражения $\mathbf{M}[y_t / \mathbf{Y}_{t-1}]$. Действительно:

$$\mathbf{M}[y_t / \mathbf{Y}_{t-1}] = \mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1}, \quad (5.19)$$

и этот элемент по смыслу есть *оценка наблюдения* на момент времени t на основе наблюдений, доступных к моменту времени $(t-1)$. Другими словами, это также прогноз (экстраполяция) наблюдений на один шаг вперед.

Введем обозначение $\mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1} = \hat{y}_{t/t-1}$. Тогда выражение в (5.18)

$$\{y_t - \mathbf{M}[y_t / \mathbf{Y}_{t-1}]\} = y_t - \hat{y}_{t/t-1} \triangleq v_t \quad (5.20)$$

уместно назвать ошибкой прогноза наблюдений (невязкой). При формировании текущей оценки невязка учитывает новую информацию, содержащуюся в поступившем наблюдении y_t . Если математическая модель наблюдений достаточно точная, то невязка обеспечивает улучшение качества оценок параметров по мере поступления новых данных. Последовательность $\{v_t\}$ при $t=1,2,\dots$ часто называют процессом обновления (innovation process).

Следовательно, условная (при заданных наблюдениях \mathbf{Y}_{t-1}) ковариация $\mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t)$, которая при скалярном наблюдении есть условная дисперсия, т.е. $\mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t) \equiv \mathbf{D}_{t-1}[y_t]$, имеет с учетом (5.19), (5.20) вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t-1}(y_t, y_t) &\equiv \mathbf{D}[y_t / \mathbf{Y}_{t-1}] = \mathbf{M}\left[(y_t - \hat{y}_{t/t-1})^2\right] = \\ &= \overline{[\mathbf{h}_t^T(\lambda - \hat{\lambda}_{t-1})]^2} + \overline{\sigma^2} = \mathbf{h}_t^T \cdot \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, \hat{\lambda}_{t-1}) \cdot \mathbf{h}_t + \sigma^2 = D_{v_t}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

При выводе (5.21) учтено, что $\hat{\lambda}_t$ при $\forall t$ является несмещенной оценкой и линейной функцией наблюдений, а элементы последовательности ошибок $\{v_t\}$ статистически независимы между собой и с вектором наблюдений λ .

Обратимся теперь к элементу $\mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t)$ в (5.18), который представляет условную (при заданных наблюдениях \mathbf{Y}_{t-1}) ковариацию оценки $\hat{\lambda}_{t-1}$, на момент $(t-1)$ и наблюдения y_t . В развернутой форме получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, y_t) &= \mathbf{M}\left[(\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda) \cdot (\mathbf{h}_t^T \cdot \hat{\lambda}_{t-1} - \mathbf{h}_t^T \lambda_t)^T\right] = \\ &= \mathbf{M}\left[(\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda)(\hat{\lambda}_{t-1} - \lambda)^T \cdot \mathbf{h}_t\right] = \mathbf{K}_{t-1}(\hat{\lambda}_{t-1}, \hat{\lambda}_{t-1}) \cdot \mathbf{h}_t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В итоге рекурсивная форма алгоритма оценивания (4.94) принимает вид

$$\widehat{\lambda}_t = \widehat{\lambda}_{t-1} + \mathbf{K}_{t-1} \cdot \mathbf{h}_t \cdot \left[\mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2 \right]^{-1} \cdot (y_t - \mathbf{h}_t^T \cdot \widehat{\lambda}_{t-1}), \quad (5.23)$$

где $\mathbf{K}_{t-1} \equiv \mathbf{K}_{t-1}(\widehat{\lambda}_{t-1}, \widehat{\lambda}_{t-1})$ — ковариация ошибки оценки на $(t-1)$ -м временном шаге.

Найдем рекурсивное соотношение для ковариационных матриц ошибок оценивания \mathbf{K}_{t-1} и \mathbf{K}_t для соседних моментов времени. Из уравнения (5.15) следует

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t-1} - \mathbf{K}_{t-1}(\widehat{\lambda}_{t-1}, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}^{-1}(y_t, y_t) \cdot \mathbf{K}_{t-1}(y_t, \widehat{\lambda}_{t-1}), \quad (5.24)$$

Подставляя в (5.24) выражения (5.21), (5.22), получим

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t-1} - \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t \cdot (\mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2)^{-1} \cdot \mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1}. \quad (5.25)$$

Уравнения (5.23) и (5.25) полностью определяют рекурсивный алгоритм формирования линейной оценки $\widehat{\lambda}$ случайного векторного параметра λ с минимальным значением суммарной (по всем компонентам вектора) дисперсии ошибок.

Напомним, что полученный выше алгоритм является наилучшим (в смысле минимума СКО) в классе линейных алгоритмов и строго оптимален, если вероятностные свойства наблюдаемого сигнала и полезного сообщения описываются гауссовской ПРВ.

В заключение перечислим основные элементы рекурсивного алгоритма (5.23), которые определяют его структуру:

$\widehat{\lambda}_t = \widehat{\lambda}_{t-1} + \mathbf{g}_t \cdot v_t$ — текущая оценка вектора параметров;

$v_t = y_t - \mathbf{h}_t^T \cdot \widehat{\lambda}_{t-1}$ — текущая ошибка прогноза наблюдения;

$D_v = \mathbf{h}_t^T \mathbf{K}_{t-1} \mathbf{h}_t + \sigma^2$ — дисперсия невязки;

$\mathbf{g}_t = \mathbf{K}_{t-1} \cdot \mathbf{h}_t \cdot D_v^{-1}$ — векторный коэффициент усиления фильтра;

$\mathbf{K}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{h}_t^T) \cdot \mathbf{K}_{t-1}$ — ковариационная матрица ошибки оценивания.

Для инициализации алгоритма необходимо задать начальную оценку $\widehat{\lambda}_0$ и ее ковариационную матрицу \mathbf{K}_0 .

5.4. Оптимальная линейная фильтрация. Фильтр Калмана

В общем случае полезное сообщение $\lambda(t)$ является случайной функцией времени. Задачу оценивания неизвестной функции называют задачей фильтрации сообщения. Отметим, что не всегда удобно для представления случайной функции использовать разложение в ряд (4.21) по известным функциям со случайными коэффициентами вида

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i f_i(t). \quad (5.26)$$

Ясно, что при заданном r используемые в (5.26) функции окажут влияние на точность представления случайной функции. Допустим, $\lambda(t)$ — речевой сигнал. Какой набор $\{f_i(t)\}$ следует использовать для его представления? Может быть степенные функции или гармонические?

Существуют два основных способа *прямого* представления случайного сигнала. Попутно отметим, что *косвенный* способ задания случайной функции предполагает ее описание на основе использования ПРВ [17].

Рассмотрим первый способ прямого описания случайной функции. Он основан на применении ряда (5.26) и оптимальном или подходящем выборе множества функций $\{f_i(t)\}$. Здесь известны несколько подходов. Остановимся кратко на двух из них. Это разложение Карунена — Лозва [14] и метод канонических разложений Пугачева [15]. В первом случае необходимо решить интегральное уравнение, найти собственные функции и соответствующие им собственные числа для оператора, определяемого ковариационной функцией случайного сигнала. Во втором случае необходимо использовать произвольную систему порождающих функций, обладающих свойством биортогональности относительно корреляционной функции случайного процесса [15]. В обоих случаях количество членов ряда может быть достаточно большим, т.е. размерность вектора λ неизвестных параметров также будет достаточно большой.

Второй способ представления основан на концепции *формирующего фильтра* и введении понятия *переменной состояния* динамической системы. Именно этот подход [16, 17] объединил теорию динамических систем, использующую для их описания дифференциальные и разностные уравнения, и теорию описания случайных функций, обладающих марковским свойством (см. подразд. 1.1).

Понятие переменной состояния поясним на простом примере. Известно, что случайный гауссовский стационарный процесс $\lambda(t)$ с корреляционной функцией

$$K_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

получается в результате воздействия белого гауссовского шума $u(t)$ на линейную динамическую систему в виде интегрирующей RC -цепи [16]. Стохастическое дифференциальное уравнение, связывающее вход и выход RC -цепи, является простым уравнением первого порядка вида

$$d\lambda/dt = -\alpha\lambda(t) + \alpha u(t), \quad (5.27)$$

где $\alpha = 1/RC$ — постоянная времени фильтра — динамической системы. Задание начального условия (напряжения на емкости) $\lambda(t=0) = \lambda_0$ при условии его случайности и реализации $u^{(i)}(t)$ для $t \in [0; T]$ полностью и однозначно определяют реализацию случайного процесса $\lambda^{(i)}(t)$.

Используя простейшую схему Эйлера, дифференциальному уравнению (5.27) можно сопоставить разностное уравнение

$$\lambda_t = (1 - \alpha\Delta t)\lambda_{t-1} + \alpha\Delta t u_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.28)$$

где Δt — интервал дискретизации; u_t — дискретный во времени некоррелированный гауссовский шум с соответствующей дисперсией. Отметим, что переход от непрерывного уравнения (5.27) к численной разностной схеме (5.28) имеет некоторые особенности [17], которые здесь не обсуждаются.

Динамику системы (5.27), если положить входной шум $u(t) = 0$, определяет лишь одна величина $\lambda_1 \equiv \lambda_0$. Если перейти к дискретному времени и рассматривать последовательность моментов $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, то для любого текущего t_i предыдущий t_{i-1} выполняет роль начального момента времени. Таким образом, вполне естественно ввести в рассмотрение переменную $\chi(t) \equiv \lambda(t)$ и назвать ее *переменной состояния динамической системы первого порядка*, поскольку она наряду с входным шумом полностью определяет развитие процессов в системе.

Отметим, что именно по этой причине при белом шуме на входе динамической системы первого порядка случайный процесс $\lambda(t)$ на ее выходе имеет последствие (в статистическом смысле) на один шаг. В вероятностном плане $\lambda(t)$ является *простым марковским процессом* (см. подразд. 1.1), который требует для своего описания задания ПРВ начального состояния $W(\lambda_0)$ и ПРВ перехода $W(\lambda_i; t_i / \lambda_{i-1}; t_{i-1})$.

Динамическая система (5.27), (5.28) фактически может рассматриваться как формирующий фильтр для процесса $\lambda(t)$. Дифференциальное уравнение (5.27) называют порождающим для процесса $\lambda(t)$. Таким образом, по существу нет различия в математическом описании сигналов и систем. В этом суть концепции *формирующего фильтра* в современной марковской теории фильтрации [16, 17].

Очевидно, что при более сложной корреляционной функции $K_\lambda(\tau)$ порождающий фильтр, оставаясь линейным для гауссовских процессов, будет динамической системой более высокого n -го порядка. Порождающее дифференциальное уравнение (разностное для дискретных во времени систем) уже не будет уравнением первого порядка. Для обеспечения единственности выходной реализации информативного процесса $\lambda(t)$ при отсутствии входного шума потребуется задание n случайных величин, определяющих начальные условия. В итоге будет введен вектор переменных состояния $\mathbf{x}(t)$, одна из компонент которого (в общем случае — некоторая линейная комбинация) совпадает с самим процессом $\lambda(t)$. Однако теперь случайный процесс $\lambda(t)$ не будет простым марковским, но будет сложным — *многосвязным*.

Известно, что дифференциальное уравнение n -го порядка можно заменить эквивалентной системой n уравнений первого порядка для новых переменных. В качестве этих переменных целесообразно выбрать переменные состояния, определяющие начальные условия или их линейные комбинации. В итоге порождающее дифференциальное уравнение для информативного сообщения $\lambda(t)$ будет представлено системой уравнений первого порядка для вектора переменных состояния $\mathbf{x}(t)$. Эта система уравнений определяет математическую модель полезного сообщения в задачах теории марковской фильтрации. Таким образом, вместо (5.27) для стационарных гауссовских сообщений $\lambda(t)$ имеем в векторной форме уравнение

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot u(t), \quad t \in [0; T], \quad (5.29)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n -мерный вектор состояния; \mathbf{A} — $(n \times n)$ -числовая матрица, вид которой зависит от корреляционной функции $K_\lambda(\tau)$; \mathbf{B} — $(n \times 1)$ -числовая матрица. При переходе к дискретному времени (5.29) можно сопоставить разностное уравнение

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \cdot u_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.30)$$

где Φ — $(n \times n)$ -матрица перехода состояний; u_t — дискретная стационарная некоррелированная гауссовская последовательность с параметрами $\overline{u_t} = 0$, $\overline{u_t^2} = \sigma_u^2$. Начальные условия для систем (5.29), (5.30) определяет случайный гауссовский вектор \mathbf{x}_0 с параметрами

$$\overline{\mathbf{x}_0} = \mathbf{m}_0, \quad \overline{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_0)^T} = \mathbf{K}_0.$$

В линейной задаче фильтрации полезного сообщения $\lambda(t)$ наблюдаемый скалярный сигнал y_t является одной (как правило, первой) из компонент вектора состояния. Математическая модель наблюдений по структуре аналогична (5.16) и имеет вид

$$y_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_t + n_t; \quad t = 1, 2, \dots; \quad \overline{n_t} = 0; \quad \overline{n_t^2} = \sigma_n^2. \quad (5.31)$$

В уравнении (5.31) матрица \mathbf{H} не зависит от времени и имеет размерность $1 \times n$, т.е. фактически, как и в (5.16), является вектором-строкой. Здесь \mathbf{H} определяет связь наблюдений с n -мерным вектором состояния, и в задаче, где $x_1(t) \equiv \lambda(t)$, имеем $\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \dots 0]$.

Случайные возмущения в (5.29), (5.30) называют *шумами состояния*. Это виртуальный шум, обеспечивающий в математической модели (5.29), (5.30) случайную природу полезного сообщения $\lambda(t)$. Возмущения в (5.31) называют *шумом наблюдения*. Часто в практических задачах можно полагать, что возмущения состояний и наблюдений статистически независимы между собой и независимы от вектора начального состояния, то есть

$$\overline{u_m \cdot n_k} = 0; \quad \overline{u_m \cdot \mathbf{x}_k^T(0)} = 0; \quad \overline{n_m \cdot \mathbf{x}_k^T(0)} = 0 \quad \text{для } \forall m, k = 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

В силу линейности уравнения (5.30), определяющего динамику гауссовского полезного сообщения $\lambda(t)$, и уравнения наблюдения (5.31), определяющего гауссовский процесс $y(t)$, эти процессы совместно гауссовские. Таким образом, оператор байесовской оценки (5.1) сводится к линейному фильтру, что и было показано в подразд. 5.1, 5.2.

Вывод уравнений оптимальной линейной фильтрации достаточно сложен. Впервые в 1960 г. уравнения оптимальной линейной фильтрации для линейных дискретных во времени моделей состояния и наблюдений получил американский ученый Р. Калман.

В России в 1961 г. профессор МГУ Р.Л. Стратонович получил уравнения, определяющие оператор байесовской оценки (5.1) для более сложных моделей непрерывных сообщений и наблюдений, когда уравнения (5.29) и (или) (5.31) являются нелинейными. В этом случае $\lambda(t)$ и $y(t)$

не являются совместно гауссовскими и оптимальный фильтр оказывается нелинейной системой, байесовский оператор (5.1) не имеет точного представления в явной форме [16, 17].

По своей сути задача линейной фильтрации аналогична задаче оптимальной линейной регрессии, рассмотренной в подразд. 5.3. *Отличие задач возникает в связи с представлением случайной функции с помощью порождающих дифференциальных уравнений.* Оно проявляется на этапе прогноза оценки (в данном случае прогноза оценки состояния) и прогноза ковариационной матрицы этой оценки. Ясно, что поскольку в общей задаче фильтрации полезное сообщение изменяется во времени, то на этапе прогноза оценок и их ковариаций должна учитываться модель для переменных состояния (5.30).

Оптимальный алгоритм линейной фильтрации с гауссовскими сигналами состоит из следующих этапов:

- 1) предсказание (прогноз) оценки состояния на один шаг:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{t-1} \quad \text{при} \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{m}_0; \quad (5.33)$$

- 2) вычисление ковариации ошибки прогноза состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t/t-1} &= \mathbf{M} \left[(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} - \mathbf{x}_t)(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} - \mathbf{x}_t)^T \right] = \\ &= \Phi \mathbf{K}_{t-1} \Phi^T + \sigma_u^2 \cdot \mathbf{V} \mathbf{V}^T, \quad t = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где \mathbf{K}_0 — априорная ковариация оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$;

- 3) вычисление текущей ошибки прогноза наблюдения (невязка):

$$\mathbf{v}_t = y_t - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}, \quad (5.35)$$

где $\hat{y}_{t/t-1} = \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ — предсказание (экстраполяция) наблюдения;

- 4) вычисление дисперсии невязки:

$$D_v = \mathbf{H}_t \mathbf{K}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \sigma_n^2; \quad (5.36)$$

5) вычисление векторного коэффициента усиления фильтра Калмана:

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{K}_{t/t-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot D_v^{-1}; \quad (5.37)$$

- 6) вычисление текущей оценки состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{v}_t; \quad (5.38)$$

7) вычисление текущей ковариации ошибки фильтрации:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{M} \left[(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)(\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)^T \right] = (\mathbf{I} - \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K}_{t/t-1}. \quad (5.39)$$

Сравнение алгоритма фильтра Калмана с уравнениями оценки *параметров* линейной регрессии показывает, что они различаются наличием в алгоритме фильтрации уравнения предсказания оценки состояния (5.33) и уравнения (5.34) для ковариации ошибки предсказанного состояния.

Представляет интерес сравнение результатов, полученных для байесовской оценки в подразд. 4.4 для модели наблюдаемого сигнала (4.36), и результатов, которые получаются при расчетах по формулам (5.33)–(5.39), определяющим алгоритм фильтра Калмана.

Математическая модель скалярного полезного сообщения *в терминах переменных состояния* в данной задаче имеет вид

$$x_t = x_{t-1} \quad \text{при} \quad \bar{x}_0 = m_\lambda \quad \text{и} \quad D_{x_0} = \sigma_\lambda^2; \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

Математическая модель наблюдений определена выражением (4.36):

$$y_t = x_t + n_t; \quad \bar{n}_t = 0, \quad \bar{n}_t^2 = \sigma_n^2. \quad (5.41)$$

Сопоставляя (5.40), (5.41) с (5.30), (5.31), получаем $\Phi = 1$; $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{H} = 1$. Из уравнений (5.33)–(5.39), определяющих оптимальный алгоритм фильтра Калмана, получаем

$$\hat{x}_{t/t-1} = \hat{x}_{t-1}; \quad K_{t/t-1} = K_{t-1},$$

и так как $K_0 = \sigma_\lambda^2$, то $K_{t/t-1} = \sigma_\lambda^2$, и для дисперсии невязки согласно (5.36) имеем

$$D_v = \sigma_n^2 + K_{t/t-1}. \quad (5.42)$$

Коэффициент усиления фильтра согласно (5.37)

$$g_t = K_{t/t-1} \cdot (\sigma_n^2 + K_{t/t-1})^{-1}.$$

Оценка состояния в соответствии с (5.38) имеет вид

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t/t-1} + \frac{K_{t/t-1}}{(\sigma_n^2 + K_{t/t-1})} (y_t - \hat{x}_{t/t-1}) \quad (5.43)$$

и текущая дисперсия ошибки фильтрации согласно (5.39)

$$K_t = (1 - g_t) \cdot K_{t/t-1} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + K_{t/t-1}} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_\lambda^2}. \quad (5.44)$$

Выполним простые алгебраические расчеты для $t = 1, 2, 3$. Результаты расчетов занесем в таблицу и учтем, что $\eta = \sigma_\lambda^2 / \sigma_n^2$.

Момент времени t	Дисперсия прогноза оценки $K_{t/t-1}$	Коэффициент усиления фильтра g_t	Дисперсия текущей оценки K_t
$t = 1$	σ_λ^2	$\frac{\eta}{1 + \eta}$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + \eta}$
$t = 2$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + \eta}$	$\frac{\eta}{1 + 2\eta}$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + 2\eta}$
$t = 3$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + 2\eta}$	$\frac{\eta}{1 + 3\eta}$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + 3\eta}$
...
$t = m$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + (m-1)\eta}$	$\frac{\eta}{1 + m\eta}$	$\frac{\sigma_\lambda^2}{1 + m(\sigma_\lambda^2 / \sigma_n^2)}$

Текущая оценка состояния на первом шаге согласно (5.43) имеет вид

$$\hat{x}_{t=1} = \hat{x}_{1/0} + \frac{\eta}{1 + \eta} (y_1 - \hat{x}_{1/0}) = m_\lambda + \frac{\eta}{1 + \eta} (y_1 - m_\lambda) = \frac{m_\lambda + \eta y_1}{1 + \eta}. \quad (5.45)$$

Выражение (5.45) тождественно равно оценке (4.43) при $m = 1$. Дисперсия текущей оценки на m -м временном шаге в таблице совпадает с величиной D_{λ_B} в формуле (4.46). Полученные результаты подтверждают тождественность рекурсивного алгоритма оценивания и алгоритма, ориентированного на полный объем данных за весь интервал наблюдения. Однако преимущества первого очевидны, так как он реализует обработку по мере поступления данных, то есть в реальном масштабе времени.

На рис. 5.1 приведена структура фильтра, соответствующая алгоритму обработки данных в фильтре Калмана. Ее основными элементами

являются блок экстраполяции оценки (БЭО), блок экстраполяции наблюдений (БЭН), блок вычисления матричного коэффициента усиления (БКУ), образующий вместе с разностным устройством дискриминатор.

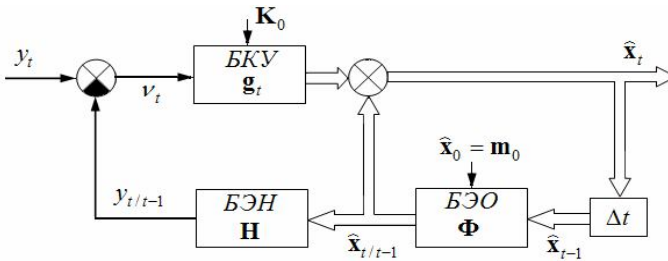


Рис. 5.1. Структурная схема линейного фильтра Калмана при скалярных наблюдениях

Следует обратить внимание на то, что в рассмотренной линейной задаче матрицы Φ и H не зависят от времени. Матричный коэффициент усиления g_t при скалярных наблюдениях имеет структуру вектора, зависит от времени, но не зависит от наблюдаемого сигнала. Следовательно, он может быть вычислен предварительно и введен в память вычислителя. В нелинейных задачах, в частности, при частотной или фазовой модуляции наблюдаемого сигнала полезным сообщением дискриминатор, входящий в состав демодулятора, оказывается нелинейным [9, 16, 17].

5.5. Контрольные вопросы к главе 5

1. Запишите в общем виде выражение байесовской оценки векторного параметра λ .
2. Какая функция наиболее полно определяет свойства параметра λ как случайного вектора?
3. В чем отличие априорной и апостериорной ПРВ параметра λ ?
4. Какой вид имеет оператор условного среднего в задаче оптимальной байесовской оценки параметра λ ?
5. Что понимают, когда употребляют термин «оптимальная среднеквадратичная регрессия вектора λ на вектор наблюдений \mathbf{y} »?

6. Сформулируйте задачу оптимальной линейной среднеквадратичной регрессии.

7. Почему решение задач оптимальной линейной регрессии в общем случае не гарантирует минимальной СКО оценок?

8. Какие статистические характеристики полезного (скалярного) параметра λ и скалярного наблюдения Y_t определяет уравнение оптимальной линейной регрессии?

9. Назовите статистические параметры, определяющие совместную гауссовскую ПРВ $W(\lambda, \mathbf{y})$. Запишите их выражения.

10. Полагая функцию потерь квадратичной, запишите в явном виде выражение байесовской оптимальной оценки $\hat{\lambda}_B$ при условии, что вектор наблюдений \mathbf{y} и неизвестный вектор параметров λ совместно гауссовские случайные величины.

11. Какими способами можно задать случайную функцию?

12. В чем сущность задания случайной функции в терминах «переменных состояния» динамической системы? Какой вид имеет дифференциальное уравнение — «генератор» реализаций гауссовской случайной функции $\lambda(t)$?

13. Объясните на физическом уровне взаимосвязь марковского свойства случайной функции и порядка дифференциального уравнения, содержащего белый гауссовский шум в правой части?

14. В чем различие и сходство задач оптимальной линейной регрессии и оптимальной линейной фильтрации?

15. Перечислите этапы формирования оптимальной оценки неизвестной случайной функции в рекурсивной форме с помощью алгоритма фильтра Калмана.

16. Назовите условия, при которых линейный фильтр Калмана реализует формирование оптимальной по критерию минимума СКО байесовской оценки случайного сообщения $\lambda(t)$.

17. Что есть невязка наблюдений в алгоритме фильтра Калмана? Каким образом она формируется?

18. От чего зависит размерность вектора \mathbf{g}_t , который определяет усиление фильтра Калмана? В каком случае вектор \mathbf{g}_t получит структуру матрицы, что повлияет на ее размерность?

19. Обратите внимание на уравнения фильтра Калмана и определите, в каком случае матричный (векторный) коэффициент фильтра Калмана не зависит от времени.

6. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

6.1. Общие положения

Для многих типов РТС, особенно радиолокационных и радионавигационных, характерным является режим работы, когда на входе приемника одновременно присутствуют более чем один полезный сигнал. Например, при РЛ-наблюдении двух объектов, находящихся в зоне облучения, определяемой шириной диаграммы направленности антенны, входной сигнал приемника

$$\mathbf{y}(t) = s_1(t; \lambda_1, \beta_1) + s_2(t; \lambda_2, \beta_2) + \mathbf{n}(t), \quad t \in (0; T). \quad (6.1)$$

Составляющими вектора информативных параметров λ_i ($i=1, 2$) каждого из сигналов могут быть время задержки τ_{0i} , связанное с дальностью до объектов, доплеровский сдвиг частоты Ω_{0i} , зависящий от их радиальной скорости, угловая координата и др.

В РЛ-системе необходимо для каждого объекта получить оценки полезных параметров. В случае, когда объекты близки друг к другу по какому-либо из параметров (допустим по дальности), сигналы $s_1(\cdot)$ и $s_2(\cdot)$ на входе приемника перекрываются во времени. Если объекты имеют близкие радиальные скорости, то произойдет перекрытие частотных спектров сигналов.

Очевидно, что определение числа сигналов в наблюдаемой реализации (6.1) и измерение параметров каждого из них при перекрытии сигналов значительно сложнее, нежели в случае, когда сигналы достаточно разнесены по соответствующему параметру.

Проблема разрешения сигналов, перекрывающихся по одному или нескольким параметрам (по времени задержки и (или) частоте) состоит в раздельном выделении полезной информации, содержащейся в каждом из них.

Разрешающая способность наряду с точностью относится к важнейшим тактическим показателям РТС. В РЛ-системах она влияет на полноту сведений о наблюдаемой обстановке при наличии нескольких целей.

Разрешающая способность количественно равна *минимальной разнице по каждому из разрешаемых параметров двух сигналов, при которой возможно их раздельное обнаружение и измерение параметров.*

Наличие шума вносит неопределенность и придает задаче статистический характер. Чем больше отношение сигнал/шум, тем меньшая разница в параметрах разрешаемых сигналов может быть уверенно отмечена в *выходном устройстве* системы обработки. И наоборот, при уменьшении этого отношения требуется все большее и большее различие параметров перекрывающихся сигналов для их уверенного разрешения.

Кроме отношения энергий сигналов и шума большое влияние на достоверность разрешения оказывает форма разрешаемых сигналов и, в первую очередь, их протяженность по параметру разрешения. Чем уже разрешаемые сигналы по данному параметру, тем ближе друг к другу они могут быть расположены и при этом надежно разрешены, и тем лучше разрешающая способность РТС. Таким образом, определенный смысл имеет анализ разрешающей способности без учета влияния шума. Во всяком случае, результаты анализа будут оправдываться по мере увеличения уровня сигнала по отношению к шуму. В этом случае в литературе по теории РТС обычно говорят о *потенциальной (предельной) разрешающей способности* системы по соответствующему параметру: дальности (времени задержки сигналов), радиальной скорости (частотному сдвигу спектра сигналов).

Учитывая указанные выше обстоятельства, рассмотрим влияние законов и параметров модуляции сигналов на разрешающую способность РТС по времени задержки τ и сдвигу несущей частоты F .

6.2. Разрешение по времени запаздывания.

Простые и сложные сигналы

В пп. 1.3.1, 1.3.2 определено понятие функции различия (1.7) двух сигналов $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$, отличающихся значениями информативных параметров λ_0 и λ , и показана ключевая роль нормированной сигнальной функции $q(\lambda_0, \lambda)$ в задачах различения, обнаружения сигналов и измерения их параметров на фоне шума. Напомним, что функция $q(\lambda_0, \lambda)$ при заданных λ_0 и λ определяет степень различия двух копий сигнала, отличающихся значением параметра λ .

В частном случае, когда двумерный неэнергетический параметр $\lambda = \{\tau, \Omega\}$, функция $q(\lambda_0, \lambda)$ по существу является частотно-временной корреляционной функцией $k(\tau, F)$, которая для узкополосных радиосигналов имеет вид (1.13). Напомним, что огибающую $K(\tau, F)$ функции $k(\tau, F)$ называют функцией неопределенности. В подразд. 3.2 показано, что сигнальная функция $z_s(t)$ на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t; \tau_0 = 0, \Omega_0 = 0)$ при входном воздействии $s(t - \tau; \Omega)$ повторяет по форме функцию $k[(t - \tau); \Omega = \text{const}]$. В силу инвариантности линейного стационарного фильтра к временному сдвигу изменение задержки входного сигнала на произвольную величину δ приводит к равному сдвигу по времени сигнала на выходе фильтра.

В п. 1.3.2 показано, что мерой различия (или сходства) двух узкополосных радиосигналов $s(t, \lambda_0)$ и $s(t, \lambda)$, по неэнергетическим параметрам τ и Ω является функция неопределенности $K(\tau, \Omega)$. Следовательно, анализ разрешения сигналов по параметрам τ и Ω непременно связан с формой этой функции. Рассмотрим отклик СФ при воздействии на его вход двух радиосигналов.

Пусть на вход поступают два радиосигнала с прямоугольной огибающей длительностью T_s и простой модуляцией, то есть база сигналов $B = \Delta T \times \Delta F \approx 1$. Временное положение сигналов отличается на величину $\Delta\tau$ (рис. 6.1). Тогда в силу линейности фильтра сигнальный отклик (3.18) на его выходе (сигнал $z_s(t)$) будет также состоять из двух слагаемых. Причем с точностью до постоянного коэффициента огибающая каждого из них имеет форму, совпадающую с огибающей временной автокорреляционной функции $K(\tau)$. Для прямоугольных радиоимпульсов функция $K(\tau)$ имеет треугольную форму и протяженность по времени $2T_s$ (см. рис. 1.9,а). Таким образом, на выходе детектора огибающей получим два треугольных импульса, разделенных промежутком $\Delta\tau$.

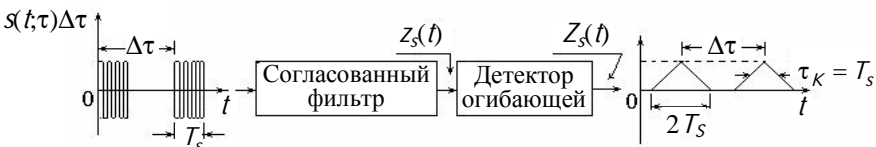


Рис. 6.1. Разрешение по времени задержки двух радиосигналов прямоугольной формы с простой модуляцией при согласованной фильтрации

Ширину τ_k функции $K(\tau)$ и соответственно длительность сигналов на выходе СФ часто определяют по уровню 0,5 от их максимального значения. Величина $\tau_k = 2\tau_{0,5}$, где $\tau_{0,5}$ — *интервал корреляции*, определяемый из условия $K(\tau_{0,5}) = 0,5$. Для прямоугольного радиопульса (см. рис. 1.9,а) $= 0,5 T_s$ и, следовательно, $\tau_k = T_s$. Найдем связь длительности сигнала τ_k на выходе СФ со среднеквадратической шириной ΔF спектра узкополосного радиосигнала на входе СФ. Для этого в формуле (1.22), определяющей протяженность сечения (эллипса) функции неопределенности $K(\tau, F)$ по оси τ , зададим величину $c = 0,5$. В итоге получим

$$\delta_\tau = \left. \frac{2\sqrt{1-c^2}}{\Delta F} \right|_{c=0,5} = \tau_k = \frac{\sqrt{3}}{\Delta F}, \quad (6.2)$$

Определение величины, *характеризующей разрешающую способность сигнала по задержке τ* , предполагает введение критерия, который позволит определить минимальное сближение двух сигналов $\Delta\tau_{\min}$, при котором «наблюдатель» может фиксировать наличие двух сигналов. Согласно *критерию Релея*, который применяется в оптических измерениях, условие $\delta\tau_p = \Delta\tau_{\min}$ соответствует такому положению сигналов на выходе устройства разрешения (СФ), при котором *огibaющая мгновенной мощности двух некогерентных сигналов* имеет двугорбую форму с провалом до уровня, равного половине от максимума. Мгновенная мощность каждого сигнала пропорциональна функции $K^2(t)$. Поскольку для некогерентных сигналов мощность суммы сигналов равна сумме мощностей, то «провал» до половины от максимума (рис. 6.2) образуется при пересечении огibaющих

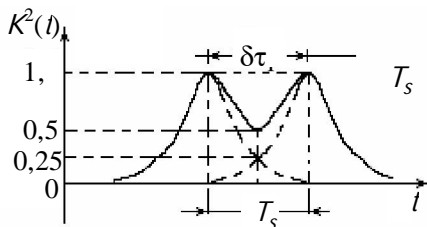


Рис. 6.2. Интенсивность отклика согласованного фильтра при разрешении двух некогерентных сигналов по критерию Релея

как раз на уровне 0,5 от максимального; при этом $\delta\tau_p = \Delta\tau_{\min} = \tau_k$. В случае радиопульса с простой модуляцией интервал корреляции $\tau_k \approx T_s$ (при прямоугольной огibaющей $\tau_k = T_s$), поэтому для такого сигнала $\delta\tau_p \approx T_s$ или $\delta\tau_p \approx \Delta T$, так как среднеквадратическая

длительность сигнала ΔT , если она существует, имеет всегда тот же порядок, что и длительность сигнала T_S .

Общий вывод заключается в том, что разрешающая способность сигнала по задержке равна интервалу временной корреляции, то есть $\delta\tau_p = \tau_k$. Улучшение разрешающей способности (уменьшение $\delta\tau_p$) связано, согласно (6.2) с увеличением ширины спектра сигнала ΔF . Привлекая понятие базы сигнала $B = \Delta F \cdot \Delta T$, можно утверждать, что разрешающая способность

$$\delta\tau_p \approx \frac{1}{\Delta F} = \frac{\Delta T}{B}. \quad (6.3)$$

Таким образом, повысить разрешающую способность сигнала по времени задержки, используя простую модуляцию ($B \approx 1$), возможно только путем сокращения его длительности. В этом случае при неизменной мощности излученного сигнала его энергия уменьшится. В итоге в приемнике на выходе согласованного фильтра максимальное отношение сигнал/шум $q_0^2 = 2E_s / N_0$ также уменьшится и, как следствие, в РТС ухудшатся характеристики обнаружения и различения сигналов. Исправить положение возможно путем увеличения мощности излучения. Однако это не всегда допустимо. Более того, режим с малой мощностью излучения повышает скрытность работы и благоприятствует решению проблемы электромагнитной совместимости различных РТС.

Применение сложных сигналов позволяет избежать указанных последствий. Действительно, согласно (6.3) можно с целью повышения разрешающей способности при заданной длительности сигнала ΔT значительно увеличить базу сигнала B путем увеличения ширины его спектра ΔF , например, за счет внутримпульсной ЛЧМ или ФКМ.

На рис. 6.3,а условно показаны два перекрывающихся по времени ВЧ-сигнала $s(t)$ и $s(t - \tau)$ со сложной модуляцией, которые поступают на вход СФ. Автокорреляционная функция сигналов $k(\tau)$ приведена на рис. 6.3,б; ее ширина $\tau_k \approx 1/\Delta F = \Delta T/B$, причем $\tau_k \ll T_S$. Сигналы на выходе СФ представлены на рис. 6.3,в. По форме они повторяют функцию $k(\tau)$ и, таким образом, сжимаются по длительности по сравнению с входными сигналами примерно в $B = \Delta F \cdot \Delta T$ раз. В итоге перекрывающиеся по времени входные сигналы будут разрешены по задержке, если $\Delta t \geq \Delta t_{\min}$. Разрешающая способность по критерию

Релея, $\delta\tau_p = \tau_k \approx 1/\Delta F$. Формально этот результат совпадает с выражением при использовании простых сигналов. Однако у сложного сигнала эту величину можно изменять независимо от длительности T_s . Действительно, например для сигнала ЛЧМ ширина спектра определяется девиацией частоты, а при ФКМ $\Delta F \approx 1/\Delta$, где Δ — длительность парциального импульса (см. пп. 1.3.4, 3.3.2).

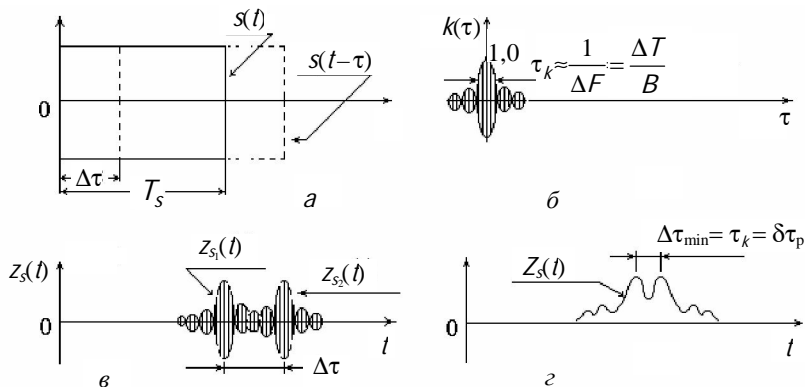


Рис. 6.3. Разрешение сложных сигналов по времени задержки:
 а — два перекрывающихся по времени задержки радиосигнала на входе согласованного фильтра; б — автокорреляционная функция радиосигнала;
 в — сигнальный отклик согласованного фильтра;
 г — огибающая сигнального отклика

На рис. 6.3,в видно, что наличие боковых всплесков (лепестков) и их уровень существенно влияют на достоверность разрешения сигналов по времени задержки. Действительно, боковые лепестки полезного сигнала на выходе СФ, т.е. соседние с главным максимумом пики огибающей временной АКФ сигнала, могут быть ложно восприняты как близкие по задержке сигналы. Параметр τ_k , равный разрешающей способности $\delta\tau_p$ по критерию Релея, учитывает только локальное поведение временной автокорреляционной функции $K(\tau)$. В этой связи для задачи разрешения более корректной является характеристика, предложенная Ф. Вудвордом. Он ввел величину, называемую *постоянной разрешения по времени*, которая определяется выражением

$$\delta\tau_B = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

По существу постоянная разрешения равна ширине прямоугольника, площадь которого равна площади под кривой $K^2(\tau)$. На рис. 6.4 показано соотношение величин временной разрешающей способности по Релею и Вудворду.

Рассмотрим в общем виде особенности разрешения сигналов по двум параметрам — задержке τ и частоте F .

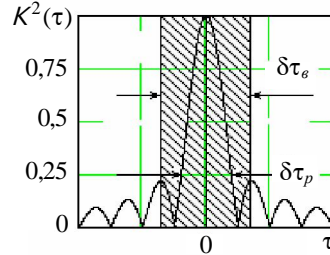


Рис. 6.4. Соотношение величин разрешающей способности по Релею и Вудворду

6.3. Совместное разрешение сигналов по времени запаздывания и частоте

Качество разрешения сигналов по параметрам τ и F зависит от вида функции неопределенности огибающей (частотно-временной корреляционной функции) $K(\tau, F)$. Геометрически $K(\tau, F)$ представляет собой поверхность, форма которой (ширина, уровень боковых лепестков и др.) зависит от способа и параметров модуляции сигнала (см. рис. 1.8,а, 1.12,а). Способ и параметры модуляции ВЧ-сигнала $s(t) = \text{Re} \left[\dot{S}(t) e^{i\omega_0 t} \right]$ определяют его комплексную огибающую $\dot{S}(t) = S(t) e^{j\phi(t)}$. В п. 1.3.2 показано, что функция неопределенности

$$K(\tau, \Omega) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) e^{i\Omega t} dt \right|.$$

Тело, образованное поверхностью $K^2(\tau, F)$ и плоскостью координат (τ, F) , называется *телом неопределенности* [7].

Очевидно, разрешение двух копий сигнала, отличающихся друг от друга по времени запаздывания на τ и частоте на F , будет тем выше, чем меньше значение ФН в точке с координатами τ и F . Другими словами, совместная разрешающая способность по задержке τ и частоте F будет выше, если тело неопределенности имеет максимально узкий и единственный пик.

Свойства главного сечения $K(\tau) = K(\tau; \Omega = 0)$ обсуждались выше: протяженность пика ФН вдоль оси τ определяет разрешающую

способность $\delta\tau_p$ сигнала по времени и имеет порядок длительности τ_k огибающей временной автокорреляционной функции сигнала. Другое главное сечение ФН — частотная автокорреляционная функция $K(F) = K(\tau = 0; F) = |\dot{K}(\tau = 0; F)|$, очевидно, определяет разрешение только по частоте, когда два сигнала совмещены по времени, но отличаются частотами. В соответствии с (1.15) имеем

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 e^{j2\pi Ft} dt \right|. \quad (6.5)$$

Явный смысл функции (6.5), как корреляционной функции, установить просто. Применяя к (6.5) теорему Парсеваля, получим

$$K(F) = \left| \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f - F) \dot{G}^*(f) df \right|. \quad (6.6)$$

Таким образом, протяженность пика функции неопределенности вдоль частотной оси F имеет порядок ширины F_k огибающей частотной автокорреляционной функции $K(F)$. Согласно (6.5) $K(F)$ и $|\dot{S}(t)|^2 = S^2(t)$ образуют пару сопряженных по Фурье функций. Следовательно, *повышение разрешающей способности только по частоте, т.е. уменьшение величины $\delta F_p \approx F_k$, для любых сигналов связано с увеличением протяженности действительной огибающей $S(t) = |\dot{S}(t)|$ радиосигнала $s(t)$. Это равносильно увеличению длительности (T_s или ΔT) сигнала $s(t)$ и в случае простых сигналов ($B \approx 1$) непременно ведет к снижению разрешения по задержке τ , так как $\delta\tau_p \approx \Delta T / B$. Таким образом, увеличение совместной разрешающей способности по параметрам τ и F для сигналов с простой модуляцией реализовать невозможно.*

Для наглядного пояснения данного положения обратимся к геометрической интерпретации. На рис. 6.5 показана функция неопределенности для простого сигнала с гауссовой огибающей. Длительность сигнала $s(t)$ и протяженность его спектра можно положить приближенно равными соответствующим среднеквадратичным величинам ΔT и ΔF . Тогда протяженность области определения функции $K(\tau, F)$ по переменным τ и F практически равна $2\Delta T$ и $2\Delta F$. Площадь основания, в пределах которого сосредоточено тело неопределенности, $\Pi_{\text{осн}} \approx 4\Delta T \Delta F = 4B$.

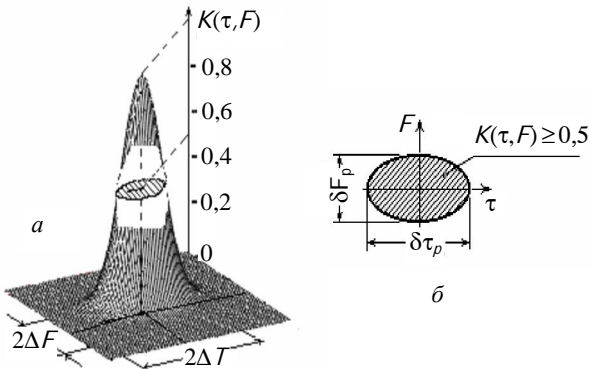


Рис. 6.5. Функция неопределенности радиоимпульса с простой модуляцией (а) и область высокой корреляции (б)

Совместное разрешение сигналов по задержке τ и частоте F , как было установлено ранее, возможно вне области высокой корреляции, которая определяется условием $K(\tau, F) \geq 0,5$ и показана на рис. 6.5. Главные оси эллипса, который определяет границу области высокой корреляции, согласно (6.2) равны, разрешающей способности $\delta\tau_p \approx \sqrt{3}/\Delta F$ и $\delta F_p = \sqrt{3}/\Delta T$. Таким образом, площадь $\Pi_{0,5}$ области высокой корреляции (площадь эллипса) равна $\Pi_{0,5} = 3\pi/(4\Delta T \cdot \Delta F) = 3\pi/4B$.

Для простых сигналов $B \approx 1$ величина $\Pi_{0,5}$ составляет около 60 % от общей площади основания $\Pi_{\text{осн}}$. Это значит, что для простых сигналов почти весь объем тела неопределенности, равный единице, сосредоточен в области высокой корреляции и вытеснить оттуда существенную часть полного объема в целях улучшения совместного разрешения по параметрам τ и F невозможно. В этом и состоит особенность задачи совместного разрешения при использовании сигналов с простой модуляцией, когда сужение ФН по одной из осей непременно вызывает ее расширение по другой.

Идеальное тело неопределенности должно иметь «кнопочный» вид типа иглы единичной высоты на прямоугольном основании, имеющем площадь $4\Delta T \cdot \Delta F = 4B$ (рис. 6.6).

Однако получить тело неопределенности с нулевыми боковыми лепестками невозможно, так как существует ограничение, обусловленное

принципом неопределенности в радиолокации, согласно которому нельзя произвольно менять форму тела неопределенности (см. п. 1.3.2). Суть его состоит в том, что объем тела неопределенности не зависит от формы сигнала и равен единице (1.16а). Приближение тела неопределенности к идеальной форме возможно только при использовании сложных сигналов ($B \gg 1$).

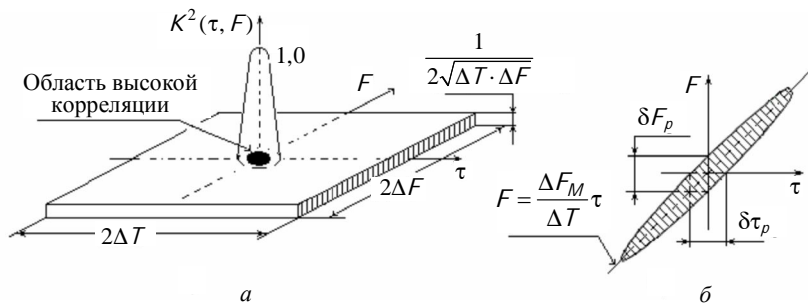


Рис. 6.6. Условное представление идеального тела неопределенности сложного (база $B > 1$) сигнала (а) и область высокой корреляции радиосигнала с внутримпульсной линейной частотной модуляцией (б)

Действительно, при площади $\Pi_{\text{осн}} = 4B \gg 1$ область высокой корреляции будет иметь площадь $\Pi_{0,5} = (3\pi/4B) \ll 1$. Поскольку $K^2(\tau, F) \leq 1$, то объем главного пика тела неопределенности, соответствующий области высокой корреляции, равен $V_{\text{гл}} \approx 1 \cdot (3\pi/4B)$, то есть он имеет порядок величины $1/B$. Остальная часть объема $V_{\text{ост}} = [1 - (1/B)] \approx 1$, то есть практически весь объем тела неопределенности, придется на основание, площадь которого равна $4\Delta F \cdot \Delta T = 4B$. Таким образом, высота основания, имеющая смысл средней интенсивности (мощности) боковых лепестков, равна $1/4B$. Это значит, что среднеквадратичный уровень боковых лепестков огибающий идеальной частотно-временной корреляционной функции $K(\tau, F)$, или среднеквадратичная величина напряжения на выходе СФ вне области главного пика, примерно равна $1/2\sqrt{B}$ (см. рис. 6.6). Таким образом, уменьшение уровня боковых лепестков можно получить только за счет увеличения базы сигнала.

Следует отметить, что сама по себе большая величина базы B не обеспечивает приближения ФН $K(\tau, F)$ к идеальной форме. Например,

функция неопределенности ЛЧМ-сигнала (см. рис. 1.12) имеет вид не иглы, расположенной на основании, а узкого гребня, повернутого относительно осей τ и F . Область высокой корреляции такого сигнала показана на рис. 6.б,б. Она ограничена эллипсом, у которого большая ось совпадает с линией $F = (\Delta F_M / \Delta T)\tau$ (ΔF_M — девиация частоты). В пределах этой области отрезки осей τ и F равны величинам разрешающей способности ЛЧМ-сигнала по частоте $\delta F_p = \sqrt{3} / \Delta T$ и по времени $\delta \tau_p = \sqrt{3} / \Delta F_M$. Таким образом, подходящим выбором девиации ΔF_M (ширины спектра) и длительности ΔT можно обеспечить высокое разрешение по времени τ при $F = 0$ и по частоте F при $\tau = 0$. Вместе с тем, из рис. 6.б,б видно, что какими бы ни были девиация ΔF_M и длительность сигнала ΔT , в области высокой корреляции существуют значения временного и частотного сдвигов, которые превышают величины разрешения $\delta \tau_p$ по времени или δF_p по частоте. Это означает, что сигналы с такими значениями параметров τ и F , не будут наблюдаться раздельно.

Функцию неопределенности, близкую к идеальной, можно получить в классе радиосигналов с ФКМ. У этих сигналов область высокой корреляции, как и в случае простых сигналов, симметрична относительно осей τ и F . ФКМ-сигналы имеют достаточную длительность $T_s = n \cdot \Delta$ (Δ — длительность парциального элемента, n — их число), что позволяет получить необходимое разрешение по частоте. Ширина автокорреляционной функции $K(\tau)$, определяющая разрешение по времени задержки, равна $\tau_k = \Delta \approx 1 / \Delta F$ (см. п. 1.3.4). База сигнала с ФКМ $B = T_s \cdot \Delta F \approx n \cdot \Delta \cdot 1 / \Delta = n$. Боковые лепестки (см. рис. 1.16,б) на плоскости (τ, F) имеют при этом характер хаотически расположенных треугольных пиков, уровень некоторых из них может превышать $1 / \sqrt{B}$.

6.4. Контрольные вопросы к главе 6

1. В чем состоит особенность задачи разрешения сигналов по параметру в сравнении с задачей различения сигналов?
2. Что есть мера разрешения двух сигналов по параметру временной задержки?
3. Что определяет величину потенциальной разрешающей способности двух сигналов известной формы по времени задержки?

4. Как следует построить приемник-обнаружитель, чтобы реализовать предельную разрешающую способность сигналов известной формы по времени задержки?

5. Что дает применение сигналов с большой базой в плане их разрешения по времени задержки?

6. Какими должны быть характеристики приемного устройства, чтобы реализовать потенциальные возможности радиосигнала в плане разрешающей способности по времени задержки?

7. Каковы особенности разрешения сигналов одновременно по двум параметрам — времени задержки и частотному сдвигу?

8. Почему применение сигнала с простой модуляцией не позволяет одновременно повышать разрешение сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?

9. В чем состоит преимущество применения сигналов с большой базой при достижении высокого разрешения сигналов по временной задержке и частотному сдвигу?

10. В чем состоят преимущества радиосигнала с ФКМ по сравнению с радиосигналом с ЛЧМ при одновременном разрешении сигналов по времени задержки и частотному сдвигу?

11. Сформулируйте критерии разрешения по Релею и Вудворду. В чем состоит отличие этих критериев?

12. Какой параметр радиосигнала определяет потенциальную разрешающую способность по частотному сдвигу?

13. Что есть область высокой корреляции ФН-радиосигнала?

7. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

7.1. Лабораторная работа 1.

Статистическое описание случайных сигналов

7.1.1. Теоретическая часть

Цель работы: изучение и экспериментальная оценка основных вероятностных характеристик дискретных во времени случайных сигналов с непрерывным множеством значений.

Основные положения теории случайных сигналов

Случайный сигнал. Функцию времени $X(t)$, численное значение которой в любой момент времени t_j является случайной величиной, то есть $X(t_j) = X_j$, будем называть *случайным сигналом*. Дальнейшие рассуждения связаны с такими случайными сигналами, у которых множество значений непрерывно. Оно может быть ограниченным, и тогда $X_j \in (a; b)$, где a и b — постоянные величины, или не ограниченным, например $X_j \in (-\infty; \infty)$.

В инженерной практике широко используют представление сигналов в дискретном времени. Таким образом, если иметь в виду последовательность моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n , то случайный процесс есть последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n . Важно отметить, что для описания случайного сигнала *необходимо рассматривать совместно систему n случайных величин*. Вопрос о том, сколько следует взять моментов времени и как их задать, заслуживает отдельного рассмотрения и в данном случае не столь важен.

Ансамбль реализаций и функция распределения вероятностей. Заведомо определить значение случайной величины X_j невозможно. Таким образом, X_j или, если иметь в виду любой текущий момент времени t , то $X(t)$, есть, по существу, обозначение множества (совкупности, ансамбля) значений случайной функции. Конкретные численные значения случайной величины X обозначают малой буквой x .

В теории случайных сигналов конкретную реализацию случайного сигнала $X(t)$ обозначают $x^{(k)}(t)$. При этом полный ансамбль реализаций полагают бесконечно большим.

В инженерной практике количество возможных реализаций (опытов, наблюдений) всегда ограничено. Задача статистики как науки состоит, в частности, в том, чтобы по ограниченному числу опытов получить информацию о вероятностных свойствах случайных величин (функций) и дать оценку достоверности этой информации.

Для описания случайных величин в теории вероятностей введено понятие *функции распределения вероятностей* (ФРВ) $F(x)$. Числовое значение функции $F(x)$ в точке x равно вероятности события ($X \leq x$), то есть

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (1)$$

Приращение этой функции на интервале $[x; x + \Delta x]$ равно вероятности попадания сигнала в этот интервал $P\{X \in [x; x + \Delta x]\}$, то есть

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = P[X \leq (x + \Delta x)] - P[X \leq x]. \quad (2)$$

Функция плотности распределения вероятностей. Найдем отношение вероятности (2) к длине интервала, то есть определим среднюю плотность распределения вероятности на конечном интервале $[x; x + \Delta x]$:

$$W_{\text{cp}}(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Очевидно, что при условии $\Delta x \rightarrow 0$ можно получить плотность вероятности в точке, подобно тому как получают мгновенную скорость в механике. Таким образом, для *функции плотности распределения вероятности* (ПРВ) найдем

$$W(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} W_{\text{cp}}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (4)$$

Следует отметить, что дифференциал

$$dF(x) = W(x)dx \quad (5)$$

имеет смысл *бесконечно малой вероятности попадания случайной величины (случайного процесса в один произвольный момент времени t) в бесконечно малую окрестность со значением x .*

На рис. 1 для десяти моментов времени $t_i \equiv i=1,2,\dots,10$ показаны 50 реализаций $x^{(k)}(t_i) \equiv x_i^{(k)}$, $k=1,2,\dots,50$, одной и той же случайной функции $X(t)$.

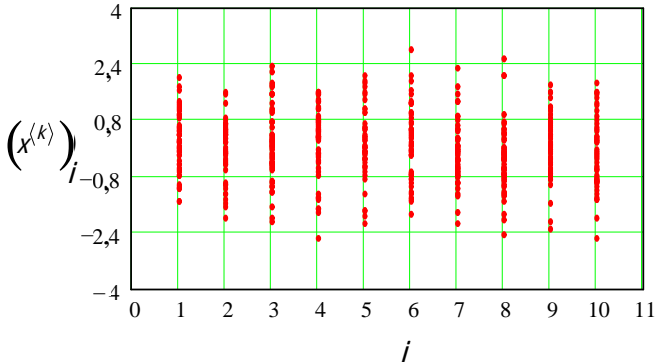


Рис. 1

На рис. 2 приведены три реализации этой же случайной функции, ее соседние по времени значения соединены прямыми линиями (кусочно-линейная аппроксимация непрерывной функции).

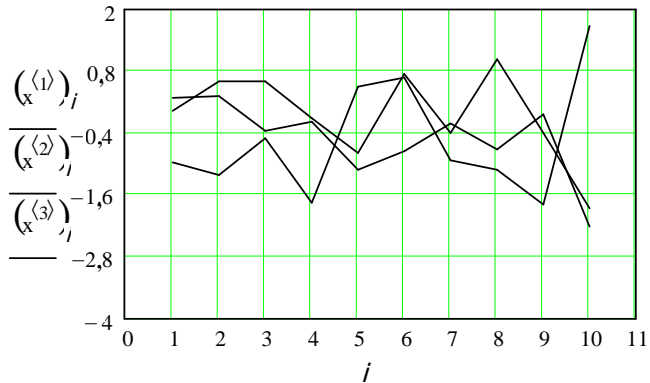


Рис. 2

Многомерные ФРВ и ПРВ. Функция $F(x)$, введенная выше, характеризует поведение случайного сигнала в *один момент времени*. В общем случае ее вид может измениться при выборе другого момента времени. Чтобы подчеркнуть этот факт, функцию распределения обычно записывают в виде $F(x_1; t_1)$. Однако, как уже отмечалось, знание только этой функции недостаточно для описания поведения случайного сигнала. Необходимо рассматривать совместно систему n случайных величин. Поэтому вводится функция

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n; t_1, t_2, \dots, t_n], \quad (6)$$

где $P[\cdot]$ — вероятность события, состоящего в совместном выполнении неравенств, указанных в скобках в n моментов времени. Для краткости записи совокупность случайных величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ объединяют в вектор и функцию $F(\bar{x}; t_1, \dots, t_n)$ называют *n -мерной функцией распределения вероятностей* случайного сигнала. Рассуждая аналогично, приходим к понятию *n -мерной функции плотности распределения вероятностей* $W(\bar{x}; t_1, \dots, t_n)$. Вероятностный смысл многомерных ФРВ и ПРВ остается прежним. Отличие лишь в том, что все рассуждения и построения теперь следует рассматривать в n -мерном пространстве. В частности, дифференциальный n -мерный элемент вероятности $dF(\bar{x}; t_1, \dots, t_n) = W(\bar{x}; t_1, \dots, t_n) d\bar{x}$, где $d\bar{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ — дифференциальный элемент объема.

Моментные функции. Описание случайного сигнала с помощью ФРВ и ПРВ является исчерпывающим. Однако представить характер поведения случайного сигнала на их основе довольно сложно. В этом плане более наглядны *моментные функции*, которые в *среднем* определяют поведение ансамбля реализаций.

В практике широко применяют функцию $m_x(t)$, которая определяет в любой момент времени t среднее (по всему множеству реализаций, т.е. по ансамблю) значение случайного сигнала. Несмотря на изменчивость во времени, ее можно назвать постоянной составляющей случайного сигнала. Вычисление функции $m_x(t)$ предполагает весовое суммирование (в данном случае интегрирование) всех возможных значений сигнала с учетом вероятностей (5) их появления. В итоге получаем известное из теории вероятностей соотношение для математического ожидания случайной функции

$$m_x(t) = \overline{X(t)} = \mathbf{M}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x, t) dx, \quad (7)$$

где $\mathbf{M}[\cdot]$ — оператор (правило вычисления) математического ожидания; черта сверху — упрощенное обозначение оператора усреднения по ансамблю. Таким образом, «математическое ожидание» и «среднее по ансамблю» — это по существу тождественные понятия.

Вторая не менее важная моментная функция определяет среднюю мощность вариаций (отклонений) случайного сигнала относительно среднего значения в момент времени t . Величина отклонения (переменная составляющая) или центрированное значение сигнала есть $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$. Поскольку мощность пропорциональна квадрату тока (или напряжения), то ее среднее по ансамблю значение определено выражением

$$D_x(t) = \overline{[\tilde{X}^2(t)]} = \mathbf{M}[\tilde{X}^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 W(x, t) dx. \quad (8)$$

Величину средней мощности $D_x(t)$ переменной составляющей $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ сигнала называют *дисперсией случайного сигнала*. Можно считать, что дисперсия характеризует в среднем степень рассеяния сигнала в момент времени t относительно его среднего значения. Фактические пределы интегрирования в (7) и (8) определяются областью значений x , где $W(x, t) \neq 0$ в общем случае — это вся вещественная прямая, то есть $x \in (-\infty; \infty)$.

Отметим, что вычисление $D_x(t)$ и $m_x(t)$ требует знания одномерной ПРВ. Очевидно, что, определяя свойства случайного сигнала в один момент времени, то есть привлекая только одномерную ПРВ, невозможно характеризовать скорость изменения сигнала во времени, то есть его спектральные (частотные) свойства. Для введения моментной функции, обладающей указанным свойством, необходимо привлечь 2-мерную ПРВ $W(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Моментная функция, которая связана со спектральными свойствами случайного сигнала, называется *автоковариационной функцией* (АКФ). Автоковариационная функция $K_x(t_1, t_2)$ определяется как среднее по ансамблю величины $[\tilde{X}(t_1)\tilde{X}(t_2)]$, равной произведению центрированных значений сигнала в два момента времени $\tilde{X}(t_1)$ и $\tilde{X}(t_2)$. Таким образом, имеем

$$K_x(t_1, t_2) = \overline{\tilde{X}(t_1)\tilde{X}(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)]W(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Предлагается самостоятельно убедиться в том, что в *случае независимых величин*, когда справедливо соотношение

$$W(x_1, x_2; t_1, t_2) = W(x_1; t_1)W(x_2; t_2), \quad (10)$$

выражение (9) для АКФ тождественно равно нулю, т.е. в эти моменты времени значения случайного сигнала некоррелированы.

Случайные стационарные сигналы. Важный класс случайных сигналов составляют *стационарные* сигналы. Свойство, которое определяет эти сигналы, состоит в том, что для них n -мерные ПРВ не изменяются при произвольном переносе начала координат по оси времени. Если это свойство выполняется только для $n \leq 2$, то случайный сигнал называют *не строго стационарным или стационарным в узком смысле*. В итоге для случайного стационарного сигнала ПРВ 1-го порядка (ПРВ для одного момента времени) от времени не зависит, а ПРВ 2-го порядка зависит лишь от модуля $|t_2 - t_1| = \tau$. Из выражений для моментных функций (7)–(9) следует, что среднее значение и дисперсия стационарного процесса суть постоянные величины, а автоковариационная функция есть функция одного аргумента, то есть

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad D_x(t) = D_x = \text{const}; \\ K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эргодическое свойство случайных стационарных сигналов. Стационарные сигналы, у которых АКФ *абсолютно интегрируема*, обладают *эргодическим свойством*. Суть этого свойства в том, что вероятностные характеристики ($F(x)$, $W(x)$, m_x , D_x , $K(\tau)$), которые были определены выше как *средние по ансамблю*, могут быть определены *по одной (любой) реализации* $x^{(k)}(t)$ случайного сигнала $X(t)$ путем *усреднения по времени* соответствующих величин на интервале $t \in (0; T)$. Таким образом, усреднение по ансамблю и по времени дает один и тот же результат. Теоретически показано, что совпадение вероятностных характеристик возможно лишь при $T \rightarrow \infty$. Однако в действительности необходимая для практики погрешность 5–10 % реализуется при конечных величинах T .

Эргодическое свойство, справедливость которого в общем случае не всегда очевидна, существенно упрощает вероятностные расчеты при экспериментальных исследованиях. Необходимо усвоить, что только в пределе при $T \rightarrow \infty$ не имеет значения, какая реализация сигнала будет использована для вычисления его вероятностных характеристик. При конечной же величине временного интервала, а на практике это всегда так, *разные реализации случайного сигнала будут давать отличающиеся друг от друга результаты.*

Таким образом, фактически за конечное время можно получить лишь *оценки* требуемых вероятностных характеристик. В отличие от истинных (средних по ансамблю) вероятностных характеристик случайных сигналов (например, $F(x)$, $W(x)$, m_x , D_x , $K_x(\tau)$), их оценки обозначают иначе. Далее для оценок будем использовать следующие обозначения: $\bar{F}(x)$, $\bar{W}(x)$, \bar{m}_x , \bar{D}_x , $\bar{K}_x(\tau)$.

Вычисление оценок вероятностных характеристик случайных сигналов. Напомним, что случайный сигнал на конечном интервале времени можно представить последовательностью из случайных величин. Если случайный сигнал является стационарным, то все величины в отдельности имеют одну и ту же ПРВ, то есть каждую из этих величин можно выбирать (генерировать) из одного и того же ансамбля. В простейшем случае, который и будем иметь в виду в этой лабораторной работе, последовательные значения, извлекаемые из ансамбля, будут статистически независимыми, то есть между ними практически нет вероятностной связи. В этом случае АКФ (9) имеет вид

$$K_x(|t_i - t_j|) = K_{ij} = \begin{cases} D_x, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (12)$$

Оценки всех вероятностных характеристик будем получать в виде соответствующих средних арифметических значений, выполняя суммирование элементов выборки по времени, то есть по всем дискретным моментам t_j , например:

$$\bar{m}_x^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}; \quad \bar{D}_x^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i^{(k)} - \bar{m}_x^{(k)}]^2. \quad (13)$$

Для оценки ковариационной функции, которая теперь будет функцией дискретного аргумента j , получим

$$\hat{K}(j) = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{(n-j)} \left[x_i^{(k)} - \bar{m}_x^{(k)} \right] \left[x_{(i+j)}^{(k)} - \bar{m}_x^{(k)} \right]. \quad (14)$$

В целях упрощения записи в дальнейших выражениях для различных оценок принадлежность оценки или выборки к конкретной реализации указывать не будем, если в этом не будет особой необходимости. Однако об этом следует помнить, поскольку именно по этой причине сами *оценки должны рассматриваться как случайные величины*. Таким образом, конкретный опыт дает лишь *одно значение случайной величины* — оценки, и судить о ее качестве по результатам единственного опыта рискованно. Очевидно, следует много раз повторять опыт и изучить поведение оценок в серии из нескольких опытов.

Работа выполняется в среде Mathcad (версия не ниже 2001) с привлечением стандартных процедур, обеспечивающих генерацию последовательности заданного количества независимых случайных величин с заданными статистическими свойствами. Таким образом, имея навыки составления простейших программ, можно получать различные реализации n -мерного случайного вектора \vec{X} с конкретными значениями в некоторой k -й реализации $\vec{x}^{(k)} = \left[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right]$. Каждую такую реализацию будем называть *выборкой*, количество ее элементов n — *объемом выборки*.

7.1.2. Задание на лабораторную работу

1. Образовать R выборок объемом N из независимых случайных величин (отсчетов), принадлежащих случайному стационарному сигналу $X(t)$ с одномерной ПРВ следующего вида:

1) равномерная ПРВ — $W(x) = 1/(b-a)$; $x \in [a, b]$;

2) нормальная (гауссовская) ПРВ —

$$W(x) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) \exp \left[-(x - m_x)^2 / 2\sigma_x^2 \right]; \quad x \in (-\infty; \infty);$$

3) экспоненциальная ПРВ — $W(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$; $x \in [0; \infty)$.

2. Изобразить графически выборочные реализации сигнала для двух различных (по выбору) значений параметров, определяющих каждую из заданных ПРВ.

3. Вычислить теоретические значения математического ожидания m_x и дисперсии D_x для случайного сигнала с заданными одномерными ПРВ.

4. Вычислить программно в соответствии с (13) выборочные оценки \bar{m}_x и \hat{D}_x путем усреднения элементов k -й выборки по времени при раз-

личных объемах выборок ($N = 5; 20; 100$). Сравнить результаты с теоретическими значениями величин. Сделать выводы.

5. Вычислить программно оценку ковариационной функции $\hat{K}(j)$ для целочисленных значений $j \in [0; J]$. Дать ответ на вопрос, чему равно значение $K(0)$ и $\hat{K}(0)$. Получить график для оценки нормированной АКФ, выполнив нормировку на величину $\hat{K}(0)$.

6. На основе процедуры $\text{histogram}(M, x)$ вычислить программно оценки ПРВ $\hat{W}(x)$. На одном рисунке представить графики оценки $\hat{W}(x)$ и теоретической ПРВ.

В качестве оценки ПРВ обычно рассматривают гистограмму. Процедура ее расчета имеет два параметра: M — количество разрядов (подынтервалов), на которое разбивают интервал выборочных значений от x_{\min} до x_{\max} ; x — массив выборочных значений (выборка), $x = \{x_i\}$, где $i = 1, 2, \dots, N$. При обращении к процедуре вида $A := \text{histogram}(M, x^{(k)})$ осуществляются следующие действия: 1) упорядочение k -й выборки по возрастанию от x_{\min} до x_{\max} и определение левой и правой границ каждого из M подынтервалов; 2) сортировку элементов k -й выборки по M разрядам и подсчет частот — количества элементов выборки n_m , где $m = 1, 2, \dots, M$, попавших в каждый из M подынтервалов; 3) формирование выходного массива A в виде матрицы размером $M \times 2$. В первом столбце этой матрицы расположены координаты x_{om} ($m = 1, 2, \dots, M$) середин всех M подынтервалов. Поскольку подынтервалы имеют равную ширину Δx , то, очевидно, $\Delta x = A_{2,1} - A_{1,1}$.

Во втором столбце расположены частоты n_m , причем $\sum_{m=1}^M n_m = N$.

Теоретическое значение вероятности P_m попадания случайной величины X в окрестность точки x_{om} длиной Δx равна площади фигуры, ограниченной кривой $W(x)$ (рис. 3):

$$P_m = \int_{(x_{om}-\Delta x/2)}^{(x_{om}+\Delta x/2)} W(x) dx.$$

В качестве оценки \hat{P}_m истинной (теоретической) вероятности P_m попадания случайного сигнала в интервал шириной Δx с центром в точке x_{om} можно принять величину $\hat{P}_m = n_m / N$, равную отношению

количества удачных наблюдений n_m к их общей величине N . Соответственно для оценки ПРВ в точке x_{om} можно использовать (3) в виде

$$\hat{W}(x_{om}) = n_m / (N\Delta x), \quad \text{где } m=1, 2, \dots, M. \quad (15)$$

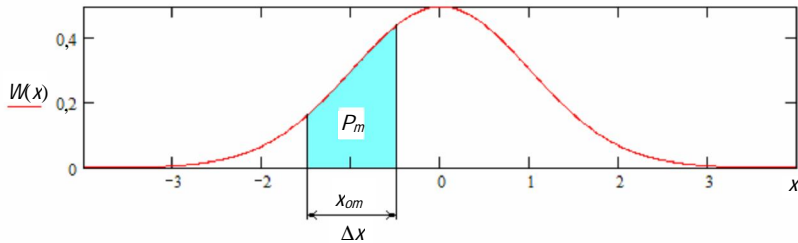


Рис. 3. Кривая плотности вероятностей и область, площадь которой равна вероятности P_m попадания сигнала в некоторый момент времени в интервал $[(x_{om} - \Delta x/2); (x_{om} + \Delta x/2)]$

При выполнении данного пункта задания следует вывести на один график изображение оценки (тип графика `solidbar`) и теоретическую кривую ПРВ, вычислив ее предварительно для множества середин подынтервалов $\{x_{om}\}$.

7. Изучить рассеяние (разброс) оценок среднего значения сигнала по ансамблю $R=50$ выборок в зависимости от объема выборки N , выполнив необходимые расчеты при $N=5; 20; 100; 200$.

8. Изучить влияние параметров m_x и σ_x на поведение теоретической и экспериментальной ПРВ гауссового вида, выполнив расчет для следующих значений параметров: 1) $m_x=0$, $\sigma_x=1$ и 3; 2) $m_x=3$, $\sigma_x=1$ и 3.

9. Исследовать влияние соотношения объема выборки N и количества разрядов гистограммы M на поведение оценки ПРВ. Рекомендуется задать $M=10$ и 20 при $N=200$ и 2000 . При этом следует обратить внимание на п. 5 рекомендаций по выполнению лабораторной работы.

10. Сделать выводы по результатам выполненных исследований.

В п. 7.1.3 приведена программа, содержащая выполнение основных (не всех) пунктов задания по работе.

Очевидно, что случайная величина n_m в (15) при независимых опытах имеет биномиальное распределение вероятностей со средним значением $P_m N$ и дисперсией $N P_m (1 - P_m)$.

Получите выражение для относительной среднеквадратичной ошибки $\sigma_{\hat{W}}/P_m$ оценки \hat{W} и рассмотрите ее поведение при $P_m \rightarrow 0$ для заданного Δx . Сделайте выводы о проблеме, связанной с оценкой малых вероятностей P_m .

В заключение изложим некоторые рекомендации по выполнению задания.

1. Следует изучить термины и понятия, которые используются в разделе 1, и усвоить их смысл. Это *наиболее сложная* часть всей работы, которая требует знаний основ теории вероятностей и изучения материала курса лекций.

2. Весьма вероятно возникновение проблем с применением пакета Mathcad. Обращайтесь к литературе (например [18]). Проблемы эти временные, с ними сталкиваются и опытные программисты. Успех приходит после преодоления трудностей и исправления ошибок.

3. Все функции, доступные в пакете Mathcad, можно находить, обратившись в меню к значку $\mathbf{f(x)}$. В работе необходимы генераторы случайных величин (СВ): $\text{runif}(N,a,b)$ — обеспечивает формирование выборки объема N с равновероятной ПРВ в интервале $(a; b)$; $\text{gnorm}(N, m_x, \sigma_x)$ — генератор СВ с гауссовой ПРВ, где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ — среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины и m_x — математическое ожидание; $\text{gehr}(N, \lambda)$ — генератор СВ с экспоненциальной ПРВ, где λ — параметр, определяющий математическое ожидание и дисперсию СВ.

4. В программе для оценок использованы иные обозначения, нежели в описании к работе. В частности, $\hat{m}_x \equiv m_{x0}$, $\hat{D}_x \equiv D_{x0}$, $\hat{K}_x(\tau) \equiv K\alpha(j)$, $\hat{W}(x_{om}) \equiv W_{om}$. Аргумент АКФ, равный модулю $|t_j - t_k|$, при представлении случайного сигнала дискретной временной последовательностью принимает значения $j \cdot \Delta t = |i \cdot \Delta t - k \cdot \Delta t| = |i - k| \cdot \Delta t$, то есть j целочисленная переменная с максимальным значением $J = (0, 1 \div 0, 2) N$.

5. При выполнении п. 9 задания на лабораторную работу с большими значениями N *возможно* значительное увеличение времени счета вследствие существенных затрат времени для расчета оценки АКФ. Этого можно избежать, если перед расчетом $K\alpha(j)$ ввести локальное значение объема выборки $M1 < N$. При этом необходимо внести коррекцию в расчетную формулу и обеспечить условие $J = (0, 1 \div 0, 2) M1$.

7.1.3. Листинг программы

Лабораторная работа № 1

Цель работы: Изучение статистического описания случайных сигналов

ORIGIN:=1 R:=3 N:=200 M:=10

*R-колич.реализаций. N -число отсчетов.
M -число разрядов гистограммы.*

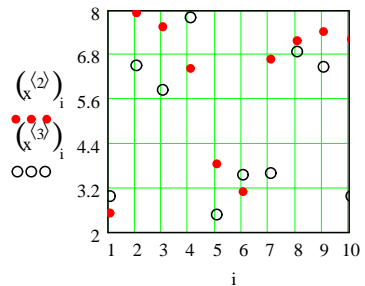
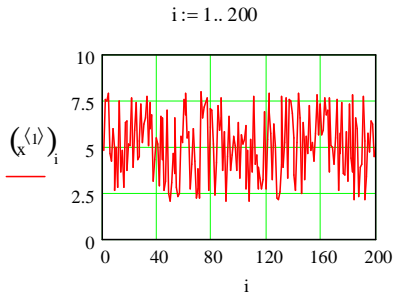
k:=1..R a:=2 b:=8 m:=1..M

1. Генератор k -ой реализации случайной последовательности из N независимых отсчетов, каждый из которых имеет равномерную ПРВ в интервале $(a;b)$:

$$x^{(k)} := \text{rnif}(N, a, b)$$

2. Первые 10 отсчетов из 200 для 2-й и 3-й реализации и 200 отсчетов из 1-ой:

$i := 1..10$



3. Расчет оценок математического ожидания (среднего значения) стационарного случайного сигнала при условии, что он обладает эргодическим свойством, когда допустимо вычислять оценки при усреднении по времени одной реализации сигнала:

- 3.1 Оценка среднего значения и дисперсии для каждой из 3-х реализаций

Оценка среднего значения сигнала по k -ой реализации

$$m_x(k) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^{(k)})_i$$

Для каждой из 3-х реализаций получаем:

$$m_x(k) =$$

5.101
5.14
4.97

Оценка дисперсии сигнала по k -ой реализации :

$$Dx\alpha(k) := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left[\left(x^{(k)} \right)_i - mx\alpha(k) \right]^2$$

Для каждой из 3-х реализаций получаем:

$$Dx\alpha(k) =$$

2.973
2.996
2.945

Оценка $Ko(j)$ ковариационной функции:

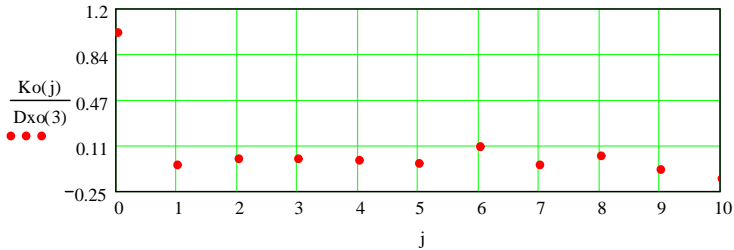
$J := 10$ - "глубина" расчета оценки АКФ.

$j := 0..J$

- дискретные значения аргумента автоковариационной функции; максимальный сдвиг по времени 10 временных тактов.

$$Ko(j) := \frac{1}{N-j} \cdot \sum_{i=1}^{(N-j)} \left[\left(x^{(j)} \right)_i - mx\alpha(2) \right] \cdot \left[\left(x^{(j)} \right)_{i+j} - mx\alpha(2) \right]$$

График нормированной ковариационной функции



4. Вычисление оценки одномерной плотности распределения вероятностей случайного сигнала

4.1 Обращение к процедуре вычисления гистограммы : $A := \text{histogram}(M, x^{(j)})$

В контексте программы для расчета гистограммы используется 2-я реализация случайного сигнала, представленного дискретной последовательностью.

A - массив размерностью $(M \times 2)$ со значениями величин: итог работы процедуры $histogram(M, X)$ при $k=2$, т.е. для 2-ой реализации случайного сигнала

	1	2
1	2.3	30
2	2.9	17
3	3.5	12
4	4.1	26
5	4.7	29
6	5.3	18
7	5.9	21
8	6.5	14
9	7.1	19
10	7.7	14

4.2 Расчет величин для вычисления оценки ПРВ

Ширина подынтервала - $\Delta x := A_{2,1} - A_{1,1} \quad \Delta x = 0.6$

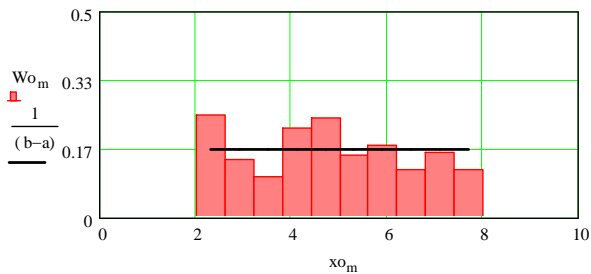
Значения частот: $n_m := A_{m,2}$

Координаты середин подынтервалов: $x_{o_m} := A_{m,1}$

Расчет значений оценок W_{o_m} ПРВ для каждого

из M разрядов гистограммы : $W_{o_m} := \frac{n_m}{N \cdot \Delta x}$

Графики оценки ПРВ (по данным эксперимента) и теоретической ПРВ $W(x)=1/(b-a)$



7.2. Лабораторная работа 2.

Статистические свойства смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссовского шума

7.2.1. Теоретическая часть

Цель работы: изучение вероятностных характеристик огибающей и фазы смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссовского шума.

Общие сведения из теории гауссовских сигналов

Определение и свойства гауссовых (нормальных) сигналов. Случайный сигнал $X(t)$ называют гауссовским, если его n -мерная ПРВ имеет вид

$$W(\bar{x}) = W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det K_x}} \exp[-0,5Q(\bar{x})], \quad (1)$$

где $\det K_x$ — определитель ковариационной матрицы K_x ; многочлен в показателе экспоненты

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{x}_i \tilde{x}_j K_{ij}^{(-1)} \quad (2)$$

есть квадратичная форма (функция) от n переменных, в которой переменные $\tilde{x}_i = (x_i - m_i)$ — центрированные значения переменных и $K_{ij}^{(-1)}$ — элементы матрицы K_x^{-1} которая является обратной к ковариационной матрице K_x :

$$K_x \left(|t_i - t_j| \right) = \{K_{ij}\} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \dots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \dots K_{2n} \\ \dots & K_{ij} \dots \\ K_{n1} \dots K_{nn} \end{bmatrix}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Элементы K_{ij} ковариационной матрицы K_x являются соответствующими моментами, то есть

$$K_{ij} = \overline{(X_i - m_i) \cdot (X_j - m_j)} \quad \text{при } i = j, \quad K_{ii} = D_i = \sigma_i^2 \quad (4)$$

где m_i и σ_i^2 — среднее и дисперсия величины сигнала $X(t_i) = X_i$ в момент времени t_i .

Из (1.2) для одномерной ПРВ случайного гауссова сигнала получается известное выражение

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (5)$$

Для двумерной ПРВ после несложных вычислений, связанных с обращением матрицы (2×2), получим при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ выражение (1.39):

$$W(x_1, x_2; k_{12}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - k_{12}^2}} \exp \left[-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2k_{12} + x_2^2}{2\sigma^2(1 - k_{12}^2)} \right], \quad (6)$$

где $k_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma^2}$.

Свойства нормального процесса отмечены в подразд. 1.4. Здесь напомним, что, во-первых, n -мерная ПРВ полностью определена заданием АКФ $K_x(\tau)$ или, что равносильно, ковариационной матрицы $K_x = \{K_{ij}\}$ при дискретном представлении сигнала; во-вторых, из равенства нулю всех взаимных ковариационных моментов ($K_{ij} = 0$ для $i \neq j$) следует независимость системы n случайных отсчетов X_1, X_2, \dots, X_n . Действительно, в этом случае матрица (3) становится диагональной, обратная ей матрица также имеет диагональный вид. Это приведет к равенству нулю коэффициентов у слагаемых вида $\tilde{x}_i \tilde{x}_j$ в (2) при $i \neq j$, т.е. квадратичная форма будет иметь канонический вид. Соответственно показатель экспоненты будет содержать только вторые степени каждой из n переменных и n -мерная ПРВ может быть представлена в виде (1.41)

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1)W(x_2) \cdots W(x_n), \quad (7)$$

что справедливо, если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n статистически независимы между собой.

Вероятностное описание высокочастотного сигнала, состоящего из суммы регулярной составляющей и стационарного узкополосного гауссовского шума. Представим сигнал в виде суммы регулярного сигнала $s_{\text{рег}}(t)$ и случайного шума $v_{\text{сл}}(t)$

$$s(t) = s_{\text{рег}}(t) + v_{\text{сл}}(t) = A \cos(\omega_0 t - \beta) + V(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)] \quad (8)$$

или в равносильной форме

$$s(t) = [A \cos \beta + V(t) \cos \varphi(t)] \cos \omega_0 t + [A \sin \beta + V(t) \sin \varphi(t)] \sin \omega_0 t, \quad (9)$$

где A, β — амплитуда и фаза регулярной компоненты сигнала (постоянные величины); $V(t), \varphi(t)$ — огибающая и фаза (случайные функции) узкополосного высокочастотного шума, энергетический спектр которого сосредоточен «вблизи» частоты ω_0 . Слагаемые в квадратных скобках соотношения (9) называют *квадратурными компонентами* радиосигнала $s(t)$. По условию *случайный шум есть гауссовский процесс, поэтому его квадратурные компоненты $V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t)$ и $V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t)$ являются случайными совместно гауссовскими функциями.* Перепишем выражение (9) через квадратурные компоненты радиосигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) = U_x(t) \cos \omega_0 t + U_y(t) \sin \omega_0 t = U(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)], \quad (10)$$

где

$$U_x(t) = A \cos \beta + V_x(t), \quad U_y(t) = A \sin \beta + V_y(t). \quad (11)$$

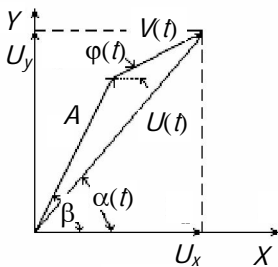


Рис. 4. Векторная диаграмма

На рис. 4 соотношения (9)–(11) поясняет векторная диаграмма сигналов.

Зададим вероятностные параметры шума. Будем считать, что шум $v_{\text{сл}}(t)$ имеет среднее значение, равное нулю. В этом случае среднее значение его квадратурных составляющих также равно нулю, то есть

$$\overline{V_x(t)} = \overline{V_y(t)} = 0. \quad (12)$$

Положим, что средняя мощность шумовых квадратурных процессов $V_x(t) = V(t) \cos \varphi(t)$ и $V_y(t) = V(t) \sin \varphi(t)$ одинакова и равна величине

$$\sigma^2 = \overline{V_x^2(t)} = \overline{V_y^2(t)}. \quad (13)$$

Взаимный ковариационный момент квадратурных составляющих шума

$$K_{V_x V_y} = \overline{V_x(t) V_y(t)} = 0, \quad (14)$$

то есть они между собой в совпадающий момент времени не коррелированы.

Необходимо обратить внимание, и это следует из (10), что случайная величина сигнала $s(t)$ в один (любой) момент времени t определяется значением двух случайных величин $U_x(t)$ и $U_y(t)$ в этот же момент времени. Эти две величины определяют в (10) огибающую смеси регулярного сигнала и шума

$$U(t) = \sqrt{U_x^2(t) + U_y^2(t)} \quad (15)$$

и фазу

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_y(t)}{U_x(t)}. \quad (16)$$

Совместная ПРВ величин $U_x(t) = U_x$ и $U_y(t) = U_y$ в один момент времени имеет вид

$$W(u_x, u_y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(u_x - m_x)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(u_y - m_y)^2}{2\sigma^2}}, \quad (17)$$

где $m_x = \overline{U_x} = A \cos \beta$ и $m_y = \overline{U_y} = A \sin \beta$ — средние (по ансамблю) значения квадратурных составляющих случайного радиосигнала $s(t)$, зависящие от амплитуды и фазы регулярного компонента сигнала.

На рис. 5 показана структурная схема формирования случайного радиосигнала $s(t)$, его огибающей $U(t)$ и фазы $\alpha(t)$.

Статистические свойства огибающей $U(t)$ и фазы $\alpha(t)$. Свойства огибающей и фазы изучаются в работе на уровне одномерных ПРВ и соответствующих моментов — математических ожиданий $\overline{U} = m_U$ и $m_\alpha = \overline{\alpha(t)}$ и среднеквадратичных отклонений σ_U и σ_α . Все необходимые математические соотношения приведены в [1, подразд. 2.3]. Вид ПРВ $W(U)$ и $W(\alpha)$, а также соответствующие моменты огибающей и фазы фактически определяются величиной $a = A/\sigma$, которая задает отношение уровней регулярного сигнала и шума.

Векторная диаграмма на рис. 4 позволяет физически понять, что по мере увеличения A/σ интенсивность вариаций как огибающей U , так и фазы α уменьшается. Средние значения m_U и m_α приближаются соответственно к величине амплитуды A и фазы β регулярного сигнала.

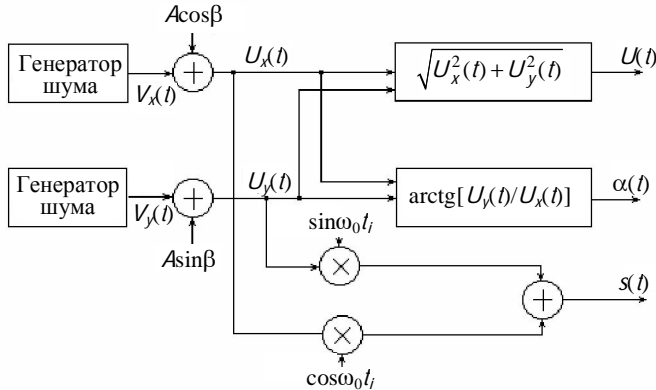


Рис. 5. Структурная схема формирования огибающей, фазы и высокочастотного сигнала

7.2.2. Структура программы и задание на работу

Лабораторная работа выполняется на ПЭВМ. Она состоит в *самостоятельном выполнении заданий, которые расположены* в семи фрагментах (Ф.1–Ф.7) заданной программы, представленной в п. 7.2.3. В программе каждый фрагмент помечен зеленым цветом. Задание (в рамках конкретного фрагмента) предполагает *внесение* в программу отсутствующих операторов MathCad (в программе их места помечены желтым цветом) и *выполнение* необходимых по заданию численных расчетов.

При выполнении заданий используйте опыт, полученный в лабораторной работе 1, исходную программу, структурную схему (рис. 5) и применяйте удобные обозначения (см. рис. 5).

При выполнении заданий **не рекомендуется** работать в режиме «Automatic Calculation». Изменения режима работы осуществляются при вызове меню «Math». Запуск программы в ручном режиме производится нажатием клавиши F9.

Все указанные ниже задания выполняются для значений параметров: $a = 0; 2; 10$ и $\beta = 60^\circ; 170^\circ$. Желтым цветом в программе отмечены

операторы, которые следует записать самостоятельно, исходя из смысла вычислений.

Исходная программа состоит из следующих четырех разделов (блоков), начало которых отмечено синим цветом.

1. Блок генерации двух статистически независимых случайных последовательностей (выборки) квадратурных компонент смеси сигнала и гауссовского шума. Для этого должны быть заданы величины амплитуды, фазы регулярного сигнала и среднее квадратичное значение шума σ .

Формирование двух независимых случайных последовательностей $Ux = (Ux_1, Ux_2, \dots, Ux_j, \dots, Ux_N)$ и $Uy = (Uy_1, Uy_2, \dots, Uy_j, \dots, Uy_N)$ квадратурных составляющих происходит при двукратном обращении к процедуре $rnorm(N, 0, \sigma)$. Для просмотра полученных последовательностей в блоке осуществляется вывод двух графиков.

Выполняя задание, образуйте в программе последовательности Ux и Uy при заданных значениях параметров a и β . Следует обратить внимание на средние значения квадратур. Они должны иметь значения, равные соответствующим параметрам в формуле для ПРВ (17). Для удобства восприятия графиков следует задавать объем выборки $N = 200 \dots 400$.

2. Блок вычисления выборочных значений огибающей и фазы высокочастотного сигнала (10). Для вычисления выборочных значений фазы используйте встроенную функцию $atan2(Ux, Uy)$, которая вычисляет фазу (в радианах) в интервале $[-\pi; \pi]$. Для просмотра огибающей и фазы в блоке производится вывод графиков одиночных реализаций, при этом используется тип линий для графика `lines`.

Выполняя задание, определите теоретические значения математических ожиданий огибающей и фазы радиосигнала при заданных величинах параметров (см. подразд. 2.3). Изучите характер вариаций фазы α при различных (малых и больших) величинах параметра a и разных величинах β — в середине и на границе интервала однозначности. Объясните характер изменений фазы.

3. Блок анализа статистических свойств огибающей. В блоке вычисляются: \hat{m}_U — оценка математического ожидания огибающей (в программе использовано обозначение «omU»); $\hat{\sigma}_U$ — оценка среднего квадратичного значения огибающей (в программе использовано обозначение «oσU»); $\hat{W}(U)$ — оценка ПРВ огибающей (в программе использовано обозначение «oWU»).

Выполняя задание, сравните выборочные значения оценок с соответствующими теоретическими (средними по ансамблю) значениями параметров и ПРВ (п. 2.3.1).

Значение модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(UA/\sigma^2)$, которая входит в выражение ПРВ $W(U)$, следует вычислить с помощью встроенной в MathCad функции $I0(\cdot)$. Ее можно найти после вызова «**f(x)**» в разделе «Function Category», выбрав строку «Bessel», и далее в разделе «Function Name», выбрав строку « $I0$ ». При вычислении оценки ПРВ необходимо использовать процедуру $\text{histogram}(\cdot)$ и опыт ее применения в лабораторной работе 1.

4. Блок анализа статистических свойств фазы. В блоке вычисляются: \hat{m}_α — оценка математического ожидания фазы (в программе использовано обозначение « ома »); $\hat{\sigma}_\alpha$ — оценка среднего квадратичного значения фазы (в программе использовано обозначение « $\text{ос}\alpha$ »); $\hat{W}(\alpha)$ — оценка ПРВ фазы (в программе использовано обозначение « $\text{оW}\alpha$ »).

Выборочные оценки, полученные в данном блоке программы при различных значениях параметров a и β , сравните с теоретическими значениями параметров и ПРВ (см. п. 2.3.2). Объясните вид теоретической ПРВ фазы при значениях $\beta = 60^\circ; 170^\circ; a = 3$.

Значение интеграла вероятности $\Phi(x)$, который входит в выражение ПРВ $W(\alpha)$, следует вычислить с помощью встроенной в MathCad функции $\text{pnorm}(x,0,1)$. Ее можно найти после вызова «**f(x)**» в разделе «Function Category», выбрав строку «All», и далее в разделе «Function Name», выбрав строку « pnorm ». При вычислении оценки ПРВ необходимо использовать процедуру $\text{histogram}(\cdot)$ и опыт ее применения в работе 1. Пункт 3 и 4 выполнять для значений $a = 0; 2; 10$. Объем выборки N задавайте 500–1000 при числе разрядов гистограммы 20–40.

5. Блок формирования дискретных значений $s_n = s(t_n)$ радиосигнала $s(t)$ (рис. 5). Представим (9) в дискретной форме

$$s(t_n) = s_n = \left[A \cos \beta + V_n \cos \varphi_n \right] \cos \left(2\pi n \frac{\Delta t}{T_0} \right) + \left[A \sin \beta + V_n \sin \varphi_n \right] \sin \left(2\pi n \frac{\Delta t}{T_0} \right), \quad (18)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$ — номер дискретного отсчета (N — объем выборки);

$\frac{\Delta t}{T_0}$ — отношение интервала дискретизации к периоду высокой частоты

(положить равным 0,5–0,125). Изучите поведение функции $s(t_n)$. Количество отсчетов при построении графика функции (18) задайте 100–400. Для вывода графика используйте тип линии *lines*.

6. Выполните экспериментально расчет зависимости оценки СКО фазы α от величины параметра a для значений $a = 0; 1; 3; 10; 50$. Фазу регулярного сигнала β положите равной нулю.

7. Полагая $\beta = 60^\circ$, выполните в программе формирование оценки фазы полезного сигнала β по выборке из 5 временных отсчетов фазы α смеси сигнала и шума при $A/\sigma = 2$. Какова теоретическая точность (СКО) этой оценки? От чего она зависит? Рассчитайте ее теоретическое значение и определите объем выборки для достижения СКО оценки фазы 1 градус. Проверьте экспериментально полученный результат.

По итогам работы сделайте выводы. Отчет по работе представьте в виде листинга программы с выполненными фрагментами и выводами.

7.2.3. Листинг программы в среде MathCad

Приложение 2.

Лабораторная работа 2

Цель работы: контроль знаний по теме "Статистические свойства огибающей и фазы смеси регулярного сигнала и узкополосного стационарного гауссова шума"

Блок 1. Формирование выборочных случайных последовательностей квадратурных составляющих смеси сигнала и гауссова шума.

Параметры: N - объем выборки; σ - среднее квадратичное значение шумовой компоненты; A - амплитуда регулярного сигнала; β - фаза этого сигнала.

Ф.1. При выполнении всех последующих в этой работе заданий исходные параметры определяются в зависимости от индивидуального варианта

ORIGIN := 1

$$N := 10000 \quad \sigma := 2 \quad A := 6 \quad \beta := \frac{\pi}{6} \quad n := 1..N$$

Параметр $a = A/\sigma$, определяет отношение уровней сигнала и шума:

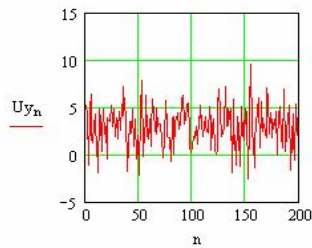
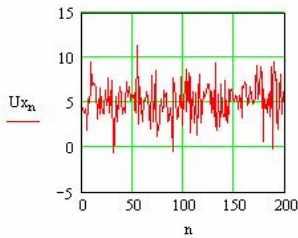
$$Vx := \text{mom}(N, 0, \sigma) \quad Vy := \text{mom}(N, 0, \sigma)$$

$$a := \frac{A}{\sigma} \quad a = 3$$

$$Ux := Vx + A \cdot \cos(\beta) \quad Uy := Vy + A \cdot \sin(\beta)$$

Одиночные реализации квадратурных составляющих смеси сигнала и шума:

Ф.2. На двух ниже расположенных графиках необходимо обозначить средние значения квадратурных составляющих смеси сигнала и шума.



Блок 2. Формирование выборочных массивов огибающей и фазы смеси сигнала и шума

Ф.3. В данном блоке необходимо: 1). Вписать выражения для расчета огибающей и фазы. 2). Вычислить теоретические величины см. [1, л. 2.3.1, 2.3.2] математического ожидания и среднего квадратического отклонения огибающей и фазы. 3). Отметить расчетные значения математических ожиданий на соответствующих графиках одиночных реализаций.

Массив выборочных значений огибающей : $U := \mathbf{\quad}$

Массив выборочных значений фазы (в градусной мере): $\alpha := \mathbf{\quad}$

Здесь следует вычислить теоретические величины математического ожидания и среднего квадратического отклонения огибающей и фазы см. [1, ф. 2.20] и отметить mU и $m\alpha$ на следующих графиках:

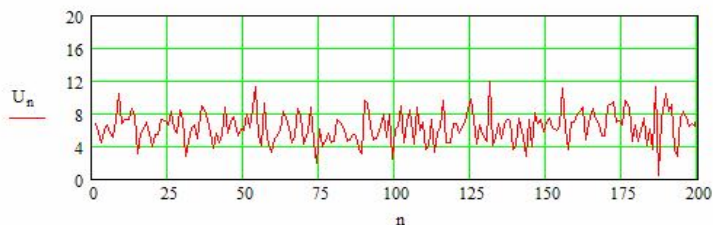
$mU := \mathbf{\quad}$

$\sigma U := \mathbf{\quad}$

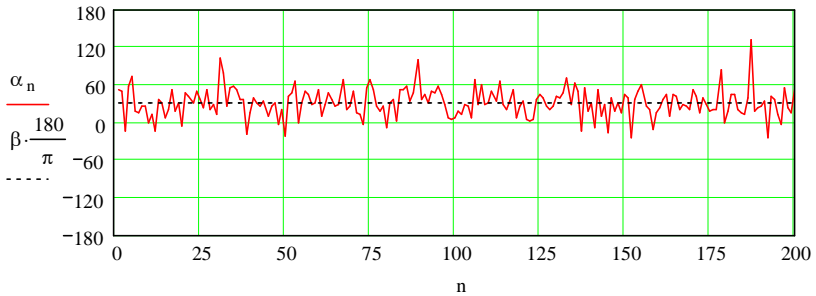
$m\alpha := \mathbf{\quad}$

$\sigma\alpha := \mathbf{\quad}$

Одиночная реализация огибающей смеси сигнала и шума



Одиночная реализация фазы смеси сигнала и шума



3. Блок анализа статистических свойств огибающей

Ф.4. В данном блоке необходимо: 1) Ввести в соответствии с вариантом количество интервалов гистограммы. 2) вычислить ΔU - ширину интервала гистограммы. 3) Вычислить элементы массива oWU_i массива oWU - экспериментальных оценок плотности распределения вероятностей (ПРВ) огибающей. 4.) По заданному ниже (в красной рамке) теоретическому выражению ПРВ огибающей, рассчитать элемент WU_i массива WU , который для сравнения с экспериментальной ПРВ поместить на одном графике.

Построение оценки ПРВ по выборочным данным:

- 1) формирование гистограммы на основе массива U при заданном количестве интервалов M ; i - текущий номер интервала; ΔU - ширина интервала; xU - массив с координатами середин интервалов:

$$M := 20$$

$$i := 1..M$$

$$hU := \text{histogram}(M, U)$$

$$\Delta U := \dots$$

$$\Delta U = 0.75$$

$$xU_i := hU_{i,1}$$

- 2) Вычисление массива oWU экспериментальных оценок ПРВ огибающей в точках xU_i

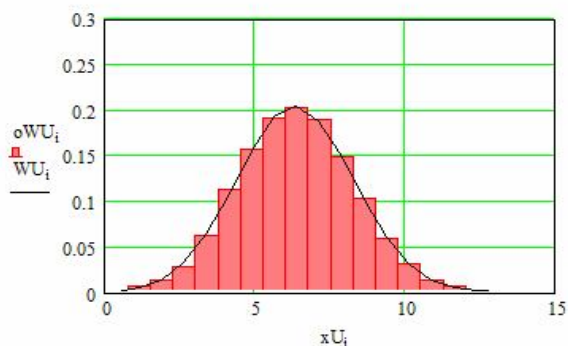
$$oWU_i := \dots$$

- 3) Вычисление массива $WU = \{WU_i\}$ теоретических значений ПРВ $W(U)$ в точках $U_i = xU_i$. Выражение теоретической ПРВ огибающей приведено в [1, ф. 2.16] и имеет вид:

$$W(U) = \frac{U}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{U^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left(\frac{UA}{\sigma^2}\right)$$

$$WU_i := \frac{xU_i}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(xU_i)^2 + A^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{xU_i A}{\sigma^2}\right)$$

Сравнение экспериментальной и теоретической ПРВ огибающей



Вычисление оценок среднего значения и СКО огибающей

- Ф.5.** В данном фрагменте программы необходимо вычислить оценки среднего omU и среднего квадратичного osU значений огибающей :

Оценка среднего

$omU :=$

$omU = 6.356$

Оценка среднего квадратичного отклонения огибающей :

$$\sigma U := \sqrt{1 - (\sigma m U)^2}$$

$$\sigma U = 1.928$$

Экспериментальные величины оценок mU и σU следует сравнить с теоретическими mU и σU , полученными выше в блоке № 2.

4. Блок анализа статистических свойств фазы смеси сигнала и шума

Ф.6. В данном блоке необходимо: 1) Ввести в соответствии с вариантом количество интервалов гистограммы. 2) вычислить $\Delta\alpha$ - ширину интервала гистограммы. 3) Вычислить элементы массива $oW\alpha_i$ массива $oW\alpha$ - экспериментальных оценок плотности распределения вероятностей (ПРВ) фазы α . 4.) По заданному ниже (в красной рамке) теоретическому выражению ПРВ фазы, рассчитать элементы $W\alpha_i$ массива $W\alpha$, который для сравнения с экспериментальной ПРВ поместить на одном графике.

Построение оценки ПРВ по выборочным данным:

- 1) формирование массива $oW\alpha$ экспериментальных оценок ПРВ фазы α при заданном количестве интервалов M ; i - текущий номер интервала; $\Delta\alpha$ - ширина интервала; $x\alpha$ - массив с координатами середин интервалов:

$$M := 40$$

$$i := 1..M$$

$$h\alpha := \text{histogram}(M, \alpha)$$

$$\Delta\alpha := h\alpha_{2,1} - h\alpha_{1,1} \quad \Delta\alpha = 7.925 \quad x\alpha_i := h\alpha_{i,1}$$

- 2) Вычисление массива $oW\alpha$ экспериментальных оценок ПРВ фазы в точках $x\alpha_i$

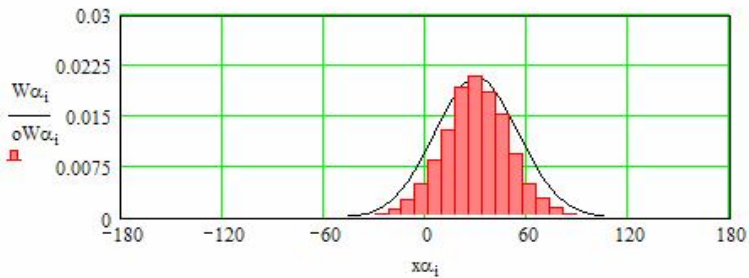
$$oW\alpha_i := \frac{h\alpha_{i,2}}{N \cdot \Delta\alpha}$$

- 3) Вычисление массива $W\alpha = \{W\alpha_i\}$ теоретических значений ПРВ $W(\alpha)$ в точках $\alpha_i = x\alpha_i$. Выражение теоретической ПРВ фазы приведено в [1, ф. 2.21]

$$W(\alpha) = (1/2\pi) \cdot e^{-(\alpha^2/2)} \cdot \left\{ 1 + e^{\alpha^2 \cdot \cos(\theta)/2} \cdot \Phi[\alpha \cdot \cos(\theta)] \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \alpha \cdot \cos(\theta) \right\}, \text{ где } \theta = \alpha - \beta$$

Дискретные значения фазы θ_i в радианах: $\theta_i := \frac{x\alpha_i \pi}{180} - \beta$

$$W_{\alpha_i} := \frac{1}{2 \cdot 180} \cdot e^{-\left(\frac{a^2}{2}\right)} \cdot \left[(1 + e^{\frac{a^2 \cdot \cos(\theta_i)}{2}}) \cdot \text{pnorm}(a \cdot \cos(\theta_i), 0, 1) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot a \cdot \cos(\theta_i) \right]$$



Ф.7. В данном фрагменте программы необходимо вычислить оценки среднего $\sigma m\alpha$ и среднего квадратичного $\sigma \sigma\alpha$ значений фазы и сравнить их с теоретическими величинами, полученными в блоке 1:

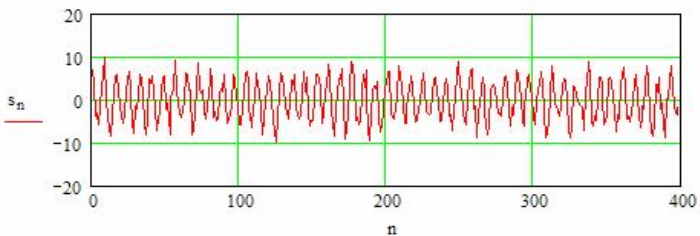
$\sigma m\alpha :=$ ■

$\sigma \sigma\alpha :=$ ■

5. Формирование дискретного радиосигнала s_n

Отношение интервала дискретизации Δt к периоду T_0 высокочастотного сигнала: $\Delta T := 0.125$

$$s_n := \mathbf{a} \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot \Delta T) + \mathbf{b} \cdot \sin(2\pi \cdot n \cdot \Delta T)$$



7.3. Лабораторная работа 3.

Оптимальное обнаружение полезного сигнала на фоне шума

7.3.1. Теоретическая часть

Цель работы: исследование процессов при согласованной фильтрации полезного сигнала с простой и сложной модуляцией на фоне белого гауссовского шума; анализ характеристик обнаружения в оптимальном приемнике.

Основные положения статистической теории оптимального обнаружения

Постановка задачи, критерий обнаружения и алгоритм обработки. Сигнал на входе приемника-обнаружителя на интервале $t \in (0; T)$ представим в виде

$$y(t) = F[\theta \cdot s(t); n(t)], \quad (1)$$

где θ — случайная (постоянная на интервале наблюдения) величина со значениями 0 и 1; $s(t)$ — полезный сигнал, форма которого в общем случае полностью не известна приемнику; $n(t)$ — случайная помеха (шум); $F[s(t); n(t)]$ — оператор, определяющий способ взаимодействия полезного сигнала и шума при образовании входного сигнала приемника.

Проблема обнаружения полезного сигнала состоит в том, что приемник, получив сигнал $y(t)$, должен принять решение о величине θ . Поскольку входной сигнал $y(t)$ содержит шум, то обнаружение полезного сигнала, в особенности если он по уровню сравним с шумом, является непростой задачей. Приемник, как впрочем и человек, в подобной ситуации может допускать ошибки. Интуитивно ясно, что *оптимальный приемник в среднем должен давать меньше ошибок*. В математическом плане необходимо *найти формулы (алгоритм), по которым работает оптимальный приемник*, т.е. следует в явном виде записать выражение для сигнала на выходе приемника. В задачах проектирования необходимо *определить структурную и функциональную схему такого приемника*, чтобы его можно было создать и использовать при решении задачи обнаружения. Такой приемник необходим в радиолокационных системах для обнаружения объектов, системах охранной сигнализации и др.

В системах цифровой связи фактически имеет место та же самая задача — задача различения двух ситуаций (сигналов): передача «1» и передача «0» (см. подразд. 3.6).

Метод решения подобных задач дает статистическая теория проверки гипотез. Выражение (1) задает математическую (статистическую) модель входного сигнала. Очевидно, можно предполагать, что на *входе приемника* случайно могут сложиться две взаимоисключающие ситуации (гипотезы): *нулевая гипотеза* H_0 — параметр $\theta = 0$, то есть во входном сигнале нет полезного сигнала $\mathcal{X}(t)$, и противоположная (альтернативная) гипотеза H_1 — параметр $\theta = 1$, когда входной сигнал содержит полезный сигнал $\mathcal{X}(t)$. На выходе приемника-обнаружителя (после *выполнения действий над входным сигналом*) также возможны две ситуации (два решения): нулевое решение \hat{H}_0 — приемник выдал результат об отсутствии полезного сигнала $\mathcal{X}(t)$ во входном сигнале $\mathcal{Y}(t)$, и альтернативное решение \hat{H}_1 , при котором на выходе приемника формируется результат о наличии сигнала $\mathcal{X}(t)$ во входном сигнале $\mathcal{Y}(t)$.

Конечно, вероятностные свойства сигнала $\mathcal{Y}(t)$ для $t \in (0; T)$ должны различаться в зависимости от того, содержится или нет в нем полезный сигнал $\mathcal{X}(t)$. В противном случае задача обнаружения теряет смысл. В байесовской теории обнаружения статистические свойства входного сигнала для двух гипотез H_0 и H_1 должны быть известны. При дискретном отборе данных на интервале $(0; T)$ эти свойства определены заданием n -мерных условных ПРВ: $W(\mathbf{y} / H_0)$ и $W(\mathbf{y} / H_1)$. Предполагается, что до получения сигнала \mathbf{y} приемнику известны вероятности появления на входе каждой ситуации, то есть $P(H_0) = \rho_0$ и $P(H_1) = \rho_1$ — априорные вероятности гипотез.

Определение оптимального алгоритма принятия решения (правила обработки) связано с *введением количественного критерия оптимальности*. В байесовой теории критерий оптимальности вводится следующим образом. Для каждой ситуации, в которой случайно может оказаться приемник-обнаружитель, назначается число C_{ij} — относительный штраф (плата за итог работы). В итоге имеем четыре возможные случайные возникающие в приемнике ситуации со своей платой за «работу»:

1) *правильное обнаружение* — событие $(\hat{H}_1 H_1)$; плата (штраф) C_{11} ; вероятность штрафа $P(\hat{H}_1 H_1)$;

2) *пропуск сигнала* — событие $(\hat{H}_0 H_1)$; плата C_{01} ; вероятность штрафа $P(\hat{H}_0 H_1)$;

3) *правильное не обнаружение* — событие $(\hat{H}_0 H_0)$; плата C_{00} ; вероятность штрафа $P(\hat{H}_0 H_0)$;

4) *ложная тревога* — событие $(\hat{H}_1 H_0)$; плата C_{10} ; вероятность штрафа $P(\hat{H}_1 H_0)$.

Критерием оптимальности является средний риск (средний штраф) R — средний по ансамблю всех возможных сигналов на входе приемника. Таким образом, получаем

$$R = \mathbf{M}[C] = C_{10}P(\hat{H}_1 H_0) + C_{00}P(\hat{H}_1 H_0) + C_{01}P(\hat{H}_0 H_1) + C_{11}P(\hat{H}_1 H_1). \quad (2)$$

При работе оптимальный приемник *обеспечивает наименьшую величину риска* R . В общем виде алгоритм работы оптимального приемника $\gamma_{opt}(\mathbf{y})$ предусматривает вычисление отношения правдоподобия $L(\mathbf{y})$ (3.37) и принятие решения после сравнения полученной величины отношения с пороговым уровнем γ_0 . Аналитически оптимальный алгоритм записывают в общем виде следующим образом: приемник формирует решение

$$\begin{cases} \hat{H}_1, & \text{если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) \equiv L(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} > \gamma_0, \\ \text{или} \\ \hat{H}_0, & \text{если } \gamma_{opt}(\mathbf{y}) \equiv L(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y}/H_1)}{W(\mathbf{y}/H_0)} < \gamma_0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\gamma_0 = \rho_0(C_{10} - C_{00}) / \rho_1(C_{01} - C_{11})$ — оптимальный порог. Подробный вывод этого результата приведен в подразд. 3.4.

Оптимальный алгоритм обнаружения для случая аддитивной смеси полностью известного полезного сигнала с белым гауссовым шумом. Для данного конкретного случая выражение (1) принимает вид

$$y(t) = \theta \cdot s(t) + n(t), \quad (4)$$

где $n(t)$ — аддитивный белый гауссовский шум. Таким образом, если $\theta = 1$, то входной сигнал

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad (5)$$

в противном случае $\theta = 0$ и тогда

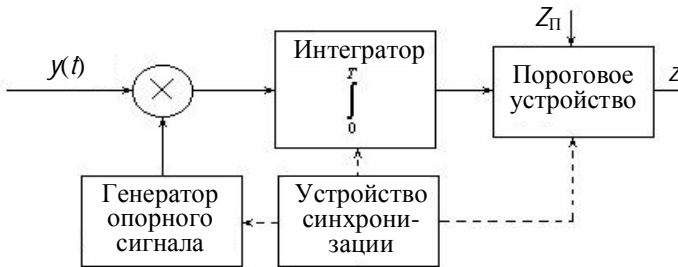
$$y(t) = n(t). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) утверждают, что присутствие во входном сигнале $y(t)$ полностью известного полезного сигнала $s(t)$ приводит лишь к изменению (в каждый момент времени) среднего значения входного сигнала. Таким образом, n -мерные гауссовские условные ПРВ $W(\mathbf{y} / H_0)$ и $W(\mathbf{y} / H_1)$, соответствующие двум гипотезам H_0 и H_1 , отличаются средними значениями. В явном виде эти ПРВ приведены в (3.43), где $s_{0j} \equiv 0$. После их подстановки в (3) и выполнения простых алгебраических преобразований получаем выражение для сигнала на выходе оптимального приемника. В итоге алгоритм принятия решения (алгоритм обнаружения) принимает следующий вид (3.48), (3.49):

$$\ln L[y(t)] = z = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) s(t) dt \right] \left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 \\ > \\ Z_{\Pi} \\ < \\ \hat{H}_0 \end{array} \right\}, \quad (7)$$

где $Z_{\Pi} = \ln(\gamma_0) + E_s / N_0$ — модифицированный порог; E_s — энергия сигнала; N_0 — спектральная плотность средней мощности шума.

Выражение (7) содержит операцию интегрирования произведения двух функций, которая характерна для вычисления корреляционной функции (1.11), (1.15а). По этой причине приемное устройство, реализующее алгоритм обнаружения в виде (7), называют приемником корреляционного типа. Структурная схема приемника-обнаружителя корреляционного типа показана на рисунке.



Приемник-обнаружитель корреляционного типа

Устройство синхронизации обеспечивает работу генератора опорного сигнала *на том интервале времени, где ожидается полезный сигнал*. Сравнение с порогом также происходит в момент окончания сигнала.

Здесь следует помнить, что рассматривается задача обнаружения полностью известного сигнала, то есть моменты времени начала и окончания полезного сигнала известны. Приемнику неизвестен лишь сам факт наличия или отсутствия *полезного сигнала* на ожидаемом интервале времени.

Оптимальный приемник-обнаружитель с согласованным фильтром. Известно, что сигнал $z(t)$ на выходе произвольного линейного фильтра получается в результате свертки входного сигнала $y(t)$ с импульсной реакцией $h(t)$. Представим свертку в виде

$$z(t) = \int_0^t h(t - \tau) y(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Если предположить, что $h(t) = cs(t_0 - t)$ ($c = \text{const}$), то (8) можно переписать в виде

$$z(t) = c \int_0^t y(\tau) s[\tau - (t - t_0)] d\tau. \quad (9)$$

Таким образом, для момента времени $t = t_0 = T$ сигнал на выходе фильтра, имеющего указанную выше импульсную характеристику, оказывается равным

$$z(t)|_{t=T} = c \int_0^T y(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Сравнение (10) и (7) показывает, что операцию формирования корреляционного интеграла в схеме приемника-обнаружителя полностью известного сигнала может выполнить линейный фильтр. Конечно, это не простой фильтр, так как требуется, чтобы его импульсная реакция

$$h(t) = cs(t_0 - t) \triangleq h_{opt}(t), \quad (11)$$

где c — коэффициент пропорциональности. Линейный фильтр с импульсной реакцией (11) называют *оптимальным согласованным фильтром*. По определению импульсная реакция $h(t) = 0$, если $t < 0$. Следовательно, если полезный сигнал $s(t)$ имеет конечную длительность T , то параметр $t_0 \geq T$. Свойства согласованного фильтра подробно рассмотрены в подразд. 3.2. Следует обратить внимание, что на выходе согласованного фильтра (СФ) в момент окончания полезного сигнала

получается наибольшее (из всех возможных других фильтров) отношение уровня полезного сигнала к шуму. Это отношение по мощности составляет величину

$$d_0^2 = \frac{2E_s}{N_0}, \quad (12)$$

где E_s — полная энергия полезного сигнала; N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности белого шума на входе приемника.

Изучим форму полезного сигнала (сигнальной части $z_s(t)$ полного выходного сигнала $z(t)$) на выходе СФ. Перепишем (9) в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= c \int_0^t y(\tau) s[\tau - (t - t_0)] d\tau = \\ &= z(t) = c \int_0^t [s(\tau) + n(\tau)] s[\tau - (t - t_0)] d\tau = z_s(t) + z_n(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где сигнальная часть

$$z_s(t) = c \int_0^t s(\tau) s[\tau - (t - t_0)] d\tau = cE_s k(t - t_0) \quad (14)$$

и $k(\bullet)$ — нормированная временная автокорреляционная функция (АКФ) полезного сигнала (см. п. 1.3.2).

Таким образом, полезный сигнал на выходе СФ совпадает по форме с формой временной АКФ полезного входного сигнала. Вид АКФ сигнала $s(t)$ может существенно отличаться от формы самого сигнала $s(t)$. Важным параметром временной АКФ сигнала является ее ширина δ_τ . Для радиосигналов — это ширина огибающей АКФ. Выполняя лабораторную работу, необходимо усвоить, что величина $\delta_\tau \sim 1/\Delta F$, где ΔF — ширина частотного спектра сигнала. Следует обратить внимание и сравнить форму полезного сигнала на входе и выходе СФ для случая простого одиночного радиоимпульса, радиоимпульса с ФКМ и ЛЧМ. Подробно эти вопросы рассмотрены в подразд. 1.3.

Необходимо отметить, что все соотношения, связанные с преобразованием сигналов и шума в приемнике-обнаружителе представлены в программе в дискретной форме. Непрерывному сигналу $y(t)$ соответствует дискретная последовательность $y(n \cdot \Delta t) \equiv y(n)$, где Δt — временной

интервал дискретизации и n — номер отсчета. Интеграл свертки, определяющий связь выходного и входного сигналов в линейной динамической системе (фильтре), преобразуется в соответствующую сумму по индексу, связанному с переменной интегрирования. Если $t \rightarrow n \cdot \Delta t \equiv n$ и $\tau \rightarrow k \cdot \Delta t \equiv k$, интеграл свертки в дискретной форме имеет вид

$$z(t) = \int_0^t h(\tau) y(t - \tau) d\tau \Rightarrow z(n) = \sum_{k=0}^N h(k) y(n - k) \Delta t. \quad (15)$$

Верхний индекс у знака суммы может быть ограничен числом N . Его значение определяется длительностью импульсной реакции фильтра. При этом правая часть выражения (15) соответствует структуре дискретного фильтра типа с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Абсолютная величина Δt принята равной единице. В этом случае временная длительность любой функции определяется количеством дискретных отсчетов.

Разрешение сигналов по временной задержке. Задача разрешения сигналов состоит в том, что при поступлении на вход приемника-сигнала

$$y(t) = \theta_1 s_1(t - \tau_1) + \theta_2 s_2(t - \tau_2) + n(t), \quad t \in [t_0; T], \quad (16)$$

где θ_1 и θ_2 — случайные независимые величины со значениями 0 и 1; τ_1 и τ_2 — временные положения (задержки) полезных сигналов. Если $y(t)$ содержит оба полезных сигнала и необходимо их раздельно обнаружить, то возникает задача взаимного разрешения сигналов при их обнаружении. Очевидно, что результат ее решения при наличии шума зависит от соотношения уровней сигналов между собой и по отношению к шуму и от того, насколько сильно изменение параметра τ влияет на степень различия двух сигналов. В подразд. 1.3 показано, что мерой различия сигналов по незнергетическим параметрам, к которым, в частности, относится временной сдвиг, является нормированная взаимная корреляционная функция сигналов по данному параметру. В данном случае, когда сигналы имеют одинаковую форму, — это временная автокорреляционная функция. Разрешающую способность приемника-обнаружителя определяют как минимальное значение разности временных положений сигналов $\Delta\tau_{\min} = (\tau_1 - \tau_2)$, при которой на выходе приемника принимается решение о наличии двух полезных сигналов на интервале наблюдения. Различают (см. подразд. 4.10) величины $\delta\tau_p$ (разрешение по критерию Релея) и $\delta\tau_B$ (разрешение по критерию Вудворда).

В оптимальном обнаружителе возможность разрешения двух сигналов известной формы с разными временными сдвигами определяется формой выходного отклика приемника. В схеме обнаружителя с согласованным фильтром эта форма совпадает с АКФ полезного входного сигнала.

При выполнении работы необходимо изучить сущность одного из основных параметров сигнала, который называют базой сигнала B .

Характеристики обнаружения оптимального приемника-обнаружителя полностью известного сигнала. Качество работы приемника-обнаружителя обычно представляют в виде характеристик обнаружения, которые представляют собой семейство кривых в виде зависимостей вероятности правильного обнаружения D от величины $q_0 = \sqrt{2E_s/N_0}$ — отношения уровня сигнала к СКО шума на выходе СФ. Параметром семейства является вероятность ложной тревоги F . Теоретический расчет величин D и F предполагает вычисление вероятностей того, что уровень сигнала (10) или (13) на выходе приемника превысит пороговый уровень Z_0 в момент времени $t_0 \geq T + \tau_0$, где T — длительность сигнала на входе и τ_0 — время его прихода. Таким образом:

$$D = \int_{Z_0}^{\infty} W(z/H_1) dz \quad \text{и} \quad F = \int_{Z_0}^{\infty} W(z/H_0) dz, \quad (17)$$

где $W(z/H_1)$ и $W(z/H_0)$ — условные ПРВ уровня сигнала $z(t_0) = z$ на входе порогового устройства соответственно при наличии и отсутствии полезного сигнала на входе приемника.

Сигнал $z(t)$ является линейным преобразованием входного сигнала (5), содержащего аддитивный гауссовский шум $n(t)$. Именно поэтому $z(t)$ сохраняет гауссовские свойства и, следовательно, ПРВ случайной величины Z полностью определяется заданием условного среднего и условной дисперсии, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M[z/H_1] &= 2E_s/N_0, & M[z/H_0] &= 0; \\ D_{z/H_1} &= D_{z/H_0} = 2E_s/N_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Для гауссовских ПРВ вычисление интегралов (17) сводится к табличному интегралу вероятностей (подробнее см. п. 3.6.2). В итоге получаем

$$F = 1 - \Phi\left(\frac{Z_0}{q_0}\right) \quad \text{и} \quad D = 1 - \Phi\left(\frac{Z_0}{q_0} - q_0\right), \quad (19)$$

где $\Phi(\bullet)$ — интеграл вероятности.

Теоретический расчет характеристик обнаружения выполняется следующим образом:

- задаем уровень ложной тревоги;
- определяем с учетом (19) нормированный порог Z_0 / q_0 ;
- изменяем величину $q_0 = \sqrt{2E_s / N_0}$;
- вычисляем с учетом (19) зависимость величины $D = f(q_0)$.

7.3.2. Структура программы и задание на работу

Лабораторная работа предполагает выполнение на основе базовой программы самостоятельного исследования процессов в оптимальном приемнике-обнаружителе полностью известных сигналов различных типов и формулировку выводов по результатам этих исследований.

В п. 7.3.3 приведены листинги исходных программ, выполненных в среде MathCad (версия 2001 и выше). Программа для исследования процессов в согласованном фильтре и корреляторе состоит из восьми связанных между собой разделов. Все разделы программы сопровождаются пояснениями.

В первом и втором разделах осуществляется формирование радиоимпульсов с простой и сложной (ФКМ) модуляцией. Здесь возможен режим работы с одним или двумя сигналами, что обеспечивается заданием уровня амплитуды каждого из них. Сигналы могут иметь различные положения на оси времени.

В третьем разделе — формирование импульсных реакций дискретных оптимальных согласованных фильтров для каждого типа сигнала.

В четвертом разделе — формирование случайной стационарной последовательности независимых дискретных отсчетов белого гауссовского шума.

В пятом разделе формируются входные сигналы в виде аддитивной смеси полезных сигналов (их в общем случае два) и шума.

В шестом разделе программы — формирование сигналов на выходе согласованных фильтров, имеющих конечную импульсную характеристику.

В седьмом разделе формируются сигналы на выходе приемника-обнаружителя с корреляционной обработкой.

В восьмом разделе — формирование двух сложных импульсных сигналов с ЛЧМ с последующей обработкой в согласованном фильтре. Их амплитуды и временные положения также могут изменяться независимо.

Заголовки разделов программы отмечены синим цветом. Программа содержит семь фрагментов (Ф.1–Ф.7), отмеченных зеленым цветом. Они размещены в тех местах исходной программы, где следует в соответствии с заданием вносить изменения в текст. Рабочие поля для внесения изменений и дополнений отмечены желтым цветом.

Изучение процессов в согласованном фильтре и корреляторе выполняется для трех типов входных сигналов:

- радиои импульса с простой модуляцией и прямоугольной огибающей (в программе сигналы $s1(n)$ и $s2(n)$);
- радиои импульса со сложной (7-позиционный код Баркера) ФКМ (в программе сигналы $fs1(n)$ и $fs1(n)$);
- импульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) (в программе сигналы $Ls1(n)$ и $Ls2(n)$).

Для выполнения работы необходимо:

- 1) изучить теоретическую часть учебного курса подразд. 1.3, 1.6;
- 2) изучить листинги двух программ, приведенных в п. 7.3.3, реализующих изучение процессов в приемнике с согласованным фильтром, коррелятором и анализ характеристик обнаружения.

Задание к лабораторной работе состоит в решении следующих задач.

1. Определение параметров огибающей временной автокорреляционной функции радиосигналов

При выполнении данного пункта необходимо подавать на вход СФ одиночный полезный сигнал с амплитудой, равной единице, и задать отношение $A/\sigma = 100$. Длительность полезного сигнала задается количеством дискретных отсчетов $(M + 1)$, при этом полагаем интервал дискретизации по времени $\Delta t = 1$.

Для каждого из трех заданных типов сигналов (простого радиои импульса, ФКМ-радиои импульса и ЛЧМ-импульса) необходимо измерить ширину δ_τ огибающей их автокорреляционной функции. Измерение ширины выполнить по положению первых нулей (вблизи максимального значения огибающей АКФ). Для сигнала с ФКМ следует измерить уровень

бокового лепестка автокорреляционной функции по отношению к ее значению в максимуме. Результаты измерений сравнить с теоретическими значениями соответствующих величин.

Для измерения координат любой точки на графиках функций используйте электронный визир. Он появляется на мониторе после щелчка правой кнопкой мышки на поле графика и вызова режима TRACE.

При формулировке выводов по данному пункту работы следует:

1) отметить различие форм сигналов (в частности их длительности) на входе и выходе СФ и дать объяснение этим различиям;

2) дать объяснение равенства максимальных значений полезных сигналов на выходе СФ при различных видах модуляции радиосигналов, имеющих равный уровень и длительность.

2. Исследование процессов в приемнике при корреляционной обработке сигнала

Изучить форму полезного сигнала на выходе коррелятора, подавая на его вход радиосигналы с простой и ФКМ-модуляцией (при большом отношении сигнал/шум). По итогам сделать выводы.

Изучить влияние шума на характер сигнала на выходе коррелятора при различных отношениях сигнал/шум. Для этого следует наблюдать реализации сигнала на выходе корреляционного приемника при малом и большом отношениях уровней полезного сигнала и шума. Задайте уровни сигналов $A1$ и $Af1$ (при этом $A2 = Af2 = 0$) такими, при которых явно видны шумовые флуктуации сигнала на выходе приемника. С помощью курсора отметьте оператор генерации шума и затем, нажимая клавишу F9, наблюдайте различные реализации сигнала $zkor(nr)$ и $fzkor(nr)$. Изучите характер реализаций этих сигналов при условии отсутствия входного полезного сигнала. Сделайте выводы о том, какие характеристики выходного сигнала приемника изменяются в зависимости от уровня полезного сигнала на входе.

Измерить средний уровень выходного сигнала приемника в максимуме и сравнить его с соответствующим уровнем на выходе СФ. Объяснить, в каком плане приемник с СФ и приемник с корреляционной обработкой идентичны. По результатам сделать выводы.

Изучить влияние несовпадения временного положения полезного входного сигнала и опорного сигнала на работу коррелятора. Для этого необходимо внести изменения в программном фрагменте Ф. 6. По результатам сделать выводы о последствиях нарушения синхронизации в канале опорного сигнала при корреляционном приеме.

3. Согласованная фильтрация видеосигнала

В данном случае на вход фильтра следует подавать прямоугольные видеоимпульсы двух типов с равной длительностью. Для этого следует внести соответствующие дополнения в программу. Первый тип сигнала — *прямоугольный импульс положительной полярности*. Для его формирования следует внести изменения во фрагмент Ф. 1.

Второй тип сигнала — *два равной длительности прямоугольных разнополярных видеоимпульса, следующие друг за другом*. При этом общее число отсчетов на интервале, равном длительности полезного сигнала, остается неизменным. Для формирования этого сигнала следует внести изменения во фрагмент Ф. 3 и Ф. 4. Исходные данные использовать такими же, как в п. 1 задания.

По итогам выполнения данного пункта следует сделать выводы, *сравнивая результаты оптимальной обработки двух типов видеосигналов*.

4. Разрешение сигналов по времени задержки в оптимальном приемнике-обнаружителе

Выполнение данного пункта предполагает, что полезный входной сигнал состоит из суммы двух сигналов $s_1(n; \theta_1)$ и $s_2(n; \theta_2)$, имеющих одинаковую форму и различные значения временной задержки.

Задание заключается в следующем. Необходимо при заданной длительности двух полезных сигналов на входе приемника экспериментально определить минимальную разность их временных положений, при которой наблюдатель (экспериментатор) может уверенно фиксировать наличие двух максимумов в *выходном отклике* приемника. Это следует выполнить для сигналов с простой модуляцией и ФКМ.

Результаты необходимо получить при равных значениях амплитуд сигналов $A_1 = A_2 = 1$ и $A\theta_1 = A\theta_2 = 1$ для двух величин СКО шума: $\sigma_1 = 0,1$ и $\sigma_2 = 1$. Выходной сигнал приемников можно наблюдать на рис. 2, и 3 в листинге программы.

Для приемника-обнаружителя сигнала с ЛЧМ данный пункт работы следует выполнить при следующих величинах параметров: $U_1 = U_2 = 1$; $\sigma = 1$; $q = 2$; $NT = 220$; $m = 5$; $D = 80$. По итогам выполнения п. 4 следует сделать выводы.

5. Расчет характеристик обнаружения приемника-обнаружителя

Пункт задания предусматривает численный (моделирование на ЭВМ) и теоретический расчет зависимости $D = f(q_0)$. При этом вероятность

ложной тревоги F полагается равной заданной величине ($F_1 = 0,01$ и $F_2 = 0,05$). Листинг программы для выполнения п. 5 приведен в п. 7.3.3. Все изменения в программе, как и ранее, вносятся в местах, отмеченных буквой «Ф». Методика теоретического расчета характеристик обнаружения изложена в п. 7.3.1.

Рассмотрим методику выполнения имитационного эксперимента для расчета характеристик обнаружения. В п. 7.3.1 отмечено, что в программе, реализующей дискретный алгоритм обработки, временной интервал дискретизации $\Delta t = 1$. В соответствии с (1.44), (1.45) дисперсия дискретного белого шума $\sigma^2 = N_0 f_b = N_0 / (2\Delta t)$, то есть численный расчет с дискретным шумом, имеющим $\sigma = 1$, соответствует теоретическому расчету с белым шумом, у которого спектральная плотность мощности $N_0 = 2\sigma^2 = 2$.

В программе моделирования используется полезный сигнал в виде радиоимпульса с простой модуляцией $s(t) = A \sin(2\pi t / T_0)$ и $t \in (0; T_n)$, где T_0 и T_n — период высокой частоты и длительность импульса соответственно. Энергия этого сигнала

$$E_s = \int_0^{T_n} s^2(t) dt = \frac{A^2}{2} T_n = \frac{A^2}{2} n \Delta t = \frac{n A^2}{2}, \quad (20)$$

где n — количество интервалов дискретизации на длительности импульса (в программе $n = M$). Таким образом, необходимая для расчетов величина находится следующим образом:

$$q_0 = \sqrt{2 \frac{E_s}{N_0}} = \frac{A}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} = A \sqrt{\frac{n}{2}}. \quad (21)$$

Для поддержания $F = \text{const}$, как следует из (19), необходимо обеспечить постоянство нормированного порога $Z_0 / q_0 = C_F$, где C_F — постоянная величина, зависящая от заданного значения ложной тревоги F .

При выполнении численного моделирования с разными значениями величины q_0 в программе следует устанавливать величину порога $Z_0 = C_F q_0$ и, согласно (21), величину амплитуды сигнала $A = q_0 / \sqrt{0,5n}$.

Фиксация факта (события) превышения в i -й реализации выходным сигналом $Z^{>}(n) = Z_n^{<?}$ порогового уровня Z_0 в момент времени $n = t_0$ выполняется с помощью следующих операторов MathCad:

$$P := 0.81594;$$

$$Z0 := P;$$

$$M_r := \sum_{n=t0}^{t0} \left[(Z^{(r)})_n \geq Z0 \right];$$

$$m := \sum_{r=1}^R M_r; \quad m = \blacksquare,$$

где P — численное значение порога; $t0$ — целочисленное значение момента времени, в который фиксируется превышение порогового уровня $Z0$; M_r — целочисленная величина, равная в зависимости от появления факта превышения порога P в r -й реализации нулю или единице; m — общее количество превышений порога в R различных реализациях.

Очевидно, что в случае, когда сигнал (5) на входе не содержит полезного сигнала (т.е. $A = 0$), число m равно количеству ложных тревог. Если на входе приемника верна гипотеза H_1 , то число m равно количеству правильных обнаружений сигнала. В качестве оценки \hat{F} вероятности ложной тревоги и оценки вероятности \hat{D} правильного обнаружения следует использовать величину m/R . Степень близости оценок \hat{F} и \hat{D} к истинным значениям вероятностей, конечно, зависит от количества опытов (реализаций) R .

Продолжительность выполнения расчетов на ЭВМ может оказаться достаточно большой, если число опытов R велико. Можно получить некоторую экономию времени, если задать граничное значение дискретного времени N в первом разделе программы, равным $(M + 1)$. Для этого необходимо скорректировать пределы изменения текущего времени n во всех расчетных формулах. Однако в этом случае невозможно наблюдать полный отклик СФ, поскольку длительность выходного сигнала равна $2M$.

По итогам выполнения задания для двух значений вероятности ложной тревоги (19), то есть двух величин нормированного порога C_F , необходимо заполнить таблицу:

q_0	1	2	3	4
D				
\hat{D}				
\hat{m}_z				
\hat{D}_z				

Примечание. В двух последних строках указываются величины оценок среднего \bar{m}_z и дисперсии \bar{D}_z сигнала на выходе приемника в момент времени, соответствующий максимальному отношению уровня полезной составляющей к СКО шума.

По итогам работы необходимо сделать выводы, которые должны содержать ответы на следующие вопросы.

1. Что есть функция различия сигналов и каков ее смысл?
2. Какой параметр сигнала влияет на ширину временной автокорреляционной функции сигнала? Какой вид имеет автокорреляционная функция радиоимпульса с простой модуляцией и ФКМ? Каков вид огибающих автокорреляционных функций радиоимпульса с простой модуляцией и ФКМ?
3. Какова база сигналов, используемых в работе?
4. Почему в случае поступления ФКМ- или ЛЧМ-сигналов на вход СФ их длительность на выходе фильтра уменьшается, то есть они сжимаются?
5. Что определяет величину сжатия сигналов с ФКМ и ЛЧМ при обработке в согласованном фильтре?
6. Какие параметры входного сигнала и белого шума определяют наибольшее отношение уровней сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра?
7. В какой момент времени можно зафиксировать наибольшее отношение мощности полезного сигнала к мощности шума на выходе согласованного фильтра и коррелятора?
8. Какие последствия вызывает нарушение синхронизации в схемах приемника с СФ и коррелятором?
9. В чем причина различия сигналов на выходе СФ и коррелятора? В чем их сходство?

7.3.3. Листинг программы

Листинг программы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

Цель работы: изучение методов статистической теории оптимального обнаружения полезного сигнала на фоне белого гауссова шума

1. Полезный сигнал - радиоимпульс с простой модуляцией

ORIGIN := 0

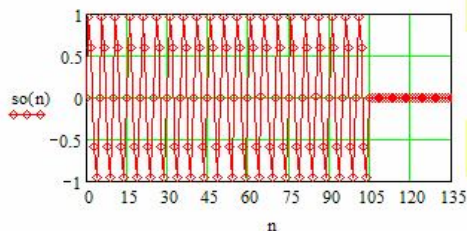
Параметры сигналов: $A1$ и $A2$ - амплитудные значения; n - дискретное время; $t01$ и $t02$ - временные положения сигналов; $(N+1)$ - число отсчетов на интервале, равном длительности сигнала; $(N+1)$ - число отсчетов на интервале наблюдения; $1/\Delta T$ = число отсчетов на периоде ВЧ сигнала; τ - число отсчетов на интервале, равном длительности парциального импульса ФКМ сигнала.

 $N := 400$ $n := 0..N$ $\Delta T := 0.2$ $N1 := 104$

$$\tau := \frac{N1 + 1}{7}$$

Ф.1. Форма полезного сигнала $so(n)$:

$$so(n) := \begin{cases} 1 \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot (n \cdot \Delta T)] & \text{if } 0 \leq n \leq N1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ф.2.** Полезные сигналы $s1(n)$ и $s2(n)$ с моментами прихода $t01$ и $t02$: $A1 := 1$ $t01 := 35$

$$s1(n) := \begin{cases} A1 \cdot so(n - t01) & \text{if } (n - t01) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

 $A2 := 1$ $t02 := 70$

$$s2(n) := \begin{cases} A2 \cdot so(n - t02) & \text{if } (n - t02) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

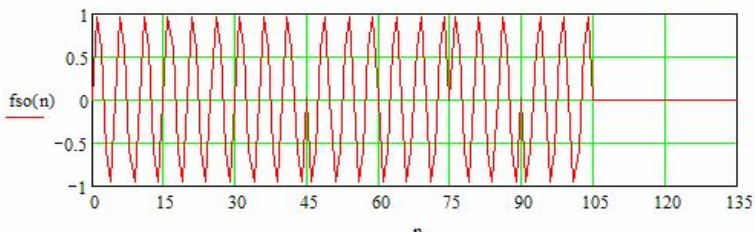
2. Полезный сигнал - одиночный радиоимпульс с фазокодовой манипуляцией

Ф.3. $P(n)$ - функция, обеспечивающая манипуляцию фазы ВЧ радиосигнала (определяется вариантом); $fso(n)$ - ВЧ сигнал с ФКМ или видеосигнал; $A1$ и $A2$ - амплитуды сигналов; t - число отсчетов на интервале, равном длительности парциального импульса ФКМ сигнала.

$$P(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } (0 \leq n \leq 3 \cdot \tau - 1) \vee (5 \cdot \tau \leq n \leq 6 \cdot \tau - 1) \\ -1 & \text{if } (3 \cdot \tau \leq n \leq 5 \cdot \tau - 1) \vee (6 \cdot \tau \leq n \leq N1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ф.4. Форма полезного сигнала $fso(n)$:

$$fso(n) := P(n) \cdot so(n)$$



Ф.5. Формирование двух полезных ФКМ сигналов $fs1(n)$ и $fs2(n)$ с амплитудами $Af1$ и $Af2$ и различными значениями временного положения $t01$ и $t02$:

$$Af1 := 1$$

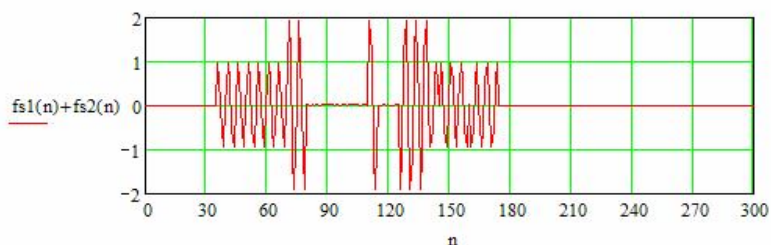
$$t01 := 35$$

$$Af2 := 1$$

$$t02 := 70$$

$$fs1(n) := \begin{cases} Af1 \cdot fso(n - t01) & \text{if } (n - t01) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad fs2(n) := \begin{cases} Af2 \cdot fso(n - t02) & \text{if } (n - t02) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Форма полезного сигнала (одного или двух) на входе согласованного фильтра:

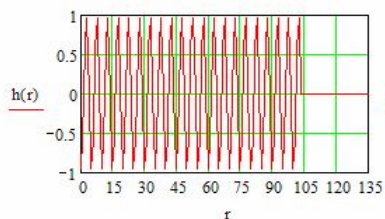


3. Формирование импульсных реакций дискретных оптимальных согласованных фильтров

Дискретное время: $r := 0..N$

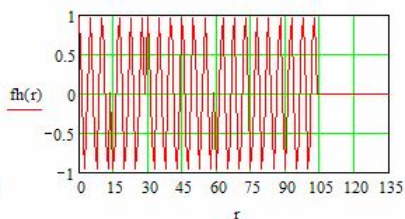
Импульсная реакция СФ для одиночного радиоимпульса с простой модуляцией:

$$h(r) := so(N1 - r)$$



Импульсная реакция СФ для одиночного радиоимпульса с ФКМ:

$$fh(r) := fso(N1 - r)$$

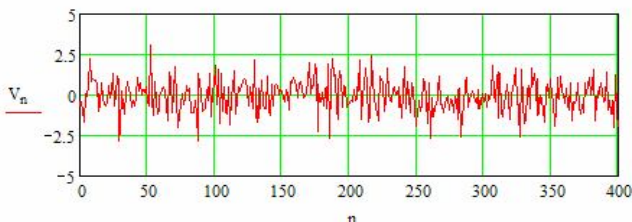


4. Генерация выборочных отсчетов дискретного "белого" гауссова шума.

Параметры генератора: среднее значение 0; СКО - σ ; $(N+1)$ - объем выборки;
 V - одномерный массив выборочных дискретных отсчетов шума.

ГЕНЕРАТОР ШУМА: $\sigma := 1$ $V_{\text{ш}} := \text{mom}(N + 1, 0, \sigma)$

Одиночная реализация дискретного "белого" гауссова шума:



5. Генерация аддитивной суммы регулярного сигнала и "белого" гауссова шума

Полезный сигнал и шум представлены в дискретной форме

5.1 Полезный сигнал (простой радиоимпульс) и шум на входе фильтра согласованного с одиночным радиоимпульсом

Входной сигнал $y(n)$ изменяется в зависимости от того один или два полезных сигнала на входе :

$$y(n) := \begin{cases} V_n + s1(n) + s2(n) & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Одиночная реализация смеси полезного сигнала и шума:

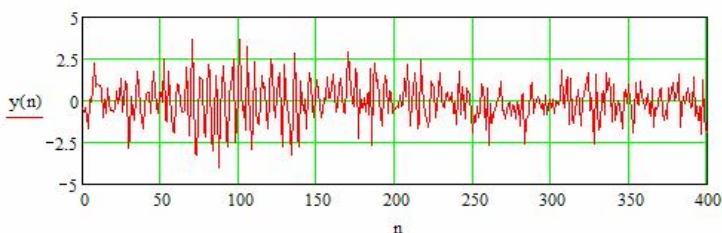


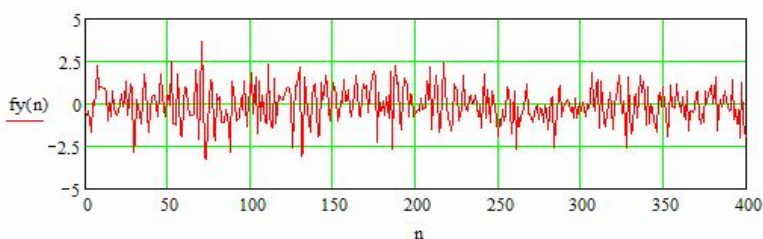
Рис. 1

5.2 Полезный ФКМ сигнал и шум на входе фильтра согласованного с одиночным ФКМ радиоимпульсом

Входной сигнал $f_y(n)$ изменяется в зависимости от того один или два полезных сигнала на входе :

$$f_y(n) := \begin{cases} V_n + fs1(n) + fs2(n) & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Одиночная реализация смеси полезного (одного или двух) ФКМ сигнала с "белым" гауссовым шумом на входе согласованного фильтра:



6. Формирование сигнала на выходе согласованного фильтра

6.1 Сигнал на выходе дискретного фильтра согласованного с одиночным радиопульсом с простой модуляцией и прямоугольной огибающей

$$z(n) := \sum_{k=0}^{N1} [h(k) \cdot y((n - k))]$$

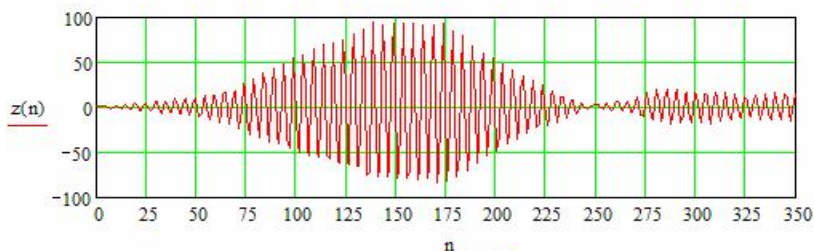


Рис. 2

6.2 Сигнал на выходе дискретного фильтра согласованного с одиночным ФКМ радиопульсом

$$fz(n) := \sum_{k=0}^{N1} (fh(k) \cdot \text{[orange box]})$$

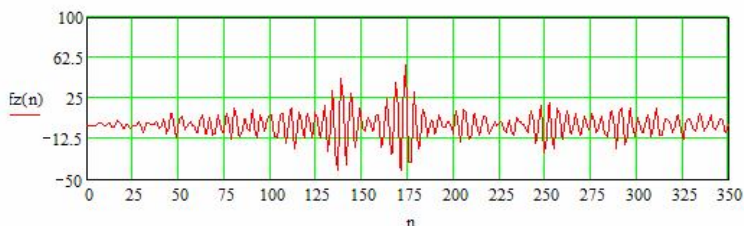


Рис. 3

7. Выходные сигналы приемников с корреляционной обработкой

Сигналы опорных генераторов: $s_0(n)$ и $f_{s_0}(n)$; входные сигналы приемников (смесь полезного сигнала и шума): $y(n)$ и $f_y(n)$; t_{01} - временной момент прихода 1-го полезного сигнала; $n_r = 0, 1, \dots, N_1$ - дискретное время на интервале, равном длительности полезного сигнала. $z_{kor}(n_r)$ и $fz_{kor}(n_r)$ - выходные сигналы приемников с корреляционной обработкой;

Ф.6. При корреляционной обработке сигнала известной формы с известным временем прихода следует обеспечить временную синхронизацию опорного и полезного сигналов на входе приемника. Это значит, что момент начала опорного сигнала должен совпадать с моментом прихода полезного сигнала, поступающего на вход приемника в смеси с шумом.

Рассмотрим формирование сигнала на выходе корреляционного приемника. Допустим приемник "ожидает", что на его вход поступит полезный сигнал $s_0(n)$ в момент времени t_{01} . Это означает, что сигнал опорного генератора должен быть таким же. Проверьте, как изменяется максимальный уровень сигнала на выходе корреляционного приемника, если входной полезный сигнал отличается от предполагаемого $s_0(n)$ по форме или по временному положению.

$$y(n) := \begin{cases} V_n + s_1(n) & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_y(n) := \begin{cases} V_n + f_{s_1}(n) & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$n_r := 0..$$

$$z_{kor}(n_r) := \sum_{n=t_{01}}^{t_{01}+n_r} (\cdot s_0(n - t_{01}))$$

$$fz_{kor}(n_r) := \sum_{n=t_{01}}^{t_{01}+n_r} (\cdot f_{s_0}(n - t_{01}))$$

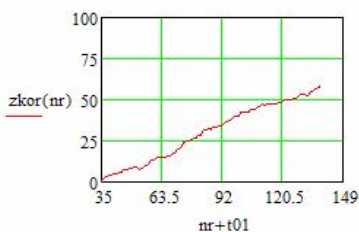


Рис. 4

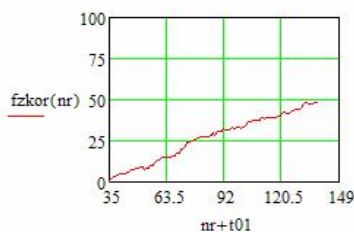


Рис. 5

8. Согласованная фильтрация импульса с внутриимпульсной линейной частотной модуляцией (сигнал с ЛЧМ)

Параметры сигналов: U_1 и U_2 - амплитуды; t_{01} и t_{02} - временные положения (моменты прихода); Δ - девиация частоты; NT - длительность сигналов (количество отсчетов на интервале, равном длительности импульса); m - количество отсчетов на периоде ВЧ сигнала в конечной части импульса.

Ф.7. Формирование полезных ЛЧМ сигналов $Ls1(n)$ и $Ls2(n)$:

$$U_1 := 1 \quad t_{01} := 40 \quad NT := 140 \quad \Delta := 80 \quad m := 5$$

$$Ls1(n) := \begin{cases} U_1 \cdot \sin \left[\frac{2 \cdot \pi}{m \cdot \Delta} + \frac{2 \cdot \pi \cdot (\Delta - 1)}{2 \cdot NT \cdot m \cdot \Delta} \cdot (n - t_{01}) \right] \cdot (n - t_{01}) & \text{if } t_{01} \leq n \leq (t_{01} + NT) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$U_2 := 1 \quad t_{02} := 80$$

$$Ls2(n) := \begin{cases} U_2 \cdot \sin \left[\frac{2 \cdot \pi}{m \cdot \Delta} + \frac{2 \cdot \pi \cdot (\Delta - 1)}{2 \cdot NT \cdot m \cdot \Delta} \cdot (n - t_{02}) \right] \cdot (n - t_{02}) & \text{if } t_{02} \leq n \leq (t_{02} + NT) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Форма полезного сигнала (одного или двух) с ЛЧМ на входе согласованного фильтра:

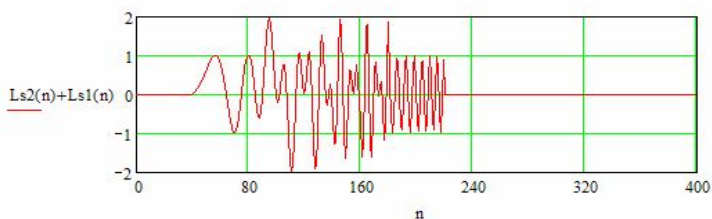


Рис. 6

8.1 Импульсная реакция дискретного фильтра согласованного с ЛЧМ сигналом

$$Lh(n) := \begin{cases} Ls1(NT + t_{01} - n) & \text{if } 0 \leq n \leq (NT + t_{01}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

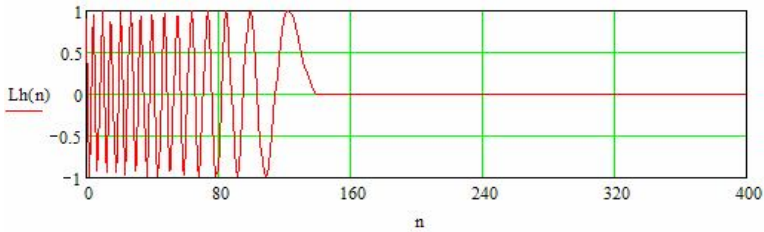


Рис. 7

8.2 Сигнал (смесь полезного сигнала и шума) на входе фильтра согласованного с ПЧМ радиосигналом

$q := 1$ - множитель, определяющий уровень шума на входе фильтра

$$Ly(n) := \begin{cases} (q \cdot V)_n + Ls1(n) + Ls2(n) & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

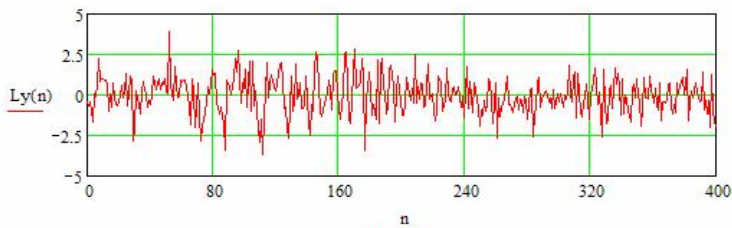


Рис. 8

8.3 Смесь полезного сигнала и шума на выходе согласованного фильтра

$$Lz(n) := \sum_{k=0}^{NT} [Lh(k) \cdot \text{[orange box]}]$$

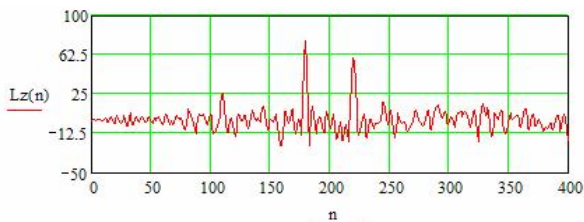


Рис. 9

Исследование характеристик обнаружения (лабораторная работа №3 п.5)

Расчет характеристик обнаружения приемника - обнаружителя полностью известного сигнала на фоне белого гауссова шума

Амплитуда ожидаемого радиоимпульса - A .

Отношение интервала квантования по времени к периоду ВЧ сигнала - $\Delta T = \Delta t / T_0$.

Количество отсчетов на длительности радиоимпульса $(N1 + 1)$.

Количество реализаций (опытов) для оценки вероятности ложной тревоги и вероятности правильного обнаружения R ; (r - номер текущей реализации).

Номер текущего момента времени n .

Временное положение (момент прихода) радиоимпульса τ_0 .

ORIGIN := 0

Ф.1 Установить необходимую расчетную величину A и заданную длительность $N1$:

$A := 0.223606$ $\Delta T := 0.2$ $N1 := 40$ $R := 150$ $r := 1..R$ $\tau_0 := 0$ $n := 0..((N1-2 + \tau_0))$

Форма полезного сигнала $s_0(n)$:

Полезный сигнал $s_1(n)$ с моментом прихода τ_0 :

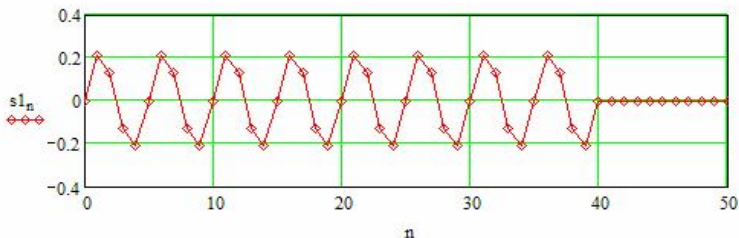
$$s_0(n) := \begin{cases} A \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot (n \cdot \Delta T)] & \text{if } 0 \leq n \leq N1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$s_1(n) := \begin{cases} s_0(n - \tau_0) & \text{if } (n - \tau_0) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Формирование конечной импульсной реакции согласованного фильтра $h(k)$:

$$k := 0..N1-2 \quad h_k := s_0(N1 - k)$$

Полезный сигнал на входе фильтра



Формирование R выборочных реализаций дискретного "белого" гауссовского шума: объем каждой выборки ($2N1 + 1$); среднее значение равно нулю; СКО = σ :

$$\sigma := 1 \quad Y_n^{(r)} := \text{morm}(2 \cdot N1 + 1, 0, \sigma)$$

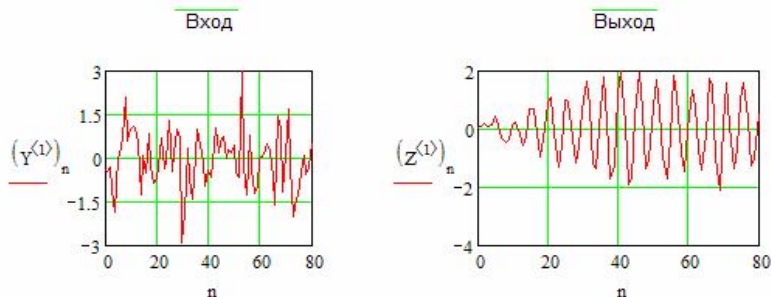
Формирование R выборочных последовательностей смеси полезного сигнала и шума на входе приемника:

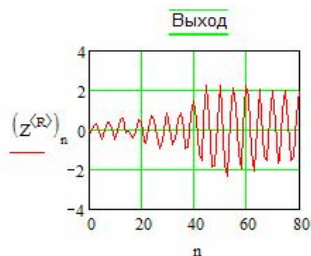
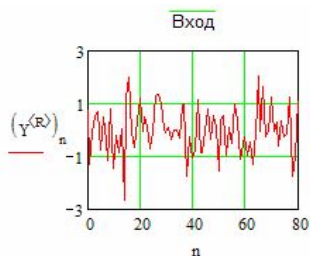
$$Y_n^{(r)} := \begin{cases} \text{for } n \in 0..2 \cdot N1 \\ \left(Y_n^{(r)} \leftarrow \left(V_n^{(r)} \right) + s1_n \text{ if } n \geq 0 \right. \\ \left. 0 \text{ otherwise} \right. \\ Y_n^{(r)} \end{cases}$$

Формирование R выборочных последовательностей сигнала на выходе согласованного фильтра:

$$Z_n^{(r)} := \begin{cases} \text{for } r \in 1..R \\ \text{for } n \in 0..2 \cdot N1 \\ \left(Z_n^{(r)} \leftarrow \sum_{k=0}^n \left[h_k \cdot \left(Y_{n-k}^{(r)} \right) \right] \right. \\ \left. Z_n^{(r)} \right. \end{cases}$$

Осциллограммы реализаций сигнала на входе и выходе приемника - обнаружителя:





Ф.2 Установить необходимое расчетное значение порогового уровня P :

$$P := 0.81594$$

$$Z_0 := P$$

Ф.3 Вычисление количества превышений m порогового уровня Z_0 сигналом на выходе приемника в момент времени соответствующий ожидаемому максимальному уровню:

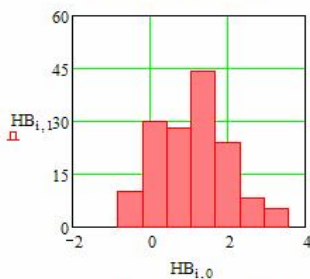
$$M_r := \sum_{n=40}^{40} \left[(Z^{(\phi)})_n \geq Z_0 \right]$$

Ф.4 Вычисление гистограммы распределения уровня сигнала на выходе приемника в момент времени сравнения с порогом:

$$m_{\text{w}} := \sum_{r=1}^R M_r \quad m = 95$$

$$B_r := (Z^{(\phi)})_{40} \quad i := 1..8$$

$$\text{HB} := \text{histogram}(8, B)$$



Вычисление среднего и дисперсии уровня сигнала в момент времени сравнения с порогом на выходе приемника:

$$M_z := \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (Z^{(\phi)})_{40}$$

$$M_z = 1.112$$

$$D_z := \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left[(Z^{(\phi)})_{40} \right]^2 -$$

$$D_z = 0.842$$

Для сокращения времени расчета характеристик обнаружения см. замечание в п.5.4.1 или попытайтесь выполнить расчет дискретной свертки в спектральной области. Для этого используйте процедуры `fft` и `ifft` - прямого и обратного дискретного преобразования Фурье.

7.4. Лабораторная работа 4.

Изучение методов оценки неизвестных параметров полезных сигналов при наличии помех

7.4.1. Теоретическая часть

Цель работы: изучить основные методы статистической теории оценивания неизвестных параметров сигнала при наличии помех.

Основные положения статистической теории оценок

Задача оценки неизвестных параметров сигнала при наличии помех. В радиолокационных, радионавигационных системах, а также системах связи возникает необходимость определения информативных параметров λ , которые содержатся в полезном сигнале $s(t; \lambda)$. При измерении дальности до объекта таким параметром может быть время задержки сигнала на входе приемника относительно сигнала, излученного передатчиком. В других случаях ими могут быть частота или начальная фаза сигнала. Желание иметь высокую точность измерения неизвестного параметра требует применения эффективных способов обработки сигналов, поступающих на вход приемников различных типов радиосистем. Среди множества факторов, влияющих на точность измерительных РТС, особое место принадлежит собственному шуму приемника, потому, что влияние шума принципиально не может быть полностью исключено, какой бы совершенной ни была аппаратура. Таким образом, шумовая составляющая ошибки измерения параметра определяет предельные (потенциальные) возможности многих типов РТС. Следует отметить, что указанная ситуация характерна для РТС, работающих на частотах свыше 20–30 МГц, где уровень внешних помех существенно ниже, чем уровень собственного шума приемного устройства РТС.

Сигнал на входе приемника в случае единственного и не зависящего от времени параметра можно представить в виде

$$y(t; \lambda) = s(t; \lambda) + n(t), \quad (1)$$

где $t \in [0; T]$; T — временной интервал наблюдения (обработки). При дискретном отборе данных, как и ранее, полагаем, что на входе приемника имеем вектор y . Процесс измерения параметра λ состоит в выполнении

определенных преобразований над входным сигналом. Результатом этих преобразований является *оценка параметра* $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$. С математической точки зрения выражение $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$ определяет правило (алгоритм) обработки данных в приемнике-измерителе.

Поскольку $y(t)$ содержит шум и является случайным, то и оценка параметра $\hat{\lambda}(\mathbf{y})$ непременно будет случайной величиной. Оценка имеет условную плотность распределения вероятностей $W(\hat{\lambda} / \lambda)$ и соответственно $\mathbf{M}[\hat{\lambda}] = m_{\hat{\lambda}}$ — математическое ожидание (среднее значение) и $D_{\hat{\lambda}}$ — дисперсию, которая характеризует рассеяние (вариацию) оценки относительно ее среднего значения. Ясно, что качество оценки связано со свойствами ошибки $\varepsilon = (\hat{\lambda} - \lambda)$ случайной величины. Среднее значение ошибки $m_{\varepsilon} = m_{\hat{\lambda}} - \lambda$. Если среднее значение оценки равно истинному значению параметра, то оценка называется *несмещенной*, в этом случае среднее значение ошибки $m_{\varepsilon} = 0$. Рассеяние ошибки характеризует ее дисперсия

$$D_{\varepsilon} = M[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2] = \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2. \quad (2)$$

В байесовской теории оценок качество оценки определяется *средним байесовским риском* R , который является *средним значением функции потерь* $C(\varepsilon)$, определяющей «стоимость» ошибки, поскольку за ошибки приходится «расплачиваться». Чем больше ошибка ε , тем выше ее стоимость. На практике часто используют *квадратичную функцию потерь*, то есть $C(\varepsilon) = \varepsilon^2$. В этом случае средний риск R с учетом (2) принимает вид

$$R = \overline{C(\varepsilon)} = \overline{(\hat{\lambda} - \lambda)^2} = \overline{(\varepsilon^2)} = D_{\varepsilon} + m_{\varepsilon}^2. \quad (3)$$

Таким образом, для несмещенной оценки ($m_{\varepsilon} = 0$) средний риск при квадратичной функции потерь равен дисперсии ошибки.

Оптимальные байесовские оценки. Желание найти оптимальную байесовскую оценку связано с необходимостью минимизации среднего риска R . Следует отметить одну особенность байесовской теории оценок. Она состоит в том, что полезный параметр λ , оставаясь *неизвестным*, полагается *случайным*. Подробно этот вопрос рассмотрен в подразд. 4.2.

Известно, что выражение для оптимальной байесовской оценки при квадратичной функции потерь имеет вид

$$\hat{\lambda}_B(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) d\lambda, \quad (4)$$

где $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ — условная ПРВ параметра λ после получения конкретного сигнала \mathbf{y} , которую называют *апостериорной плотностью распределения параметра*. Эту плотность приемник-измеритель должен вычислять на основе *имеющейся информации о характере полезного сигнала, вероятностных свойствах помехи и полезного параметра*. Выражение (4) является средним значением параметра λ по распределению вероятностей $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$.

Содержательный смысл байесовской оптимальной оценки (4) состоит в следующем. Приемник, получив сигнал \mathbf{y} , рассчитывает вероятности всех возможных значений параметра λ , который в данном конкретном случае не известен. В качестве наилучшей оценки $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ приемника формирует среднее арифметическое значение, но не простое, а взвешенное, в котором каждое ожидаемое значение λ учитывается с коэффициентом, равным вероятности его появления при конкретном входном сигнале \mathbf{y} .

Вполне разумно выбрать в качестве оценки значение параметра, которому соответствует наибольшая вероятность. Такой стратегии также соответствует минимальный байесовский риск, но функция стоимости ошибок в этом случае оказывается простой функцией потерь. Она равна нулю только вблизи $\varepsilon = 0$, затем скачком возрастает и остается постоянной при любых величинах ошибки.

До получения сигнала \mathbf{y} приемник-измеритель должен знать ПРВ $W(\lambda)$ — *априорную плотность вероятностей* параметра. Во многих технических задачах такой подход оправдан. Действительно, если по каналу с шумом передаются сообщения в виде букв русского алфавита, то вполне оправдано, учитывая специфику текста, сообщить приемнику еще до получения конкретного сигнала \mathbf{y} вероятности наличия в переданном сигнале каждой буквы. Интуитивно ясно, что приемник, в котором при обработке поступившего сигнала эта информация учитывается, должен давать меньше ошибок. При максимальной априорной неопределенности можно задать равномерное распределение вероятностей параметра.

Оценки максимального правдоподобия. В соответствии с формулой Байеса апостериорную ПРВ $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ параметра λ можно записать в виде

$$W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y}) = \frac{W(\lambda)W_y(\mathbf{y}/\lambda)}{W(\mathbf{y})}. \quad (5)$$

Характер зависимости правой части (5) от переменной λ определяется произведением функций в числителе.

Максимизации апостериорной вероятности (5) равносильно максимизации (по λ) произведения $W(\lambda)W_y(\mathbf{y}/\lambda)$. Очень часто априорная ПРВ $W(\lambda)$ имеет слабо выраженный максимум или не зависит от λ , например, все значения параметра априори равновероятны. Таким образом, вся «ответственность» за наличие максимума у апостериорного распределения вероятностей по аргументу λ приходится на функцию $L(\lambda) = W_y(\mathbf{y}/\lambda)$. Эту функцию называют *функцией правдоподобия выборки*. Соответственно оценки, определенные по правилу

$$\hat{\lambda}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\lambda} L(\lambda) = \hat{\lambda}_{\text{МП}}(\mathbf{y}), \quad (6)$$

называют *максимально правдоподобными оценками*. Для того, чтобы получить явное выражение для расчета оценки $\hat{\lambda}_B(\mathbf{y})$ или $\hat{\lambda}_{\text{МП}}(\mathbf{y})$ необходимо иметь математическую модель сигнала \mathbf{y} в виде явных выражений для ПРВ $W_{\lambda}(\lambda/\mathbf{y})$ и $W_y(\mathbf{y}/\lambda)$.

Оценки параметров по методу наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов фактически определяет способ сглаживания наблюдаемых данных (сигнала). Прямого отношения к вероятностным построениям он не имеет.

Рассмотрим пример. Предположим, что на вход измерителя поступает хаотический сигнал, показанный на рис. 7.4. Допустим, есть все основания считать, что математическая модель наблюдаемого сигнала имеет вид

$$y(t) = \lambda_0 \sin [2\pi \lambda_1 t] + n(t), \quad (7)$$

где $n(t)$ — помеха; λ_0 и λ_1 — неизвестные амплитуда и частота полезного гармонического сигнала. Следует отметить, что обоснование математической модели является самостоятельной задачей и ее вид связан с конкретной физической задачей.

Приемник-измеритель «не знает» истинных значений λ_0 и λ_1 , в его распоряжении математическая модель вида (7) и фактический сигнал (наблюдения) $y(t)$ на конечном интервале времени.

Возникает вопрос определения наилучших оценок λ_0 и λ_1 . Можно предложить бесчисленное множество пар оценок, которые позволяют «отфильтровать» определяемый каждой парой гармонический сигнал $\hat{\lambda}_0 \sin[2\pi \hat{\lambda}_1 t]$. Два таких сигнала показаны на рис. 4. Какому из них отдать предпочтение?

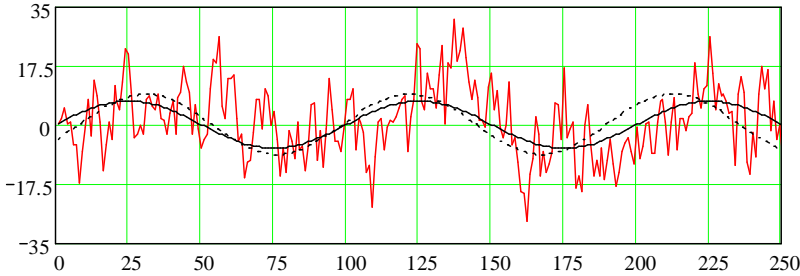


Рис. 4. Варианты сглаживания экспериментальных данных

Метод наименьших квадратов (МНК) предложил в 1795 г. Карл Фридрих Гаусс в 18 лет при решении задачи оценки параметров орбит комет на основе данных, полученных оптическим телескопом, которые, конечно, содержали ошибки наблюдений.

Алгоритм формирования оценок по МНК строится следующим образом. Допустим, есть некоторые оценки λ_0 и λ_1 . Тогда, получив сигнал $y(t)$, можно в каждый момент времени t_i определить разность (невязку) $\tilde{r}(t_i) = [y(t_i) - \hat{\lambda}_0 \sin(2\pi \hat{\lambda}_1 t_i)]$. Видно, что в различные моменты времени невязка будет иметь разные знаки и величину. Однако важно учесть все имеющиеся невязки, причем их знак одинаково важен при подборе оценок. Таким образом, целесообразно образовать сумму квадратов невязок по всем моментам времени от $i=1$ до $i=N$. В качестве же наилучших оценок следует предложить те, при которых указанная выше сумма будет иметь наименьшее значение. Итак, целевая функция для МНК имеет вид

$$J(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = \sum_{i=1}^N \tilde{r}^2(t_i) = \sum_{i=1}^N [y_i - \hat{\lambda}_0 \sin(2\pi \hat{\lambda}_1 t_i)]^2. \quad (8)$$

Оценки параметров по МНК должны обеспечивать целевой функции (8) минимальное значение, то есть

$$\widehat{\lambda}_{0\text{МНК}}, \widehat{\lambda}_{1\text{МНК}} \rightarrow \arg \left\{ \min_{\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1} J(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1) \right\}. \quad (9)$$

Таким образом, в выражении (8) при поступлении сигнала $\{y(t_i), i=1, \dots, n\}$ все величины y_i и t_i будут известны. Значение целевой функции зависит от того, какими будут выбраны оценки λ_0 и λ_1 . По существу определение оценок по МНК сводится к задаче поиска координат точки минимума функции (8). В данном примере — это функция двух аргументов. В простейшем случае, когда модель (7) является линейной функцией неизвестных параметров, целевая функция (8) будет квадратичной. Поиск экстремума квадратичной функции после вычисления производной сводится к решению одного или системы линейных уравнений. Таким образом, для линейных моделей задача имеет аналитическое решение (см. п. 4.2.3).

Следует обратить внимание на то, что в наших рассуждениях об оценках МНК нигде не упоминались вероятностные свойства помехи, которая аддитивно (в виде слагаемого) входит в состав наблюдаемого сигнала $y(t)$. Вероятностные свойства оценок МНК, конечно же, зависят от свойств помехи. Оценки неизвестных параметров по МНК при некоторых свойствах помехи являются строго оптимальными. Эти вопросы следует изучить в подразд. 4.2–4.4.

При изучении статистической теории оценок следует понять и найти ответы на следующие вопросы.

1. Почему оценки неизвестных параметров сигналов являются случайными величинами?
2. Какие параметры характеризуют качество оценок?
3. Каков смысл байесовского критерия оптимальности?
4. Как определяется байесовская оценка при квадратичной функции потерь?
5. Что есть функция правдоподобия выборки?
6. Какова взаимосвязь байесовских и максимально правдоподобных оценок параметра сигнала?
7. Что есть невязка в методе наименьших квадратов и в чем особенность этого метода по сравнению с другими?
8. Каков общий вид целевой функции в методе наименьших квадратов?
9. Каким образом в эксперименте можно найти среднее и среднеквадратическое значение оценки? Что означает понятие «несмещенная оценка параметра»?

7.4.2. Структура программы и задание на работу

Контрольная работа выполняется на ПЭВМ с использованием пакета MathCad (версия не ниже 2001). Листинг программы приведен в п. 7.4.3. Она состоит из 4 разделов, которые отмечены синим цветом. Содержание заданий по работе изложено в листинге программы, содержащем семь фрагментов Φ . 1– Φ . 7. Выполнение заданий предполагает внесение дополнений в программу в местах, отмеченных желтым цветом, где нет операторов MathCad. В работе рассмотрена простейшая модель сигнала (1) — входной сигнал $U(t)$ состоит из прямых наблюдений полезного сигнала $S(t, \lambda) \equiv \lambda$.

При выполнении заданий следует в меню **Math** установить пошаговый режим выполнения программы. Затем установить курсор на оператор **rnorm(●)** в разделе 3 программы и, нажимая несколько раз на клавишу F9, наблюдать реализации оценок параметров, оценок их вероятностных характеристик, а также функции правдоподобия на рис. 2 и рис. 3.

Для выполнения работы необходимо следующее.

1. Изучить основы статистической теории оценок неизвестных параметров сигнала при наличии помех (подразд. 4.1–4.4 и п. 7.4.1).
2. Повторить приемы обработки данных с помощью пакета MathCad, которые были использованы в лабораторной работе 1.
3. Изучить текст программы и освоить используемые в ней обозначения.
4. Выполнить задания, указанные в листинге программы.
5. По результатам наблюдений сделать выводы, при этом следует обратить особое внимание на зависимость вероятностных характеристик оценок и вида функции правдоподобия от объема выборки.

7.4.3. Листинг программы

Листинг программы

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Оценка неизвестных параметров сигналов при наличии помех

Цель работы: изучение статистической теории оценок параметров сигналов при наличии помех и их вероятностных характеристик

1. Оценка постоянного неизвестного параметра λ методом наименьших квадратов

Математическая модель наблюдаемого сигнала $y(i) = \lambda + n(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $n(i)$ - дискретный шум; λ - неизвестная постоянная величина. Отметим, что алгоритм МНК при вычислении оценки не использует какую либо информацию о вероятностных свойствах помехи в наблюдаемом сигнале.

Имитатор наблюдаемого сигнала: аддитивная помеха $n(i)$ - дискретная последовательность независимых случайных величин с гауссовой ПРВ; $N1, N2, N3$ - количество отсчетов по времени (объем выборки), все три значения определены вариантом задания; R - количество опытов (число реализаций); σ_k - оценка параметра λ в отдельном k -ом опыте, где $k = 1, 2, \dots, R$.

1.1. Выполним R опытов, в каждом из которых получается оценка параметра λ по выборке объема $N1=2$:

ORIGIN := 1

$R := 200$ $k := 1..R$ $\lambda := 2$ $\sigma := 4$ $N1 := 2$

Формируем R реализаций помехи: $n^{(k)} := \text{mom}(N1, 0, \sigma)$

Формируем R реализаций наблюдаемого сигнала: $y^{(k)} := \lambda + n^{(k)}$

Вычислим оценку σ_k параметра λ в k -ой реализации (в k -ом опыте):

$$\sigma_k := \frac{1}{N1} \cdot \sum_{i=1}^{N1} \left(y^{(k)} \right)_i \quad y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.244 \\ -0.718 \end{pmatrix}$$

Ф.1. Здесь для первой реализации следует записать в явном виде целевую функцию $J(\lambda)$ для вычисления оценки σ_k параметра λ по МНК при известных (фактических) величинах наблюдаемого сигнала.

$J(\lambda) =$

Вычислим дисперсию оценки по совокупности R опытов:

$$Do_{\lambda}(N1) := \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^R (o_{\lambda k})^2 - \left(\frac{1}{R} \sum_{k=1}^R o_{\lambda k} \right)^2$$

Вычислим СКО этой оценки:

$$\sigma_{\lambda 1} := \sqrt{Do_{\lambda}(N1)}$$

1.2. Выполним вновь R опытов, в каждом из которых получаем оценку параметра по выборке объема N2

$$N2 := 8 \quad n^{(k)} := \text{mom}(N2, 0, \sigma) \quad y^{(k)} := \lambda + n^{(k)}$$

Массив оценок:

$$o_{\lambda k} := \frac{1}{N2} \sum_{i=1}^{N2} (y^{(k)})_i$$

Дисперсия оценки:

$$Do_{\lambda}(N2) := \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^R (o_{\lambda k})^2 - \left(\frac{1}{R} \sum_{k=1}^R o_{\lambda k} \right)^2$$

СКО оценки:

$$\sigma_{\lambda 2} := \sqrt{Do_{\lambda}(N2)}$$

1.3 Повторим эксперимент еще R раз, но для выборки объемом N3:

$$N3 := 20 \quad n^{(k)} := \text{mom}(N3, 0, \sigma) \quad y^{(k)} := \lambda + n^{(k)}$$

Массив оценок:

$$o_{\lambda k} := \frac{1}{N3} \cdot \sum_{i=1}^{N3} (y^{(k)})_i$$

Дисперсия оценки:

$$Do_{\lambda}(N3) := \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=1}^R (o_{\lambda k})^2 - \left(\frac{1}{R} \sum_{k=1}^R o_{\lambda k} \right)^2$$

СКО оценки:

$$\sigma_{\lambda 3} := \sqrt{Do_{\lambda}(N3)}$$

Ф.2. Здесь необходимо:

- 1) выполнить аналогичный числовой эксперимент по расчету СКО оценки параметра λ для количества отсчетов по времени, равном 16. Количество опытов положить равным 100. Результат следует также отобразить на рис. 1.
- 2) вычислить среднее значение $m\sigma_{\lambda}$ оценки σ_{λ} по ансамблю опытов.

$m\lambda :=$

2. Сравнение экспериментальной и теоретической зависимости СКО оценки постоянного параметра от объема выборки m .

Ф.3. Здесь необходимо вычислить теоретическую зависимость $t\sigma_{\lambda} = f(m)$ - СКО оценки параметра λ от объема выборки m в предположении, что элементы выборки статистически независимы во времени

$m := 1..25$

$t\sigma_{\lambda m} :=$

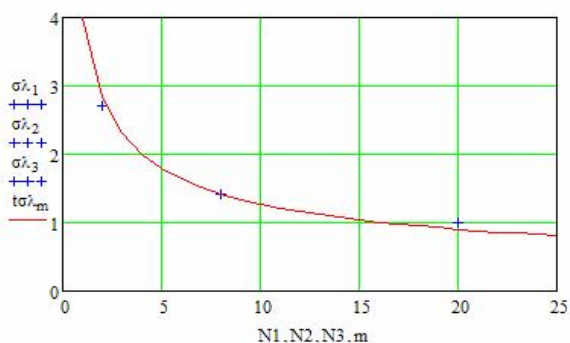


Рис. 1

3. Построение функции правдоподобия и определение максимально-правдоподобной оценки параметра λ :

Отметим, что метод максимального правдоподобия предполагает наличие информации о статистических свойствах помехи в виде многомерной ПРВ. На основе математической модели наблюдаемого сигнала $y(i)$ должна быть определена условная ПРВ $W(y_1, y_2, \dots, y_m / \lambda)$. При получении конкретной выборки условную ПРВ рассматривают как функцию $L(\lambda)$ неизвестного параметра λ . Таким образом, по написанию (формульному выражению) функция $L(\lambda)$ совпадает с условной ПРВ $W(y_1, y_2, \dots, y_m / \lambda)$. Полагаем, что входной сигнал содержит аддитивную гауссову помеху и это факт "известен" приемнику - измерителю.

ИМИТАТОР НАБЛЮДАЕМОГО СИГНАЛА

В соответствии с принятой в работе математической моделью образуем выборку наблюдаемого сигнала, обозначим его в данном фрагменте программы $z(i)$:

$\lambda := 3$ $N := 100$ $i := 1..N$ $\sigma := 3$ $n := \text{mom}(N, 0, \sigma)$ $z_i := \lambda + n_i$

Ф.4. На рис. 2 следует отметить значение параметра λ , подлежащее оцениванию

Одиночная реализация наблюдаемого сигнала $z(i)$:

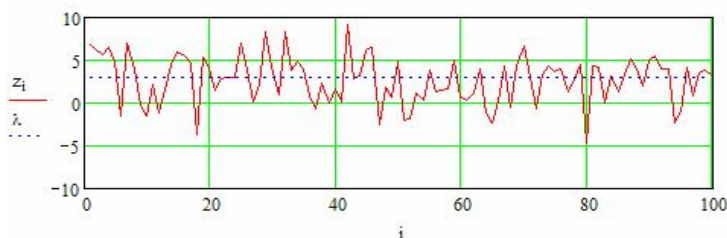


Рис.2

Предположим, что получены всего два выборочных значения сигнала z . Поскольку измерителю известны свойства помехи - шум гауссов (среднее значение равно нулю и СКО равно σ), то можно записать функцию правдоподобия $L(\lambda)$:

$$L(\lambda, j) := \prod_{i=1}^2 \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z_{i+j} - \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

В формулу введена целочисленная переменная j , которая позволяет выбирать любые (в данном случае два) выборочных отсчета из выборки объема N и затем построить функцию $L(\lambda)$.

Построим графики функции правдоподобия для трех опытов, каждый из которых использует только два отсчета при этом будем изменять параметр λ в интервале $(-2\lambda; 3\lambda)$ с шагом 0,05 :

$$\beta := \lambda \quad x := (2\beta - 0.05) \quad \lambda := -2\beta, -x.. 3\beta$$

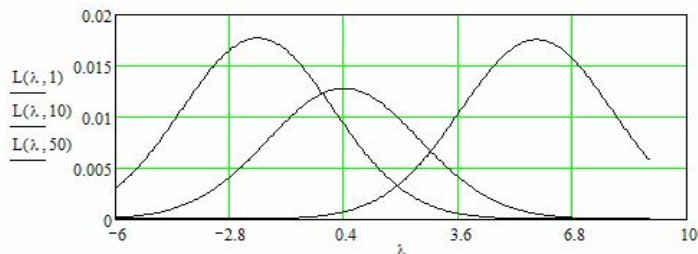


Рис. 2

Ф.5. Определите графически величины максимально правдоподобных оценок параметра λ для каждого из трех опытов, выполненных выше. Определите три пары значений входных сигналов z , по которым в Вашей программе будут получены эти оценки. Запишите результаты ниже в отдельном текстовом окне.

Оценки максимального правдоподобия в трех опытах равны: $\hat{\alpha}\lambda_1 =$; $\hat{\alpha}\lambda_2 =$; $\hat{\alpha}\lambda_3 =$
 Эти оценки получены по следующим трем парам выборочных отсчетов:

Допустим, что в нашем распоряжении выборка из 6 отсчетов. Повторим предыдущие расчеты и найдем МП оценки параметра λ .

$$L(\lambda, j) := \prod_{i=1}^6 \left[\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z_{i+j} - \lambda)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

В формулу введена целочисленная переменная j , которая позволяет выбирать любые (в данном случае десять) выборочных отсчета и затем построить функцию $L(\lambda)$.

Построим графики функции правдоподобия для трех опытов:

$$\lambda := -2\beta, -x.. 3\beta$$

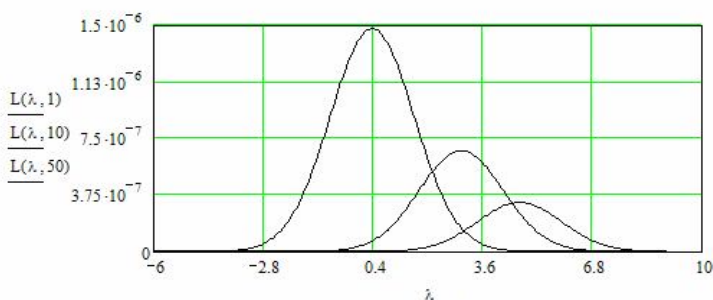


Рис. 3

Ф.6. Определите графически на рис. 3 величины оценок параметра λ для каждой из полученных функций правдоподобия и запишите их. Результаты сравните с предыдущими значениями.

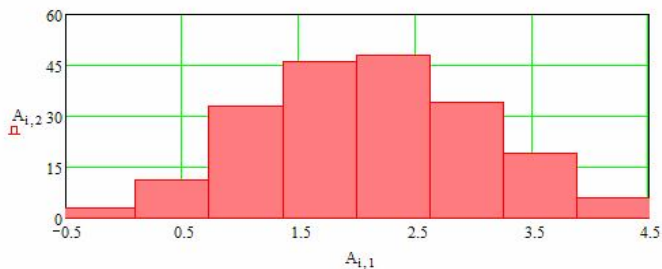
Оценки максимального правдоподобия в трех опытах равны: $\hat{\alpha}_1 =$; $\hat{\alpha}_2 =$; $\hat{\alpha}_3 =$
Эти оценки получены по следующим парам выборочных отсчетов:

4. Вычисление гистограммы оценок параметра λ , полученных по МНК

Очевидно, что гистограмма построена здесь по данным раздела 1.3.

$\hat{A}_{i,2} := \text{histogram}(S, \hat{\alpha}_i)$

$i := 1..8$



Ф.7. Здесь следует разместить гистограмму оценок, увеличив объем выборки в два раза, и затем дать объяснения изменениям в характере гистограммы

Литература

1. Березин Л.В. Теория и проектирование радиосистем / Л.В. Березин, В.А. Вейцель. — М. : Сов. радио, 1977.
2. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов / Л.Е. Варакин. — М. : Сов. радио, 1970.
3. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика / Д. Дюге. — М. : Наука, 1972.
4. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б.Ф. Жданюк. — М. : Сов. радио, 1978.
5. Ивченко Г.И. Математическая статистика / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. — М. : Высшая школа, 1984.
6. Кук Ч. Радиолокационные сигналы. Теория и применение / Ч. Кук, М. Бернфельд. — М. : Сов. радио, 1971.
7. Радиотехнические системы / под ред. Ю.М. Казаринова. — М. : Высшая школа, 1990.
8. Слока В.К. Вопросы обработки радиолокационных сигналов / В.К. Слока. — М. : Сов. радио, 1970.
9. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1983.
10. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. — М. : Сов. радио, 1975.
11. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов / В.И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1986.
12. Теоретические основы радиолокации / под ред. Я.Д. Ширмана. — М. : Сов. радио, 1970.
13. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов / К. Хелстром. — М. : ИЛ, 1963.
14. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике / Б.И. Шахтарин. — М. : Гелиос АРВ, 2006.
15. Пугачев В.С. Теория случайных функций / В.С. Пугачев. — М. : ФМЛ, 1962.
16. Тихонов В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. — М. : Радио и связь, 1961.
17. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Мионов. — М. : Сов. радио, 1977.
18. Плис А.И. MathCad 2000: математический практикум для экономистов и инженеров / А.И. Плис, Н.А. Сливина. — М. : Финансы и статистика, 2000. — 655 с.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

№	Обозначение в тексте	Смысловое содержание
1	$s(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t))$ $s(t) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t) e^{j\omega_0 t} \right]$	Действительный узкополосный радиосигнал
2	$\dot{S}(t) = S(t) e^{j\Phi(t)}$	Комплексная огибающая сигнала
3	$\begin{array}{c} F^{-1} \\ \Leftrightarrow \\ F \end{array}$	Знак взаимного преобразования Фурье для двух функций слева и справа от него
4	$\dot{G}(\omega); \quad \dot{G}(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{S}(t)$	Спектральная функция комплексной амплитуды сигнала
5	$\dot{g}(\omega) = g(\omega) e^{j\gamma(\omega)}; \quad \dot{g}(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} s(t)$ $\dot{g}(\omega) = 0,5 \left[\dot{G}(\omega - \omega_0) + \dot{G}^*(-\omega - \omega_0) \right]$	Комплексный частотный спектр $\dot{g}(\omega)$ действительного сигнала $s(t)$
6	$\Delta T \text{ и } \Delta \Omega = 2\pi \Delta F$	Среднеквадратические длительность и полоса частот сигнала
7	$B = \Delta T \Delta F \geq 1/4\pi$	База сигнала
8	$E_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) ^2 dt = \frac{1}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) ^2 d\omega$ $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(\omega) ^2 d\omega$	Энергия сигнала. $ \dot{G}(\omega) ^2$ — энергетическая спектральная плотность
9	$\dot{G}(\omega - \omega_0) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{s}(t)$	Односторонний спектр комплексного узкополосного сигнала

Продолжение табл.

№	Обозначение в тексте	Смысловое содержание
10	$\dot{k}(\omega) = K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$	Комплексный коэффициент передачи линейного фильтра
11	$h(\tau) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{k}(\omega)$	Импульсная реакция линейного фильтра
12	$q(x_0, v_0, x, v) =$ $= (1/E_s) \int_0^T s(t, x_0, v_0) s(t, x, v) dt$	Нормированная сигнальная функция, определяющая различие сигналов по двум неэнергетическим параметрам
13	$k(\tau, \Omega) =$ $= \frac{1}{E_s} \int_0^T s(t, \omega_0) s[(t-\tau); (\omega_0 - \Omega)] dt =$ $= \text{Re} \left\{ \dot{K}(\tau, \Omega) e^{i(\omega_0 - \Omega)\tau} \right\}$	Частотно-временная автокорреляционная функция узкополосного радиосигнала; $\dot{K}(\tau, \Omega)$ — комплексная огибающая этой функции
14	$K(\tau, \Omega) = \dot{K}(\tau, \Omega) ; \quad \dot{K}(0; 0) = 1$	Функция неопределенности (ФН) сигнала или огибающая частотно-временной автокорреляционной функции
15	$K(\tau) = \dot{K}(\tau; 0) =$ $= \left (1/2 E_s) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right =$ $= (1/2 E_s) \left \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f) ^2 e^{i2\pi f\tau} df \right ;$ $K(\tau_K / 2) = 0,5.$ $2 E_s \dot{K}(\tau) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\Leftrightarrow}} \dot{G}(\omega) ^2$	Огибающая временной автокорреляционной функции (АКФ) $k(\tau)$ детерминированного сигнала (иногда в контексте просто — временная автокорреляционная функция). τ_K — ширина огибающей временной автокорреляционной функции по уровню 0,5

Продолжение табл.

№	Обозначение в тексте	Смысловое содержание
16	$K(F) = \left \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(f-F) \dot{G}^*(f) df \right = \dot{K}(F) ;$ $\dot{K}(F) = \frac{1}{2E_s} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) ^2 e^{j2\pi Ft} dt;$ $K(F_K/2) = 0,5$	Огибающая частотной автокорреляционной функции (АКФ) сигнала (иногда в контексте просто частотная автокорреляционная функция). F_K — ширина частотной автокорреляционной функции по уровню 0,5
17	$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(\mathbf{x})$	Совместная плотность распределения вероятностей (ПРВ) системы n случайных величин
18	$\mathbf{M}[\dots] = \overline{[\dots]}; \quad \mathbf{D}[\dots] = \overline{[\dots]^2} - [\overline{(\dots)}]^2$	Операторы математического ожидания (среднее по ансамблю) и дисперсии
19	$\mathbf{K}_n = \mathbf{M}[\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T];$ <p>\mathbf{n} – вектор-столбец; \mathbf{n}^T – вектор-строка</p>	Ковариационная матрица случайного вектора \mathbf{n}
20	$D_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2$	Дисперсия случайной величины ε
21	$L(\lambda) \equiv W(\mathbf{y} / \lambda)$	Функция правдоподобия (ФП), совпадающая по виду с условной плотностью распределения вероятностей (ПРВ) принятых данных \mathbf{y} при заданном значении параметра λ . При непрерывном отборе данных $L(\lambda)$ — функционал правдоподобия

№	Обозначение в тексте	Смысловое содержание
22	$z(\lambda) = \ln [L(\lambda)] =$ $= z_s(\lambda, \lambda_0) + z_n(\lambda)$	Логарифм функционала правдоподобия, имеющий сигнальную $z_s(\cdot)$ и шумовую $z_n(\cdot)$ составляющие
23	$\hat{\lambda}_B, \hat{\lambda}_{МП}, \hat{\lambda}_{МНК}$	Оценки параметра λ : байесовская, максимально правдоподобная и по методу наименьших квадратов
24	$\delta_\tau \text{ и } \delta_F$	Ширина главного пика функции неопределенности по оси τ и F на некотором уровне C
25	$\delta\tau_P \text{ и } \delta F_P$ $\delta\tau_B \text{ и } \delta F_B$	Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Релея). Разрешающая способность по времени задержки и частоте (критерий Вудворда)
26	$q_0^2 = 2E_s / N_0$	Максимальное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе огласованного фильтра
27	$N_0 / 2 \text{ [Вт/Гц]}$	Двухсторонняя спектральная плотность мощности белого шума
28	$q_{\text{вых } s}(t, \lambda) \text{ и } q_{\text{вых } n}(t, \lambda)$	Сигнальная и шумовая функции на выходе согласованного фильтра (СФ)
29	$i(\lambda) =$ $= \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln [W(y_1 / \lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$	Количество информации Фишера о параметре λ , содержащееся в одиночном наблюдении
30	$i_n(\lambda) =$ $= \mathbf{M} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [W(y_i / \lambda)] \right)^2 \right]$	Количество информации по Фишеру содержащееся в независимой выборке \mathbf{y} объема n

Учебное издание

Тисленко Владимир Ильич

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Редактор Н.С. Голикова

Корректор Е.С. Юзефович

Компьютерная верстка Г.В. Черновой

Подписано в печать 18.12.07. Формат 60×84/16.

Уч.-изд.л. 16,75. Тираж 300. Заказ 1667.