Кафедра РТС

Тисленко В.И.

Математические модели динамических систем в форме уравнений для переменных состояния

Учебно-методическое пособие к практическим работам по теме
«Математические модели динамических систем»
по курсу «Радиосистемы управления» (спец. 210304)

Томск - 2011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МОЖЕТ ПРЕДСТАВЛЕНА В НЕСКОЛЬКИХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМАХ. В ЧАСТНОСТИ:

1. В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ – ИНТЕГРАЛ СВЕРТКИ, КОТОРЫЙ ОПРЕДЕЛЯЕТ ВЫХОДНУЮ РЕАКЦИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА СВЕРТКИ ВХОДНОГО СИГНАЛА (ОВ) С ИМПУЛЬСНОЙ РЕАКЦИЕЙ СИСТЕМЫ (В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ВХОДАМИ С МАТРИЦЕЙ ИМПУЛЬСНЫХ РЕАКЦИЙ) .

2. В ВИДЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА СИСТЕМЫ ПРИ ЗАДАННОМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ.

3. В ВИДЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗЫВАЮЩЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО СИГНАЛОВ СИСТЕМЫ.
4. В ВИДЕ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ, СВЯЗЫВАЮЩЕЙ КОМПЛЕКСНЫЙ ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО СИГНАЛОВ

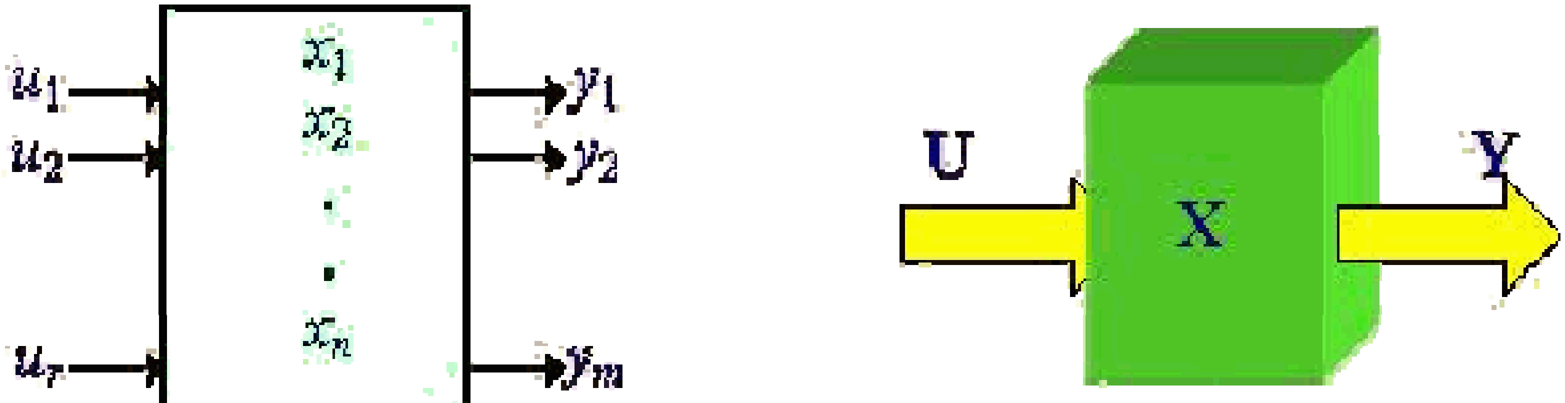
В современной теории автоматического управления используются векторно-матричные

модели динамических систем в форме систем дифференциальных уравнений первого порядка для переменных состояния

ПРЕДСТАВЛЕННЫЙ НИЖЕ МАТЕРИАЛ ИСПОЛЬЗУЕТ ИНФОРМАЦИОННЫЙ ИСТОЧНИК, ПРИВЕДЕННЫЙ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

Понятие пространства состояний

Для получения векторно-матричной модели исследуемая динамическая система представляется в виде “черного ящика” с некоторым числом входных и выходных каналов.



а) б)

Скалярное (а) и векторное (б) представления динамической системы в виде "черного ящика"

Входные переменные

r - число входов

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, \ldots, u_r],$$

Выходные переменные

m - число выходов

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = [y_1, y_2, \ldots, y_m],$$

Переменные состояния

n - число переменных состояния

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

Состояние системы –

это та минимальная информация о прошлом, которая необходима для полного описания будущего поведения (т.е. выходов) системы, если поведение ее входов известно.

Уравнения состояния и выхода

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, .., x_n, u_1, u_2, .., u_r, t),\ i = 1, 2, ..., n$$

$$y_j = \varphi_j(x_1, x_2, .., x_n),\ \ j = 1, 2, .., m.$$

Стационарная система

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du.$$

A - матрица *состояния системы, размером n x n*,

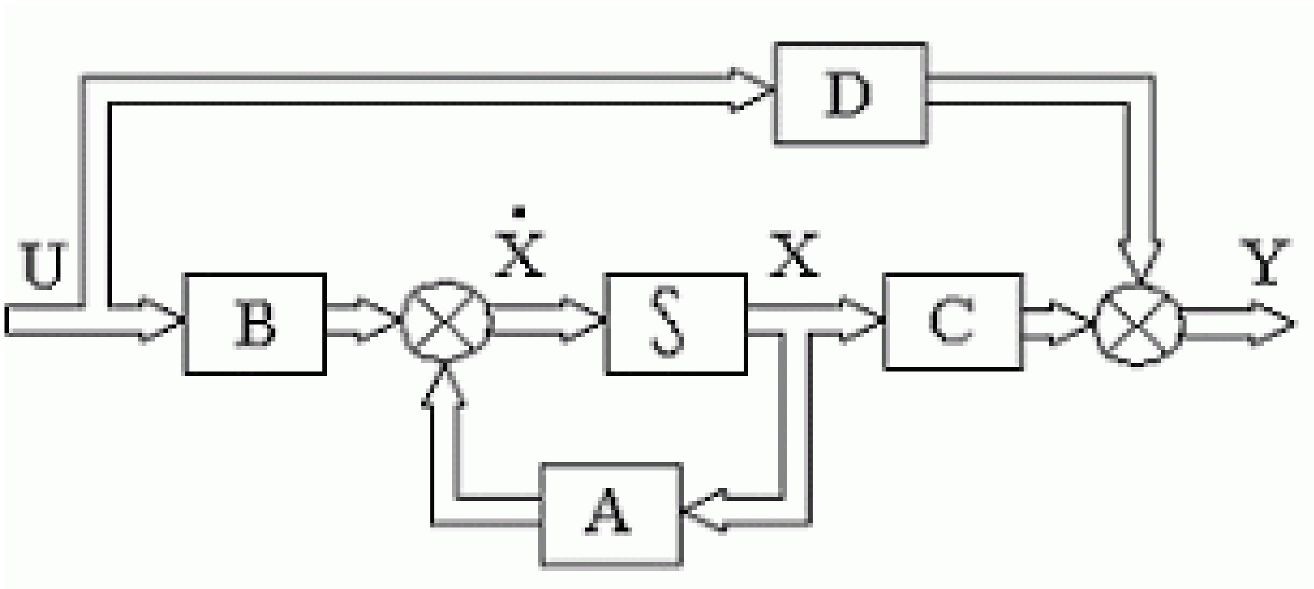
B - матрица *управления* (входа), *n x r*,

C - матрица *выхода по состоянию, m x n*,

D - матрица *выхода по управлению, m x r.*

Очень часто *D*=0, т.е. выход непосредственно не зависит от входа.

Структурная схема системы в векторной форме: S - блок интеграторов; A,B,C,D - блоки матричных усилителей



Переход от уравнений состояния к уравнениям «вход-выход»

Уравнения состояния:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Преобразуем:

$$(pE - A)x = Bu$$

$$x = (pE - A)^{-1}Bu$$

$$y = C(pE - A)^{-1}Bu$$

Тогда передаточная функция:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B$$

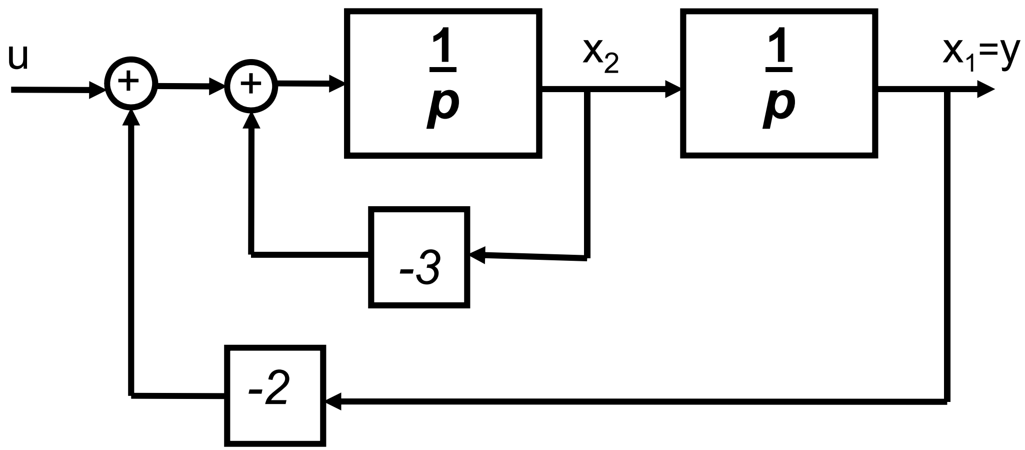
Этот переход однозначен.

Другой способ получения передаточной функции – структурные преобразования

Пример. Пусть

$$A=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}\quad C=\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix}$$

Структурная схема системы имеет вид:

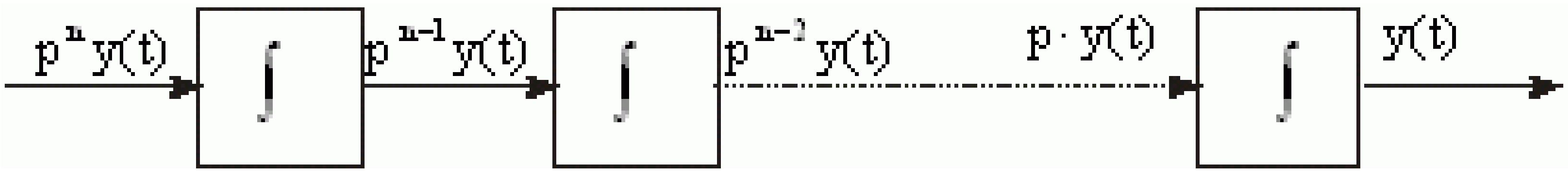


Сворачивая схему, получим $W(p)=\dfrac{y}{u}=\dfrac{1}{p^2+3p+2}$

Переход от передаточной функции к уравнениям состояния для систем с одним входом и одним выходом

$$p^n y(t) + a_1 p^{n-1} y(t) + ... + a_n y(t) = bu(t),$$

$$p^n y(t) = -a_1 p^{n-1} y(t) - ... - a_n y(t) + bu(t).$$



$$y = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

....

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - ... - a_1 x_n + b_m u$$

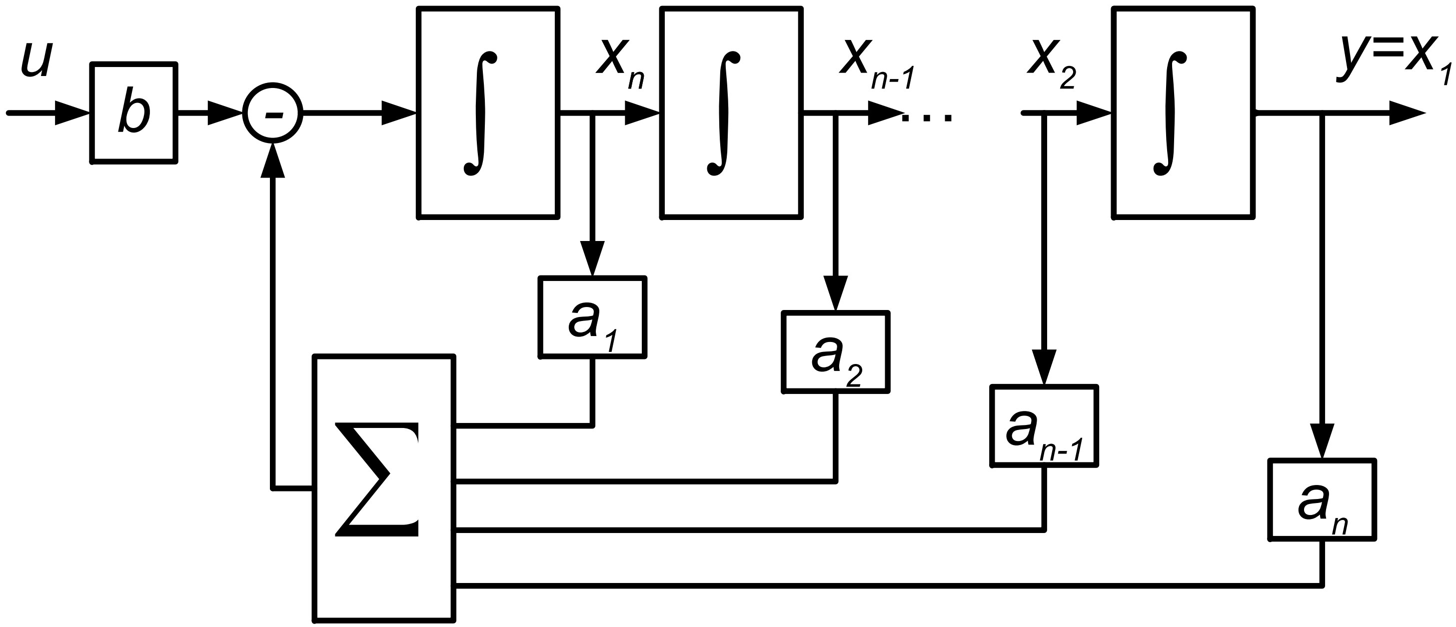
Векторно-матричная модель САУ

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & .. & -a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{vmatrix} \cdot u$$

$$y = x_1$$

Управляемая каноническая форма *–матрица состояния имеет форму Фробениуса (нормальную форму).*
Характеристическое уравнение располагается в последней строке.

Структурная схема для управляемой канонической формы уравнений состояния



Здесь переменные состояния – фазовые координаты.

Другая форма: *в правой части уравнения содержатся производные от входного воздействия*

$$W(p)=\frac{y}{u}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0}{p^n+a_n p^{n-1}+\ldots+a_1}$$

$$W(p)=\left(\frac{1}{p^n+a_n p^{n-1}+\ldots+a_1}\right)\left(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0\right)$$

$$\xrightarrow{u}\boxed{\frac{1}{p^n+a_n p^{n-1}+\ldots+a_1}}\xrightarrow{z}\boxed{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0}\xrightarrow{y}$$

$$\begin{cases}(p^n+a_n p^{n-1}+\ldots+a_1)z=u\\(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0)z=y\end{cases}$$

Введем *переменные состояния:*

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad \dots \quad , x_n = z^{(n-1)}$$

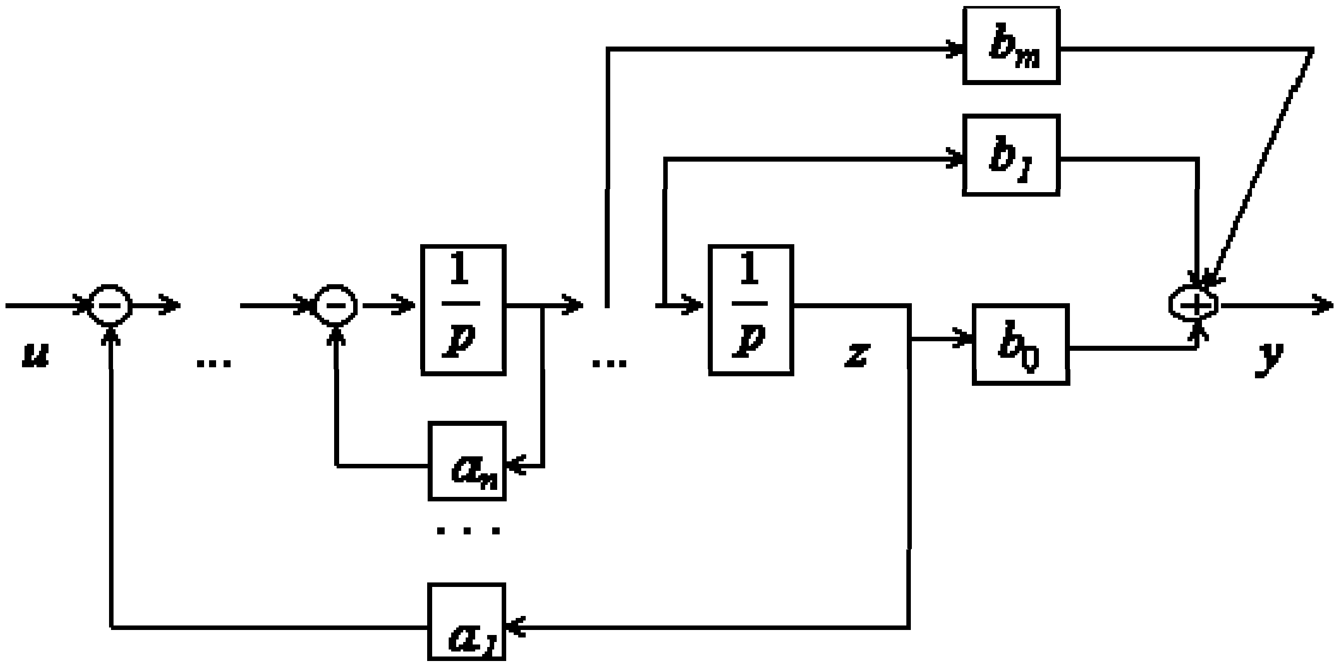
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + u, \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1}, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

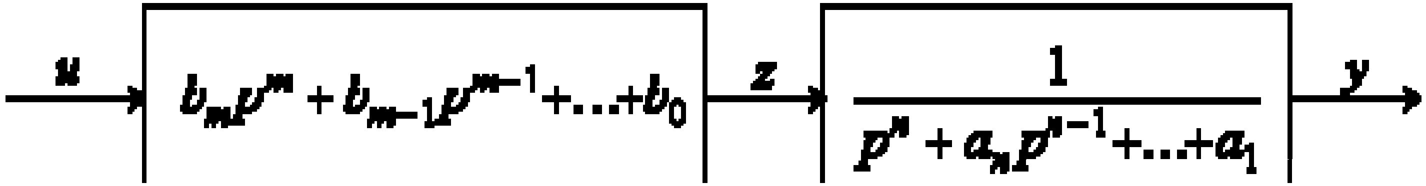
$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь координаты состояния x_i – абстрактные переменные.

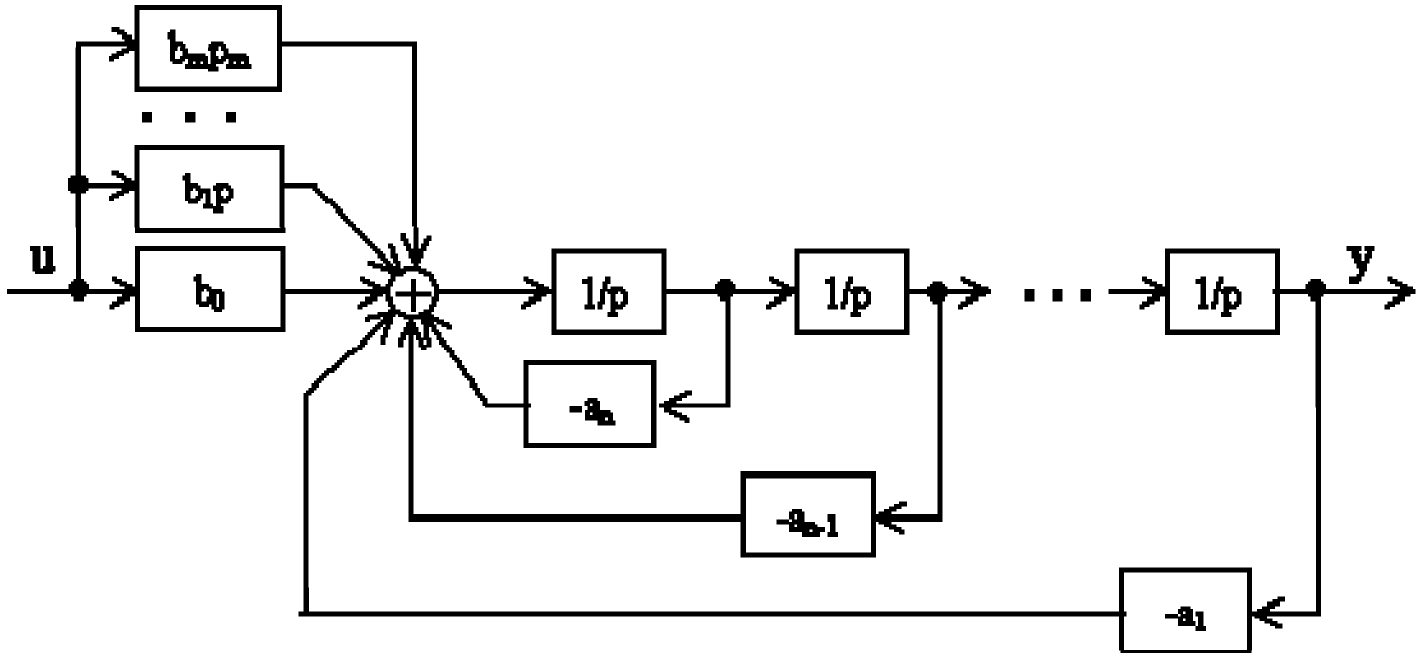
Этим уравнениям соответствует структура:



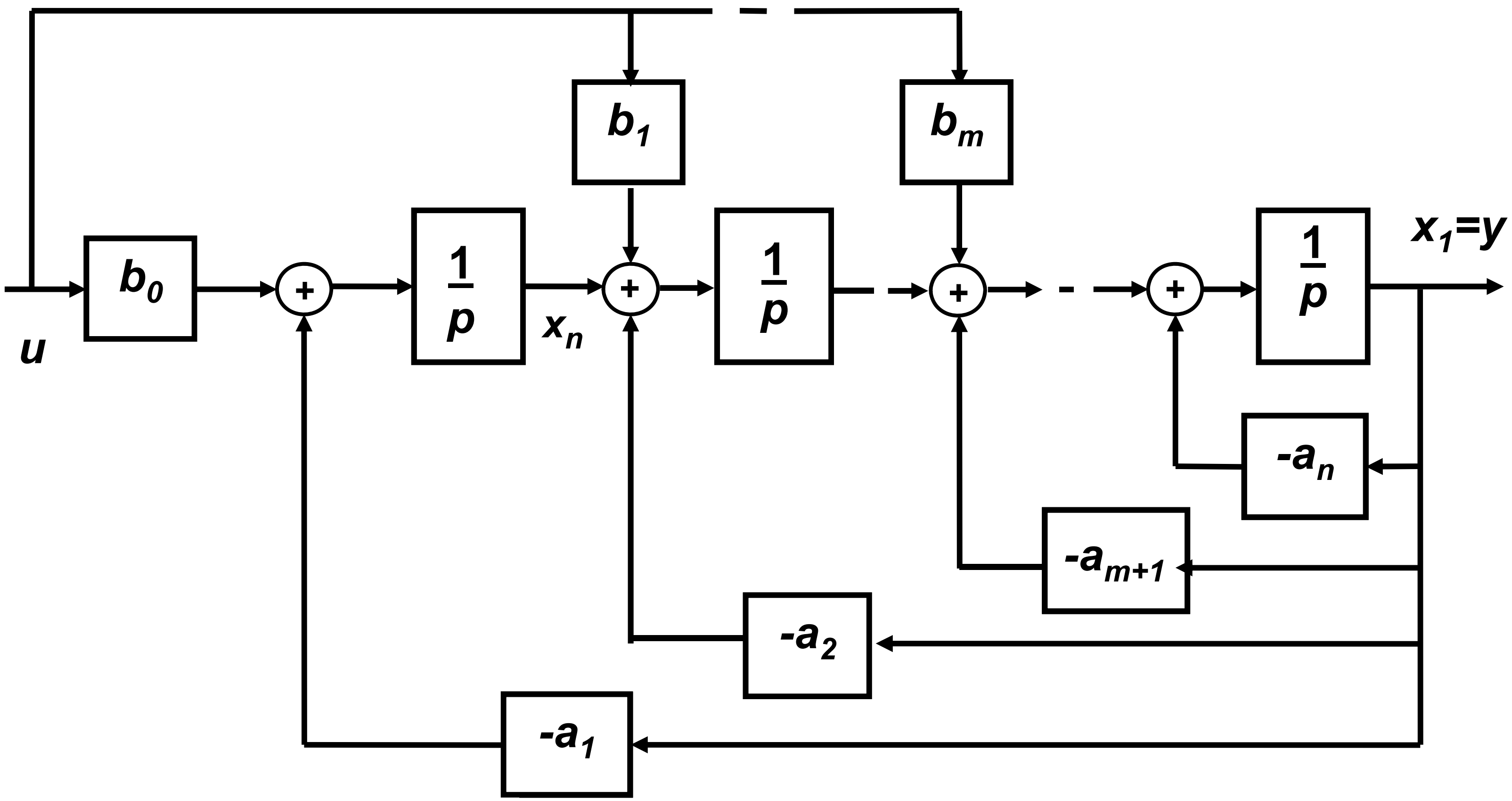
Возможно другое представление:



$$\begin{cases} (p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_1) y = z \\ (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0) u = z \end{cases}$$



Структурная схема может быть преобразована к виду:



Тогда матрицы A, B, C в уравнениях состояния будут:

$$A = \begin{vmatrix} -a_n & 1 & 0 & .. & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -a_2 & 0 & 0 & .. & 1 \\ -a_1 & 0 & 0 & .. & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ .. \\ .. \\ b_1 \\ b_0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Это - наблюдаемая каноническая форма уравнений состояния.

Таким образом, переход от передаточной функции к описанию в переменных состояния является неоднозначным.

Другие канонические формы уравнений состояния.

Пусть $W(p)=\dfrac{R(p)}{D(p)},\quad Y(p)=\dfrac{R(p)}{D(p)}U(p)=\sum_{1}^{n}\dfrac{R(p_i)}{D'(p_i)(p-p_i)}U(p)$

Обозначим $\dfrac{R(p_i)}{D'(p_i)}=b_i,\qquad i=1,\dots,n.$

Первый способ.

1) $Y(p)=\sum_{1}^{n}b_iX_i(p),\quad X_i(p)=\dfrac{U(p)}{p-p_i},\quad y(t)=\sum_{1}^{n}b_ix_i(t),\quad \dot{x}_i=p_ix_i+u$

$$A=\begin{vmatrix} p_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & p_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & p_n \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & .. & b_n \end{vmatrix}$$

Второй способ.

$$2)\; Y(p)=\sum_{1}^{n} X_i(p) \qquad X_i(p)=\frac{b_i}{p-p_i}U(p),$$

$$y(t)=\sum_{1}^{n} x_i(t),$$

$$\dot{x}_i = p_i x_i + b_i u$$

$$A=\left|........\right|, \qquad B=\left|b_1 \quad b_2 \quad .. \quad b_n\right|^T, \quad C=\left|1 \quad 1 \quad .. \quad 1\right|.$$

В двух последних формах матрица А – диагональная.

Преимущества структурной модели :

- *наглядное представление понятия "состояние систем",*

- *однозначно представляется структура взаимодействий между переменными в виде системы с обратными связями,*

- *структурные модели полезны при моделировании САУ на аналоговых или цифровых вычислительных машинах.*

Пример получения уравнений состояния

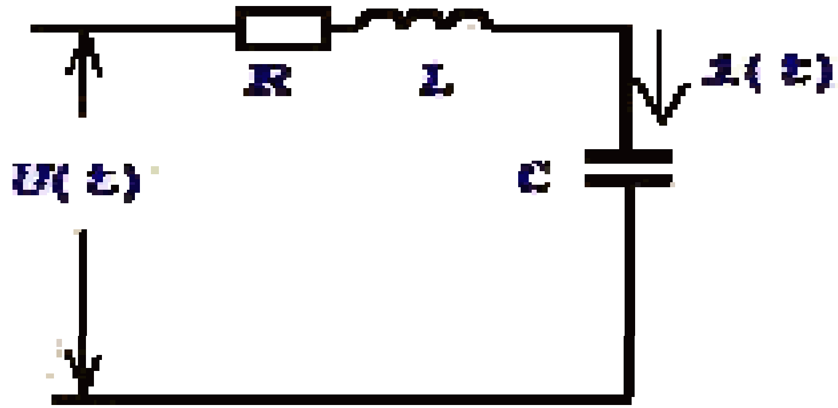


Рис. 1.2. Схема *RLC*-цепи.

$$U(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + U_c,$$

$$C\frac{dU_c}{dt} = i(t),$$

Уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{U}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^{R}\!/_{L} & -{}^{1}\!/_{L} \\ {}^{1}\!/_{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ U(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t).$$

П р и м е р. Система описывается дифференциальным уравнением

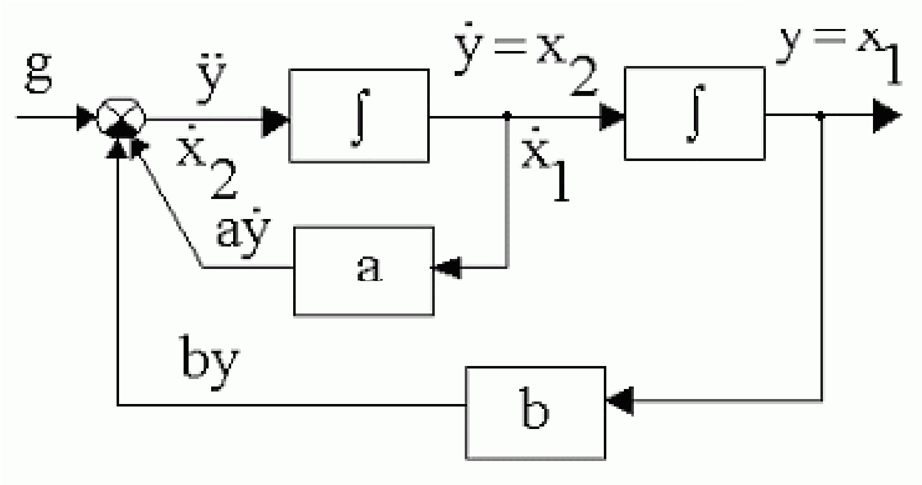
$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = g$$

Составим уравнения состояния и структурную схему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = g - bx_1 - ax_2. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + g|0|,$$



Свойства объектов и систем управления. *Управляемость .*

***Определение*.** Система полностью управляема, если она может быть переведена из любого начального состояния **x**(0) в начало координат (0, 0,…,0) под действием управления **u**(t) за конечное время.

***Теорема Калмана об управляемости*.** Состояние непрерывной системы управляемо, если и только если ранг матрицы

$$N_y = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

равен размерности пространства состояний n.

Пример 1. Проверим, управляема ли система:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u$$

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{AB} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{N_y} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \det \mathrm{N_y} = -1 \neq 0$$

$\mathrm{rangN_y} = 2$, *система полностью управляема.*

Пример 2. Также проверим управляемость системы:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}. \qquad AB = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{vmatrix};$$

$$A^2B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 21 \\ 24 \end{vmatrix}. \qquad N_y = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 3 & 3 & 21 \\ 0 & 9 & 24 \end{vmatrix},$$

$\det(N_y) = -27$, rang(Ny) = n = 3, т.е. *система полностью управляема*.

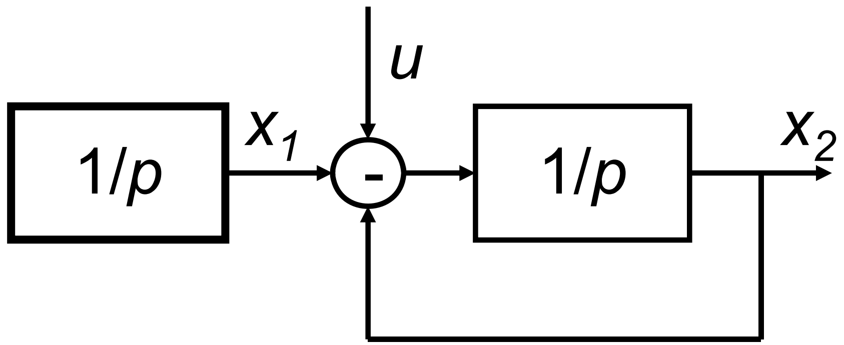
Пример 3.

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad AB = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad det\, N_y = 0$$

Т.к. $\mathrm{rang} N_y = 1$, *система управляема неполностью. Порядок управляемой части равен 1.*



В такой системе есть “висячая” часть на входе.

В случае представления объекта управления моделью типа “вход - выход” условием его управляемости является отсутствие общих корней полиномов *A(p)* и *B(p):*

$$A(p)y = B(p)u$$

Т.е. система управляема, если алгебраические уравнения

$$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n = 0,$$

$$B(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m = 0$$

не имеют общих корней.

Рассмотрим пример.

Пример 2. *Определим управляемость системы, имеющей передаточную функцию*

$$W(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{p^3+3p^2+5p+3}{p^5+4p^4+10p^3+13p^2+11p+3}$$

Прямой расчет корней числителя и знаменателя дает результаты, приведенные в табл.

№	Числитель	
	Re	Im
1	-1.000	-1.414
2	-1.000	1.414
3	-1.000	0.000

№	Знаменатель	
	Re	Im
1	-0.785	-1.307
2	-0.785	1.307
3	-1.000	-1.414
4	-1.000	1.414
5	-0.430	0.000

Таким образом, числитель и знаменатель передаточной функции *W(p)* имеют два общих корня (-1 -j1.414) и (-1+j 1.414). Значит, ***система не управляема***. Изменение значений корней для этих пар в числителе или знаменателе переведет систему в ранг управляемых.

Наблюдаемость

- *Для осуществления управления необходимо иметь информацию о текущем состоянии системы, т.е. о значениях вектора состояния x(t) в каждый момент времени.*
- *Однако некоторые из переменных состояния являются абстрактными, не имеют физических аналогов в реальной системе или же не могут быть измерены. Измеряемыми и наблюдаемыми являются физические выходные переменные y(t).*

- *Таким образом, возникает вопрос: можно ли определить вектор состояния по измеряемому вектору выхода и вектору входа?*

Наблюдаемость

- ***Определение***. Система называется полностью наблюдаемой, если по результатам измерения входных u(t) и выходных y(t) переменных можно однозначно определить все составляющие вектора x(t) на конечном интервале времени.

Теорема Калмана о наблюдаемости. Система наблюдаема, если и только если ранг матрицы

$$N_н = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \ldots \mid (A^T)^{n-1} C^T].$$

равен размерности пространства состояний.

Упражнение. *Проверить наблюдаемость системы :*

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

$$y = x_1 .$$

Ответ. Система полностью наблюдаема.

Пример 2.

- *Рассмотрим систему:*

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + u$$
$$y = x_1 - x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C^T = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$A^T C^T = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad N_н = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \det N_н = 0$$

Rang $N_н = 1$, *система неполностью наблюдаема*.

Преобразуем систему, вычитая из первого уравнения второе:

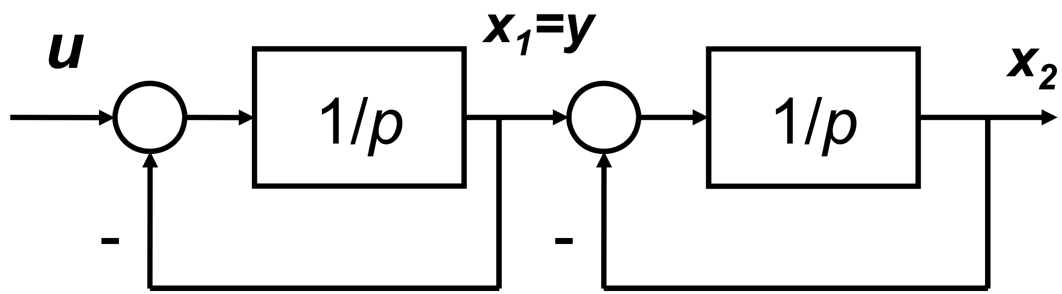
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -(x_1 - x_2) - u.$$

ВведЯ новые переменные $\tilde{x}_1 = x_1 - x_2, \quad \tilde{x}_2 = x_1,$

получим : $\quad y = \tilde{x}_1$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 - u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$$



Эта структура имеет "висячую" часть на выходе.

Изменение базиса в уравнениях состояния

ИмеЕтся система $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx$$

В новом базисе $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$

$$y = \bar{C}\bar{x}.$$

Пусть $\bar{x} = Px.$ *Матрица перехода P существует*

и является единственной, если пара $\{A, B\}$ *управляема.*

$P = \bar{N}_y \cdot N_y^{-1}$, *где* $N_y = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{vmatrix}$,

$$\bar{N}_y = \begin{vmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \ldots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{vmatrix}.$$

Тогда $\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1}.$

Пример (упражнение)

Найти матрицу P, преобразующую Систему

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$$

к нормальному виду :

$$\dot{\overline{x}}_1 = \overline{x}_2$$

$$\dot{\overline{x}}_2 = -3\overline{x}_1 + 4\overline{x}_2 + u.$$

Ответ. $P = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$

О синтезе системы

Синтез системы - это направленный расчет, цель которого :

построение рациональной структуры системы;

нахождение оптимальных значений параметров отдельных звеньев.

- Качество управления можно описать двумя способами.
- *Первый способ* предусматривает или непосредственное задание динамических характеристик выходных координат системы при типовых воздействиях, или задание совокупности прямых и косвенных показателей качества (значение перерегулирования, времени регулирования, статической ошибки, частоты среза, полосы пропускания и т.д.).
- *Второй способ* основан на введении некоторого обобщенного функционала, определяемого всеми переменными системы управления $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$.
- В теории линейных систем управления широко используются оба указанных способа.

Если передаточная функция системы не имеет нулей, то при выборе ее желаемого полинома *D(p)* можно руководствоваться стандартными формами (фильтрамиЧебышева, Баттерворта и др.)

- Стандартные формы определяют коэффициенты характеристического полинома , обеспечивающие в системе переходные и частотные характеристики с известными показателями качества.
- Если же система характеризуется наличием нулей, стандартные формы могут служить в качестве исходного материала для поиска своего *оптимального расположения корней.*

- ***Одним из основных методов проектирования детерминированных систем управления в пространстве состояний является метод расположения полюсов*.**

Распределение полюсов системы управления

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом.

- Требуемое качество процессов может быть достигнуто заданием распределения полюсов замкнутой системы на комплексной плоскости.
- Для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

- *полюса системы* - это собственные значения матрицы **A** или корни ее характеристического уравнения

$$det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Пусть внешнее воздействие на объект:

$$v = F(x, u).$$

В случае линейной безынерционной обратной связи

$$v = \boldsymbol{K}x + u,$$

где $\boldsymbol{K}$ – постоянная матрица коэффициентов обратной связи.

Требуется найти элементы матрицы $\boldsymbol{K}$ так, чтобы замкнутая система имела желаемый характеристический полином:

$$det(\lambda E - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0$$

Если уравнения объекта заданы в нормальной форме (Фробениуса), то матрица обратных связей по состоянию

$$K = \begin{vmatrix} a_n - \alpha_n & a_{n-1} - \alpha_{n-1} & \dots & a_1 - \alpha_1 \end{vmatrix}$$

- *Покажем это:*

$$A + BK = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_n - \alpha_n & a_{n-1} - \alpha_{n-1} & \dots & a_1 - \alpha_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Пример

- Задана система:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

МатрицА управляемости :

$$N_y = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \det N_y \neq 0, \quad \textit{система} \quad \textit{управляема.}$$

Характеристический полином : $(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Система неустойчива : $a_1 = -3$, $a_2 = 2$.

Нормальная форма матрицы A:

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Пусть желаемые полюсы : $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$

Желаемый характеристический полином:

$\varphi = (\lambda+3)(\lambda+1) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$; $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$.

Тогда $k_1 = a_2 - \alpha_2 = 2 - 3 = -1$, $k_2 = a_1 - \alpha_1 = -3 - 4 = -7$.

$$K = |-1 \quad -7|$$

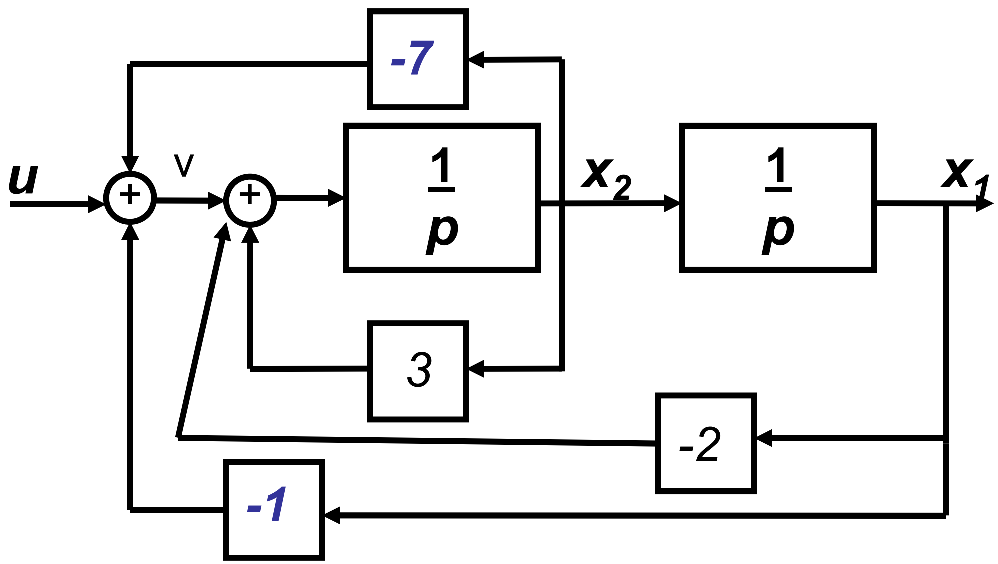
Следовательно: $v = u - x_1 - 7x_2$

Вычислив матрицу перехода P от исходной к нормальной форме

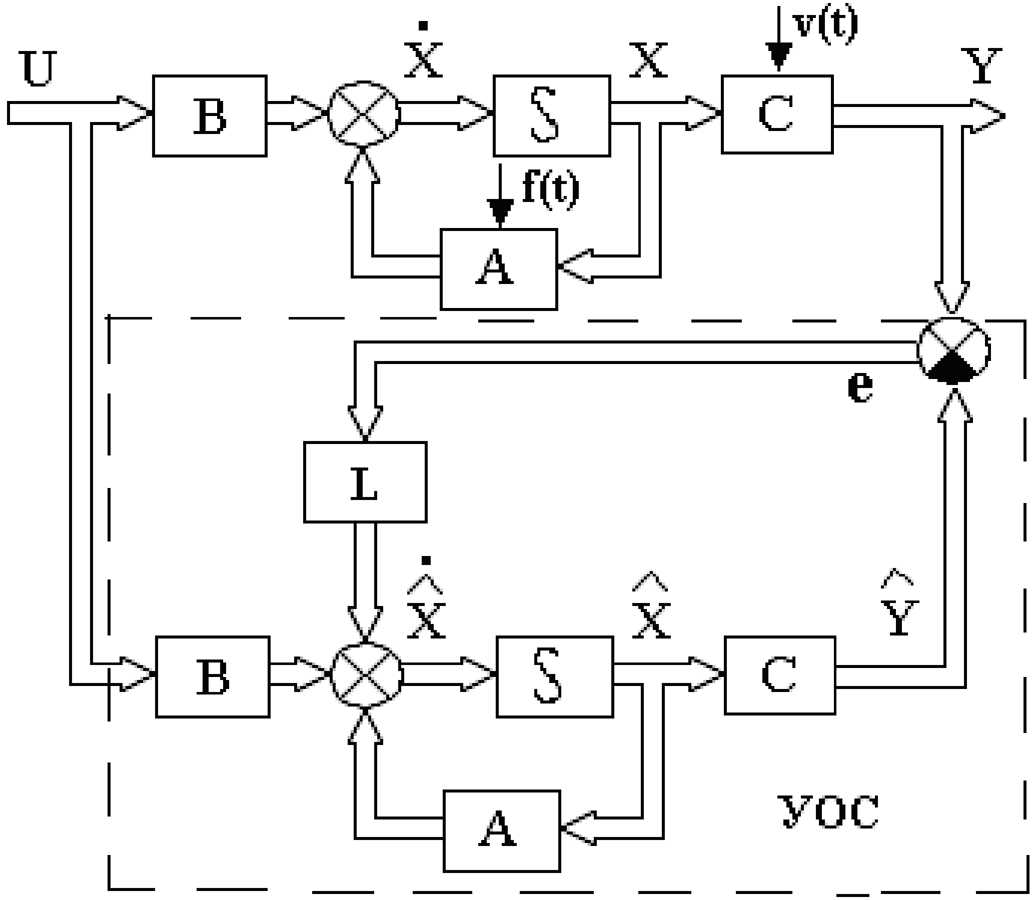
$$P = \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

можно получить матрицу обратной связи для исходного представления системы: $K_{oc} = K \cdot P$.

Структура системы с ОС по переменным состояния



Оценивание вектора состояния (наблюдатель Люенбергера)



Источниками ошибки e(t) являются начальное рассогласование, возмущение и помеха ("шум") измерений.

Уравнение объекта:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t);$$
$$y(t) = Cx(t) + v(t),$$

Модель объекта:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t));$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t),$$

Ошибка оценивания:

$$\dot{e}(t) = (A - LC) \cdot e(t) + f(t) - L \cdot v(t),$$

Выбором матрицы L можно обеспечить требуемое быстродействие и точность процесса оценивания.