

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники

Кафедра электронных приборов

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ,
ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ И АКУСТООПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ**

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Электроника и
микроэлектроника»
(специальность 210105 – Электронные приборы и устройства)

2012

Квасница Мирон Степанович
Орликов Леонид Николаевич

Статистические модели квантовых, оптоэлектронных и акустооптических приборов: Методические указания к практическим занятиям для студентов направления «Электроника и микроэлектроника» (специальность 210105 – Электронные приборы и устройства) / М.С. Квасница, Л.Н. Орликов. Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. – 34 с.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у студентов способности собирать, обрабатывать, анализировать и систематизировать научно-техническую информацию по тематике исследования, использовать достижения отечественной и зарубежной науки и техники; способности осуществлять сбор и анализ исходных данных для расчета и проектирования электронных приборов, схем и устройств различного функционального назначения; способность аргументировано выбирать и реализовывать на практике эффективную методику экспериментального исследования параметров и характеристик приборов, схем, устройств и устройств электроники и наноэлектроники различного функционального назначения;

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по специальности 210105.65 – Электронные приборы и устройства по дисциплине «Статистические модели квантовых, оптоэлектронных и акустооптических приборов».

© Квасница Мирон Степанович, 2012

© Орликов Леонид Николаевич, 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____ С.М. Шандаров
« ___ » _____ 2012 г.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ, ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ И АКУСТООПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Электроника и микроэлектроника»
(специальность 210105 – Электронные приборы и устройства)

Разработчик
доц. каф. ЭП
_____ М.С. Квасница
« ___ » _____ 2012 г

профессор каф.ЭП
_____ Л.Н. Орликов
« ___ » _____ 2012 г

Содержание

1	Математическая статистика как метод обработки экспериментальных данных	5
1.1	Основные понятия	5
1.2	Примеры решения задач	6
1.3	Задачи для проработки темы	6
2	Построение доверительных интервалов	8
2.1	Основные понятия	8
2.2	Примеры решения задач	10
2.3	Задачи для проработки темы	11
3	Анализ сигналов	13
3.1	Основные понятия	13
3.2	Примеры решения задач	15
3.3	Задачи для проработки темы	16
4	Статистическое моделирование квантовых переходов.....	18
4.1	Основные понятия	18
4.2	Примеры решения задач	21
5	Моделирование процессов в оптическом резонаторе	26
5.1	Основные понятия	26
5.2	Задачи для проработки темы	28
6	Статистическое моделирование добротности оптических систем и характеристик излучения	29
6.1	Основные понятия	29
6.2	Задачи для проработки темы	32
7	Рекомендуемая литература.....	33

1 Математическая статистика как метод обработки экспериментальных данных

1.1 Основные понятия

Математическая статистика – это метод обработки экспериментальных данных. Статистическим распределением выборки называется соответствие между вариантами x_i и их относительными частотами ω_i .

Относительной частотой ω_i вариантов x_i называется отношение частоты к объему выработки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n};$$

Распределение (полигон) задают таблицей или строят зависимость $x_i = f(n)$, или $x_i = f(\omega_i)$. При постоянстве параметров в определенном интервале строят гистограмму. На рисунке 1.1 представлены варианты представления данных.

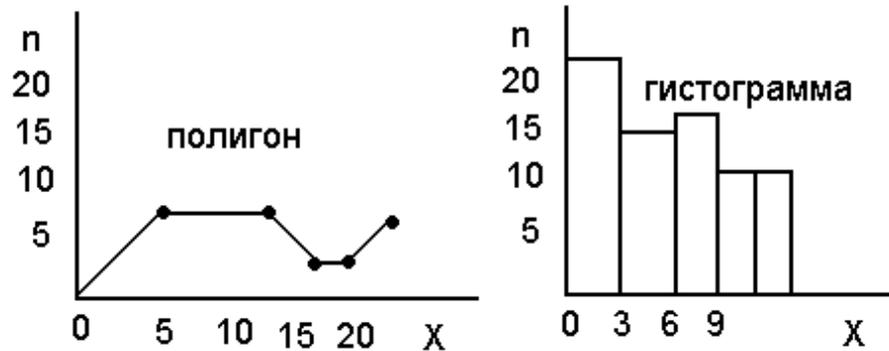


Рисунок 1.1 – Варианты представления данных

В последнее время развивается представление данных в виде теоретических $F(x)$ и эмпирических $F^*(x)$ функций.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Одно из свойств эмпирической функции в том, что если a – наименьшая, b – наибольшая варианты,

то

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x < a; \quad F^*(x) = 1 \text{ при } x > b$$

Различие в том, что эмпирическая определяет относительную частоту события $X < x$, а теоретическая – вероятность события.

1.2 Примеры решения задач

Задача 1. Задано распределение частот выборки объема $n=60$.

x_i	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Найти распределение относительных частот

Решение. Относительной частотой ω_i вариантов x_i называется отношение частоты к объему выработки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n},$$

Применяя формулу, вычисляем:

$\omega_1 = n_1/n = 15/60 = 1/4$ и т.д

Распределение относительных частот определится таблицей

x_i	4	10	16	20	24	30
ω_i	1/4	3/10	1/10	1/15	1/12	1/5

Задача 2. Имеются статистические данные распределения объема $n=75$.

Построить гистограмму частот

$x_i - x_{i+1}$	3-6	6-9	9-12	12-15
n_i	22	15	17	14

Решение. Построим на оси абсцисс заданные интервалы. (см. рис 1.1). Получаем искомую гистограмму.

1.3 Задачи для проработки темы

Задача 1.1. Ниже приведена выборка объема $n=79$. Постройте полигон и гистограмму относительных частот.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	4	13	14	24	15	3

Задача 1.2. Имеются результаты испытаний крепости нитей

Крепость нити (г)	120-140	140-160	160-180	180-200
Длина нитей (м)	1	4	10	14

Построить гистограмму и полигон распределения. Указание. Для полигона используйте середину интервала.

Задача 1.3. Ниже приведены результаты роста (в см) случайно отобранных 100 студентов. Постройте полигон и гистограмму относительных частот распределения.

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170
Число студентов	10	14	26	28

Задача 1.4. Найдите эмпирическую функцию по распределению

Варианты x_i	6	8	12	15
Частоты n_i	2	3	10	5

Подсказка. Объем выборки $n = \sum_{i=1}^4 n_i = 2+3+10+6=20$

Наименьшая варианта $x_1=6$, поэтому $F^*(x)=0$, если $x<6$.

Значения $X<12$, т.е. $x_1=6$, $x_2=8$, наблюдалось $2+3=5$ раз. Поэтому $F^*(x)=\frac{5}{20}=0,25$, если $8<x<12$

Значения $X<15$, т.е. $x_1=6$, $x_2=8$, $x_3=12$ наблюдалось $2+3+10=15$ раз. Поэтому $F^*(x)=\frac{15}{20}=0,75$, если $12<x<15$. Поскольку $x_4=15$ – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$, если $x>15$. Обобщаем решение.

$F^*(x)=$	0	0,1	0,25	1
при	$x<6$	$6<x<8$	$8<x<12$	$x>15$

Задача 1.5. Найдите закон распределения случайной величины

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Ответ:

$F^*(x)=$	0	0,08	0,28	1
при	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$x>4$

Задача 1.6 Найдите закон распределения случайной величины

x_i	0	1	2	3	4
n_i	2	3	10	22	26

Ответ:

$F^*(x)=$	0	0,15	0,95	1
при	$x<0$	$2<x<3$	$6<x<7$	$x>7$

2 Построение доверительных интервалов

2.1 Основные понятия

На языке экспериментатора длина доверительного интервала Δ соответствует ошибке в определении параметра. При случайном наблюдении за величиной X оценивают значения θ и используют статистическое правило: значение неизвестного параметра лежит в интервале (θ^H, θ^B) . В таких случаях выбирается вероятность верного отсчета $\beta=0,9; 0,95; 0,99$. Тогда у разных интервалов будет разная длина Δ . Отклонение от истинного значения составляет величину ε . Обычно $\Delta=2\varepsilon$.

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a – математическое ожидание, δ – среднее квадратичное отклонение при выборке объема n . Выборочное среднее:

$$\overline{m}_1 = \sum_i^n \frac{x_i}{n}$$

Среднее \overline{m}_1 подчиняется нормальному распределению:

$$P\overline{m}_1(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\delta} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$$

Поэтому:

$$P(\overline{m}_1 - a) < \varepsilon = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} P\overline{m}_1(x) dx = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\delta} \int e^{-\frac{n(x-a)^2}{2\delta^2}} dx \equiv I = \beta$$

В интеграле I выполним подстановку $\sqrt{n}(x-a)/\delta = y$, тогда

$$X = a + (\delta y / \sqrt{n});$$

$$dx = \delta dy / \sqrt{n};$$

$$I = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\delta} = \int_{-\sqrt{n\varepsilon}/\delta}^{+\sqrt{n\varepsilon}/\delta} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} dy = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\delta}\right);$$

где $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\delta}\right) = \frac{\beta}{2}$ табулированная функция Лапласа

Таблица 2.1 – Фрагмент табулированной функции Лапласа

t_β -аргумент Φ	0,46	0,47	0,48	0,49
Φ	1,96	1,78	2	2,58

Из таблицы 2.1 функции Лапласа по вероятности $\beta/2$ находится аргумент функции Φ ; пусть это t_β . Поэтому для определения ε имеем равенство:

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\delta} = t_{\beta} \quad \text{откуда } \varepsilon = t_{\beta} \frac{\delta}{\sqrt{n}};$$

Доверительный интервал для параметра a нормального распределения с известной дисперсией $\delta \cong s$ запишется:

$$\overline{m}_1 - t_{\beta} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{m}_1 + t_{\beta} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

Если задать точность оценки ε и доверительную вероятность β , то объем минимальной выборки, обеспечивающий заданную точность определится:

$$n = \frac{t_{\beta}^2 \cdot \delta^2}{\varepsilon^2}.$$

Если случайная величина X имеет нормальное распределение, но параметры a и δ неизвестны, то случайная величина имеет распределение Стьюдента $S(t, n)$ со среднеквадратичным отклонением s . (т.е $\delta \cong s$)

В таблице 2.2 приведены некоторые значения коэффициентов Стьюдента.

Таблица 2.2

n	$\beta=0,95$	$\beta=0,99$	$\beta=0,999$
5	2,78	4,6	8,61
7	2,45	3,71	5,96
9	2,31	3,35	5,04
10	2,26	3,26	4,78
20	2,09	2,82	3,88
100	1,98	2,26	3,39

Из данной таблицы 2.2 следует, что для повышения точности измерений необходимо брать большее число измерений. На практике для измерений с точностью 95% при доверительном интервале до 10% измеряемой величины необходимо проводить не менее 9 измерений. Если прибором пользуется один человек – это нормальное (Гаусовское) распределение ошибок измерения. Если прибором пользуется несколько человек – распределение ошибок носит случайный характер. С учетом распределения Стьюдента доверительный интервал имеет вид:

$$\overline{m}_1 - \frac{st_{\beta}}{\sqrt{n}} < a < \overline{m}_1 + \frac{st_{\beta}}{\sqrt{n}}$$

Напомним, что выборочное среднее определяется соотношением:

$$\bar{m}_1 = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n};$$

А «исправленное» среднее квадратичное отклонение определяется соотношением:

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{m}_1)^2}{n - 1}}$$

2.2 Примеры решения задач

Задача 1. Среднее квадратичное отклонение случайной нормальной величины X равно $\delta=10$ единицам. Для выборки объемом $n=100$ постройте доверительный интервал a для оценки математического ожидания X с надежностью 99%, если выборочное среднее равно $\bar{m}_1=6$ единицам.

Решение.

Требуется найти доверительный интервал

$$\bar{m}_1 - t_\beta \frac{\delta}{\sqrt{n}} < a < \bar{m}_1 + t_\beta \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

Все величины, кроме t_β известны. Найдем t_β из соотношения:

$\Phi(t)=0,99/2=0,495$. По таблице 2.1 находим $t_\beta=2,58$

Подставляя данные, получим:

$$3,42 < a < 8,58$$

Задача 2. X - нормально распределенная величина. Со среднеквадратичным отклонением $\delta=15$ с доверительной вероятностью $\beta=0,925$ производятся интервальные оценивания неизвестного математического ожидания X . Каков должен быть минимальный объем выборки, чтобы точность оценки ε была равна двум единицам?

Решение.

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \delta^2}{\varepsilon^2}$$

При $\beta=0,925 \rightarrow \Phi(t)=0,925/2=0,4625$

Из таблицы 2.1 находим $t_\beta=1,78$

Подставляя в формулу находим $n=80$

2.3 Задачи для проработки темы

Задача 2.1. Среднее квадратическое отклонение случайной нормальной величины X равно 20. Объемы двух выборок равны 16 и 25. Выборочные средние равны 3 и 4. Постройте доверительные интервалы для оценки математического ожидания с надежностью 95%.

Ответ: $-6,8 < a < 12,8$; $-4,84 < a < 10,84$

Задача 2.2. X - отклонение длины изготавливаемых одностипных деталей от проектной длины. Среднее квадратическое отклонение случайной величины X равно 4 мм. Из пробной партии 25 деталей определено для X выборочное среднее 18 мм и построен доверительный интервал для математического ожидания величины X с надежностью (доверительной вероятностью) 99%. Определите этот интервал.

Ответ: $15,94 < a < 20,6$

Задача 2.3. Цех производит электролампы одного типа. Среднеквадратичное отклонение продолжительности горения лампы равно 30 часов. Найти минимальное число ламп в выбранной наугад партии, при котором можно утверждать, что точность оценки средней продолжительности горения будет равна 10 часам.

Ответ: 46

Задача 2.4. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы с надежностью 9,95 утверждать, что выборочное среднее отклонений X точки разрыва снаряда от цели оценивает математическое ожидание величины X с точностью 3 м, если среднее квадратическое отклонение случайной величины X равно 6 м?

Ответ: 16

Задача 2.5. Отклонение X разрыва снаряда от цели – нормально распределенная величина, и ее дисперсия равна 9 м^2 . Произведено 100 выстрелов по цели. Какова должна быть надежность, что выборочное среднее отклонений X отличается от математического ожидания величины X не более чем на 0,6 м? Ответ округлить.

Ответ: 95,4%

Задача 2.6. Выполняя лабораторную работу, студент снял 10 замеров. Вычислил среднее значение $\bar{m} = 42,19$ и среднее квадратическое отклонение $s = 5$. Оцените с надежностью $\beta = 0,95$ истинное значение измеряемой величины.

Подсказка к решению. Из таблицы 2.2 по β и $n = 9$ находим $t_{\beta}(9) = 2,31$. В итоге получим: $\rightarrow 38,46 < a < 46,1$

Задача 2.7. Пусть 2,015; 2,020; 2,025; 2,020; 2,015 – 5 результатов независимых измерений толщины металлической пластинки. С надежностью 95% ($\beta=0,95$), оцените истинную толщину пластинки (\bar{m}_1).

Подсказка к решению. Из таблицы 1.2 находим $t_\beta = 2,77$ Ответ: 2,019

Задача 2.8. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=10$. Вариант выборки представлен таблицей 2.3

Таблица 2.3

x_i	-2	1	2	3	4	5
Частота n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Подсказка к решению. Использовать формулы для \bar{m}_1 и s , а также таблицу 2.2\

Получим $\bar{m}_1 = 2,4$; $\beta=0,95$; $n=10$; $t_\beta = 2,26$

Доверительный интервал определится

$$\bar{m}_1 - t_\beta s / \sqrt{n} < a < \bar{m}_1 + t_\beta s / \sqrt{n}$$

Задача 2.9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=10$. Вариант выборки представлен таблицей

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	3	2	1	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака при помощи доверительного интервала.

Ответ: $m_1 = 2,3$ $S = 1,49$; $1,23 < a < 3,37$

Задача 2.10. Оцените с надежностью 0,99 истинное значение измеряемой величины a по результатам исследования:

x_i	0,7	1,2	1,4	1,7	2,3	3,1
n_i	1	2	1	1	2	2

Ответ: $m_1 = 1,89$ $S = 0,86$; $0,93 < a < 2,85$

3 Анализ сигналов

3.1 Основные понятия

Анализ переменных во времени сигналов. Случайные величины и их погрешности. Оценка текущих значений случайных процессов (Винеровская фильтрация).

Случайные процессы и их погрешности

Функция $X(t)$ действительного переменного t называется случайной, если при каждом значении аргумента t она представляет случайную величину. Если параметром t является величина, то случайная функция $X(t)$ является случайным процессом. В отличие от детерминированного процесса, развитие которого априори определено однозначно, случайный процесс представляет такие изменения во времени физического явления или состояния технического объекта, которые задание определить точно не возможно.

Случайный процесс характеризуется множеством функций $x_i(t)$, каждая из которых называется реализацией случайного процесса $X(t)$.

Различают два класса случайных процессов: с дискретным временем и с непрерывным временем.

Значения случайного процесса $X(t)$ являются в общем случае, связанными случайными величинами. Однозначно задать случайный процесс означает задать многомерную функцию распределения указанных значений. Для случайных процессов с непрерывным временем данная функция представляет собой функционал.

Усреднение реализаций $X_i(t)$ процесса $X(t)$ или их функциональных преобразований может быть двух типов: усреднение по времени и усреднение по множеству реализаций. Усреднение по множеству реализаций, например, представляет собой выполнение следующей операции:

$$\overline{X(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) \quad (3.1)$$

где N - число наблюдаемых реализаций.

Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным (в узком смысле) тогда и только тогда, когда функция распределения любого порядка не зависит от начала отчета времени. Иными словами, когда любые вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвига переменной t .

Случайный процесс называется эргодическим, если любая вероятностная характеристика, полученная усреднением с вероятностью сколь угодно близкой к единице, равна среднему, за достаточно большой промежуток времени из единственной реализации случайного процесса. Например,

$$\overline{X(t)} = \lim \frac{1}{T} \int_0^T X_i(t) dt$$

равно $\overline{X_i(t)}$ определяемому выражением (3.1). Заметим, что в данном случае рассматриваются, стационарные эргодические процессы.

Корреляционная функция $B(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$ характеризует связь двух случайных величин: $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Если бы случайные величины были бы не связаны между собой (не коррелированы), то

$$X(t_1)X(t_2) = X(t_1) \cdot X(t_2)$$

Поэтому мерой связи данных случайных величин является разность между средним от их произведения и произведением средних. Эту разность называют корреляционной функцией $B(t_1, t_2)$:

$$B(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} - \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X(t_2)}$$

Для стационарных случайных процессов

$$B(t_1, t_2) = B(\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)} - a^2,$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $a = \overline{X(t)}$. Заметим, что

$$B(0) = \delta^2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = 0, \quad B(\tau) = B(-\tau),$$

где δ^2 - дисперсия данного случайного процесса.

Отношение

$$R(\tau) = B(\tau)/B(0)$$

называют нормированной корреляционной функцией (коэффициентом корреляции случайного процесса). Величину

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau$$

называют интервалом корреляции.

Практическое значение корреляционной функции трудно переоценить, так как данная функция определяет энергетический спектр случайного процесса:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

или в случае четности функции $B(\tau)$

$$S(\omega) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

Справедливо обратное:

$$B(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int S(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

Корреляционная функция $B(\omega)$ и энергетический спектр $S(\omega)$ как пара преобразований Фурье преобладает всеми присущими преобразованию свойствами. В частности, чем «шире» спектр $S(\omega)$, тем «уже» корреляционная функция $B(\tau)$ и наоборот.

Из вышеприведенных выражений следует, что средняя мощность случайного процесса с нулевым средним определяется выражением

$$B(0) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) d\omega$$

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Определить энергетический спектр случайного процесса с корреляционной функцией $B(\omega) = \delta^2 \cdot e^{-\alpha t}$ $\alpha > 0$

Решение:

$$S(\omega) = 2\delta^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = 4 \frac{\delta^2 a}{a^2 + \omega^2}$$

Преобразования случайных процессов могут быть линейные и нелинейные. Для линейных преобразований случайных процессов определение параметров выходного процесса $y(t)$ базируется на выражении

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

где $h(\tau)$ импульсная переходная функция линейного фильтра. Процесс $Y(\tau)$ в переходном режиме является нестационарным и лишь при $t \rightarrow \infty$ становится стационарным.

Задача 2. Определить среднее $\overline{y(t)}$ процесса $y(t)$, если $X(t)$ - стационарный процесс.

Решение:

$$\overline{y(t)} = \overline{\int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau)dt} = a \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

$$\overline{x(t)} = a$$

Если линейный фильтр устойчивый, то есть, интервал

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau < M$$

сходится, то в установившемся режиме

$$\overline{y(t)} = a \int h(\tau)d\tau$$

постоянно (во времени не изменяется)

3.3 Задачи для проработки темы

Задача 3.1. Корреляционная функция случайного процесса имеет определенный вид. Определить энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса.

Задача 3.2. Энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ имеет определенный вид: Определить дисперсию и корреляционную функцию данного процесса.

Задача 3.3. Корреляционная функция случайного процесса $B(\tau) = \delta^2 e^{-\alpha\tau} \cos\omega\tau$, где ω и τ - параметры. Определить интервал корреляционного процесса и его энергетический спектр.

Задача 3.4. Доказать, что корреляционная функция суммы двух и более независимых случайных процессов равна сумме корреляционных функций каждого из них.

Задача 3.5. Определить дисперсию наблюдаемого сигнала

$$y(T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt,$$

где $x(t)$ - случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

Задача 3.6. Определить дисперсию наблюдаемого процесса

$$y(t) = dX(t)/dt,$$

где $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией $B(\tau) = \delta^2 e^{-\alpha\tau}$

Задача 3.7. На вход интегрирующей RC – цепочки действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0 . Определить дисперсию выходного сигнала в установившемся режиме.

Задача 3.8. На вход колебательного контура с добротностью Q и резонансной частотой ω_0 действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0 . Определить энергетический спектр выходного сигнала.

Задача 3.9. На вход интегрирующей RC - цепочки действует пуассоновская δ - импульсная последовательности с интенсивностью λ . Определить относительные флуктуации выходного сигнала в установившемся режиме.

Задача 3.10. На вход усилителя с АРУ поступает детерминированный сигнал $X(t) = k(t)$. Определить установившееся значение выходного сигнала.

Задача 3.11. Определить условие устойчивости по среднему значению с АРУ при поступлении на его вход пуассоновской последовательности, причем амплитуда импульсов - независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(A) = p_0 \delta(A + A_0) + (1 - P_0) \delta(A - A_0)$$

Задача 3.12. Определить среднеквадратическую погрешность восстановления случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = \delta^2 e^{-\alpha\tau}$ по пуассоновской последовательности отсчетов с интенсивностью λ .

Задача 3.13. Определить корреляционную функцию и энергетический спектр случайного процесса на выходе интегрирующей RC - цепи при поступлении на ее входе случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = \delta^2 e^{-\alpha\tau}$

Задача 3.14. Определить дисперсию случайного процесса на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход пуассоновской δ - импульсной последовательности с интенсивностью λ .

Задача 3.15. Случайный процесс наблюдается в два момента времени: t и $t-T$.

Построить линейную оценку значения случайного процесса в момент времени $t - (T/2)$ по минимуму среднеквадратической погрешности. Определить данную погрешность (задача интерполяции).

Задача 3.16. Построить линейную оценку по минимуму среднеквадратической погрешности производной $y(t)=dx(t)/dt$ случайного процесса $x(t)$ по двум значениям: $x(t)$ и $x(t-T)$. Определить погрешность данной оценки.

Задача 3.17. Наблюдаются два значения: $x(t)$ и $x(t-T)$ аддитивной смеси $x(t) = s(t) + n(t)$ полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ с нулевыми средними и корреляционными функциями $B_s(\tau)$ и $B_n(\tau)$ соответственно.

Построить линейную оценку полезного сигнала. Определить погрешность оценивания (задача фильтрации).

Задача 3.18. Какой фильтр называют физически нереализуемым? Как можно практически использовать такие фильтры?

Задача 3.19. Из определения среднеквадратической погрешности оценивания получить интегральное уравнение Винера-Хопфа.

4 Статистическое моделирование квантовых переходов

4.1 Основные понятия

В квантовых приборах усиление образуется за счет индуцированного (вынужденного) излучения при квантовом переходе частиц с верхнего уровня на нижний. По статистике при этом существует три вида переходов между уровнями: спонтанные, индуцированные и тепловые. Число переходов пропорционально населенности этого уровня N_i и интервалу времени dt :

$$dn = A_{ik} \cdot N_i dt ,$$

где A_{ik} – вероятность спонтанного перехода в 1 с.

Время, через которое населенность N_i уменьшается в $e=2,718$ раз по сравнению с начальной величиной, определяется по следующей формуле:

$$\tau_x = 1/A_{ik}$$

т.е. τ характеризует время жизни частицы в возбужденном состоянии и называется временем жизни уровня энергии по спонтанным переходам.

Вероятности вынужденных переходов определяются соотношениями:

$$W_{21} = B_{21}\rho_v; \quad W_{12} = B_{12}\rho_v; \quad W_{21} = W_{12},$$

где B_{21} и B_{12} – коэффициенты Эйнштейна для вынужденных вероятностных переходов с излучением и поглощением энергии; ρ_v – единичная объемная плотность энергии внешнего поля, равная $1 \text{ Дж/см}^2 \cdot \text{с}$)

$$\rho_v = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2}.$$

Между вынужденными и спонтанными переходами существует связь

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu_{21}^3}{c^3} B.$$

В вероятностном перераспределении частиц по энергетическим уровням участвуют безызлучательные переходы, являющиеся также вероятным процессом. Причем вероятность переходов сверху вниз больше вероятности снизу вверх:

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12} \left(1 + \frac{h\nu_{21}}{kT}\right)$$

Спонтанные переходы определяют ширину естественной спектральной линии, так как

$$\Delta E \geq \frac{h}{\tau_2}$$

Форма контура спектральной линии определяется из следующего выражения:

$$g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu}\right]^2}}$$

где ν_0 – центральная частота;

$\Delta\nu$ – ширина контура спектральной линии;

ν – текущая частота.

При точных расчетах параметров квантовых систем используют спектральные коэффициенты Эйнштейна. С введением коэффициентов a_{ki}, b_{ki}, b_{ik} следует уточнить также понятие населенности. Под населенностью N_i любого уровня следует понимать наиболее вероятное число частиц в единице объема, энергия которых попадает в пределы размытости этого уровня по энергии. Таким образом, числа спонтанных и вынужденных переходов в единичном частотном интервале вблизи

частоты ν в единицу времени можно записать с использованием дифференциальных коэффициентов Эйнштейна

$$n_{ki} = a_{ki}(\nu)N_k, n_{ki} = b_{ki}(\nu)\rho_\nu N_k \text{ и } n_{ki} = b_{ik}(\nu)\rho_\nu N_i.$$

Спектральные коэффициенты должны учитываться при получении закона изменения мощности сигнала в процессе прохождения через вещество

$$P(z_1 \nu_0) = P(0_1 \nu_0) \exp[-\chi(\nu_0)z]$$

где $P(0, \nu_0)$ – мощность на входе в активное вещество;

$\chi(\nu_0)$ – коэффициент, соответствующий центральной частоте, определяемый по формуле:

$$\chi(\nu_0) = \frac{h\nu_0}{\Delta\nu \cdot v_{гр}} (B_{12} \cdot N_1 - B_{21} \cdot N_2),$$

где $v_{гр}$ – групповая скорость волны.

Если $N_1 > N_2$, то $\chi(\nu_0)$ является коэффициентом ослабления, в обратном случае $\chi(\nu_0)$ – коэффициент усиления. При получении инвертированного состояния $n_2 > n_1$ вводится и понятие «отрицательной» температуры, определяемое соотношением:

$$T = -\frac{E_2 - E_1}{kLn \frac{n_2}{n_1}}$$

Поглощаемая мощность в активном веществе пропорциональна напряженности поля ($w\tau_1 = \frac{\epsilon E^2 \cdot \tau_1}{2}$).

В случае слабых полей, когда $w\tau_1 \ll 1$ (τ_1 – время продольной релаксации), поглощаемая мощность равна

$$P_{погл} = h\nu_{21} (N_1^e - N_2^e) B_{12} \rho_\nu g(\nu).$$

Здесь N_1^e и N_2^e – населенности уровней в состоянии термодинамического равновесия. В случае сильных полей, когда $w\tau_1 \gg 1$,

$$P_{погл} = h\nu (N_1^e - N_2^e) \frac{1}{2\tau_1} \quad (1.14)$$

4.2 Примеры решения задач

Задача 1. Населенность верхнего (n_j) и нижнего уровней (n_i) равна соответственно $1 \cdot 10^{10}$ и $0,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Кратность вырождения верхнего уровня 2, нижний уровень не вырожден. Возможно ли в рассматриваемой системе усиление? Поглощение?

Решение. Отношение чисел частиц на уровнях i и j с учетом вырождения:

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{\bar{g}_i}{\bar{g}_j} \exp\left(-\frac{E_i - E_j}{kT}\right)$$

Для температурной зависимости можно записать:

$$T = \frac{E_i - E_j}{k \ln\left(\frac{n_j / \tilde{g}_j}{n_i / \tilde{g}_i}\right)} \quad (4.1)$$

Условие усиления $n_i \tilde{g}_j > n_j \tilde{g}_i$ не выполняется, так как $\frac{1 \cdot 10^{10}}{2} = 0,5 \cdot 10^{10}$,

Ответ: В системе нет ни усиления, ни поглощения.

Задача 2. Определить оптимальный коэффициент отражения зеркал $r_{\text{отр}}$ (зеркала одинаковые) резонатора лазера, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Коэффициент ненасыщенного усиления на проход G_0 , коэффициент потерь на проход α . Длина резонатора L . Дифракционными потерями можно пренебречь. Для численных оценок считать: $L = 10 \text{ см}$, $\chi_{\text{анор}}^0 = 0,01 \text{ см}^{-1}$, $\alpha_a = 0,063 \text{ см}^{-1}$, $\mathcal{G}_{\text{гр}} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Активная среда заполняет весь резонатор.

Решение. Условие стационарных колебаний:

$$\chi_a = \alpha_a + \frac{1}{L} \ln \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}},$$

где χ_a – показатель усиления среды, α_a – потери в активной среде, $\frac{1}{L} \ln \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}}$ – потери на зеркале (α_z), тогда:

$$\chi_{a \text{ опт}} = \frac{1}{L} \ln \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}} + \alpha_a = \chi_{a \text{ пор}}^0 \quad (4.2)$$

Как следует из (4.2), можно построить зависимость $P_{\text{изл}} = f(R_1, R_2)$

$$P_{\text{изл}} = \left(\frac{\mathcal{G}_{\text{гр}} L S}{\delta_{12}} \right) (\chi_a^0 - \alpha) (\alpha_z / \alpha). \quad (4.3)$$

В этом случае не известны размеры активной среды (L , S - соответственно длина активного элемента и поперечное сечение активной среды), поэтому нужно воспользоваться формулой для удельной мощности излучения $P_{\text{изл.уд}} = f(R_1, R_2)$

$$P_{\text{изл.уд.макс}} = \frac{\vartheta_{\text{гр}} \chi_a^0}{\delta_{12}} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_3}{\chi_a^0}} \right)^2, \quad (4.4)$$

где $\vartheta_{\text{гр}}$ - групповая скорость, δ_{12} - параметр нелинейности ($\delta_{12} \approx 1$),
 χ_a^0 - начальный показатель усиления ($\chi_a^0 = 0,01 \text{ см}^{-1}$).

Ответ: Для получения максимального излучения необходимо использовать зеркала с коэффициентом отражения равным 0,8 ($r=0,8$).

Задача 3. Оценить, насколько частота типа колебаний TEM_{01} отличается от частоты основного типа колебаний TEM_{00} для пустого резонатора. Резонатор образован плоским и сферическим (радиус кривизны $R = 100 \text{ см}$) зеркалами. Длина резонатора $L = 50 \text{ см}$.

Решение. Собственные частоты пустого резонатора

$$\nu_{mnq} = \nu_0 \left[q + \frac{m+n+1}{\pi} \right] \arccos \sqrt{g_1 g_2},$$

где $\nu_0 = c/2L$; $g_{1,2} = 1 - L/R_{1,2}$; q, m, n - целые числа;

R_1, R_2 - радиусы кривизны зеркал; L - длина резонатора.

Следовательно, $\nu_{mn} - \nu_{00} = \nu_0 (m+n) \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2}$.

Одно из зеркал резонатора плоское, т.е. его $R = \infty$ и $g = 1 - \frac{L}{R} = 1$,

для другого зеркала $g = 0,5$. Для типа колебаний $m = 0, n = 1$ имеем:

$$\nu_{01} - \nu_{00} = \frac{c}{2L} \cdot \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 50 \cdot 3,14} \arccos \sqrt{0,5} = 74,5 \text{ МГц.}$$

Ответ: отличие на 74,5 МГц

Задача 4. Определить и сравнить между собой дифракционные потери типов колебаний TEM_{00} (основной тип) и TEM_{01} для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы. Длина резонатора $L = 100 \text{ см}$, длина волны излучения $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$, апертурный размер зеркал $a = 0,5 \text{ см}$. Как изменятся потери, если длина резонатора будет равна $L = 10 \text{ см}$?

Решение. Оценим число Френеля:

$$N = \frac{a^2}{\lambda \cdot L} = \frac{0,5^2}{0,63 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 39,8.$$

Для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы при $N \geq 10$ дифракционные потери за один проход определяются формулой:

$$\alpha_{nm} = 5,23 \cdot 10^{-2} \left[\lambda_n^{(m+1)} \right]^2 N^{-3/2}, \quad (4.5)$$

где $\lambda_0^1 \approx 2,40$, $\lambda_1^1 \approx 3,83$;

$\lambda_n^{(m+1)}$ – $(m+1)$ -й корень функции Бесселя порядка n .

Для условия задачи $N^{3/2} \approx 0,0004$, $\lambda_0^1 \approx 2,40$, $\lambda_1^1 \approx 3,83$. Таким образом, $\alpha_{00} = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_{01} = 3,1 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: Потери на проход для типа колебаний TEM_{01} примерно в 2,5 раза выше, чем для основного типа колебаний. При $L=10$ см прохождение основного типа колебаний увеличится.

Задача 5. Резонатор оптического квантового генератора образован зеркалами с коэффициентами отражения $R_1=R_2=0,5$, расположенными на длине L друг от друга. Активная среда занимает все пространство между зеркалами.

Как нужно изменить коэффициент квантового усиления активной среды для выполнения условия самовозбуждения генератора, если в резонатор вносится поглотитель, поглощающий 50% падающего на него излучения? (В расчёте не учитывать дифракционные потери на зеркалах и потери излучения в материале активной среды и зеркал.

Решение. Пусть от зеркала 1 к зеркалу 2 начинает распространяться волна с интенсивностью I_0 . Если поглотитель расположен на расстоянии L_1 от первого зеркала, то до поглотителя дойдет волна интенсивностью $I_0 e^{\alpha L_1}$, где α - коэффициент квантового усиления активной среды.

Пусть α_1 определяет долю поглощаемой поглотителем интенсивности и тогда после поглотителя интенсивность волны равна:

$$I_0 (1 - \alpha_1) e^{\alpha L_1}.$$

Далее волна опять усиливается в среде и на зеркало 2 приходит с интенсивностью

$$I_0 (1 - \alpha_1) e^{\alpha L_1} e^{\alpha L_2} = I_0 (1 - \alpha_1) e^{\alpha L}.$$

После отражения от зеркала 2 в направлении зеркала 1 будет распространяться волна с интенсивностью

$$RI_0 (1 - \alpha_1) e^{\alpha L}.$$

На обратном пути к зеркалу 1 она испытывает усиление в активной среде и поглощение в поглотителе, после отражения от зеркала 1 интенсивность волны составит

$$R^2 I_0 (1 - \alpha_1)^2 e^{2\alpha L}.$$

Условие существования в резонаторе самоподдерживающейся волны получается, если приравнять интенсивность исходной волны и волны, совершившей обход резонатора.

$$I_0 = R^2 I_0 (1 - \alpha_1)^2 e^{2\alpha L},$$

$$R^2 (1 - \alpha_1)^2 e^{2\alpha L} = 1,$$

откуда условие для порогового коэффициента усиления имеет вид:

$$\alpha L = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{R^2 (1 - \alpha_1)^2} = \ln \frac{1}{R(1 - \alpha_1)}.$$

При отсутствии поглотителя $\alpha_1 = 0$

$$\alpha_0 L = \ln \frac{1}{R}.$$

Очевидно, что отношение пороговых коэффициентов усиления для среды без поглотителя и с поглотителем будет:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\ln \frac{1}{R(1 - \alpha_1)}}{\ln \frac{1}{R}}.$$

При $R=0,5$ и при $\alpha_1=50\%$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 2.$$

Таким образом, пороговый коэффициент усиления среды с поглотителем вдвое выше.

Ответ: пороговый коэффициент усиления среды с поглотителем вдвое выше.

Задача 6. Определить и сравнить между собой дифракционные потери типов колебаний TEM_{00} (основной тип) и TEM_{01} для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы. Длина резонатора $L = 100$ см, длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм, апертурный размер зеркал $a = 0,5$ см.

Решение. Оценим число Френеля:

$$N = \frac{a^2}{\lambda \cdot L} = \frac{0,5^2}{0,63 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 39,8$$

Для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы при $N \geq 10$ дифракционные потери за один проход определяются формулой:

$$\alpha_{nm} = 5,23 \cdot 10^{-2} [\lambda_n^{(m+1)}]^2 N^{-3/2},$$

где $\lambda_n^{(m+1)}$ – корень функции Бесселя порядка n .

Для условия задачи $N^{-3/2} \approx 0,0004$, $\lambda_0^1 \approx 2,40$, $\lambda_1^1 \approx 3,83$. Таким образом, $\alpha_{00} = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_{01} = 3,1 \cdot 10^{-3}$. Потери на проход для типа колебаний TEM_{01} примерно в 2,5 раза выше, чем для основного типа колебаний.

Задача 7. Рассчитать добротность Q_R и время жизни фотона τ_p в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами $L=1$ м. В резонаторе возбуждается основной тип колебаний TEM_{00} , образуемый двумя бегущими навстречу друг другу плоскими волнами ($\lambda=0,6$ мкм). Среда, заполняющая резонатор, слабо поглощаемая (коэффициент поглощения $\alpha = 0,001$ см⁻¹). Эти потери могут быть связаны с процессами рассеивания в среде и т.д. Коэффициент отражения каждого из зеркал $r_{отр}=95\%$. Диаметр зеркал много больше диаметра светового пучка, так что дифракционными потерями можно пренебречь.

Решение. Добротность резонатора, определяемая потерями в активном элементе и потерями на зеркалах, записывается:

$$Q_R = \frac{2\pi\nu L}{c[\alpha L + (1 - r_{отр})]}$$

время жизни фотона $\tau_p = Q_R / \nu$, $\nu = c/\lambda = 5 \cdot 10^{14}$.

Подставляя заданные значения параметров из условия задачи, находим:

$$Q_R \approx 7 \cdot 10^7, \quad \tau_p \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

Задача 8. Определить добротность резонатора для инфракрасной области диапазона при длине волны $\lambda = 1$ мкм. Резонатор образован отражающими пластинами на расстоянии $L=10$ см с коэффициентом отражения пластин $r=95\%$.

Решение.

Для решения будем использовать формулу:

$$Q = \frac{2\pi L n_c \nu}{c(1 - r)},$$

где $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$, n_c - показатель преломления среды, заполняющей резонатор (в нашем случае $n_c = 1$).

Тогда, подставляя численные значения, получим:

$$Q = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-6}(1 - 0.95)} \approx 1,2 \cdot 10^7,$$

где $\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$.

Задача 9. Рассчитать доплеровскую ширину линии для гелий-неонового лазера с плоско-параллельным резонатором Фабри-Перо длиной $L=1$ м и потерями 2% на переходе $1,15$ мкм неона.

Решение. Произведем оценку $\Delta\nu_D$ с учетом условий задачи:

$$\Delta\nu_D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2\kappa T^0 \ln 2}{Mc^2}},$$

где $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$ - постоянная Больцмана; $T = 300^0 К$, $M = 2 \cdot 10^{-24} г$,

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}, \nu_0 = 1,15 \cdot 10^{-6} м.$$

Подставляя числовые значения, получим: $\Delta\nu_D = 800 МГц$.

5 Моделирование процессов в оптическом резонаторе

5.1 Основные понятия

Положительная обратная связь в лазерах осуществляется с помощью оптического резонатора - системы обращенных друг к другу отражающих поверхностей. R_1 и R_2 - коэффициенты отражения зеркал, расположенных на расстоянии L друг от друга. Условием образования стоячих волн является

$$L = q \cdot \lambda_q / 2 \quad (q=1,2,3),$$

где q - целое число (продольный тип колебаний),

λ_q - длина волны при выбранном значении L .

Каждому q соответствует своя частота колебаний ν_q , определяемая из соотношения:

$$\nu_q = c/\lambda_q = q c/2L.$$

Интервал между частотами соседних продольных волн составляет

$$\Delta\nu_q = c/2L.$$

В резонаторе с активной средой происходит не только усиление мощности, но и потери ее. Можно перечислить разные виды потерь: потери на поглощение в зеркалах, потери рассеяния на неоднородностях, потери за счет непараллельности зеркал, дифракционные потери α_d . Дифракционные потери различны для квадратных, круглых зеркал, для плоских и сферических, и зависят они от числа Френеля

$$N = D^2 / (L \lambda),$$

где D - размер зеркала.

Таким образом, с учетом всех перечисленных потерь, суммарные потери за один цикл приведут к относительному ослаблению мощности в β раз.

$$\beta = R_1 \cdot R_2 \cdot (1 - \alpha_d) \exp(\alpha_{рас} \cdot 2 \cdot L).$$

Основным параметром резонаторов является добротность, которую можно задать следующей формулой, учитывающей дифракционные потери:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\lambda \cdot \left(1 - r + \frac{\lambda \cdot L}{D^2}\right)},$$

где $r = R_1 R_2$.

Полная добротность с учетом непараллельности зеркал:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\lambda(1-r)}{2 \cdot \pi \cdot L} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot L_0} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{\gamma}{2 \cdot L \cdot D}},$$

где γ - угол перекоса зеркал.

В формуле первое слагаемое определяет добротность Q_R за счет отражения от зеркал, она также определяет добротность спектральной линии:

$$Q_R = \nu / \Delta\nu = 2\pi\nu\tau.$$

Здесь $\tau = L \cdot n / c(1-r)$ - характеристическое время затухания в среде с показателем преломления n ; c - скорость света.

Второе слагаемое учитывает потери на внутренних дефектах кристалла. L_0 - эффективная длина пути. Величину L_0 непосредственно вычислить затруднительно, но можно считать, что $\lambda \ll L_0$. Третье слагаемое образуется за счет непараллельности зеркал.

Учет потерь через боковые стенки резонатора можно провести по формуле:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\lambda^2}{4 \cdot \pi \cdot D^2}$$

5.2 Задачи для проработки темы

Задача 5.1. Спектральная ширина линии излучения He-Ne лазера составляет 600 МГц, центральная частота излучательного перехода $\nu_0 = 8,8 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить, какое число продольных типов колебаний может возбудиться в лазере, если длина резонатора $L = 80$ см? Определить, при какой длине будет возбуждаться один продольный тип колебаний?

Задача 5.2. Чему равна ширина дифракционного максимума на уровне половинной интенсивности для основной моды резонатора с плоскими зеркалами, диаметром 10 мм? Ответ: $2\theta = 25 \cdot 10^{-21}$.

Задача 5.3. Два сферических зеркала с радиусом кривизны R_1 и R_2 расположены на расстоянии l одно от другого. Найти минимальный размер пятна светового пучка в резонаторе, его положения и размеры пятен на зеркалах, если длина волны излучения λ . Апертурный размер зеркал достаточно велик, так что дифракционными потерями можно пренебречь. Для числовых оценок взять $R_1 = 84$ см, $R_2 = 59$ см, $l = 134$ см, $\lambda = 1,06$ мкм.

Задача 5.4 Вывести выражение, определяющее минимальный коэффициент отражения выходного зеркала, ниже которого генерация возбуждаться не будет.

Задача 5.5 Определить оптимальный коэффициент отражения зеркал $r_{\text{отр}}$ (зеркала одинаковые) резонатора лазера, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Коэффициент ненасыщенного усиления на проход G_0 , коэффициент потерь на проход α . Длина резонатора L . Дифракционными потерями можно пренебречь. Для численных оценок считать: $L = 40$ см, $N_{2\text{пор}} = \frac{1}{2}N = 0,01 \text{ см}^{-1}$, $\alpha_a = 0,063 \text{ см}^{-1}$, $\nu_{\text{гр}} = 2,8 \cdot 10^8$ м/с. Активная среда заполняет весь резонатор.

Задача 5.6 Определить и сравнить между собой дифракционные потери типов колебаний TEM_{00} (основной тип) и TEM_{01} для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы. Длина резонатора $L = 60$ см, длина волны излучения $\lambda = 1,15$ мкм, апертурный размер зеркал $a = 0,5$ см.

Задача 5.7 Открытый оптический резонатор образован плоскими зеркалами квадратной формы с размером D (10 мм). Расстояние между зеркалами L (1 м), а их непараллельность составляет угол δ (1 мин).

Резонатор заполнен диэлектриком с показателем преломления n (2,3), коэффициенты отражения зеркал $R_1=1$, $R_2=R$ (0,5).

Определить:

- 1) резонансные частоты продольных типов колебаний (мод);
- 2) расстояние между соседними продольными модами;
- 3) добротность резонатора с учётом связи с нагрузкой непараллельности зеркал, дифракционных потерь на длине волны λ (1,06 мкм). Нарисовать структуру поля в плоскости выходного зеркала для T_{10} поперечного типа колебаний.

Задача 5.8 Оценить угол расхождения пучка основного типа колебаний в конфокальном резонаторе. Для оценок принять $\lambda=1$ мкм, расстояние между зеркалами $L = 2$ м. Апертурный размер зеркал велик, а дифракционные эффекты пренебрежимо малы.

Задача 5.9 Определить и сравнить между собой дифракционные потери типов колебаний TEM_{00} (основной тип) и TEM_{01} для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы. Длина резонатора $L = 100$ см, длина волны излучения $\lambda = 0,63$ мкм, апертурный размер зеркал $a = 0,5$ см.

Задача 5.10 Имеется резонатор объемом $V=1$ см³. Найдите, сколько мод резонатора находится в полосе $\Delta\lambda=0,01$ мкм с центральной длиной волны $\lambda=600$ нм.

6 Статистическое моделирование добротности оптических систем и характеристик излучения

6.1 Основные понятия

Основным параметром резонаторов является добротность, которую можно задать следующей формулой, учитывающей дифракционные потери:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\lambda \cdot \left(1 - r + \frac{\lambda \cdot L}{D^2} \right)},$$

где $r=R_1 R_2$.

Полная добротность с учетом непараллельности зеркал:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\lambda(1-r)}{2 \cdot \pi \cdot L} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot L_0} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{\gamma}{2 \cdot L \cdot D}},$$

где γ - угол перекоса зеркал.

Первое слагаемое определяет добротность Q_R за счет отражения от зеркал, она также определяет добротность спектральной линии:

$$Q_R = \nu / \Delta\nu = 2\pi\nu\tau.$$

Здесь $\tau = L \cdot n / c(1-r)$ - характеристическое время затухания в среде с показателем преломления n ; c - скорость света.

Второе слагаемое учитывает потери на внутренних дефектах кристалла. L_0 - эффективная длина пути. Величину L_0 непосредственно вычислить затруднительно, но можно считать, что $\lambda \ll L_0$. Третье слагаемое образуется за счет непараллельности зеркал.

Учет потерь через боковые стенки резонатора можно провести по формуле:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\lambda^2}{4 \cdot \pi \cdot D^2}$$

Условием самовозбуждения является выполнение в генераторе баланса фаз:

$$\varphi = (2\pi / \lambda g) 2L = 2\pi g$$

и баланса мощностей, определяющего мощность стационарных колебаний. Самовозбуждение возможно при выполнении условия

$$R_1 R_2 \exp(\chi_a - \alpha_a) 2L > 1$$

где χ_a - коэффициент усиления активного вещества, α_a - потери в активном веществе.

Условие стационарного режима генерации запишем в виде:

$$\chi_a = \alpha = \alpha_a + \alpha_s$$

где α - коэффициент полных потерь.

С учетом всех потерь и усиления мощность излучения будет определяться формулой:

$$P_{изл} = \left(\frac{\mathcal{G}_{гр} LS}{\delta_{12}} \right) (\chi_a^0 - \alpha) (\alpha_s / \alpha),$$

где $\mathcal{G}_{гр}$ - групповая скорость, S - площадь поперечного сечения активного элемента, δ_{12} - параметр нелинейности.

Для трехуровневой среды в стационарном режиме требуется минимальная (пороговая) мощность накачки, определяющая начало генерации. Ее можно определить из следующего выражения:

$$P_{\text{пор}} = \frac{1}{2} h\nu_{31} \cdot l \cdot S \left[\frac{N_0}{\tau \cdot t} \right],$$

где ν_{31} – частота излучения накачки, Гц; l – длина активного элемента, м;
 S – площадь поперечного сечения активного элемента, м²;
 N_0 – общее число активных частиц в единице объема вещества 1/см³;
 τ – квантовый выход люминесценции линии на частоте ω_{21} ;
 t – время жизни на метастабильном уровне.

Характеристики излучения ОКГ

Длина когерентности может быть определена из выражения

$$\delta \ll \lambda_0^2 / \Delta\lambda,$$

где $\delta < L = ct$

$\Delta\lambda$ – ширина спектральной полосы.

Пространственная когерентность может определяться с помощью интерферометра Юнга, причем модуль $|\gamma_{12}|$ равен:

$$|\gamma_{12}| = \frac{J_1 + J_2}{2\sqrt{J_1 + J_2}} \gamma_{\text{эксп}} = \frac{J_{\text{max}} + J_{\text{min}}}{I_{\text{max}}}$$

где J_1 и J_2 – интенсивность световых полей выделенных интерферирующих пучков; $\gamma_{\text{эксп}}$ – измеряемый в интерферометре контраст интерференционных полос. В случае генерации одной моды на частоте ν_0 , ширина лазерного излучения может быть оценена по формуле:

$$\delta\nu_{\Gamma} \cong \frac{8\pi h\nu_0}{P} \Delta\nu_{\text{p}}^2$$

где P – мощность излучения; ν_0 – резонансная частота ($\nu_0 = Q \cdot \Delta\nu_{\text{p}}$).

Степень монохроматичности можно определить по огибающей спектра, состоящей из нескольких мод:

$$\mu = \delta\nu_{\text{oc}} / \nu_0 \approx 10^{-7}.$$

Временная когерентность и монохроматичность связаны между собой. Чем выше степень временной когерентности, т.е. чем больше время когерентности, тем меньше частотный спектр $\Delta\nu$, занимаемый излучением, и лучше монохроматичность.

Высокую направленность лазерного излучения, возможность фокусировки излучения в пятно чрезвычайно малых размеров обуславливает пространственная когерентность пучка лазера. Направленность излучения характеризуется телесным углом, в котором распространяется большая часть излучения. Как известно, угловое расстояние первого дифракционного минимума от центра дифракционной

картины в случае дифракции плоской волны на круглом отверстии диаметром D равно:

$$D_A = 122\lambda/D$$

6.2 Задачи для проработки темы

Задача 6.1 Рассчитать добротность Q_p и время жизни фотона τ_p в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами $L=1$ м. В резонаторе возбуждается один основной тип колебаний TEM_{00q} , образуемый двумя бегущими навстречу друг другу плоскими волнами ($\lambda=0,6$ мкм). Среда, заполняющая резонатор, слабо поглощающая (коэффициент поглощения $\beta=0,001$ 1/см). Эти потери могут быть связаны с процессами рассеяния в среде, нерезонансного поглощения и т.д. Коэффициент отражения $R_1, R_2=95\%$. Диаметр зеркал намного больше диаметра светового пучка, так что дифракционными потерями можно пренебречь.

Задача 6.2 Определить и сравнить между собой дифракционные потери типов колебаний T_{00} и T_{01} для резонатора с плоскими зеркалами круглой формы, если $L=100$ см, $\lambda=0,63$ мкм, апертурный размер зеркал $a=0,5$ см.

Задача 6.3 Определить добротность резонатора, если $\lambda=1$ мкм, $D=1$ см, $L=100$ см, а коэффициент Френеля $0,5 \cdot 10^{-2}$.

Задача 6.4 Определить время τ жизни волны в резонаторе длиной $L=1$ м с коэффициентом отражения зеркал $R=0,99$ при освещении его зеленым светом ($\lambda_0=0,5$ мкм). Оценить добротность резонатора.

Задача 6.5 Оценить выходную мощность трехуровневого непрерывного оптического квантового генератора на рубине, воспользовавшись формулой:

$$P_{\text{вых}} = \frac{N_{2\text{пор}}}{t_1} (\alpha - 1) \frac{t_p}{t_c} h\nu, \quad (6.1)$$

где $N_{2\text{пор}} = \frac{1}{2} N$ зависит от общей концентрации ионов хрома (Cr^{3+}) в рубине ($N=1,6 \cdot 10^{19}$ см³); $t_p = Q/\nu$ – время затухания поля в резонаторе; t_c – время жизни фотона в резонаторе, обычно ($t_p / t_c \approx 0,5$):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_c} + \frac{1}{t_0} \quad (6.2)$$

где за t_0 принято время жизни, обусловленное всеми прочими видами потерь.

Задача 6.6 Определить время τ жизни волны в резонаторе длиной $L=0,5\text{ м}$ с коэффициентом отражения зеркал $R=0,96$, при освещении его желтым светом ($\lambda_0 = 0,463\text{ мкм}$). Оценить добротность резонатора.

Задача 6.7 Рассчитать добротность Q_R и время жизни фотона t_p в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами $L=0,5\text{ м}$. В резонаторе возбуждается основной тип колебаний TEM_{00} , образуемый двумя бегущими навстречу друг другу плоскими волнами ($\lambda=0,6\text{ мкм}$). Среда, заполняющая резонатор, слабо поглощаемая (коэффициент поглощения $\alpha = 0,01\text{ см}^{-1}$). Эти потери могут быть связаны с процессами рассеивания в среде и т.д. Коэффициент отражения каждого из зеркал $r_{отр}=96\%$. Диаметр зеркал много больше диаметра светового пучка, так что дифракционными потерями можно пренебречь.

7 Рекомендуемая литература

1. Верещагин И.К., Косяченко Л.А., Кокин С.М. Введение в оптоэлектронику. - М.: Высшая школа, 1991. - 192 с.
2. Информационная оптика / Под ред. Н.Н. Евтихеева. Учебное пособие – М., Издательство МЭИ, 2000. - 516 с.
3. Квасница М.С. Квантовые и оптоэлектронные приборы. – Томск: ТУСУР, Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002.– 79 с.
4. Малышев В. А. Основы квантовой электроники и лазерной техники: Учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 2005. - 542 с.
5. Пихтин А.Н. Оптическая и квантовая электроника. Учебник для ВУЗов.- М.: Высшая школа, 2001. – 574 с.
6. Пуговкин А.В., Серебренников Л.Я., Шандаров С.М. Введение в оптическую обработку информации. - Томск: Изд-во ТГУ, 1981. - 60 с.
7. Семенов А.С., Смирнов В.Л., Шмалько А.В. Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации. - М.: Радио и связь, 1990. - 225 с.
8. Шандаров С.М., Башкиров А.И. Введение в квантовую и оптическую электронику. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2007.

Учебное пособие

Квасница М.С., Орликов Л.Н.

Статистические модели квантовых, оптоэлектронных
и акустооптических приборов

Методические указания к практическим занятиям

Усл. печ. л. Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40