Федеральное агентство по образованию

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра экономической математики, информатики, статистики (ЭМИС)

Ю.Р. Цой

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие для практических работ студентов

Томск - 2012

Цой Ю.Р. Теория принятия решений– Томск: Изд-во ТУСУР, 2012. – 62 с.

Методическое пособие для студентов ВУЗов посвящено теории принятий решений при различных условиях поставленной задачи. Также приведен список вопросов для самостоятельной работы студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблемы принятия решений и выбора являются сферой, интенсивно разрабатываемой во многих областях знания. Под принятием решения обычно понимают некоторый выбор, принимаемый в ответ на возникшие потребности. При этом выделяют решения, принимаемые индивидуумом, группой или организацией. Рассмотрению подвергается не только процесс решения возникающих проблем, но и их нахождение и формулировка, а также обучение на основе результатов принимаемых действий.

В теории принятия решений выделяют четыре класса задач, сформулированных на основе идентифицированной проблемы: ЗПР в условиях определенности (однокритериальные и многокритериальные), ЗПР в условиях неопределенности, ЗПР в условиях риска, ЗПР в условиях конфликта. Под определенностью при этом понимается ситуация, когда одной альтернативе соответствует только один набор последствий (возникает задача поиска оптимального решения, например транспортная задача или распределительная). В случае принятия решений в условиях неопределенности ЛПР знает о наличии нескольких состояний системы и их возможных последствий, но не может оценить достоверность их наступления (задачи управления запасами и СМО).

Принятие решений в условиях риска предполагает, что имеется несколько состояний системы, которые могут наступить с разной вероятностью (при этом вероятность может быть оценена) и каждому состоянию соответствует свой набор последствий (перегон машин из Владивостока, инвестиции в проект). Принятие решений в условиях конфликта предполагает, что существует противодействие внешней среды, которое с той или иной вероятностью может повлиять на последствия (теория игр).

Все это обусловливает необходимость и значимость детального изучения и приобретение практики применения методов решения задач в различных условиях. Поэтому курс «Теория принятия решения» направлен на формирование у студентов сущностного понимания природы принимаемого решения, его места в системе управления, типов, форм, структуры решения, основных методов принятия решения на практике.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1.1. Однокритериальные задачи принятия решений в условиях определенности

Методы выбора решений в условиях определенности обычно используются в замкнутых моделях, где все альтернативы и их последствия считаются известными. Среди методов решения задач данного класса наиболее распространенным и разработанным является линейное программирование, предусматривающее решение как одноиндексных, так и двухиндексных задач, в которых критерий оптимальности является единственным..

Модели линейного программирования применяются для определения оптимального способа распределения дефицитных ресурсов при наличии конкурирующих потребностей (одноиндексные). В зависимости от числа неизвестных в задаче, решение может быть выполнено двумя методами: графическим или симплексным.

Графический метод применяется для решения задач с двумя неизвестными x_j, j = 1, 2, все условия выражаются в виде линейных ограничений и записывается целевая функция *Z*. Первый шаг при использовании графического метода заключается в геометрическом представлении допустимых решений, т.е. построении области допустимых значений, в которой одновременно удовлетворяются все ограничения модели. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом. Другие границы пространства решений изображены на плоскости прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака $\leq$ на знак = в остальных ограничениях. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются допустимыми. На график наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях *Z*, что позволяет определить наклон целевой функции и

направление, в котором происходит ее увеличение (уменьшение). Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую *Z* в направлении возрастания (убывания) целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решении.

Рассмотрим методы решения ЗЛП на следующем примере.

Предприятие изготавливает и реализует два вида продукции – P_1 и P_2. Для производства продукции используются два вида ресурсов – сырье и труд. Максимальные запасы этих ресурсов в сутки составляют 6 и 8 единиц соответственно. Расход ресурсов на изготовление каждого вида продукции, запасы и оптовые цены продукции приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ресурсы	Расходы ресурсов на 1 ед. продукции		Запас ресурсов, ед.
	P_1	P_2	
Сырье	1	2	6
Труд	2	1	8
Оптовая цена, д.е.	3	2	-

Известно, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, установлено, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 4 ед. в сутки. Как спланировать выпуск продукции предприятия, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид. Максимизировать целевую функцию $Z = 3x_1 + 2x_2$ при следующих ограничениях:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \text{ где}$$

x_1 - суточный объем производства продукцию P_1 (в делимых ед.),

x_2 - суточный объем производства продукцию P_2 (в делимых ед.).

Так как модель содержит только две переменные, задача может быть решена как графически, так и аналитически.

Графическое решение. Искомая область (пространство) решений показана на рис. 1. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом (представляющим собой по определению часть плоскости, расположенную над осью x_1 и правее оси x_2). Другие границы пространства решений изображены на плоскости x_1, x_2 прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака $\leq$ на знак $=$ в остальных ограничениях. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное таким образом пространство решений – многоугольник *ABCDEF* показан на рис. 1. В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений *ABCDEF*, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются допустимыми.

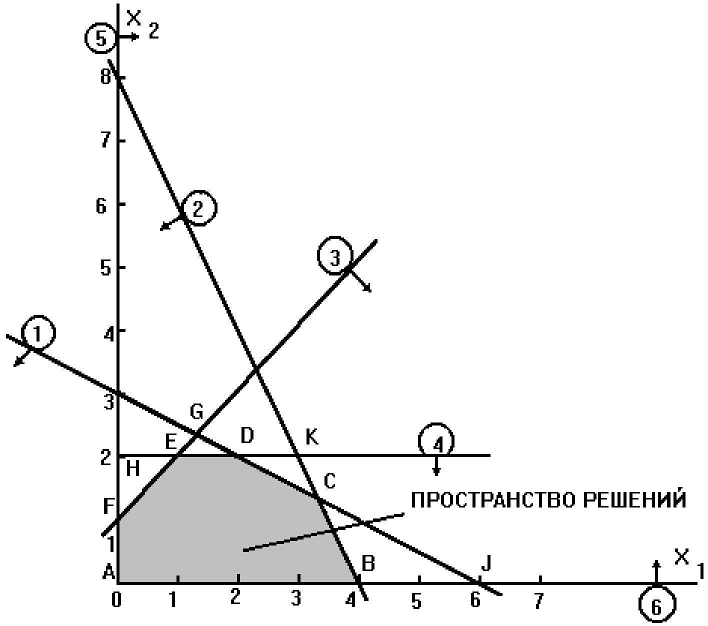


Рис. 1 – Ограничения: $x_1 + 2x_2 \leq 6\,(1), 2x_1 + x_2 \leq 8\,(2), -x_1 + x_2 \leq 1\ (3)$ $x_2 \leq 2\,(4),\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,(5)$.

На рис. 2 показано, в каком направлении возрастает целевая функция модели $Z = 3x_1 + 2x_2$. На график наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях *Z*, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение. Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую, характеризующую доход, в направлении возрастания целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых решении.

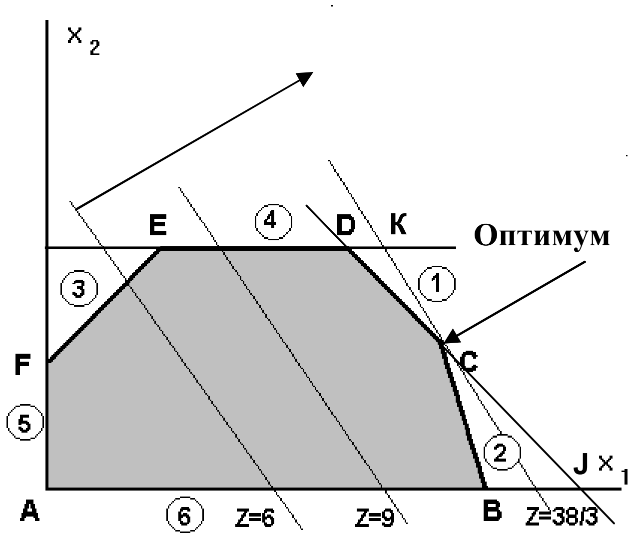


Рис. 2 – Целевая функция: максимизировать $Z = 3x_1 + 2x_2$.

На рис. 2 видно, что оптимальному решению соответствует точка *C*. Так как точка *C* является точкой пересечения прямых (1) и (2) (рис. 1), значения x_1 и x_2 в точке определяются решением следующей системы двух уравнений:

$$x_1 + 2x_2 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 = 8.$$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Поученное решение означает, что суточный объем производства продукции P_1 должен быть равен $\frac{10}{3}$ ед., а продукции P_2 – $\frac{4}{3}$ ед. Доход, получаемый в этом случае, составит $Z = 3\frac{10}{3} + 2\frac{4}{3} = \frac{38}{3}$ д.е.

Решение практической задачи нельзя считать законченным, если найдено оптимальное решение. Дело в том, что некоторые параметры ЗЛП (финансы, запасы сырья, производственные мощности) можно регулировать, что, в свою очередь, может изменить найденное оптимальное решение. Эта информация получается в результате выполнения анализа чувствительности.

Анализ чувствительности позволяет оценить влияние этих параметров на оптимальное решение. Если обнаруживается, что оптимальное решение можно значительно улучшить за счет небольших изменений заданных параметров, то целесообразно реализовать эти изменения. Кроме того, во многих случаях оценки параметров получаются путем статистической обработки ретроспективных данных (например, ожидаемый сбыт, прогнозы цен и затрат). Оценки, как правило, не могут быть точными. Если удается определить, какие параметры в наибольшей степени влияют на значение целевой функции, то целесообразно увеличить точность оценок именно этих параметров, что позволяет повысить надежность рассматриваемой модели и получаемого решения.

Анализ чувствительности предусматривает решение трех задач:

Задача 1. На сколько сократить или увеличить запасы ресурсов?

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Особенно важно проанализировать следующие два аспекта.

a. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции Z?

b. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранен6ии полученного оптимального значения целевой функции?

Так как величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части (ограничений).

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничения линейной модели как связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные) ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае соответствующее ограничение будет несвязывающим. Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к разряду дефицитных ресурсов, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т.е. имеющихся в некотором избытке).

В рассмотренной выше задаче, используемые ресурсы (ограничения (1) и (2)) являются дефицитными. Рассмотрим сначала ресурс «Сырье». При увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок *CD*) перемещается вверх параллельно самой себе, постепенно «Стягивая» в точку треугольник *CDK*. В точке *K* ограничения (2) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка *K*, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник *ABKEF*. В точке *K* ограничение (1) (для ресурса «Сырье») становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса «Сырье» не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т.е. прямая (1) походит через новую оптимальную точку *K*. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Во-первых, устанавливаются координаты точки *K*, в которой пересекаются прямые (2) и (4), т.е. находится решение системы уравнений

$$2x_1 + x_2 = 8,$$
$$x_2 = 2.$$

Затем путем подстановки координат точки *K* (3,2) в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса «Сырье»: $3 + 2 \cdot 2 = 7$.

Если рассматривается вопрос о целесообразности увеличения запаса дефицитного ресурса (2) «Труд», новой оптимальной точкой становится точка *J*, где пересекаются прямые (6) и (1), т.е. (6,0). Поэтому запас ресурса «Труд» можно увеличить до значения, равного $2 \cdot 6 = 12$.

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений. Ограничение (4), фиксирует предельный уровень спроса на продукцию P_2. Из рис. 2 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую (4) (*ED*) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой *C*. Так как точка *C* имеет координаты $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$, уменьшение спроса на продукцию P_2 до величины $\frac{4}{3}$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (3), которое представляет соотношение между спросом на продукцию P_1 и спросом на продукцию P_2. И в этом случае правую часть ограничения можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) (*EF*) не достигнет точки *C*. При этом правая часть ограничения (3) станет равной 2, что позволяет записать это ограничение в виде $x_1 - x_2 \geq 2$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на продукцию P_1 превысит спрос на продукцию P_2 более чем на две ед.

Результаты приведенного анализа можно свести в следующую таблицу:

Таблица 2

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса	Максимальное изменение дохода от реализации *Z*, д.е.
1	Дефицитный	7 – 6 = +1	$13 - 12^2/_3 = +^1/_3$
2	Дефицитный	12 – 8 = +4	$18 - 12^2/_3 = +5^1/_3$
3	Недефицитный	-2 – 1 = -3	$12^2/_3 - 12^2/_3 = 0$
4	Недефицитный	$1^1/_3 - 2 = -^2/_3$	$12^2/_3 - 12^2/_3 = 0$

Задача 2. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?

С помощью методов линейного программирования удается ответить на вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую

характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Ценность единицы каждого из ресурсов представлена в следующей таблице:

Таблица 3

Ресурс	Тип ресурса	Ценность каждой дополнительной единицы ресурса
1	Дефицитный	$y_1 = 1/3$
2	Дефицитный	$y_2 = 4/3$
3	Недефицитный	$y_3 = 0$
4	Недефицитный	$y_4 = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса «Труд» и лишь затем – на увеличение ресурса «Сырье». Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

Задача 3. В каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции?

В рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы.

a. Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

b. Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Обозначим c_1 и c_2 доходы от продажи 1 ед. продукции P_1 и продукции P_2 соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде: $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$.

При увеличении c_1 или уменьшении c_2 прямая, представляющая целевую функцию *Z*, вращается (вокруг точки *C*) по часовой стрелки. Таким образом, точка *C* будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений (1) и (2). Когда наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой для ограничения (1), получим две альтернативные оптимальные угловые точки *C* и *D*. Аналогично, если наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки *B* и *C*. Как только наклон прямой *Z* выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение (точка *B* или точка *D*).

Чтобы проиллюстрировать эту процедуру вычислений, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка *C* остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 2$ остается неизменным. Значение c_1 можно увеличивать до тех пор, пока прямая *Z* не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая *Z* не совпадет с прямой (1). Эти крайние значения коэффициента c_1 можно определить из равенства наклонов прямой *Z* и прямой (2) (максимальное значение c_1) и равенства наклонов прямой *Z* и прямой (1) (минимальное значение c_1). Так как тангенс угла наклона для прямой *Z* равен $\frac{c_1}{2}$, а для прямых (1) и (2) соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{1}$, минимальное значение c_1 определяем из равенства $\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}$, откуда $\min c_1 = 1$, а максимальное значение c_1 находим из равенства $\frac{c_1}{2} = \frac{2}{1}$, откуда $\max c_1 = 4$

Интервал изменения c_1, в котором точка *C* по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $1 < c_1 < 4$. При $c_1 = 1$ оптимальными угловыми точками будут как точка *C*, так и точка *D*. Аналогичную интерпретацию можно дать и тому случаю, когда коэффициент c_1 оказывается равным или начинает превосходить максимальный предел, равный 4.

Можно заметить, что как только коэффициент c_1 оказывается меньше 1, ресурс «Труд» становится недефицитным, а ресурс 4 – дефицитным. Для предприятия это означает, что если доход от продажи единицы продукции P_1 станет меньше 1 д.е., то наиболее выгодная производственная программа должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции P_2 (т.е. 2 ед. в сутки). При этом общее потребление ресурса «Труд» (ограничение (2)) снизится, что обусловит недефицитность этого ресурса. Соответствующие выводы легко сделать и для случая, когда значение c_1 превысит максимальное значение, равное 4.

Для решения задач с двумя и более неизвестными применяется симплексный метод. Алгоритм решения включает следующие шаги:

1. Все неравенства приводятся к равенствам. Для этого в левую часть ограничений типа «$\le$» вводятся дополнительные переменные с коэффициентами «+1», а типа «$\ge$» - с коэффициентами «-1». В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с нулевой оценкой. Получаем расширенную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \\ Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \qquad = 0. \end{cases}$$

При этом необходимо пояснить экономический смысл дополнительных переменных.

2. Полученная расширенная система заносится в первую симплексную таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется *оценочной.* В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком: $b_i = -c_i$. В левом столбце таблицы записываем основные переменные (базис), в первой строке таблицы – все переменные (отмечая при этом основные), во втором столбце – свободные члены расширенной системы $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных из расширенной системы. Далее таблица преобразуется по определенным правилам.

3. Проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум – наличие в последней строке отрицательных коэффициентов $b_i < 0$ $(c_i > 0)$. Если таких нет, то решение

оптимально, достигнут $\max Z = c_0$ целевой функции (в левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения a_{i0} (второй столбец), основные переменные равны нулю, т.е. получаем оптимальное решение.

4. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент в последней строке определяет разрешающий столбец *s*.

Составляются оценочные ограничения каждой строки по следующим правилам:

1) ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки;
2) ∞, если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$;
3) ∞, если $a_{is} = 0$;
4) 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$;
5) $\left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|$, если a_{i0} и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем минимальную оценку $\min\limits_i \left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума $(Z_{\max} = \infty)$. Если минимум конечен, то выбираем строку *q*, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее разрешающей строкой. На пересечении разрешающих строки и столбца находится разрешающий элемент a_{qs}.

5. Переходим к следующей таблице по правилам:

1) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q – переменную x_s;

2) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 – против «одноименной» основной переменной, 0 – против «разноименной» основной переменной, 0 – в последней строке для всех основных переменных;

3) новую строку с номером *q* получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs};

4) все остальные элементы a'_{ij} вычисляем по правилу прямоугольника:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} a_{qj}}{a_{qs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is} b_q}{a_{qs}}$$

Далее переходим к п. 3 алгоритма.

Решение задачи выпуске продукции P_1 и P_2 симплекс-методом.

Приводим систему к расширенному виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + y_1 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + y_2 = 8, \\ x_2 - x_1 + y_3 = 1, \\ x_2 + y_4 = 2 \\ Z - 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_1 = x_2 = 0$, находим начальное допустимое базисное решение:

$$y_1 = 6,\ y_2 = 8,\ y_3 = 1,\ y_4 = 2.$$

Переносим коэффициенты ограничений и целевой функции в симплексную таблицу:

Таблица 4

Исходная симплексная таблица

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Оценки
y_1	6	1	2	1	0	0	0	6
y_2	8	**2**	1	0	1	0	0	4
y_3	1	-1	1	0	0	1	0	-1
y_4	2	0	1	0	0	0	1	∞
Z	0	- 3	-2	0	0	0	0	-

Разрешающий столбец – x_1, разрешающая строка – y_2, значит переменная y_2 выводится из базиса, переменная x_1 вводится в базис. На пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент – 2. Все элементы ведущей строки делим на ведущий элемент, остальные элементы таблицы определяем по «правилу прямоугольника»:

$$b_1' = 6 - \frac{8 \cdot 1}{2} = 2; \; b_3' = 1 - \frac{-1 \cdot 8}{2} = 5; \; b_4' = 2 - \frac{0 \cdot 8}{2} = 2;$$

$$a_{12}' = 2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = 1{,}5; \; a_{14}' = 0 - \frac{1 \cdot 1}{2} = -0{,}5;$$

$$a_{32}' = 1 - \frac{-1 \cdot 1}{2} = 1{,}5; \; a_{34}' = 0 - \frac{-1 \cdot 1}{2} = 0{,}5;$$

$$a_{42}' = 1 - \frac{0 \cdot 1}{2} = 1; \; a_{44}' = 0 - \frac{0 \cdot 1}{2} = 0;$$

$$c_2' = -2 - \frac{-3 \cdot 1}{2} = -1{,}5; \; c_4' = 0 - \frac{-3 \cdot 1}{2} = 1{,}5; \; Z = 0 - \frac{-3 \cdot 8}{2} = 12.$$

Таблица 5

Итерация 1

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Оценки
y_1	2	0	**1,5**	1	-0,5	0	0	4/3
x_1	4	1	0,5	0	0,5	0	0	8
y_3	5	0	1,5	0	0,5	1	0	10/3
y_4	2	0	1	0	0	0	1	2
Z	12	0	-0,5	0	1,5	0	0	-

Аналогично составляется следующая таблица.

Таблица 6

Итерация 2

Базис	Свободные члены	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	Оценки
x_2	4/3	0	1	4/3	−1/3	0	0	
x_1	10/3	1	0	−1/3	2/3	0	0	
y_3	3	0	0	-1	1	1	0	
y_4	2/3	0	0	− 2/3	1/3	0	1	
Z	38/3	0	0	1/3	4/3	0	0	

В симплексной таблице получено оптимальное решение, т.к. в строке Z отсутствуют отрицательные элементы. Значения переменных соответствуют значениям, полученным графическим методом.

Транспортная модель (двухиндексная задача) используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При построении модели используются:

– величины, характеризующие предложение в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;

– стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пункта назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определении количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения, с тем, чтобы общие транспортные расходы были минимальными.

Решается транспортная задача с помощью метода потенциалов. При решении транспортных задач, прежде всего, проверяется условие равенства ресурсов поставщиков потребностям потребителей. Если это условие не выполняется, вводится фиктивный поставщик или потребитель. Фиктивные объемы ресурсов или потребностей при этом включается в задачу с нулевыми оценками.

Затем заполняется расчетная таблица и составляется первый опорный план, который можно получить несколькими способами. Более близкий к оптимальному опорный план может быть получен с использованием «наилучшего» элемента в таблице. При этом способе составление плана, начиная с клетки с минимальной оценкой при решении задачи на минимум или с максимальной оценкой при решении на максимум. Если в таблице имеется несколько клеток с одинаковыми «лучшими» оценками, то заполняется прежде клетка, в которую можно записать наибольшую поставку.

После составления первого опорного плана с помощью алгоритма метода потенциалов производится проверка его на оптимальность и, если план не оптимальный, то осуществляется его улучшение.

Алгоритм метода потенциалов (решение задачи на минимум):

1. Для всех заполненных клеток рассчитываются потенциалы по формуле

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

где u_i – потенциалы строк; v_j – потенциалы столбцов; c_{ij} –

оценки.

Для расчета потенциалов одному из них вначале придают любое значение. Обычно $u_i = 0$.

2. Для всех свободных клеток рассчитываются характеристики по формуле

$$d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Если в таблице нет ни одной свободной клетки с отрицательной характеристикой, то план считается оптимальным (при решении задачи на максимум план – оптимальный, если нет положительных характеристик).

3. Среди отрицательных характеристик (при решении на максимум среди положительных) выбирается максимальная по абсолютной величине и для клетки с этой характеристикой строится цепь. Для этого из выбранной свободной клетки проводится по строке или столбцу прямая линия до занятой клетки, затем под углом 90° линия проводится до следующей занятой клетки и так до тех пор, пока цепь не замкнется в исходной клетке.

4. В вершинах цепи, чередуя, проставляются знаки «+» и «–», начиная со свободной клетки. В клетках со знаком «–» выбирается минимальная поставка, которая перераспределяется по цепи: там, где стоит знак «+», она прибавляется, а где «–» – отнимается. Исходная свободная клетка становится занятой, а клетка, в которой выбрана минимальная поставка, свободной. Составляется новый план и рассчитывается значение целевой функции.

5. Переход к 1.

Рассмотрим следующую транспортную задачу.

Необходимо перевезти 4000 т груза с пяти складов к четырем производителям, в том числе с первого склада 600 т, второго - 240 т, третьего - 1360 т, четвертого - 1000 т и пятого - 800 т. Для первого производителя требуется 600 т груза, второго - 800 т, третьего - 1400 т и четвертого -1200 т. Требуется составить такой план перевозки массы, чтобы транспортные затраты были минимальными. Расстояние перевозки груза со складов к производителям приведено в таблице.

<u>Решение задачи методом потенциалов</u>

Заполним расчетную таблицу и составим первый опорный план методом «наилучшего» элемента в таблице. Заполнение таблицы начинается с клетки (3,2) с наименьшим расстоянием, в которую записывается поставка 800 т. Затем последовательно заполняются

клетки (4,3); (1,4); (5,3); (5,4); (3,4); (3,1); (2,1).

Таблица 7

Итерация 1

Склад	Производитель				Наличие	u_i
	1-я	2-я	3-я	4-я		
1-е	5	6	2	2 600	600	0
2-е	9 – 240	7	4 +	6	240	5
3-е	7 + 360	1 800	4	5 – 200	1360	3
4-е	5	2	2 1000	4	1000	1
5-е	6	4	3 – 400	4 + 400	800	2
Потребность	600	800	1400	1200	4000	–
v_j	4	-2	1	2	–	$Z =$ 12480

Условие, что заполненных клеток в таблице должно быть равно m + n – 1 = 5 + 4 – 1= 8, выполняется.

Переходим к анализу первого опорного плана. Рассчитываем значение целевой функции:

$$Z = 600 \cdot 2 + 240 \cdot 9 + 360 \cdot 7 + 800 \cdot 1 + 200 \cdot 5 +$$
$$+ 1000 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 400 \cdot 4 = 12480$$

Проверим, является ли план оптимальным, если нет, то «улучшаем» его.

1. Рассчитываем значения потенциалов:

$u_1 = 0$; $v_4 = 2 - 0 = 2$; $u_3 = 5 - 2 = 3$; $u_5 = 4 - 2 = 2$; $v_1 = 7 - 3 = 4$; $v_2 = 1 - 3 = -2$; $v_3 = 3 - 2 = 1$; $u_2 = 9 - 4 = 5$; $u_4 = 2 - 1 = 1$.

2. Рассчитываем характеристики для свободных клеток:

$d_{11} = 5 - (0 + 4) = 1$; $d_{12} = 6 - (0 + (-2)) = 8$; $d_{13} = 2 - (0 + 1) = 1$; $d_{22} = 7 - (5 + (-2)) = 4$; $d_{23} = 4 - (5 + 1) = -2$; $d_{24} = 6 - (5 + 2) = -1$; $d_{33} = 4 - (3 + 1) = 0$; $d_{41} = 5 - (1 + 4) = 0$; $d_{42} = 2 - (1 + (-2)) = 3$; $d_{44} = 4 - (1 + 2) = 1$; $d_{51} = 6 - (2 + 4) = 0$; $d_{52} = 4 - (2 + (-2)) = 4$.

3. Максимальная по абсолютной величине отрицательная

характеристика в клетке (2,3), для которой строим цепь.

4. Проставляем по углам цепи, начиная с выбранной клетки, знаки «+», «–». В клетках со знаком «–» минимальная поставка 200. Ее перераспределяем по цепи. Там, где стоит знак «+», прибавляем, а где «–», вычитаем. Заполняем следующую расчетную таблицу.

Таблица 8

Итерация 2

Склад	Производитель				Наличие	u_i
	1-я	2-я	3-я	4-я		
1-е	5	6	2	2 600	600	0
2-е	9 – 40	7	4 + 200	6	240	3
3-е	7 560	1 800	4	5	1360	1
4-е	5 +	2	2 – 1000	4	1000	1
5-е	6	4	3 200	4 600	800	2
Потребность	600	4800	1400	1200	4000	–
v_j	6	0	1	2	–	$Z =$ 12080

Расчеты ведем аналогично. Получены следующие отрицательные характеристики:

$$d_{11} = -1; \quad d_{41} = -2; \quad d_{51} = -2.$$

Для клетки (4,1) строим цепь. Перераспределяем по цепи поставку 40. Заполняем таблицу для итерации 3.

Таблица 9

Итерация 3

Склад	Производитель				Наличие	u_i
	1-я	2-я	3-я	4-я		
1-е	5	6	2	2 600	600	0
2-е	9	7	4 240	6	240	3
3-е	7 560	1 800	4	5	1360	3
4-е	5 40	2	2 960	4	1000	1
5-е	6	4	3 200	4 600	800	2
Потребность	600	4800	1400	1200	4000	–
v_j	4	-2	1	2	–	$Z =$ 12000

В расчетной табл. 9 нет отрицательных характеристик, следовательно, план оптимальный.

Т.о., необходим с 1-го склада перевезти к 4-му производителю 600 т груза, со 2-го склада к 3-му производителю -240 т, с 3-го склада к 1-му производителю - 560 т и ко 2-му - 800 т, с 4-го склада к 1-му производителю - 40 т и к 3-му производителю - 960 т, с 5-го склада к 3-му производителю - 200 т и к 4-му - 600 т. При этом минимальные затраты на перевозку составят 12000 тонна-км.

1.2. Многокритериальные задачи принятия решений в условиях определенности

Математический аппарат следует использовать в случаях многокритериальных задач принятия решений, поскольку он позволяет на начальном этапе исследования исключить заведомо неудачные варианты решений.

В многокритериальных задачах принятия решений для того чтобы из множества критериев, в том числе и противоречащих друг другу (например, прибыль и расход), выбрать целевую функцию, необходимо установить приоритет критериев. Попытка сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием эффективности (целевой функцией) в большинстве случаев не дает удовлетворительных результатов. Другой подход состоит в отбрасывании («выбраковке») из множества допустимых решений заведомо неудачных решений, уступающих другим по всем критериям. В результате такой процедуры остаются так называемые эффективные (или «паретовские») решения, множество которых обычно существенно меньше исходного. А окончательный выбор «компромиссного» решения (не оптимального по всем критериям, которого, как правило, не существует, а приемлемого по этим критериям) остается за человеком – лицом, принимающим решение.

Математические модели исследуемых объектов, явлений или процессов в многокритериальных задачах могут быть представлены таблицами, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых альтернатив при строго заданных внешних условиях. В таком случае возникает многокритериальная ЗПР, требующая построения аддитивной функции полезности, монотонно зависящей от критериев. Данная операция называется методом (процедурой) свертывания критериев.

Пусть функция $U(k)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cdot a_{ij}$, $i=1,...,m$, характеризует аддитивный критерий оптимальности, где величины λ_j являются весовыми коэффициентами, которые определяют в количественной форме степень предпочтения (важность) *j*-го критерия оптимальности по сравнению с другими критериями. Более важному критерию

приписывается больший вес, при этом $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$, $\lambda_j \ge 0$, $j=1,...,n$.

Обобщенная функция полезности (функция цели) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

1. частные критерии количественно соизмеримы по важности, т.е. каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j, которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;
2. частные критерии являются однородными, т.е. имеют одинаковую размерность.

Если локальные критерии неоднородны, то требует провести нормализацию, т.е. привести к единому, безразмерному масштабу измерения следующим образом: определить максимум и минимум каждого локального критерия; выделить группу критериев, которые максимизируются и группу критериев, которые минимизируются при решении задачи.

Если исходная задача на максимум, то для критериев, которые максимизируются, нормализованные критерии определить как $\hat{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_j^+}$, а для критериев, которые минимизируются как $\hat{a}_{ij}=1-\frac{a_{ij}}{a_j^+}$, где $a_j^+=\max_i a_{ij}$. Если исходная задача на минимум, то для критериев, которые максимизируются, нормализованные критерии определить как $\hat{a}_{ij}=1-\frac{a_{ij}}{a_j^+}$, а для критериев, которые минимизируются как $\hat{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_j^+}$. Далее рассчитать значение аддитивной функции полезности $U(k)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cdot \hat{a}_{ij}$.

В отечественной практике распространенным методом свертывания критериев является метод БОФа[1]:

Алгоритм решения методом БОФа следующий:

1) отобрать оптимальное количество показателей;

---

[1] БОФ – Быстров Олег Филаретович

2) проранжировать показатели по важности в соответствии с личными предпочтениями лица, принимающего решения (ЛПР), и переписать их в порядке уменьшения значимости;

3) определить весовые коэффициенты каждого показателя и нормировать полученные результаты;

4) проранжировать проекты в соответствии с предпочтениями ЛПР по каждому показателю;

5) определить весовые коэффициенты сравниваемых проектов по каждому показателю и нормировать полученные результаты;

6) рассчитать значения обобщенного показателя для каждого проекта;

7) принять решение о выборе проекта по критерию наибольшего результата.

При выборе эффективных решений, множество которых обычно существенно меньше исходного рекомендуется использовать правило выбора по Парето. Согласно правилу Парето лучшим является тот вариант, для которого нет другого варианта по всем показателям не хуже его, а хотя бы по одному показателю лучше.

Рассмотрим 5 проектов (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*), сравниваемых по следующим основным показателям:

1) чистому дисконтированному доходу (ЧДД);
2) сроку окупаемости (СО);
3) индексу доходности (ИД);
4) внутренней норме доходности (ВНД);
5) рентабельности инвестиций (РИ).

Значения показателей по каждому из проектов представлены в табл.10.

Таблица 10

Проекты	Значения показателей				
	ЧДД, тыс. дол.	ИД	ВНД, %	СО, лет	РИ, %
A	900	1,10	25	2,0	27
B	800	1,15	40	1,5	30
C	1000	1,20	30	1,8	35
D	1010	1,25	20	1,0	25
E	300	1,40	15	1,2	20

Результаты ранжирования проектов отражены в табл. 11.

Таблица 11

Ранжирование проектов

Ранги	ЧДД, тыс. дол.	ИД	ВНД, %	СО, лет	РИ, %
1	*D*	*E*	*B*	*D*	*C*
2	*C*	*D*	*C*	*E*	*B*
3	*A*	*C*	*A*	*B*	*A*
4	*B*	*B*	*D*	*C*	*D*
5	*E*	*A*	*E*	*A*	*E*

Для удобства рассмотрения составим таблицы предпочтений, в которых попарно сравниваются все проекты так, что в таблице, например, для проекта *B* (обозначение в верхнем левом углу соответствующей таблицы) в клетку пересечения строки ЧДД и столбца С ставится «+», если значение ЧДД по проекту *B* больше, чем по проекту *C* знак «-», если меньше, знак 0, если значения равны.

Таблица 12

A	*B*	*C*	*D*	*E*
ЧДД	+	–	–	+
ИД	–	–	–	–
ВНД	–	–	+	+
СО	–	–	–	–
ИР	–	–	+	+

Таблица 13

C	*A*	*B*	*D*	*E*
ЧДД	+	+	–	+
ИД	+	+	–	–
ВНД	+	–	+	+
СО	+	–	–	–
ИР	+	+	+	+

Таблица 14

E	*A*	*B*	*C*	*D*
ЧДД	–	–	–	–
ИД	+	+	+	+
ВНД	–	–	–	–
СО	+	+	+	–
ИР	–	–	–	–

Таблица 15

B	*A*	*C*	*D*	*E*
ЧДД	–	–	–	+
ИД	+	–	–	–
ВНД	+	+	+	+
СО	+	+	–	–
ИР	+	–	+	+

Таблица 16

D	*A*	*B*	*C*	*E*
ЧДД	+	+	+	+
ИД	+	+	+	–
ВНД	–	–	–	+
СО	+	+	+	+
ИР	–	–	–	+

Принимая во внимание приведенное выше определение правила выбора по Парето, в данном случае выбирается проект, если в таблице, составленной для него, нет ни одного столбца, в котором отсутствует знак «-». Наличие в таблице для проекта *C* столбца *A,* не имеющего ни одного знака «-», означает, что проект *C* превосходит проект *A*.

В рассматриваемом случае только для проекта *A* есть проект, имеющий преимущество, поэтому по правилу Парето для дальнейшего рассмотрения выбираются все проекты, кроме *A*.

Рассмотрим метод аддитивной оптимизации. По данным табл. 10. определим максимум каждого локального критерия:

$$a_1^+ = 1010\,,\ a_2^+ = 1{,}40\,,\ a_3^+ = 40\,,\ a_4^+ = 2{,}0\,,\ a_5^+ = 35\,.$$

При решении задачи максимизируются первый, второй, третий и пятый критерии, четвертый – минимизируется.

Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии в соответствии с указанными выше правилами. Результаты представляем в табл. 17

Таблица 17

Проекты	Значения показателей				
	ЧДД, тыс. дол.	ИД	ВНД, %	СО, лет	РИ, %
A	0,89	0,79	0,63	0,00	0,77
B	0,79	0,82	1,00	0,25	0,86
C	0,99	0,86	0,75	0,10	1,00
D	1,00	0,89	0,50	0,50	0,71
E	0,30	1,00	0,38	0,40	0,57
Весовой коэффициент	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05

Определяем обобщенную функцию цели по каждому варианту:

$$U_A = 0{,}89\cdot 0{,}45 + 0{,}79\cdot 0{,}25 + 0{,}63\cdot 0{,}15 + 0{,}00\cdot 0{,}10 + 0{,}77\cdot 0{,}05 = 0{,}73\,,$$

$$U_B = 0{,}79\cdot 0{,}45 + 0{,}82\cdot 0{,}25 + 1{,}00\cdot 0{,}15 + 0{,}25\cdot 0{,}10 + 0{,}86\cdot 0{,}05 = 0{,}78\,,$$

$$U_C = 0{,}99\cdot 0{,}45 + 0{,}86\cdot 0{,}25 + 0{,}75\cdot 0{,}15 + 0{,}10\cdot 0{,}10 + 1{,}00\cdot 0{,}05 = 0{,}78\,,$$

$$U_D = 1{,}00\cdot 0{,}45 + 0{,}89\cdot 0{,}25 + 0{,}50\cdot 0{,}15 + 0{,}50\cdot 0{,}10 + 0{,}71\cdot 0{,}05 = 0{,}83\,,$$

$$U_E = 0{,}30\cdot 0{,}45 + 1{,}00\cdot 0{,}25 + 0{,}38\cdot 0{,}15 + 0{,}40\cdot 0{,}10 + 0{,}57\cdot 0{,}05 = 0{,}51\,.$$

Согласно рассматриваемому методу, в качестве наиболее привлекательного следует выбрать проект *D*, как имеющий максимальную величину обобщающей оценки. Однако следует отметить, что данный выбор не достаточно объективен, поскольку весовые коэффициенты критериев определены мнением экспертов.

Рассмотрим метод БОФа, позволяющий определить не только значимость каждого проекта, но и весовые коэффициенты критериев.

В соответствии с методом БОФа, каждый показатель кодируется буквенным символом W_j и в порядке уменьшения важности показателя записывается в таблицу (j – номер показателя в перечне).

Ранги показателей приведены в нижней строке таблицы. Из табл. 18 следует, что самым важным показателем ЛПР признан ЧДД $(R_1 = 1)$, следующим по важности признан ИД $(R_3 = 2)$ и т.д.

Таблица 18

Ранг (R_j)	Показатели (W_j)				
	ЧДД	ИД	ВНД	СО	РИ
	W_1	W_3	W_2	W_4	W_5
	1	2	3	4	5

1. Определение весовых коэффициентов показателей и нормирование их значений.

Весовой коэффициент C_j для каждого j-го показателя определяется по формуле

$$C_j = 1 - \frac{R_j - 1}{M}, \qquad j = 1, \ldots, M,$$

где M – число показателей.

Результаты расчета весовых коэффициентов:

$$C_1 = 1 - \frac{1-1}{5} = 1, \quad C_2 = 1 - \frac{3-1}{5} = \frac{3}{5}, \quad C_3 = 1 - \frac{2-1}{5} = \frac{4}{5},$$

$$C_4 = 1 - \frac{4-1}{5} = \frac{2}{5}, \quad C_5 = 1 - \frac{5-1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Нормирование коэффициентов осуществляется по зависимости

$$\widetilde{C}_j = \frac{C_j}{\sum_{m=1}^{M} C_m}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\widetilde{C}_1 = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{3/5}{3} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}, \quad \widetilde{C}_3 = \frac{4/5}{3} = \frac{4}{15},$$

$$\widetilde{C}_4 = \frac{2/5}{3} = \frac{2}{15}, \quad \widetilde{C}_5 = \frac{1/5}{3} = \frac{1}{15},$$

поскольку $\sum_{m=1}^{5} C_m = 1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 3$.

Нормированные значения весовых коэффициентов занесем в табл. 19.

Таблица 19

W_j	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
$\widetilde{C}_j$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2. Ранжирование проектов по каждому показателю. Заполняется таблица, в которой R_{ji} – ранг варианта проекта с номером i по показателю с номером j. Проекты соответственно обозначены B_1, B_2, B_3, B_4 (табл. 20).

Таблица 20

Показатели	Проекты				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
W_1	$R_{11} = 3$	4	2	1	5
W_2	5	4	3	2	1
W_3	3	1	2	4	5
W_4	5	3	4	1	2
W_5	3	2	1	4	5

3. Определение весовых коэффициентов вариантов по каждому показателю.

Для определения весовых коэффициентов проектов по каждому показателю используется зависимость $C_{ji} = 1 - \frac{R_{ji} - 1}{K}$, где K – число сравниваемых вариантов: $C_{11} = 1 - \frac{3-1}{5} = \frac{3}{5}$, $C_{12} = 1 - \frac{4-1}{5} = \frac{2}{5}$, $C_{13} = 1 - \frac{2-1}{5} = \frac{4}{5}$, и т.д. $C_{55} = 1 - \frac{5-1}{5} = \frac{1}{5}$.

Нормирование полученных результатов проводится по формуле

$$\ddot{C}_{ji} = \frac{C_{ji}}{\sum_{k=1}^{K} C_{jk}}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{4} C_{jk} = 3$ для всех $j = 1,\ldots,5$, нормированные величины принимают значения:

$$\ddot{C}_{11} = \frac{3/5}{3} = \frac{3}{15}, \quad \ddot{C}_{12} = \frac{2/5}{3} = \frac{2}{15}, \text{ и т.д. } \ddot{C}_{55} = \frac{1/5}{3} = \frac{1}{15}.$$

Рассчитанные результаты заносятся в табл. 21.

Таблица 21

Показатели	Проекты				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
W_1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{15}$
W_2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$
W_3	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
W_4	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$
W_5	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

4. Расчет значений обобщающего показателя по каждому варианту.

Расчет значений обобщенного показателя W_j по каждому проекту проводят по зависимостям

$$\overline{W}_i = \sum_{j=1}^{M} \widehat{C}_{ji}, \text{ где } \widehat{C}_{ji} = \widetilde{C}_j \times \ddot{C}_{ji}.$$

Результаты расчета значений обобщенного показателя по проектам сводят в итоговую табл. 22.

Таблица 22

Проект	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
$\overline{W}_i$	0,156	0,204	0,240	0,253	1,147

Например, $\overline{W}_1 = \frac{5}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{3}{15}\cdot\frac{1}{15} + \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{15} + \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{15} = \frac{35}{225} = 0{,}156$

Рассмотренная методика позволяет по критерию наибольшего результата сделать выбор в пользу проекта *D*, т.к. по обобщенному показателю он превышает значения показателей других проектов.

1.3. Задачи принятия решений в условиях неопределенности

Необходимость учета неопределенностей, оценки и управления рисками является одной из основных проблем в теории принятия решений. Поэтому для выработки наиболее рациональных решений применяются методы формализованного описания составляющих элементов процесса принятия решений: проблемной ситуации, целей, альтернатив, критериев, исходов.

Неопределенность или недостаток информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления, является характеристикой внешней среды – природы, в которой принимается решение о развитии или функционировании объекта. Для описания неопределенностей чаще всего используется вероятностно-статистический подход, основанный, в первую очередь, на измерении различных величин, используемых в процессе принятия решения.

В случае принятия решений в условиях неопределенности базой является вероятностная модель реального явления или процесса, т.е. математическая модель, в которой объективные соотношения выражены в терминах теории вероятностей. Вероятности используются прежде всего для описания неопределенностей, которые необходимо учитывать при принятии решений.

Наиболее распространенными критериями, использующимися при принятии решений в условиях неопределенности являются: критерий Лапласа, Вальда, Гурвица, Ходжа-Лемана, Гермейера, критерий произведений. Все критерии основаны на следующем допущении: считают, что множество состояний природы S_j конечно $j = 1,\ldots,n$ или, по крайней мере, количество состояний можно пронумеровать. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого решения. Считают также, что множество решений R_i также конечно и равно *m*. Каждому действию R_i и каждому возможному состоянию природы S_j соответствует исход V_{ij}, определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе *i*-го действия и реализации *j*-го состояния.

Критерий Лапласа опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния природы S_j полагаются равновероятными $q_j = 1/n$. Выбор оптимального решения R_i осуществляют по следующему правилу: если исходная матрица – матрица выигрышей, то выбирается $\max\limits_{R_i}\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}V_{ij}\right\}$; если исходная матрица – матрица потерь, то выбирается $\min\limits_{R_i}\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}V_{ij}\right\}$.

Критерий Вальда (минимаксный или максиминный) опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_i. Если в исходной матрице результат V_{ij} представляет выигрыш ЛПР, то при выборе оптимального решения используется максиминный критерий – выбирается $\max\limits_i \min\limits_j \{V_{ij}\}$, если исходная матрица – матрица потерь, то используется минимаксный критерий – выбирается $\min\limits_i \max\limits_j \{V_{ij}\}$.

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α – коэффициент доверия. Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами $(1-\alpha)$ и α, где $0 \le \alpha \le 1$. Если в исходной задаче матрица возможных результатов представляет выигрыш, прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается как $Z = \max\limits_i \left[\alpha \max\limits_j V_{ij} + (1-\alpha)\min\limits_j V_{ij}\right]$. Если матрица возможных результатов представляет затраты (потери), то критерий Гурвица записывается как $Z = \min\limits_i \left[\alpha \min\limits_j V_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_j V_{ij}\right]$.

Критерий Ходжа-Лемана опирается одновременно на минимаксный критерий (критерий Вальда) и критерий Лапласа. С помощью параметра $0 \le \gamma \le 1$ выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Лапласа, в противном случае – минимаксный критерий, т.е. $Z = \min\limits_i \left[\gamma \sum\limits_j V_{ij}q_j + (1-\gamma)\max\limits_j V_{ij}\right]$.

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа-Лемана, формируется следующим образом: матрица результатов дополняется столбцом, составленным из сумм средних взвешенных математических ожиданий (с весом $\gamma = const$) и взвешенного наименьшего результата каждой строки. После этого в данном столбце отбирается вариант с наибольшим значением.

Критерий Гермейера ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех V_{ij}. При этом $Z = \max\limits_i \min\limits_j \{V_{ij} \cdot q_j\}$. Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом: матрица решений дополняется еще одним столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния, а затем выбирается вариант с наибольшим значением этого столбца.

Критерий произведений имеет следующую формулу расчета: $Z = \max\limits_i \prod\limits_j V_{ij}$. В этом случае правило выбора формулируется так: матрица решений дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки, из которого затем выбирается вариант с наибольшим значением. Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все V_{ij} положительны.

Поскольку неопределенность порождает риск, матрица рисков может быть построена на основе матрицы исходов V_{ij}. Элементы матрицы рисков связаны с элементами матрицы исходов следующим соотношением: $r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_i V_{ij} - V_{ij}, \ \textit{если } V - \textit{выигрыш}, \\ V_{ij} - \min\limits_i V_{ij}, \ \textit{если } V - \textit{потери}. \end{cases}$

Для решения задач в условиях риска могут быть применены вышеизложенные критерии, а также критерий Сэвиджа, в соответствии с которым рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е. $\min_i \max_j \{r_{ij}\}$.

Рассмотрим применение обозначенных выше критериев на следующем примере. Телефонная компания должна определить уровень своих возможностей по предоставлению телефонных услуг так, чтобы удовлетворить спрос своих клиентов на планируемый период. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень возможностей телефонной компании (например, с точки зрения возможных затрат на ввод нового тарифа). Отклонения от этих уровней могут приводить к дополнительным затратам. Ниже приводится табл. 23, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие телефонных возможностей.

Таблица 23

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	7	10	18	22
R_2	9	6	8	25
R_3	25	18	16	21
R_4	24	22	20	26

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Критерий Лапласа. Этот критерий предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны, т.е. $p = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Тогда ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют:

$$W\{R_1\} = 0{,}25 \cdot (7 + 10 + 18 + 22) = 14{,}25,$$
$$W\{R_2\} = 0{,}25 \cdot (9 + 6 + 8 + 25) = 12,$$
$$W\{R_3\} = 0{,}25 \cdot (21 + 18 + 16 + 21) = 19,$$
$$W\{R_4\} = 0{,}25 \cdot (24 + 22 + 20 + 26) = 23.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

Критерий Вальда. Так как V_{ij} представляет потери (затраты), то

применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в табл. 24:

Таблица 24

Стратегия	Варианты спроса на телефонные услуги				$\max V_{ij}$	$\min \max V_{ij}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	7	10	18	22	22	-
R_2	9	6	8	25	25	-
R_3	21	18	16	21	21	21
R_4	24	22	20	26	26	-

Наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с минимаксным критерием будет третья R_3.

Критерий Сэвиджа. Заданная матрица определяет потери (затраты). Вычисляем элементы матрицы рисков (табл. 25):

Таблица 25

Стратегия	Варианты троса на телефонные услуги				$\max r_{ij}$	$\min \max r_{ij}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	4	10	1	10	-
R_2	2	0	0	4	4	4
R_3	14	12	8	0	14	-
R_4	17	16	12	5	17	-

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа привели к выбору второй стратегии, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Критерий Гурвица. Положим $\alpha = 0{,}5$. Результаты необходимых вычислений приведены в табл. 26.

Таблица 26

	S_1	S_2	S_3	S_4	$\min V_{ij}$	$\max V_{ij}$	$W_i = \alpha \cdot \min V_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max V_{ij}$	$\min W_i$
R_1	7	10	18	22	7	22	14,5	14,5
R_2	9	6	8	25	6	25	15,5	-
R_3	21	18	16	21	16	21	18,5	—
R_4	24	22	20	26	20	26	23,0	—

Оптимальное решение заключается в выборе W_1.

Таким образом, далее лицу, принимающему решение (ЛПР), в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее:
по критерию Лапласа – выбор стратегии R_2,
по критерию Вальда – выбор стратегии R_3,
по критерию Сэвиджа – выбор стратегии R_2,
по критерию Гурвица при $\alpha = 0{,}5$ – выбор стратегии R_1.

1.4. Задачи принятия решений в условиях риска

В настоящее время большинство принимаемых решений, сопряженных с риском, не может быть принято интуитивно, исходя только из предшествующего опыта и здравого смысла. Теория риска представляет собой раздел теории вероятностей, посвященный принятию решений в условиях вероятностной неопределенности. В основе ее лежат понятия риска, меры и цены риска, отношения индивидуума к риску.

Ситуация риска характеризуется следующими признаками:

– наличием неопределенности;

– необходимостью выбора альтернатив действий (при этом нужно иметь в виду, что отказ от выбора также является разновидностью выбора);

– возможностью оценить вероятность осуществления выбранной альтернативы, т.к. в ситуации неопределенности вероятность наступления событий в принципе неустанавливаема.

На основе вероятностей рассчитываются стандартные характеристики риска: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Описанные выше

критерии применяются к нормальному распределению вероятностей, т.к. его важнейшие свойства позволяет существенно упростить анализ.

Рассмотрим следующую задачу.

Фирма рассматривает план капиталовложений на ближайшие годы. Берутся четыре варианта: А, Б, В и Г. В табл. 27 приведены расходы на выполнение инвестиционных программ (причем средства должны быть инвестированы в начале первого года), планируемые поступления R в млн. руб. и вероятности поступления наличности. Длительность инвестиционных программ: А - 1 год; Б - 2 года; В - 3 года; Г - 4 года Планируемые поступления денег происходят в конце года. Ставка дисконтирования считается постоянной и равной 24% годовых. Требуется определить ожидаемый средний доход по четырем вариантам инвестиционных программ и уровень риска.

Таблица 27

Вариант А

Год	Капиталовложения, млн. руб. (S)	Планир. поступления, млн. руб. (R_m)	Вероятность, (P_m)
1	72	100 120 140 160	0,2 0,3 0,4 0,1

Вариант Б

Год	Капиталовложения, млн. руб.	Планир. поступления, млн. руб.	Вероятность
1	172	100 120 140 160	0,2 0,3 0,4 0,1
2		180 210 240 270	0,1 0,3 0,4 0,2

Вариант В

Год	Капиталовложения, млн. руб.	Планир. поступления, млн. руб.	Вероятность
1	262	100	0,2
		120	0,3
		140	0,4
		160	0,1
2		180	0,1
		210	0,3
		240	0,4
		270	0,2
3		260	0,1
		300	0,4
		340	0,4
		380	0,1

Вариант Г

Год	Капиталовложения, млн. руб.	Планир. поступления, млн. руб.	Вероятность
1	420	100	0,2
		120	0,3
		140	0,4
		160	0,1
2		180	0,1
		210	0,3
		240	0,4
		270	0,2
3		260	0,1
		300	0,4
		340	0,4
		380	0,1
4		400	0,2
		450	0,3
		500	0,3
		550	0,2

Ожидаемое среднее поступление наличности $\overline{R}$ - это средневзвешенная величина поступлений R_m в данном варианте. За веса принимаются вероятности поступления денег P_m: $\overline{R} = \sum_{m=1}^{M} R_m \cdot P_m$, где M - количество планируемых поступлений.

Длительность инвестиционных программ различная, поэтому для анализа альтернативных программ необходимо дисконтировать ожидаемые средние поступления к моменту начала проектов.

Ожидаемый средний доход: $\overline{D} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{R}_k}{(1+i)^k} - S$, где $\overline{R}_k$ - средние денежные поступления по годам для инвестиционной программы, i - ставка дисконтирования, n - количество лет, на которые рассчитана инвестиционная программа. Расчет ожидаемого среднего дохода дан в табл. 28.

Таблица 28

m	$n=1$			$n=2$		
	R_m	P_m	$R_m \cdot P_m$	R_m	P_m	$R_m \cdot P_m$
1	100	0,2	20	180	0,1	18
2	120	0,3	36	210	0,3	63
3	140	0,4	56	240	0,4	96
4	160	0,1	16	270	0,2	54
	$\overline{R}_1 = 128$			$\overline{R}_2 = 231$		

m	$n=3$			$n=4$		
	R_m	P_m	$R_m \cdot P_m$	R_m	P_m	$R_m \cdot P_m$
1	260	0,1	26	400	0,2	80
2	300	0,4	120	450	0,3	135
3	340	0,4	136	500	0,3	150
4	380	0,1	38	550	0,2	110
	$\overline{R}_3 = 320$			$\overline{R}_4 = 475$		

Для инвестиционной программы А:

$$\overline{D}_A = \frac{128}{1+0,24} - 72 = 31,226 \text{ млн. руб.}$$

Для инвестиционной программы Б:

$$\overline{D}_Б = \frac{128}{1+0{,}24} + \frac{231}{(1+0{,}24)^2} - 172 = 81{,}460 \text{ млн. руб.}$$

Для инвестиционной программы В:

$$\overline{D}_В = \frac{128}{1+0{,}24} + \frac{231}{(1+0{,}24)^2} + \frac{320}{(1+0{,}24)^3} - 262 = 159{,}296 \text{ млн. руб.}$$

Для инвестиционной программы Г:

$$\overline{D}_Г = \frac{128}{1+0{,}24} + \frac{231}{(1+0{,}24)^2} + \frac{320}{(1+0{,}24)^3} + \frac{475}{(1+0{,}24)^4} - 420 = 202{,}208 \text{ млн.}$$

Для оценки риска применяют дисперсию как меру отклонения случайной величины от ожидаемого среднего поступления наличности: $D(R) = \sum_{m=1}^{M} P_m \cdot \left(R_m - \overline{R}\right)^2$.

В качестве показателя риска применяют среднее квадратичное отклонение: $\sigma_R = \sqrt{D(R)}$.

Под относительным риском понимают отношение среднего квадратичного отклонения к ожидаемому среднему доходу инвестиционной программы: $\varepsilon_R = \frac{\sigma_R}{\overline{D}}$.

Если поступления наличности независимы друг от друга, то дисперсию инвестиционной программы можно рассчитать следующим образом: $D(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D(R_k)}{(1+i)^{2k}}$.

Для сопоставления инвестиционных программ применяют относительный показатель риска ε_R. Расчет дисперсии рассматриваемого примера приведен в табл. 29.

Таблица 29

m	$n=1$			$n=2$		
	$\overline{R}_1 - R_m$	P_m	$\left(\overline{R}_1 - R_m\right)\cdot P_m$	$\overline{R}_2 - R_m$	P_m	$\left(\overline{R}_2 - R_m\right)\cdot P_m$
1	28	0,2	156,8	51	0,1	260,1
2	8	0,3	19,2	21	0,3	132,3
3	-12	0,4	57,6	-9	0,4	32,4
4	-32	0,1	102,4	-39	0,2	304,2
	$\sum 336$			$\sum 729$		

m	$n=3$			$n=4$		
	$\overline{R}_3 - R_m$	P_m	$\left(\overline{R}_3 - R_m\right)\cdot P_m$	$\overline{R}_4 - R_m$	P_m	$\left(\overline{R}_4 - R_m\right)\cdot P_m$
1	60	0,1	360	75	0,2	1125,0
2	20	0,4	160	25	0,3	187,5
3	-20	0,4	160	-25	0,3	187,5
4	60	0,1	360	-75	0,2	1125,0
	$\sum 1040$			$\sum 2625$		

Для инвестиционной программы А:

$$D(R_А) = \frac{336}{(1+0{,}24)^2} = 218{,}522,\ \sigma_{RА} = \sqrt{218{,}522} = 14{,}782.$$

Для инвестиционной программы Б:

$$D(R_Б) = \frac{336}{(1+0{,}24)^2} + \frac{729}{(1+0{,}24)^4} = 527{,}422,\ \sigma_{RБ} = \sqrt{527{,}422} = 22{,}970.$$

Для инвестиционной программы В:

$$D(R_В) = \frac{336}{(1+0{,}24)^2} + \frac{729}{(1+0{,}24)^4} + \frac{1040}{(1+0{,}24)^6} = 976{,}660,$$

$$\sigma_{RВ} = \sqrt{976{,}660} = 31{,}251.$$

Для инвестиционной программы Г:

$$D(R_Г) = \frac{336}{(1+0{,}24)^2} + \frac{729}{(1+0{,}24)^4} + \frac{1040}{(1+0{,}24)^6} + \frac{1040}{(1+0{,}24)^8} = 1340{,}950,$$

$$\sigma_{RГ} = \sqrt{1340{,}950} = 36{,}619.$$

В табл. 30 приведены величины ожидаемого среднего дохода, среднее квадратичное отклонение и относительный коэффициент риска, в последнем столбце - величина ожидаемого среднего дохода в расчете на один год.

Таблица 30

Программа	$\overline{D}$, млн. руб.	σ_R, млн. руб.	ε_R	$\overline{D}/n$, млн. руб.
А	31,226	14,782	0,473	31,226
Б	81,460	22,970	0,282	40,730
В	159,296	31,251	0,196	53,099
Г	202,208	36,619	0,181	50,552

Из сопоставления данных следует, что для рассмотренных инвестиционных программ с увеличением длительности их увеличивается доход и снижается коэффициент относительного риска.

1.5. Задачи принятия решений в условиях конфликта

Принятием решений в условиях конфликтных ситуаций двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других, занимается теория игр.

Анализ игровой ситуации начинается с построения формализованной модели. Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его мат. модель, которую называют игрой. Мат. модель должна отражать присущие ему черты конфликта, т.е. описывать: а) множество заинтересованных сторон (игроков); б) возможные действия каждой из сторон, именуемые также стратегиями или ходами; в) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков. Для каждой игры, как правило, определен набор возможных конечных ее состояний (выигрыш, ничья, проигрыш) и предполагается, что функции выигрыша и множество стратегий, доступных каждому из игроков, общеизвестны, т.е. каждый игрок знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков, и в соответствии с этой информацией организует свое поведение.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре.

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функций выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры. В зависимости от числа игроков различают игры с двумя, тремя и более участниками. Согласно другому принципу классификации - по количеству стратегий - различают конечные и бесконечные игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий. Соответственно, в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий.

Третий способ классификации игр - по свойствам функций выигрыша (платежных функций). Важным случаем в теории игр является ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. налицо прямой конфликт между игроками. Подобные игры называются играми с нулевой суммой, или антагонистическими играми. Игры с ненулевой суммой, где имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

В зависимости от возможности предварительных переговоров между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется кооперативной, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется некооперативной.

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях.

На практике наиболее распространена классификация игр по свойствам функций выигрыша, в которой интересы игроков противоположны и если первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, то второй – минимизировать свой проигрыш. Для решения игры двух лиц с нулевой суммой используется критерий минимакса-максимина. Если первый игрок применяет стратегию A_i, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = 1,...,m$.

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться найти такую стратегию, при которой α_i, обращается в максимум: $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$. Величина α называется нижней ценой игры. Ей соответствует максиминная стратегия, придерживаясь которой первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α, т.е. являющийся гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока. Аналогично определим столбцы матрицы: $\beta_j = \max_i a_{ij}$, $j = 1,...,n$.

Найдем минимальное значение β_j: $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$.

Величина β называется верхней ценой игры. Ей соответствует минимаксная стратегия второго игрока, придерживаясь которой он при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β, т.е. это гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Если верхняя цена равна нижней цене игры, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет седловую точку. Величина $V = \beta = \alpha$ называется ценой игры. Она определяет средний выигрыш игрока А и средний проигрыш игрока В при использовании ими оптимальных стратегий.

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, т.е. используют смешанную стратегию.

Смешанной стратегией S_A игрока А называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$ причем:

$$p_i \geq 0,\ i = 1,...,m,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанные стратегии игрока А записываются в виде матрицы $S_A = \begin{pmatrix} A_1 \dots A_m \\ p_1 \dots p_m \end{pmatrix}$ или в виде строки $S_A = (p_1 \dots p_m)$. Аналогично смешанные стратегии S_B игрока В обозначаются: $S_B = \begin{pmatrix} A_1 \dots A_m \\ q_1 \dots q_m \end{pmatrix}$ или в виде строки $S_B = (q_1 \dots q_m)$, где $q_j \geq 0$, $j = 1,...,n$, $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$.

Игрок А выбирает стратегию p_i так, чтобы максимизировать наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам платежной матрицы, тогда как игрок В выбирает стратегию q_j с целью минимизации наибольшего ожидаемого проигрыша по строкам.

Справедлива следующая основная теорема теории игр – теорема Неймана[2]: Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется активной.

Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

При решении произвольной конечной игры рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока *А* (игрока *В)* являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях.

Рассмотрим следующий пример.

Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия A_1), отправить на склад для хранения (стратегия A_2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия A_3) для длительного хранения. Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия B_1), в течение небольшого времени (B_2), после длительного периода времени (B_3).

[2] Джон фон Нейман (1903-1957) – американский математик

В случае стратегий A_2 и A_3 предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для A_1, при A_2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии B_2 или B_3.

Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий A_1, A_2, A_3, руководствуясь «минимаксным критерием» (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 31.

Таблица 31

Стратегии	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Платежная матрица данной игры имеет вид $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

В этой матрице первую строку можно исключить как невыгодную стратегию, т.к. элементы строки меньше соответствующих элементов второй строки. Матрица принимает вид $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его также исключаем. Игра упростилась: $A=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$. Определяем вероятности выбора стратегий предприятия и цену игры:

$$p_2=\frac{8-10}{6+8-10-10}=\frac{1}{3},\ p_3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ V=\frac{6\cdot 1}{3}+\frac{10\cdot 2}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Оптимальная стратегия производителя продукции: стратегия A_1 не применяется, $\frac{1}{3}$ продукции отправляется на склад, $\frac{2}{3}$ продукции дополнительно обрабатывается, при этом цена игры равна $8\frac{2}{3}$.

1.6. Нечеткие системы

В данном разделе приводится очень краткое описание некоторых понятий нечетких систем, предложенных Л. Заде[3]. При этом описание дается скорее неформальное, без ряда важных подробностей и направленное, в первую очередь, на понимание основ.

1.6.1. Нечеткое множество и нечеткие переменные

Нечеткое множество представляет собой множество пар вида:

$$<x,\mu(x)>,$$

где x – переменная, $\mu(x)$ – *характеристическая функция принадлежности* (сокр. *функция принадлежности*). Область определения функции принадлежности $\mu(x)\in[0;1]$. Все значения x для которых $\mu(x)>0$ формируют носитель множества.

Особенности синтеза и работы нечеткой системы в существенной степени зависят от вида функций принадлежности. Наиболее распространенные функции принадлежности приведены в табл. 1.

Нечеткая переменная описывается тройкой вида:

$$<\alpha,D,FS>,$$

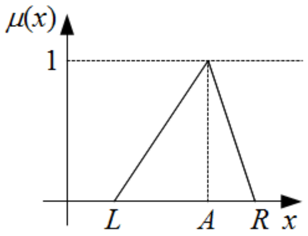
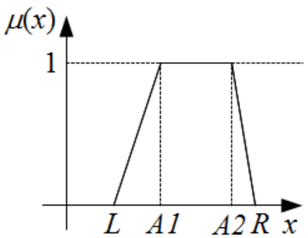
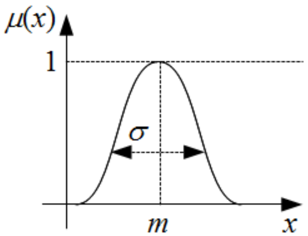
где α – наименование переменной; D – область определения для переменной α; FS – нечеткое множество, описывающее значения функции принадлежности для различных значений переменной α. В случае, если D – является числовой осью. нечеткая переменная называется *нечетким числом*.

В отличие от традиционного понимания отношения «переменная-множество», нечеткая переменная не является элементом нечеткого множества, а наоборот. С одной стороны, это путает, с другой стороны важно помнить, что нечеткая переменная может принимать одно из множества значений, в отличие от традиционной «четкой» переменной. Каждое из значений входит в нечеткое множество, и функция принадлежности характеризует, насколько это значение «типично» для нечеткой переменной.

[3] Лотфи Заде (1921 – …) – американский математик

Для нечеткого описания всех возможных значений некоторой переменной x используют понятие *лингвистической переменной*. Лингвистическую переменную можно грубо представить как множество нечетких переменных с несовпадающими именами, но с совпадающей областью определения. Например, можно задать нечеткие переменные «Низкий рост», «Средний рост», «Высокий рост», и определить лингвистическую переменную «Рост», которая будет объединять указанные нечеткие переменные[4]. Еще более грубо можно считать, что лингвистическая переменная – это объединение функций принадлежности с различными метками-именами.

Табл. 1. Описание распространенных функций принадлежности

Название	Иллюстративное изображение	Краткое описание
Треугольная		Характеризуется 3-мя параметрами: левая (L) и правая (R) границы, вершина (A).
Трапецеидальная		Характеризуется 4-мя параметрами: левая (L) и правая (R) границы, координаты вершин ($A1$, $A2$).
Гауссовская		Характеризуется 2-мя параметрами: центр (m) и дисперсия (σ).

[4] На самом деле лингвистическая переменная гораздо сложнее «устроена», однако для общего понимания сути вещей присущие ей особенности можно опустить.

1.6.2. Нечеткое правило

Нечеткое правило представляет собой правило логического вывода, использующее нечеткие переменные. Правило имеет вид:

$$\text{ЕСЛИ } A \text{ ТО } B \qquad (1)$$

где A – нечеткое логическое выражение (предпосылка, антецедент), B – заключение (консеквент).

Предпосылка имеет вид

$$(x_1 = z_1) \wedge (x_2 = z_2) \wedge \ldots \wedge (x_n = z_n), \qquad (2)$$

где x_i – входная переменной; z_i – нечеткая переменная. В (2) символ «=» обозначает проверку равенства. Т.е. словами антецедент можно выразить как «если x_1 есть z_1 и x_2 есть z_2 и т.д.».

В качестве консеквента в общем случае может выступать выражение вида:

$$(y_1 := r_1) \wedge (y_2 := r_2) \wedge \ldots \wedge (y_m := r_m)$$

где операция «$:=$» обозначает присвоение.

Таким образом, нечеткое правило можно считать отображением $\Phi \to U$, где Φ – пространство нечетких переменных, U – пространство заключений. U может быть подпространством Φ, пространством вещественных чисел, функций и др. в зависимости от вида используемых правил.

В нечетком выводе[5] большую роль играют процедуры *фаззификации* и *дефаззификации*, т.е. преобразование данных от традиционного представления к нечеткому и, обратно, преобразование результата нечеткого вывода к «четкому» виду.

Для фаззификации для каждой «четкой» входной переменной создается лингвистическая переменная (грубо говоря, набор нечетких переменных). Например, для переменной «Рост» можно задать три нечеткие переменные «Низкий рост», «Средний рост», «Высокий рост». При фаззификации для конкретного значения переменной «Рост» определяют значения функций принадлежностей для каждой из соответствующих нечетких переменных.

Результатом работы системы нечеткого вывода может являться нечеткая переменная либо нечеткий вектор. Для дефаззификации

[5] Поскольку нечеткие правила схожи с классическими логическими правилами, то можно говорить о нечетком выводе по аналогии с выводом в классической логике.

необходимо выбрать конкретно какое численное значение или вектор будут соответствовать нечеткому результату. Например, в задаче управления двухколесным роботом нечеткая переменная «Слегка повернуть направо» в результате дефаззификации может быть преобразована в двумерный вектор, определяющий управляющие воздействия на приводы колес.

1.6.3. Нечеткая система с правилами типа синглтон

В зависимости от вида (1) выделяют несколько типов нечетких правил. Мы будем рассматривать правила типа синглтон, в которой выход имеет вид:

$$y_1 = r_1,\ r_1 \in \Re .$$

Таким образом, для синглтона не требуется проводить отдельно процедуру дефаззификации, т.к. результатом является вещественное число.

Работу нечеткой системы, использующей множество правил типа синглтон можно представить следующим образом:

1. Фаззификация входного вектора.
2. Поиск правила, для которого антецедент является истинным.
3. Присвоение значения выходной переменной *y*.

Здесь следует обратить внимание на несколько моментов. В силу того, что в п. 2 выбирается единственное правило-победитель правила должны иметь «непересекающиеся» антецеденты, т.е. не должно быть правил, в которых антецеденты одновременно становятся истинными. Для множества правил типа синглтон это логично: если истинными являются два или более правил, то возникает коллизия в плане определения значения выходной переменной, для разрешения которой нет стандартных рецептов. На практике это означает, что наборы нечетких переменных, используемых в антецедентах, *должны отличаться для любой пары правил*.

1.6.4. Настройка параметров нечеткой системы

Задача настройки параметров (идентификации) нечеткой системы заключается в подборе значений переменных, определяющих характеристики используемых функций принадлежности, и доставляющих оптимальное значение целевой функции.

Вид целевой функции зависит от рассматриваемой задачи и данных, используемых для идентификации нечеткой системы. Эти данные можно назвать обучающими, по аналогии с решением задач классификации и аппроксимации.

К настоящему времени разработано большое число методов оптимизации параметров нечетких систем с правилами типа синглтон. Ряд из них используют традиционные методы на основе градиентного обучения. Есть большое количество публикаций, в которых для подбора параметров применяются эволюционные алгоритмы.

1.6.5. О задании лингвистических переменных

В приведенном ранее, в одном из подразделов, условии об отличии антецедентов в нечеткой системе с правилами типа синглтон есть «двойное дно». Что делать, если входные переменные таковы, что соответствующее им множество нечетких переменных не встречается ни в одном правиле? На этот вопрос нет однозначного ответа. Можно пытаться интерполировать, найдя наиболее близкие правила. В ряде случаев стараются заранее сформулировать все возможные правила для данного набора входных переменных, чтобы избежать подобных «дыр» в базе правил. Однако отсюда вытекает следующая проблема. Вспомним, что для фаззификации для каждой четкой переменной создается лингвистическая, которая характеризуется набором функций принадлежности. Если обозначить количество функций принадлежности для в *i*-й лингвистической переменной за n_i, то окажется, что общее количество нечетких правил, необходимое, чтобы поиск правила в п.2 всегда заканчивался однозначно, должно быть

$$\prod_i n_i .$$

Например, для 5 входных переменных, для каждой из которых лингвистическая переменная описывается 3-мя функциями принадлежности, количество правил будет равно 3^5 = 243. Но если «сделать» для каждой лингвистической переменной уже по 5 функций принадлежности, то количество необходимых нечетких правил вырастет до 5^5 = 3125. Понятно что эта величина растет очень быстро.

Но много ли это, 5 функций принадлежности на лингвистическую переменную? Общего ответа на этот вопрос не существует, однако можно сказать, что чем больше функций принадлежности в лингвистической переменной, тем более точно должна работать хорошо настроенная нечеткая система, т.к. в ней будут учтены различные специфичные случаи. В то же время увеличение числа функций принадлежности помимо потенциального «раздувания» базы правил может привести к аналогу переобучения, встречаемого в нейронных сетях. Представим, что используемые для настройки параметров нечеткой системы данные содержат ошибки и неточности. При небольшом числе функций принадлежности эти ошибки могут «сглаживаться», однако если функций принадлежности становится много, имеющиеся ошибки в данных начинают запоминаться, что не будет способствовать повышению качества работы нечеткой системы в целом.

Поэтому важен выбор количества функций принадлежности, описывающих лингвистическую переменную.

1.6.6. Нечеткие системы для принятия решений

Одной из задач, для которых применяют нечеткие системы является задача принятия решений. Возможность описания исходных данных в нечетком виде представляет в ряде случаев преимущество с точки зрения «естественности». Для многих специалистов при принятии решений (управление сложными системами или механизмами, медицинская диагностика и др.) характерно использование правил, опирающихся на трудноформализуемые понятия, такие как «чуть выше», «уменьшается», «более плотный». Эти понятия невозможно описать с использованием традиционных математических моделей и можно с некоторой степенью точности представить с применением вероятностного подхода. В рамках же нечетких систем для таких понятий хорошо подходят лингвистические переменные.

Общая последовательность действий для формирования нечеткой системы для принятия решений выглядит следующим образом:

1. **Сбор данных** от специалиста путем опроса, интервью, наблюдения за его действиями в жизни, моделированием различных

проблемных ситуаций[6]. Полученные данные формализуются и разбиваются на *обучающее* и *тестовое* множество. Каждый пример из обучающего и тестового множеств представляет собой пару <входные данные, решение эксперта> и описывает выбор эксперта для каждого конкретного случая.

2. **Подбираются параметры** нечетких правил, характеризующих лингвистические переменные. В качестве таких параметров выступают: вид и количество функций принадлежности для каждой переменной, параметры алгоритма идентификации нечеткой системы.

3. **Настройка** численных параметров правил. Целью является такой подбор параметров нечетких правил, чтобы нечеткая система воспроизводила те же самые решения, которые присутствуют в обучающем множестве.

4. **Тестирование** полученной нечеткой системы на тестовом множестве. Смысл разделения данных на непересекающиеся обучающее и тестовое множества заключается в том, чтобы проверить *обобщающие способности* нечеткой системы принятия решений. Другими словами хорошая система должна работать и на обучающих данных, на которых она училась, и на «незнакомых» данных. Тем самым производится попытка оценить качество работы системы в реальной ситуации, когда правильное решение неизвестно. Если результаты тестирования оказываются неудовлетворительными, то выясняют возможные причины этого, и производится возврат на соответствующий предыдущий этап.

Это лишь общее описание процедуры формирования нечеткой системы. Существует еще множество тонкостей, связанных с формированием обучающих и тестовых данных, синтезу и выбору параметров нечеткой системы, ее тестированием. Однако эти тонкости выходят за рамки данного курса.

[6] Вообще говоря, существует отдельная профессия, «инженер по знаниям», представители которой занимаются вопросами извлечения и формализации экспертных знаний.

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

1. В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1, Д-2, Д-3 и Д-4. Данные о типах домов приведены в табл. 32.

Таблица 32

Тип квартир	Тип дома			
	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Однокомнатные	10	18	20	40
Двухкомнатные	40	30	20	–
Трехкомнатные	60	90	10	–
Четырехкомнатные	20	10	–	10
Плановая себестоимость, тыс. д.е.	800	550	360	450

Годовой план ввода жилой площади составляет соответственно 800, 1000, 900 и 200 квартир указанных типов. На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений в размере 40 млн. д.е. Определить оптимальный план строительства на финансовый год.

2. Один из цехов машиностроительного предприятия выпускает изделия двух видов: корпуса и задвижки. Для производства этих изделий требуются три вида сырья: алюминий, сталь и пластмасса. На выпуск одного корпуса расходуется 20 кг алюминия, 10 кг стали и 5 кг пластмассы. На выпуск одной задвижки расходуется 5 кг алюминия, 5 кг стали и 20 кг пластмассы. Запасы ресурсов ограничены: за рабочую смену цех может израсходовать не более 200 кг алюминия, 250 кг стали и 500 кг пластмассы.

Выпуск одного корпуса приносит предприятию прибыль в размере 100 денежных единиц (д.е.), одной задвижки – 300 д.е.

Требуется составить оптимальный план работы цеха, т.е. найти, сколько корпусов и задвижек требуется выпускать, чтобы получить максимальную прибыль (при соблюдении ограничений на ресурсы).

3. Предприятие производит мелкие детали для промышленных изделий и продает их через 5 посреднических фирм по цене 2,50 ден. ед. за штуку. Коммерческие прогнозы указывают, что объем

месячных поставок составит: посреднику 1 – 3000 штук, посреднику 2 – 3000 штук, посреднику 3 – 10 000 штук, посреднику 4 – 5000 штук, посреднику 5 – 4000 штук.

Фирма располагает следующими производственными мощностями: завод 1 производит 5000 деталей в месяц, завод 2 – 10 000 деталей в месяц, завод 3 – 12 500 деталей в месяц.

Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 д.е., на заводе 2 – 0,90 д.е., на заводе 3 – 0,80 д.е.

Транспортные расходы, связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены в табл. 33.

Построить модель линейного программирования с целью определения оптимальных объемов продукции, подлежащих выпуску на каждом заводе данной фирмы, и количества деталей, поставляемых фирмой своим посредникам-оптовикам.

Таблица 33

Завод	Посредник				
	1	2	3	4	5
1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

4. Для строительства 3-х участков дорожной магистрали необходимо завозить песок. Песок может быть поставлен из 4-х карьеров. Перевозка песка из карьеров до участков осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от карьеров до участков, наличие песка в карьерах и потребность песка на участках дороги приведены в табл. 35.

Таблица 35

Песчаные карьеры	Участки дороги				Наличие песка, тыс. т
	I	II	III	IV	
I	1	8	2	3	30
II	4	7	5	1	50
III	5	3	4	4	20
Потребность в песке, тыс. т	15	15	40	30	–

Составить план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

5. Четыре растворных узла потребляют в сутки 170, 190, 230 и 150 т песка, который отгружается с трех песчаных карьеров. Суточная производительность карьеров равна соответственно 280, 240 и 270 т песка. Карьеры взимают плату за погрузку песка каждые сутки не с количества отгруженного материала, а с «факта» его отгрузки, куда входит стоимость погрузки, цена песка и транспортные расходы доставки потребителю при закреплении его за карьером. Стоимость перевозки 1 т песка от карьеров до растворных узлов приведена в табл. 36.

Таблица 36

Растворные узлы	Карьеры		
	1	2	3
1	9	15	6
2	10	8	9
3	7	4	12
4	5	10	13
Цена 1 т песка, д.е.	3	29	22
Суточная стоимость погрузки, д.е.	190	250	150

Найти оптимальный вариант закрепления растворных узлов за карьерами.

6. Предприниматель купил на свои сбережения акции четырех компаний. Эффективные процентные ставки доходности акций каждой компании: 16, 20, 24, 12%. Сравнить выгодность покупки для трех вариантов.

a. 1-й компании куплено акций на 50% сбережений, 2-й - на 15, 3-й - на 15, 4-й - на 20%.

b. 1-й - на 30%, 2-й - на 20, 3-й - на 20, 4-й - на 30%.

c. 1-й - на 20%, 2-й - на 30, 3-й - на 15, 4-й - на 35%..

7. При вложении капитала а мероприятие А из 100 случаев была получена прибыль: 400 тыс. руб. – в 30 случаях; 200 тыс. руб. – в 40; 250 тыс. руб. – в 30 случаях. При вложении капитала в мероприятие Б из 120 случаев была получена прибыль: 50 тыс. руб. – в 40 случаях; 100 тыс. руб. – в 15; 150 тыс. руб. – в 20; 220 тыс. руб. – в 25; 300 тыс. руб. – в 20 случаях. Выбрать вариант вложения капитала исходя из средней ожидаемой прибыли.

8. Имеются четыре варианта (проекта) оснащения предприятия современным техническим оборудованием. Определена экономическая эффективность каждого варианта (как некоторое состояние природы) в зависимости от рентабельности производства в четырех кварталах. Требуется выбрать лучший проект по оснащению предприятия, используя различные критерии.

Таблица 37

Варианты оснащения	Состояние природы			
	1	2	3	4
R_1	8	15	12	11
R_2	10	12	14	15
R_3	6	8	13	14
R_4	5	10	15	12

9. Необходимо выбрать модель летних шин для легкового автомобиля, характеризующуюся следующими частными критериями.

Таблица 38

Вид модели шин	Тормозной путь, м	Скорость потери управления на прямой при мокром асфальте, усл. ед.	Поперечное сцепление	прохождении извилистой трассы,	Удобство управления автомобилем на мокром асфальте, усл. ед.	Расход топлива, л	Уровень шума, дБ	Цена за шт., руб.
Barum Bravuris	31,5	96	14,7	53,5	8	1,1	7	2400
Continental PC	31,5	93	14,6	52,5	10	0,94	10	2960
Danlop SP	32,5	92	15	55	6	0,94	8	3570
Goodyear EV	31,5	98	14,6	53	7	1,0	10	3600
Michelin Energy	31	87	14,7	53,5	7	0,82	9	3000
Nokian NRH2	32,5	91	14,6	53	7	0,94	9	3320
Pirelli P6	30	90	14,8	52,5	9	1,11	10	3920
Весовой коэф-фициент	0,1	0,05	0,05	0,05	0,2	0,15	0,1	0,3

10. Следует выбрать сотовый телефон в ценовой категории от 100 до 150 д.е. Характеристики телефонов представлены в табл. 39

Таблица 39

Марка телефона	Цена, д.е.	Гарантия, год	Мелодии, количество	Игры, количество	Вес, г	Длина, мм	Ширина, мм	Толщина, мм	Дизайн, у.е
Alcatel	120	6	32	3	75	97	42	20	7
Ericsson	110	7	18	2	100	130	50	166	6
Nokia	125	4	42	5	133	113	48	22	8
Panasonic	150	4	30	2	80	106	44	16	9
Samsung	140	6	35	11	95	110	46	23	10
Fly	135	3	28	7	85	115	46	22	5
Весовой коэффициент	0,10	0,10	0,10	0,05	0,05	0,20	0,20	0,10	0,10

11. Магазин может завезти в различных пропорциях товары трех типов; их реализация и прибыль магазина зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь три состояния и не прогнозируется. Определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия максимизации средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибыли (табл. 39).

Таблица 39

Тип товара	Спрос		
	B_1	B_2	B_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

12. Двое подозреваемых, А и Б, арестованы. У полиции нет достаточных доказательств для обвинения, и изолировав их друг от друга, они предлагают им одну и ту же сделку: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается, а второй получает 10 лет тюрьмы. Если оба молчат, у полиции мало доказательств, и они приговариваются к 6 месяцам. Если оба свидетельствуют против друг друга, они получают по 2 года. Каждый заключённый выбирает, молчать или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них не знает точно, что сделает другой. Что произойдёт?

13. Рассмотрим игру, в которой участвуют государство и налогоплательщик. Доход налогоплательщика равен 4 единицам. Государство выбирает уровень подоходного налога: высокий (В=50%) либо низкий (Н=25%). Налогоплательщик может честно заплатить налог, а может уклониться от его уплаты. Если он решает не платить налоги, то с вероятностью 50% налоговые органы обнаруживают это и заставляют его заплатить весь налог и дополнительно внести в казну штраф в размере 1 единица. Выигрыш государства – это ожидаемый объем налоговых поступлений, а выигрыш налогоплательщика – его ожидаемый доход (после уплаты всех налогов и штрафов). Постройте матрицу игры и найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях. А каково будет равновесие Нэша, если вероятность поимки составит 75%

14. Два конкурирующих продавца мороженого независимо выбирают места для своих ларьков на улице длиной 3 км. Цена у обоих продавцов составляет $0,40 за порцию. Потребители равномерно распределены вдоль всей улицы. Прохождение 1 км пешком эквивалентно затрате $0,10. Покупатель готов заплатить за мороженое $1,00. Если расстояния до ларьков одинаковы (в частности, если ларьки находятся в одной точке), то место покупки выбирается случайно и равновероятно. Найти все равновесные расположения ларьков (в чистых стратегиях).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Анализ чувствительности решения задачи линейного программирования (с. 9).
2. Критерии Ходжа-Лемана, Гермейера, произведений для задачи многокритериального принятия решений (с. 32)
3. Нечеткие множества и переменные (с. 48).
4. Нечеткие правила (с. 50)
5. Нечеткие системы с правилами типа синглтон. Настройка параметров нечеткой системы. (с. 51).
6. Проблемы определения лингвистических переменных (с. 52).
7. Нечеткие системы для принятия решений (с. 53).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Воронов Е.М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений: Учебное пособие для вузов/ Евгений Михайлович Воронов. - М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. - 576 с.
2. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для вузов/ А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская; Ред. Б.А. Лагоша. - 2- изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 224 с.
3. Салмина Н.Ю. Моделирование систем: Учебное пособие для вузов/ Нина Юрьевна Салмина; Министерство образования Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. - Томск: ТУСУР, 2002. – 197 с.
4. Турунтаев Л.П. Теория принятия решений: Учебное пособие для вузов/ Л. П. Турунтаев; Министерство образования Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. - Томск: ТУСУР, 2003. - 222 с.

Дополнительная литература

1. Гилл Ф. Практическая оптимизация: пер. с англ./ Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт; пер. В. Ю. Лебедев, ред. пер. А. А. Петров. - М.: Мир, 1985. - 509 с.
2. Идрисов Ф.Ф. Введение в теорию игр: Учебное пособие/ Фарит Фатыхович Идрисов; МОРФ. ТГПУ. - Томск: ТГПУ, 2000. – 52 с.
3. Применение математических методов и ЭВМ. Планирование и обработка результатов эксперимента: Учебное пособие для вузов/ А.Н. Останин [и др.]; ред. А.Н. Останин. - Минск: Вышэйшая школа, 1989. - 217 с.
4. Кини Р.Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./ Р. Л. Кини, Х. Райфа; пер. В. В. Подиновский, пер. М.Г. Гафт, пер. В.С. Бабинцев, ред. пер. И.Ф. Шахнов, послесл. Г.С. Поспелов. - М.: Радио и связь, 1981. - 560 с.