МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

_________________ И. Г. Боровской

«___» ____________________ 2012 г.

Е.А. ПАНАСЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания по выполнению лабораторных работ

для студентов 230200 «Информационные системы»

2012

Панасенко Е.А. Моделирование систем – Томск: Изд-во ТУСУР, 2012. – 12 с.

Учебно-методическое пособие посвящено основам моделирования систем. Излагаются принципы математического и компьютерного моделирования систем. Представлено описание практических работ, посвященных изучению математических основ и программных средств моделирования систем. В рамках практических занятий изучаются основные принципы построения моделирующих алгоритмов и методов.

СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
по дисциплине «Моделирование систем» и руководство по выполнению (16 часов)
для студентов 230200 «Информационные системы»

Краткое содержание тем и результатов их освоения

Тема практических занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:
1.Визуализация решения уравнений параболического и гиперболического типа	• *знакомится* с дискретными моделями и элементарными понятиями теории разностных схем; • *разрабатывает* явную разностную схему; • *реализует* математическую модель на ЭВМ;
2. Решение уравнения теплопроводности с использованием неявной разностной схемы	• *знакомится* с неявными разностными схемами и методом прогонки; • *реализует* численное решение уравнения теплопроводности с использованием разностных схем и современных языков программирования; • *проводит анализ* результата численного моделирования;

ХОД ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры – М., Физматлит, 2002.- 320с.
2. Горстко А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием - М.: Знание, 1991.- 160 с.

Дополнительная литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики - М., Наука, 1980 - 352с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем - М., Наука, 1983.- 616с.

3. Ознакомиться с принципом выполнения заданий во время практических занятий.
4. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе, если он входит в форму отчетности по данному разделу знаний.

Замечание. В методических указаниях использовался материал вышеуказанной основной и дополнительной литературы, а также материал других источников и интернет-ресурсов:

1) http://fmi.asf.ru/Library/Book/SimModel/Glava1.HTML
2) http://stratum.ac.ru/textbooks/modelir/contents.html
3) Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. Учебное пособие. М.:Финансы и статистика, 2002 – 145 с.

Введение

Моделирование (в широком смысле) является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей (аналитических и имитационных), реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

Вместе с тем, моделирование систем как раздел науки имеет свой предмет исследования, который возник в связи с задачами автоматизированного управления и проектирования сложных систем в ядерной энергетике, космической технике, промышленности, военной технике и в других областях. Метод исследования основан на имитационном моделировании систем с помощью ЭВМ.

Лабораторная работа №1

Визуализация решения уравнения параболического и гиперболического типа

(8 часов).

Цель работы: познакомиться с дискретными моделями и элементарными понятиями теории разностных схем. Научиться строить явные разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и *называются дифференциальными уравнениями в частных производных*. К сожалению, очень многие из таких уравнений не имеют аналитического решения, и чтобы решить их, приходиться прибегать к численным методам. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно используется *метод конечных разностей.*

Метод конечных разностей

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей состоит в следующем:

1. Построение в области решения равномерной сетки, содержащей *n* узловых точек (рисунок 1).

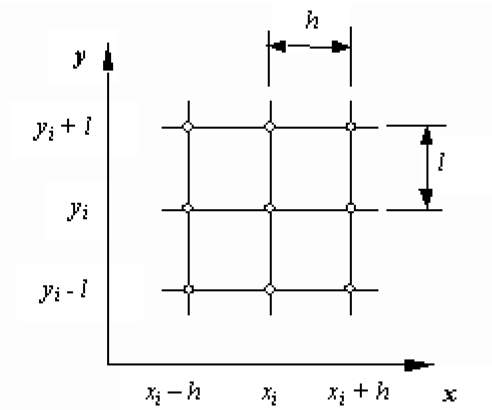

Рисунок 1

2. Представление производных в конечно-разностной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2l}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{l^2}$$ и т. д.,

где $f_{i,j}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i-1,j}$, $f_{i,j+1}$, $f_{i,j-1}$ - значения функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_j), $(x_i + h, y_j)$, $(x_i - h, y_j)$, $(x_i, y_j + l)$, $(x_i, y_j - l)$ соответственно.

Такие разностные уравнения записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему из *n* уравнений с *n* неизвестными.

3. Решение полученной системы с целью получения приближённого решения в узлах сетки.

Гиперболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения гиперболического типа является *волновое уравнение.* К исследованию волнового уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала и т. п.

Рассмотрим одномерное уравнение колебаний струны. В области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

Искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять *начальным условиям:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

$u(x,0)=\varphi(x)$, $0 \le x \le l$

и *граничным условиям:*

$u(0,t)=\mu_1(t)$, $u(l,t)=\mu_2(t)$, $0 \le t \le T$. (4)

Совокупность начальных и граничных условий называется *краевыми условиями*. Для построения разностной схемы решения задачи (2) - (4) построим в области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ сетку $x_i = ih$, $i = 0, 1, ..., n$, $t_j = j\tau$, $j = 0,1,...,m$, $T = \tau m$ и аппроксимируем уравнение (2) в каждом внутреннем узле сетки на шаблоне "крест" (Рисунок 2).

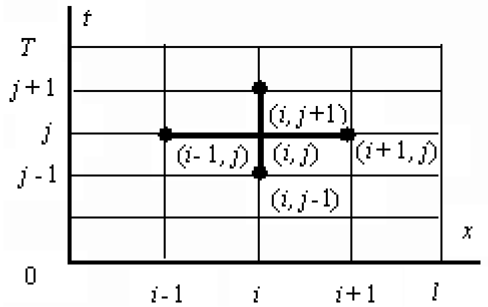

Рисунок 2. Шаблон для волнового уравнения

Используя для аппроксимации частных производных выражения (1), получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (2):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \tag{5}$$

Решая уравнение (6) относительно единственного неизвестного значения $u_{i,j+1}$, получаем следующую схему:

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \tag{6}$$

$\lambda^2 = a^2\tau^2/h^2$, $i = 1,..., n$-1, $j = 1,..., m$-1.

Схема (6) называется *трехслойной* потому, что связывает между собой значения $u_{i,j}$ функции $u(x, t)$ на трех временных слоях с номерами: j-1, j, $j + 1$. Схема (6) является *явной*, т.е. позволяет в явном виде выразить $u_{i,j}$ через значения u с предыдущих двух слоев.

Для начала счета по схеме (6) необходимы значения $u_{i,j}$ функции $u(x, t)$ на нулевом ($j = 0$) и первом ($j = 1$) временных слоях. Они определяются начальными условиями (3) и записываются в виде:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i),\quad \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\tau} \approx \psi(x_i) \Rightarrow u_{i,1} = u_{i,0} + \tau\psi(x_i),\quad i = 0, 1, ..., n. \tag{7}$$

Граничные условия (4) также записываются в сеточном виде:

$$u_{0,j} = \mu_1(t_j),\quad u_{n,j} = \mu_2(t_j),\quad j = 0, 1, ..., m. \tag{8}$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (2) - (4) сводится к решению разностной задачи (6) - (8).

Параболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения параболического типа является *уравнение теплопроводности*, или *уравнение Фурье.* К исследованию уравнения теплопроводности, или уравнения Фурье, приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, некоторые вопросы теории вероятностей.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержне длины l, на концах которого поддерживается заданный температурный режим. Задача состоит в отыскании функции $u(x, t)$, удовлетворяющей в области $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0 \tag{9}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{10}$$

и *граничным условиям*

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t) \tag{11}$$

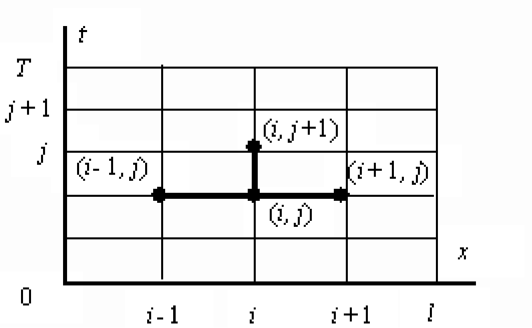

Рисунок 3. Шаблон для уравнения теплопроводности

Построим в области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ равномерную прямоугольную сетку с шагом h в направлении x и шагом τ - в направлении t (рисунок 3).

Аппроксимируем дифференциальную задачу (9) - (11) на четырехточечном шаблоне, в результате получаем *явную двухслойную разностную схему*:

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}, \quad i = 1, 2, ..., n - 1, j = 0, 1, ..., m - 1$$

$$u_{i,0} = \varphi(x_i),\ i = 0, 1, ..., n,$$

$$u_{0,j} = \mu_1(t_j),\ u_{n,j} = \mu_2(t_j),\ j = 0, 1, ..., m, \tag{12}$$

$$\lambda = \frac{a\tau}{h^2}.$$

Задание. Создать Windows-приложения для визуализации решений одномерных нестационарных уравнений параболического и гиперболического типа. Приложение должно быть реализовано в виде SDI приложения, расчет моделируемого процесса производится в рабочем потоке, визуализация – в интерфейсном потоке. Визуализация должна быть реализована в виде графика, иллюстрирующего текущее распределение моделируемой величины по пространственной координате (8 часов).

Лабораторная работа №2

Решение уравнения теплопроводности с использованием неявной разностной схемы

(8 часов)

Цель работы: познакомиться с неявными разностными схемами и методом прогонки. Реализовать численное решение уравнения теплопроводности с использованием разностных схем и современных языков программирования.

Постановка задач для уравнений параболического типа

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности. В одномерном по пространству случае однородное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \; t > 0 \tag{13}$$

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения искомой функции $u(x,t)$ в виде:

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \; t > 0, \tag{14}$$

$$u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \; t > 0, \tag{15}$$

то говорят, что задача имеет граничные условия первого рода. Если при этом заданы начальные условия

$$u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \; t = 0, \tag{16}$$

то задачу (13)-(16) называют первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (13).

В терминах теории теплообмена *u(x,t)* - распределение температуры в пространственно-временной области $\Omega \times \mathrm{T} = \{0 \le x \le l; 0 \le t \le T\}$, a^2 — коэффициент температуропроводности, а выражения (14), (15) с помощью функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ задают температуру на границах $x = 0$ и $x = l$.

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = 0, \; t > 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad x = l, \; t > 0, \tag{18}$$

то говорят, что задача имеет граничные условия второго рода.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \alpha u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \; t > 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \beta u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \; t > 0, \tag{20}$$

то такие граничные условия называют граничными условиями третьего рода.

Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности

Нанесем на пространственно-временную область $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ конечно разностную сетку $\omega_{h,\tau}$: $\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh, j = \overline{0,N}; t^k = k\tau, k = \overline{0,K}\}$ с пространственным шагом *h=l/N* и шагом по времени τ=T/K.

На введенной сетке введем сеточные функции u_j^k, u_j^{k+1} первая из которых известна, вторая подлежит определению. Для определения в задаче (13)-(16) заменяют (аппроксимируют) дифференциальные операторы отношением конечных разностей и получают:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{\tau} + O(\tau), \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2) \tag{22}$$

Подставляя (21)-(22) в задачу (13)-(16), получим явную конечно-разностную схему.

Если в (22) дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \tag{23}$$

то после подстановки (21), (23) в задачу (13)-(16) получим неявную конечно-разностную схему для этой задачи:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2\,\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2),\\
&j = \overline{0, N-1}, k = \overline{0, K-1};\\
&u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), k = \overline{0, K};\\
&u_j^0 = \psi_1(x_j), j = \overline{0, N}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Теперь сеточную функцию u_j^{k+1} на верхнем временном слое можно получить из решения (24) с трехдиагональной матрицей.

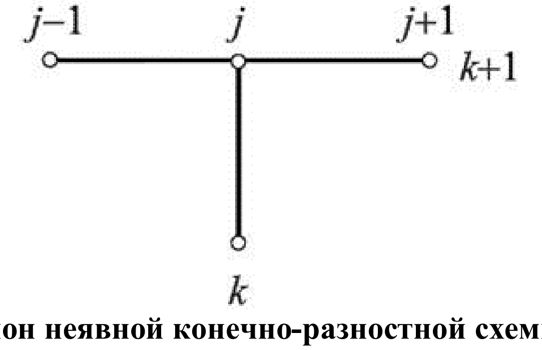

Рисунок 4. Шаблон неявной конечно-разностной схемы для уравнения теплопроводности

В случае явных схем значения функции в узле очередного слоя можно найти, зная значения в узлах предыдущих слоев. В случае неявных схем для нахождения значений решения в узлах очередного слоя приходится решать систему уравнений. Для проведения вычислений самой простой схемой оказывается первая: достаточно на основании начального условия найти значения функции в узлах слоя $j = 0$, чтобы в дальнейшем последовательно определять значения решения в узлах слоев $j = 1, j = 2$ и т.д. В случае второй схемы, которая является неявной, обязательно приходится решать систему уравнений для нахождения решения сеточной задачи. В любом случае согласно методу сеток будем иметь столько уравнений, сколько имеется неизвестных (значения искомой функции в узлах). Число неизвестных равно числу всех узлов сетки. Решая систему уравнений, получаем решение поставленной задачи.

Разрешимость этой системы для явных схем вопросов не вызывает, так как все действия выполняются в явно определенной последовательности. В случае неявных схем разрешимость системы следует исследовать в каждом конкретном случае. Важным вопросом является вопрос о том, на сколько найденные решения хорошо отражают точные решения, и можно ли неограниченно сгущая сетку (уменьшая шаг по осям) получить приближенные решения, сколь угодно близкие к точным решениям? Это вопрос о сходимости метода сеток.

На практике следует применять сходящиеся разностные схемы, причем только те из них, которые являются устойчивыми, то есть при использовании которых небольшие ошибки в начальных или промежуточных результатах не приводят к большим отклонениям от точного решения. Всегда следует использовать устойчивые разностные схемы, проводя соответствующие исследования на устойчивость. Явные схемы просты для организации вычислительного процесса, но имеют один весьма весомый недостаток: для их устойчивости приходится накладывать сильные ограничения на сетку. Неявные схемы свободны от этого недостатка, но есть другая трудность – надо решать системы уравнений большой размерности, что на практике при нахождении решения сложных уравнений в протяженной области с высокой степенью точности может потребовать больших объемов памяти ЭВМ и времени на ожидание конечного результата. К счастью, прогресс не стоит на месте и уже сейчас мощности современных ЭВМ вполне достаточно для решения поставленных перед ними задач.

Метод прогонки

Для более удобной записи метода прогонки для уравнения теплопроводности, перепишем СЛАУ (24) в следующем виде:

$$U_{i-1}^{j+1} - (2+s)U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1} = -sU_i^j, \quad i = 1,2,..,n-1, \qquad (25)$$

где $h^2 = s \cdot \tau$.

Из граничных условий получим: $U_0^{j+1} = \varphi_1(t_{j+1}),\ U_n^{j+1} = \varphi_2(t_{j+1})$.

В результате получим систему n-1 линейных алгебраических уравнений, которую будем решать методом прогонки.

$U_i^{j+1} = A_i U_{i+1}^{j+1} + B_i$ или $U_{i-1}^{j+1} = A_{i-1} U_i^{j+1} + B_{i-1.}$

После подстановки последних выражений в (25), получим

$$A_{i-1}U_i^{j+1} + B_{i-1} - (2+s)U_i^{j+1} = -U_{i+1}^{j+1} - sU_i^j,$$

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2+s-A_{i-1}} U_{i+1}^{j+1} + \frac{sU_i^j + B_{i-1}}{2+s-A_{i-1}}.$$

Выражения для прогоночных коэффициентов A_i, B_i для $i = 2,3,...n$-1

$$A_i = \frac{1}{2+s-A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{sT_i^j + B_{i-1}}{2+s-A_{i-1}}.$$

При i=1 из (25) получим:

$$U_0^{j+1} - (2+s)U_1^{j+1} + U_2^{j+1} = -sU_1^j,$$

$$A_1 = \frac{1}{2+s},\ B_1 = \frac{U_0^{j+1} + sU_1^j}{2+s}.$$

Прямым ходом вычисляем прогоночные коэффициенты A_i, B_i, i=1, 2, …n-1. Обратным ходом вычисляются значения температур на j+1 временном слое для i=n-1, n-2, …,1.
Задание. Решить уравнение теплопроводности с граничными условиями I и II рода конечно-разностным методом, используя неявную разностную схему, которая разрешается методом прогонки. При реализации используется программа из практического занятия 1.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение процесса моделирования.
2. Что такое модель?
3. Свойства моделирования.
4. Сформулируйте основные этапы построения модели.
5. Назовите функции моделей.
6. Каковы этапы процесса решения экономических задач?
7. Основные разновидности процесса моделирования.
8. Чем отличаются граничные условия I, II и III рода?
9. Какие уравнения называются уравнениями парабалического, гиперболического и эллиптического типов?
10. Чем отличаются явные и неявные разностные схемы?
11. Как влияет размер шага расчета на точность решения дифференциальных уравнений?
12. Запишите в разностной форме частную производную 1, 2 порядка. Приведите примеры разностных сеток и порядок вычисления их узлов.
13. Какие понятия, показатели и параметры описывают систему массового обслуживания? Как построить временную диаграмму имитации работы системы массового обслуживания?
14. Приведите примеры областей использования математического моделирования. Какие задачи решаются на основе математического моделирования?
15. Перечислите основные методы математического моделирования. Приведите примеры систем, для моделирования которых используются перечисленные методы.
16. Какие основные подходы используются при построении математических моделей систем? Условия использования и особенности каждого подхода. Приведите примеры.
17. В чем сущность имитационного моделирования? Какие основные проблемы возникают в ходе имитационного моделирования системы?
18. В каких случаях при моделировании системы предпочтительнее использовать аналитические методы, в каких случаях – имитационные методы?