МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Л.И. Магазинников,
А.Л. Магазинникова

Линейная алгебра
Аналитическая геометрия

Учебное пособие

Томск 2010

УДК
ББК

Рецензенты:
кафедра высшей математики Сибирского гос. мед. ун-та, зав. каф. д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Свищенко;
канд. физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики Томского политехн. ун-та Е.Т. Ивлиев.

Магазинников Л.И.
Магазинникова А.Л.
Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2010. — 176 с.

ISBN

Изложен материал по линейной алгебре и аналитической геометрии в объёме, предусмотренном ныне действующей программой втузов. Отличительной особенностью является широкое использование матричного аппарата. Теоретический курс дополнен многочисленными иллюстративными примерами и контрольными заданиями, которые можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля. В пособие включены методические указания, в которых приведены решения типичных задач, подобных вошедшим в контрольные работы.

Для студентов заочных факультетов и студентов, обучающихся по дистанционной форме.

Учебное издание

Магазинников Леонид Иосифович,
Магазинникова Анна Леонидовна
Линейная алгебра. Аналитическая геометрия

Редактор
Технический редактор
Корректор

ISBN

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Кафедрой высшей математики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники для студентов дистанционной и заочной форм обучения по курсу высшей математики подготовлены учебные пособия в пяти частях, каждая из которых охватывает материал соответствующего семестра.

В предлагаемом пособии изложены сведения по линейной алгебре и аналитической геометрии, изучаемые в первом семестре. Отличительной чертой пособия является широкое использование матричного аппарата, поэтому изложение начинается введением понятия матрицы и действий над матрицами. После чего изучаются определители порядка n, обратные матрицы и решение матричных уравнений. Один из подразделов посвящён изучению конечномерных линейных пространств (глава 3).

Матричный аппарат позволяет довольно компактно изложить теорию систем линейных уравнений, что и проделано в главе 4. В качестве примера линейных пространств приведены некоторые сведения из алгебры геометрических векторов как направленных отрезков. Разделом, переходным от курса алгебры к математическому анализу, является раздел, посвященный изучению функций в линейных пространствах (линейных операторов, линейных, билинейных и квадратичных форм). При этом используется аппарат тензорных обозначений.

В седьмой главе кратко изучаются некоторые геометрические объекты: прямая на плоскости и в пространстве, плоскости, кривые и поверхности второго порядка.

В восьмой и девятой главах рассмотрены методы решения задач по линейной алгебре и аналитической геометрии с целью оказать помощь студентам успешно выполнить контрольные работы.

В заключительной главе приведены задания для двух контрольных работ, в десяти вариантах каждое. Предусмотрена возможность их выполнения в режиме автоматизированного самоконтроля при наличии устройства “Символ” или его компьютерного аналога.

1. Матрицы и действия над ними

Линейная алгебра — один из разделов математики, в котором изучается важнейшая математическая структура — конечномерные линейные пространства, а также их линейные и полилинейные отображения. Основным инструментом при этом является теория матриц и систем линейных уравнений, широко применяемая как в математике, так и в других науках.

1.1. Понятие матрицы. Некоторые виды матриц

Некоторые виды информации удобно представлять в виде таблиц чисел. Предположим, например, что четыре завода 1, 2, 3, 4 производят пять видов продукции, которые также можно пронумеровать числами 1, 2, 3, 4, 5. Через a_k^i $(k = 1,2,3,4,5,\ i = 1,2,3,4)$ обозначим количество продукции с номером k, которое произвёл завод с номером i. Можем составить таблицу чисел

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Например, число a_3^4 означает количество продукции с номером 3, которое произвёл завод с номером 4. Объясните, что обозначено числами a_5^3, a_4^2, a_3^1. Какую информацию даёт сумма $a_1^1 + a_1^2 + a_1^3 + a_1^4$? Таблицы, подобные (1.1), широко встречаются в математике и получили название матриц.

Матрицей называется любая прямоугольная таблица чисел.

Произвольную матрицу можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают так: $A = [a_k^i]$ $(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n})$.

Числа a_k^i называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжён двумя индексами. Верхний индекс (i) означает номер строки, а нижний (k) — номер столбца, в которых расположен этот элемент. Например, элемент a_3^4 расположен в четвёртой строке и третьем столбце.

В матрице A имеются m строк и n столбцов. Будем говорить, что матрица A имеет размер $(m \times n)$. В матрице (1.1) имеются 4 строки и 5 столбцов, поэтому её размер (4×5).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*, а число её строк (или столбцов) называется *порядком* матрицы.

Запишем квадратную матрицу порядка n

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Говорят, что элементы $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$ образуют главную диагональ, а элементы $a_1^n, a_2^{n-1}, \dots, a_n^1$ — побочную. Квадратную матрицу, у которой элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называют *треугольной*. Матрица, не обязательно квадратная, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица вида

$$B = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

называется *диагональной*, а матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется *единичной*.

Мы познакомились с новым понятием — матрица. Рассмотрим некоторые операции над матрицами.

1.2. Равенство матриц

Две матрицы $A = [a_k^i]$ и $B = [b_k^i]$ одного размера называются *равными*, если равны их элементы, расположенные на одинаковых местах.

Таким образом, если матрицы A и B равны (пишут $A = B$), то $a_1^1 = b_1^1$, $a_1^2 = b_1^2$, …, $a_k^i = b_k^i$. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушается, то $A \neq B$.

1.3. Сложение матриц

Пусть даны две матрицы $A = [a_k^i]$ и $B = [b_k^i]$ одного размера. Суммой матриц A и B называется матрица $C = [c_k^i]$ (обозначают $C = A + B$) такая, что $c_k^i = a_k^i + b_k^i$.

Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах.

Пример 1. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Запомним, что складывать можно только матрицы одинакового размера. Для матриц разных размеров операция сложения не определена.

1.4. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = [a_k^i]$ на число λ называется матрица $B = [b_k^i]$ (обозначают $B = \lambda A$) такая, что для любых значений i и k выполняется равенство $b_k^i = \lambda a_k^i$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу A на число λ, нужно умножить все её элементы на число λ.

Пример 2. $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 5 & -7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -12 & 18 & 3 \\ 15 & -21 & -6 \end{bmatrix}.$

1.5. Умножение матриц

Пусть даны две матрицы A и B, размеры которых согласованы следующим образом: число столбцов (число элементов в строках) первой матрицы равно числу строк (числу элементов в столбцах) второй матрицы. Если матрица A имеет размер $(m \times n)$, то матрица B должна иметь размер $(n \times k)$. При этом числа m и k могут быть произвольными. Заметим, что из согласованности размеров матриц A и B не следует согласованность размеров B и A. Если же размеры матриц A и B, а также B и A согласованы и матрица A имеет размер $(m \times n)$, то матрица B имеет размер $(n \times m)$.

Пусть даны две матрицы A и B с согласованными размерами $(m \times n)$ и $(n \times l)$ соответственно. Произведением матриц $A = [a_i^k]$ и $B = [b_j^s]$ называется матрица $C = [c_p^q]$ (записывают $C = A \cdot B$) размером $(m \times l)$, элемент c_p^q которой равен сумме произведений элементов строки с номером q матрицы A на соответствующие элементы столбца с номером p матрицы B, т.е.

$$c_p^q = \sum_{i=1}^{n} a_i^q b_p^i = a_1^q b_p^1 + a_2^q b_p^2 + \cdots + a_n^q b_p^n, \ q = \overline{1, m}, \ p = \overline{1, k}. \qquad (1.2)$$

Предположим, что завод с номером q поставил потребителю с номером p продукцию с номером i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в количестве a_i^q тонн. Стоимость доставки одной тонны этой продукции указанному потребителю обозначим b_i^p. Тогда сумма (1.2) означает стоимость доставки всей продукции, поставленной заводом с номером q потребителю с номером p. Матрица C в этом случае даёт полную информацию о затратах всех заводов на доставку произведённой продукции потребителям.

Пример 3. Найдите произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Размеры матриц A и B согласованы, так как число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B. По формуле (1.2) находим

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 4 & 1\cdot 2 - 2\cdot 2 + 3\cdot 3 - 3\cdot 4 \\ -1\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & -1\cdot 2 - 3\cdot 2 - 2\cdot 3 - 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 6\cdot 2 - 3\cdot 4 & 4\cdot 2 - 5\cdot 2 + 6\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -5 \\ 4 & -23 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}. \quad \text{Получили матрицу размером } \ (3 \times 2).$$

В рассмотренном примере произведение матриц $B \cdot A$ не определено, так как размеры матриц B и A не согласованы.

Из определения произведения матриц следует, что если размеры матриц A, B и B, A согласованы, то в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если же A — квадратная, а E — единичная того же порядка, что и A, то, очевидно, $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Можно доказать, что рассмотренные операции над матрицами обладают свойствами:

$$\left.\begin{array}{c} (\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A), \\ (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A, \\ A + B = B + A, \\ \lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B, \\ A(BC) = (AB)C, \\ A(B + C) = AB + AC, \\ (A + B)C = AC + BC, \\ A(\lambda_1 B + \lambda_2 C) = \lambda_1 AB + \lambda_2 AC, \\ (\lambda_1 B + \lambda_2 C)A = \lambda_1 BA + \lambda_2 CA. \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

Свойства (1.3) справедливы для любых действительных чисел λ_1 и λ_2 и любых матриц A, B и C, для которых определены соответствующие операции.

Пример 4. Найдите матрицу $(2A + 3B) \cdot C$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя правила умножения матрицы на число и сложения матриц, находим

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем

$$(2A + 3B)C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 20 - 10 & -4 - 5 - 2 & 0 + 15 + 4 \\ -9 + 32 - 10 & -18 - 8 - 2 & 0 + 24 + 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -11 & 19 \\ 13 & -28 & 28 \end{bmatrix}.$$

Получена матрица размера (2×3).

Пример 5. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix}$ и

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Найдите матрицы $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

Убедитесь самостоятельно, что матрица C получается из A перестановкой второго и третьего столбцов, а D — перестановкой второй и третьей строк. Какую нужно взять матрицу B, чтобы произошла перестановка первых двух столбцов или первых двух строк?

2. Определители порядка n

2.1. Перестановки

Всякое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определённом порядке называется *перестановкой* из n чисел.

Перестановку будем обозначать $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Здесь каждое из α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ является одним из чисел $1, 2, \ldots, n$ и среди α_k нет одинаковых. Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Выберем в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ два числа α_i, α_j. Если большее из чисел α_i и α_j расположено левее меньшего, то говорят, что числа α_i и α_j образуют инверсию, или беспорядок. Перестановка называется *чётной*, если в ней имеется чётное число инверсий, и *нечётной*, если это число нечётно.

Например, перестановка (4,3,1,5,2) является чётной, так как в ней 6 инверсий: единица образует две инверсии (с четвёркой и тройкой), двойка образует три инверсии (с четвёркой, тройкой и пятёркой), тройка — одну инверсию (с четвёркой). После учёта предыдущих инверсий числа 4 и 5 инверсий не образуют. Всего имеем 2+3+1=6 инверсий. Перестановка (3,4,1,5,2) нечётна. В ней имеются 5 инверсий (подсчитайте самостоятельно).

Если в перестановке поменять местами два любых элемента, оставив все остальные на месте, то получим новую перестановку. Это преобразование перестановки называется *транспозицией*. Покажем, что всякая транспозиция меняет чётность перестановки. Действительно, если переставили рядом стоящие элементы α_k и α_{k+1}, то число инверсий изменится на единицу, т.е. перестановка из чётной превратится в нечётную или наоборот. Переставить два элемента α_k и α_{k+m+1}, между которыми содержится m других элементов, можно, совершив $(2m + 1)$ перестановок рядом стоящих элементов. При этом исходная перестановка изменит нечётное число раз свой характер, следовательно, перейдёт в перестановку из чётной в нечётную или из нечётной в чётную.

2.2. Понятие определителя порядка n

Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим произведение n элементов матрицы A, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n}. \tag{2.1}$$

Обозначим число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ через s, а в перестановке $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — через t. Заметим, что чётность числа $s+t$ не зависит от порядка сомножителей в этом произведении, так как при перестановке двух сомножителей каждая из перестановок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ перейдёт в перестановку противоположной чётности.

Два произведения вида (2.1) будем считать совпадающими, если они отличаются лишь порядком сомножителей, и различными, если они отличаются хотя бы одним сомножителем. Ясно, что число различных произведений вида (2.1) равно $n!$, т.е. числу всевозможных перестановок из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Определение. Определителем, или *детерминантом*, квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$ всех возможных различных произведений её элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца, в которой каждое произведение умножается на $(-1)^{s+t}$, где s — число инверсий в перестановке номеров строк, в которые входят сомножители, а t — число инверсий в перестановке из номеров столбцов.

Обозначается определитель так:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \ldots a^{\alpha_n}_{\beta_n}.$$

Слагаемые этой суммы называются членами определителя, а числа a^j_i — его элементами.

Замечание. Как видим, определитель — это число. Если говорят о строках или столбцах определителя, то имеют в виду строки или столбцы матрицы, которой соответствует этот определитель.

2.3. Определители второго порядка

Из элементов квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}$ можно образовать всего два различных произведения $a^1_1 a^2_2$ и $a^1_2 a^2_1$. Так как перестановка (1, 2) чётна, (2, 1) нечётна, то

$$D = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1.$$

Пример 1. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22.$

2.4. Определители третьего порядка

Из чисел 1, 2, 3 можно образовать $6 = 3!$ различных перестановок, три из них чётны, а три нечётны. Поэтому

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - \\ -a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3, \end{array}$$

поскольку перестановки $(1, 2, 3)$; $(2, 3, 1)$ и $(3, 1, 2)$ чётны, $(3, 2, 1)$; $(2, 1, 3)$ и $(1, 3, 2)$ нечётны.

Сумма D построена по правилу "треугольников": первое слагаемое есть произведение элементов матрицы, расположенных на главной диагонали, а два других — в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, четвёртое слагаемое является произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, а два последних состоят из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. Три последних слагаемых взяты со знаком "минус".

Пример 2. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = 13 + 17 + 49 + 91 + 17 - 7 = 180.$

2.5. Свойства определителей

Определение. Операция замены строк матрицы A её столбцами с теми же номерами и наоборот называется *транспонированием* матрицы. Полученная при этом матрица обозначается A^T и называется *транспонированной* по отношению к матрице A.

Свойство 1. При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения, т.е. $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Между множеством всех членов определителя матрицы A и определителя матрицы A^T можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу

$$(-1)^{s+t} a_{\beta_1}^{\alpha_1} a_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_n}^{\alpha_n} \leftrightarrow (-1)^{t+s} \tilde{a}_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{a}_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \tilde{a}_{\alpha_n}^{\beta_n},$$

где через $\tilde{a}^{\beta_i}_{\alpha_j}$ обозначены элементы матрицы A^T. Но $a^{\alpha_j}_{\beta_i} = \tilde{a}^{\beta_i}_{\alpha_j}$ по определению транспонированной матрицы. Поэтому соответствующие члены определителей $\det A$ и $\det A^T$ равны между собой, а потому справедливо равенство $\det A = \det A^T$.

Из свойства 1 следует, что любое свойство, доказанное для строк, справедливо и для столбцов (и наоборот).

Свойство 2. (Свойство антисимметрии). При перестановке двух строк матрицы её определитель меняет знак.

Доказательство. Обозначим исходный определитель D_1. Переставим в нём строки с номерами i и k. Полученный определитель обозначим D_2. Каждому члену

$$(-1)^{s+t} a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots a^{\alpha_i}_{\beta_i} \cdots a^{\alpha_k}_{\beta_k} \cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n}$$

определителя D_1 поставим в соответствие член

$$(-1)^{s_1+t} a^{\alpha_1}_{\beta_1} a^{\alpha_2}_{\beta_2} \cdots a^{\alpha_k}_{\beta_i} \cdots a^{\alpha_i}_{\beta_k} \cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n}$$

определителя D_2. Это соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Так как $a^{\alpha_k}_{\beta_i} = a^{\alpha_k}_{\beta_k}$, $a^{\alpha_i}_{\beta_i} = a^{\alpha_i}_{\beta_k}$, а числа s и s_1 имеют противоположную чётность, то соответствующие члены равны по модулю и отличаются знаком, следовательно, $D_1 = -D_2$.

Свойство 3. Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

Действительно, переставив две одинаковые строки, с одной стороны, мы ничего не изменим, т.е. $D_1 = D_2$. С другой стороны, по свойству 2 имеет место $D_1 = -D_2$, следовательно, $D_1 = -D_1$, а потому $D_1 = 0$.

Свойство 4. (Линейное свойство.) Если все элементы i-й строки матрицы A представлены в виде $a^i_j = \lambda b_j + \mu c_j$, где $j = 1, 2, \ldots, n$; i — фиксировано, то $\det A = \lambda \det B + \mu \det C$, где матрица B получена из A заменой i-й строки числами b_j, а C — числами c_j.

Доказательство. Каждый член определителя D будет содержать единственный множитель вида $(\lambda b_j + \mu c_j)$. Раскрываем и группируем произведения, содержащие λb_j, и отдельно — содержащие μc_j. После вынесения множителя λ из первой группы и множителя μ из второй группы получим требуемое.

Свойство 5. Если матрица $\tilde{A}$ получена из матрицы A умножением всех её элементов i-й строки на число λ: $\tilde{a}^j_i = \lambda a^j_i$, $j = \overline{1, n}$, i — фиксировано, то $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

Заметим, что $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Справедливость свойства следует из свойства 4 при $\mu = 0$.

Свойство 6. Определитель матрицы, содержащей две пропорциональные строки, равен нулю.

Справедливость свойства 6 следует из свойств 3 и 5.

Свойство 7. Если к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженной на некоторое число, то получим матрицу с тем же определителем.

Доказательство. Вновь полученный определитель по свойству 4 можно представить в виде суммы двух определителей, первый из которых будет исходным, а второй равен нулю, так как две строки его пропорциональны.

Свойство 8. Если все элементы некоторой строки матрицы равны нулю, то её определитель равен нулю.

Справедливость свойства следует из определения определителя.

Свойство 9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Предлагается проверить справедливость этой формулы для определителей второго порядка самостоятельно.

2.6. Понятия алгебраического дополнения и минора и связь между ними

Возьмём какой-нибудь элемент a_i^j матрицы, составим сумму всех тех членов определителя, в которые входит этот элемент в качестве сомножителя, и вынесем его за скобки. Выражение, оставшееся в скобках, называется *алгебраическим дополнением* элемента a_i^j и обозначается A_i^j.

Дан определитель матрицы порядка n. Определитель матрицы $(n-1)$ порядка, полученной из данной вычёркиванием её строки с номером j и столбца с номером i, называется *минором* $(n-1)$ порядка и обозначается M_i^j.

Для определителя третьего порядка можем записать

$$D = a_1^1(a_2^2a_3^3 - a_3^2a_2^3) + a_2^1(a_3^2a_1^3 - a_1^2a_3^3) + a_3^1(a_1^2a_2^3 - a_2^2a_1^3).$$

Поэтому $A_1^1 = (a_2^2a_3^3 - a_3^2a_2^3) = M_1^1$, $A_2^1 = (a_3^2a_1^3 - a_1^2a_3^3) = -M_2^1$, $A_3^1 = (a_1^2a_2^3 - a_2^2a_1^3) = M_3^1$.

Следовательно, для определителя третьего порядка имеет место

$$D = a_1^1M_1^1 - a_2^1M_2^1 + a_3^1M_3^1.$$

Теорема 1. Алгебраическое дополнение A_i^j и минор M_i^j связаны соотношением

$$A_i^j = (-1)^{i+j}M_i^j. \tag{2.2}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение для случая $i = j = 1$. Алгебраическое дополнение A_1^1 представляет сумму всех возможных произведений $(n-1)$ элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, кроме первой строки и первого столбца, причем произведение $a_2^{\alpha_2} \cdot a_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ берется со знаком $(-1)^{N(1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)}$, где $N(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — число инверсий в перестановке $1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Эти же произведения, и только они, входят в разложение минора M_1^1 (как определителя порядка $(n-1)$) со знаком $(-1)^{N(1,\alpha_2-1,\alpha_3-1,\ldots,\alpha_n-1)}$, так как порядковые номера строк и столбцов в миноре M_1^1 меньше на единицу по сравнению с их номерами в определителе D, но очевидно, что

$$N(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = N(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n) = N(\alpha_2-1,\alpha_3-1,\ldots,\alpha_n-1).$$

Поэтому произведения $a_2^{\alpha_2} \cdot a_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ входят в A_1^1 и M_1^1 с одинаковыми знаками.

Рассмотрим общий случай. Возьмем элемент a_i^j определителя. Переставляя $(i-1)$ раз столбцы и $(j-1)$ раз строки, переведем этот элемент в левый верхний угол. В результате получим новый определитель $\tilde{D}$, связанный со старым соотношением $\tilde{D} = (-1)^{i+j}D$. Поэтому $\tilde{A}_1^1 = (-1)^{i+j}A_i^j$. (Все обозначения с “волной” относятся к определителю $\tilde{D}$.) Очевидно, $M_i^j = \tilde{M}_1^1$. На основании доказанного (для случая $i=j=1$) $\tilde{M}_1^1 = \tilde{A}_1^1$. Поэтому $M_i^j = (-1)^{i+j}A_j^i$ или, что то же самое, $A_i^j = (-1)^{i+j}M_i^j$. Теорема доказана.

Теорема 2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) матрицы на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы, т.е.

$$D = a_1^j A_1^j + a_2^j A_2^j + \ldots + a_n^j A_n^j, \tag{2.3}$$

j — фиксировано.

Доказательство. Каждый член определителя входит в сумму (2.3) только один раз, так как каждый элемент из j-й строки войдёт в какой-нибудь член определителя в качестве только одного из сомножителей, т.е. сумма (2.3) состоит из тех же слагаемых, что и определитель.

О соотношении (2.3) говорят, что определитель D разложен по элементам j-й строки.

Теорема 3. Сумма всех произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Составим сумму $s = a_1^j A_1^i + a_2^j A_2^i + \ldots + a_n^j A_n^i$ произведений элементов j-й строки на алгебраические дополнения элементов i-й строки. Сумма s есть разложение по j-й строке определителя, у которого равны строки с номерами i и j.

Используя свойство 7 и формулы (2.2) и (2.3), вычисление определителя порядка n можно свести к вычислению одного определителя порядка $(n-1)$, для чего в какой-либо строке (или столбце) следует получить $(n-1)$ нулей, а затем разложить определитель по этой строке или столбцу. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 3. Найдите определитель $D = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

(прибавили ко второй строке третью, умноженную на 2, а из первой вычли третью, умноженную на 2). Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$D = 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 0 & -9 & -16 \\ 0 & -27 & -42 \end{vmatrix} = 20(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & -16 \\ -27 & -42 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 \cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = -360 \cdot (21 - 24) = 1080.$$

2.7. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* к заданной квадратной матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \qquad (2.4)$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель $\det A \neq 0$.

Из (2.4) и по девятому свойству определителей находим: $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$. Следовательно, $\det A \neq 0$. Таким образом, только невырожденные матрицы могут иметь обратные.

Теорема. Всякая невырожденная матрица $A = [a_i^j]$ имеет единственную обратную матрицу $B = [b_i^j]$, причём

$$b_i^j = \frac{A_j^i}{D}, \qquad (2.5)$$

где A_j^i — алгебраическое дополнение элемента a_j^i определителя $D = \det A$.

Матрицу $A^* = [A^{*j}{}_i]$, где $A^{*j}{}_i = A^i_j$, называют *присоединённой* для матрицы A.

Доказательство единственности матрицы A^{-1} опустим, проверим лишь справедливость формулы (2.5). Через c^q_p обозначим элементы матрицы $A \cdot B$. По определению произведения матриц (см. формулу (1.2)) находим

$$c^q_p = \sum_{i=1}^{n} a^q_i b^i_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{a^q_i A^p_i}{D} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} a^q_i A^p_i. \tag{2.6}$$

В формуле (2.6) записана сумма произведений элементов строки с номером q определителя $\det A$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов строки с номером p. Если $p \neq q$, то по теореме 3 из п. 2.6 эта сумма равна нулю, т.е. $c^q_p = 0$ при $p \neq q$. Если $p = q$, то по формуле (2.3) сумма (2.6) равна определителю $D = \det A$, следовательно, $c^p_p = 1$. Таким образом:

$$c^q_p = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q, \\ 1, & \text{если } p = q, \end{cases}$$

т.е. матрица $C = AB$ — единичная. Поэтому матрица $B = [b^j_i]$ является обратной к A. Аналогично можно показать, что $BA = E$.

Пример 4. Найдите обратную матрицу, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение. Находим сначала определитель этой матрицы $\det A =$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Матрица A невырожденная, а потому имеет обратную. Находим элементы присоединённой матрицы A^*:

$$\begin{aligned} &A^1_1 = 2, && A^2_1 = -12, && A^3_1 = 10, \\ &A^1_2 = -2, && A^2_2 = 17, && A^3_2 = -14, \\ &A^1_3 = 0, && A^2_3 = -2, && A^3_3 = 2. \end{aligned}$$

Используя формулу (2.5), записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & \dfrac{17}{2} & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности вычисления матрицы A^{-1} нужно перемножить матрицы A и A^{-1}. Если в результате получится единичная матрица, то обратная матрица найдена верно.

2.8. Решение матричных уравнений

Пусть матрица A невырожденная. Найдём матрицы X и Y из уравнений
$$AX = B; \tag{2.7}$$
$$YA = B. \tag{2.8}$$
Так как матрица A невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим слева обе части матричного равенства (2.7) на матрицу A^{-1}.

Получим
$$\begin{array}{cc} A^{-1}(AX) = A^{-1}B, & (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \\ EX = A^{-1}B, & X = A^{-1}B. \end{array}$$

Аналогично из равенства (2.8) находим
$$Y = BA^{-1}.$$

Заметим, что в силу некоммутативности операции умножения матриц решения матричных уравнений (2.7) и (2.8) различны. Если матрица A невырожденная, то каждое из этих уравнений имеет единственное решение.

Пример 5. Дано матричное уравнение $AX = B$, где
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Найдите матрицу X.

Решение. Находим $\det A = 1 \neq 0$. Так как матрица A невырожденная, то $X = A^{-1}B$.

Для отыскания A^{-1} находим элементы присоединённой матрицы:
$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 3, & A_1^2 = -4, & A_1^3 = -11, \\ A_2^1 = -2, & A_2^2 = 3, & A_2^3 = 9, \\ A_3^1 = 0, & A_3^2 = 0, & A_3^3 = 1. \end{array}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$X = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Предлагаем самостоятельно убедиться в правильности решения, найдя произведение матриц A и X. В результате должна получиться матрица B.

3. Линейные пространства

В математике изучаются множества объектов произвольной природы, над элементами которых установлены некоторые операции, удовлетворяющие определённым правилам. Такие множества вместе с введёнными операциями называют *математическими структурами.* Мы познакомимся с одной из важнейших структур, часто встречающейся в различных разделах математики и её приложениях: структурой линейного пространства.

3.1. Определение линейного пространства

Определение. Множество R элементов произвольной природы, впредь называемых векторами и обозначаемых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, называется линейным пространством, если:

1) имеется правило (внутренняя операция), позволяющее любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R сопоставить третий элемент $\mathbf{z}$ из R, называемый суммой элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначаемый $\mathbf{x}+\mathbf{y}$;

2) имеется правило (внешняя операция), позволяющее найти для каждого действительного или комплексного числа α и любого элемента $\mathbf{x}$ из R другой элемент $\mathbf{y}$ из R, называемый произведением $\mathbf{x}$ на число α и обозначаемый $\alpha\mathbf{x}$.

При этом правила (операции) 1 и 2 должны удовлетворять следующим условиям (аксиомам):

1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R (закон коммутативности);

2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из R (закон ассоциативности);

3) существует в R элемент $\mathbf{0}$ (нуль-вектор) такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R;

4) для каждого $\mathbf{x}$ из R существует в R элемент $\mathbf{y}$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}= \mathbf{0}$ (элемент $\mathbf{y}$ называется противоположным элементу $\mathbf{x}$);

5) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R;

6) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из R и любых действительных чисел α и β;

7) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ для любых чисел α и β и любого $\mathbf{x}$ из R;

8) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любого числа α.

Исходя из определения линейного пространства, можно доказать, что:

1) во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент;

2) для каждого элемента $\mathbf{x}$ имеется единственный противоположный элемент $\mathbf{y}$, который можно представить в виде $\mathbf{y}=(-1)\mathbf{x}$;

3) для всякого $\mathbf{x}$ из R выполняется $0\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Докажем, например, утверждение 1). Предположим, что в R существуют два нуль-вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Положив в третьей аксиоме определения линейного пространства $\mathbf{x} = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$, получим $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$. Если же положить $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_1$, то $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Но по первой аксиоме справедливо $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$, т.е. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

С одним из примеров линейных пространств вы уже знакомы. Это множество векторов, которое изучено в средней школе. Выполнимость аксиом 1 — 8 там установлена. Линейным пространством является множество всех действительных чисел с операциями сложения и умножения (заметим, что аксиомы 7 и 8 при этом совпадают). Линейное пространство образует также множество всех матриц одного и того же размера с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число, определёнными в пп. 1.3 и 1.4. Все аксиомы 1 — 8 при этом выполнены, так как они справедливы для чисел.

Наиболее часто применяются линейные пространства, элементами которых являются матрицы размером $(n \times 1)$, либо $(1 \times n)$. Эти линейные пространства называют *арифметическими* и обозначают R^n, либо R_n. В линейном арифметическом пространстве R^n матриц размером $(n \times 1)$ вектором является столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)^T,$$

а в арифметическом пространстве R_n матриц размером $(1 \times n)$ вектором является строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Над векторами-столбцами и векторами-строками вводят операции сложения и умножения на число, как над соответствующими матрицами, т.е. если

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ обозначают $\mathbf{0}$ и называют нулевым.

Векторы-строки и векторы-столбцы, как мы увидим позднее, отличаются тем, что преобразуются по разным законам при переходе от одной системы координат к другой. В вопросах же, не связанных с преобразованием систем координат, мы их различать не будем и для краткости те и другие будем записывать в виде строки, опуская знак транспонирования, и обозначать R^n или R_n.

Пример 1. В арифметическом линейном пространстве R^3 дано три вектора $\mathbf{a} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-2, 3, -4)$. Найдите вектор $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем: $2\mathbf{a} = (2, 4, -4)$, $4\mathbf{b} = (0, -4, 12)$, $-3\mathbf{c} = (6, -9, 12)$, $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = (8, -9, 20)$.

3.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Определение. Вектор $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Определение. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{3.1}$$

Если же соотношение (3.1) выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов был линейной комбинацией других.

Доказательство. Пусть система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима. Тогда имеет место соотношение (3.1), причём среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть не нули. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Из (3.1) находим $\mathbf{a}_1 = \left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_2 + \left(-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_3 + \ldots + \left(-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\mathbf{a}_n$, т.е. вектор $\mathbf{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ — линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$, т.е. $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ или $(-1)\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0$. Так как среди чисел $-1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть ненулевой (-1), то система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима.

По доказанной теореме векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ примера 1 из п. 3.1 линейно зависимы, так как вектор $\mathbf{d}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Следующие теоремы предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Теорема 2. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Теорема 3. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

3.3. Размерность линейных пространств. Базис и координаты

Определение. Линейное пространство называется n-мерным, если в нём существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов, линейно зависима.

Если в линейном пространстве существует бесконечная система линейно независимых векторов, то пространство называется *бесконечномерным.* Мы в данном разделе будем изучать лишь конечномерные линейные пространства размерности n и обозначать их R^n (либо R_n).

Определение. Любая линейно независимая система, состоящая из n векторов n-мерного линейного пространства R^n, называется *базисом* этого пространства, а входящие в него векторы называются *базисными.*

Теорема 4. Любой вектор линейного пространства R^n можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов фиксированного базиса.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — какой-либо базис R^n и $\mathbf{x}$ — произвольный вектор этого пространства. Система векторов $\mathbf{x}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, как система, состоящая из $(n+1)$ векторов n-мерного пространства, линейно зависима, а потому найдутся такие числа λ_0, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n, среди которых есть отличные от нуля, что имеет место равенство

$$\lambda_0\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Число $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ были бы линейно зависимы, что невозможно, поскольку они образуют базис. Поэтому из (3.2) следует

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\mathbf{f}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)\mathbf{f}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)\mathbf{f}_n, \tag{3.3}$$

т.е. вектор $\mathbf{x}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Докажем единственность линейной комбинации (3.3). Предположим, что $\mathbf{x}$ представлен двумя линейными комбинациями вида

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n,$$
$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \beta_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{f}_n.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{f}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{f}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{f}_n = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Так как векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ линейно независимы, то из (3.4) следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$. Теорема доказана.

Определение. Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\mathbf{x}$ выражается через базисные векторы, называются координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно данного базиса.

Таким образом, если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — базис и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \ldots + x_n\mathbf{f}_n$, то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса. Пишут $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из теоремы 4 следует, что координаты для любого вектора $\mathbf{x}$ относительно данного базиса существуют и определяются единственным образом.

Теорема 5. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число.

Теорему предлагается доказать самостоятельно.

Из этой теоремы следует, что после выбора базиса в R^n операции сложения и умножения вектора на число совершаются по тем же правилам, что и в арифметическом линейном пространстве.

3.4. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре и её следствия

Для того чтобы определить, линейно зависима данная система векторов или нет, применяется понятие ранга матрицы, к изучению которого мы и переходим.

Пусть дана ненулевая матрица A размером $(m \times n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Её строки являются векторами арифметического линейного пространства R_n, а столбцы — R^m.

Выделим в этой матрице какие-либо k строк и k столбцов. Определитель матрицы, составленной из элементов, находящихся на их пересечении, называется минором k-го порядка данной матрицы.

Определение. Число r называется рангом матрицы A, если:

1) в матрице A имеется минор порядка r, отличный от нуля;

2) все миноры порядка $(r+1)$ и выше, если они существуют, равны нулю.

Пишут $\operatorname{rang} A = r$, или $r_A = r$.

Другими словами, ранг матрицы — это наивысший порядок миноров матрицы, отличных от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению полагается равным нулю.

Любой минор порядка r, отличный от нуля, матрицы ранга r называется *базисным*, а столбцы и строки, на пересечении которых находится этот минор, называются *базисными*. Матрица может иметь несколько базисных миноров. Говорить о базисных строках и столбцах можно лишь после выбора базисного минора.

Теорема 6 (о базисном миноре). Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией её базисных строк (столбцов).

Доказательство. Пусть матрица A размера $(m \times n)$ имеет ранг, равный r, и её базисный минор расположен в верхнем левом углу. Если это не так, то путём перестановок столбцов и строк можно базисный минор переместить в левый верхний угол, не изменяя ранга матрицы, поскольку соответствующие миноры могут либо отличаться знаками, либо совпадать. Пусть p и q — любые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$. Образуем определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_r^1 & a_q^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_r^2 & a_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^r & a_2^r & \dots & a_r^r & a_q^r \\ a_1^p & a_2^p & \dots & a_r^p & a_q^p \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю: при $p \leq r$ как определитель, имеющий две одинаковые строки; при $q \leq r$ как определитель с двумя одинаковыми столбцами, а при $p > r$ и $q > r$ как минор порядка $r+1$ матрицы ранга r. Разложим этот определитель по элементам последней строки. Получим

$$a_1^p A_1^p + a_2^p A_2^p + \ldots + a_r^p A_r^p + a_q^p A_q^p = 0. \tag{3.5}$$

Число $A_q^p \neq 0$, так как A_q^p есть базисный минор матрицы. Числа A_i^p не зависят от выбора p, а число A_q^p не зависит от значений p и q. Обозначим $\lambda_q^i = -\dfrac{A_i^p}{A_q^p}$. Тогда из (3.5) находим $a_q^p = \lambda_q^1 a_1^p + \lambda_q^2 a_2^p + \ldots + \lambda_q^r a_r^p$ для $p = 1, 2, \ldots, m$. Последнее и означает, что столбец с номером q есть линейная комбинация базисных столбцов.

Аналогично, разлагая определитель D по элементам последнего столбца, можно доказать, что строка с номером p является линейной комбинацией базисных строк. Так как p и q произвольны, то теорема доказана.

Следствиями теоремы о базисном миноре и теоремы 1 являются следующие утверждения.

Следствие 1. Если ранг r матрицы меньше числа её строк (столбцов), то её строки (столбцы) линейно зависимы. Если же число r равно числу строк, то строки линейно независимы.

Следствие 2. Определитель $\det A$ равен нулю тогда и только тогда, когда строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы или, что то же, одна из её строк (столбцов) является линейной комбинацией других.

Доказательство. Пусть $\det A = 0$. Тогда ранг матрицы A меньше n, а потому по следствию 1 её строки (столбцы) линейно зависимы.

С другой стороны, пусть строки определителя линейно зависимы, т.е. одна из его строк является линейной комбинацией других, например k-я строка является линейной комбинацией строк $j_1, j_2, \ldots, j_s$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Вычитая из k-й строки строку j_1, умноженную на λ_1, строку j_2, умноженную на λ_2, ..., строку j_s, умноженную на λ_s, получим определитель, равный исходному, k-я строка которого состоит только из нулей, но такой определитель равен нулю.

Следствие 3. Если к строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число, то получим матрицу того же ранга.

Следствие 4. Если в матрице зачеркнуть строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, то получим матрицу того же ранга.

Следствие 5. Векторы $\mathbf{x}_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, арифметического линейного пространства R_n линейно зависимы, если $\operatorname{rang}\,[\alpha_i^j] < m$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Если же $\operatorname{rang}\,[\alpha_i^j] = m$, то векторы $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, линейно независимы.

Это перефразировка следствия 1.

Следствие 6. Арифметическое линейное пространство R_n является n-мерным.

Доказательство. Любая совокупность векторов

$$\mathbf{x}_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^n),\ i = \overline{1, n+1},$$

по следствию 5 линейно зависима, так как очевидно, что $\operatorname{rang}\,[\alpha_i^j] < n + 1$.

Совокупность векторов

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{array} \tag{3.6}$$

линейно независима также по следствию 5, так как

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = n.$$

Таким образом, в арифметическом пространстве R_n имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система из $(n+1)$ векторов линейно зависима, т.е. арифметическое пространство R_n n-мерно.

Совокупность векторов (3.6) образует базис в R_n. Этот базис называют *каноническим.*

Следствие 5 легко распространить на любые n-мерные линейные пространства.

Следствие 7. Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ линейного пространства R^n линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг r матрицы, в строках которой записаны координаты этих векторов относительно любого базиса, меньше m. Необходимым и достаточным условием их линейной независимости является равенство $r = m$.

Приведём несколько примеров практического отыскания ранга матрицы.

Пример 2. Найдите ранг следующих матриц:

$$A = \left[\begin{array}{|cccc|c} \cline{1-4} 1 & 2 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ \cline{1-4} \end{array}\right]; \quad B = \left[\begin{array}{c|cccc|} \cline{2-5} 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-5} \end{array}\right].$$

Решение. Ранг каждой из этих матриц не может быть больше четырёх, так как в этих матрицах по четыре строки, и не может быть меньше четырёх, так как обведённые миноры четвёртого порядка не равны нулю. Поэтому $r_A = r_B = 4$.

Применяя следствия 3 и 4, всегда можно преобразовать матрицу, не меняя её ранга так, чтобы легко было увидеть базисный минор и тем самым определить ранг матрицы.

Пример 3. Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Решение. Получим в первом столбце матрицы A нули, вычитая первую её строку, умноженную на соответствующие числа, из всех остальных: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

В матрице A_2 вторая и четвёртая строки пропорциональны, поэтому вычёркивание одной из них не изменит ранга матрицы. Вычеркнем четвёртую строку. Пятая строка лишь знаком отличается от суммы второй и третьей, а потому её также можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы.

Приходим к матрице вида

$$A_3 = \left[\begin{array}{|rrr|rr} \cline{1-3} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ \cline{1-3} \end{array}\right].$$

Так как обведённый минор третьего порядка отличен от нуля, то $\operatorname{rang} A_3 = \operatorname{rang} A = 3$.

Пример 4. Докажите, что третья строка матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{bmatrix}$$

является линейной комбинацией первых двух строк. Найдите коэффициенты этой комбинации.

Решение. Ранг матрицы A не меньше двух, так как её минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$. Вычислим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 17 & 22 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -12 & -39 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -4 & -13 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы A равен двум и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ — её базисный минор. Третья строка по теореме о базисном миноре является линейной комбинацией первых двух. Обозначим коэффициенты этой комбинации через λ_1 и λ_2. Тогда $(17, 22, 29) = \lambda_1(1, 2, 4) + \lambda_2(5, 6, 7)$, следовательно:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 17, \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 22, \\ 4\lambda_1 + 7\lambda_2 = 29. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

3.5. Изоморфизм линейных пространств

Мы уже отмечали, что после выбора базиса в n-мерном линейном пространстве любой вектор можно задать в виде упорядоченной совокупности n чисел, т.е. как вектор арифметического n-мерного пространства. Таким образом, все линейные пространства одной размерности устроены одинаково. Этот факт лежит в основе понятия *изоморфизма* линейных пространств.

Определение. Если между векторами линейных пространств R и R' можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором из $\mathbf{x}_1 \in R \to \mathbf{y}_1 \in R'$, $\mathbf{x}_2 \in R \to \mathbf{y}_2 \in R'$ для любых α и β следует, что $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \to \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2$, то говорят, что пространства R и R' *изоморфны*, а само соответствие называется *изоморфизмом.*

Легко показать, что при изоморфизме нулевому вектору пространства R соответствует нулевой вектор из R'. Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ из R линейно независимы, то и соответствующие им векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$ в R' также линейно независимы и наоборот. Поэтому изоморфные пространства имеют одинаковую размерность. Обратно, любые два n-мерных линейных пространства R и R' изоморфны, причём изоморфизмом будет соответствие, сопоставляющее векторам из R векторы из R' с такими же координатами (относительно любых фиксированных базисов пространств R и R'). Таким образом, любое линейное пространство R^n изоморфно n - мерному арифметическому линейному пространству, т.е. из всех конечномерных линейных пространств достаточно изучить одно из них, например, арифметическое пространство.

3.6. Подпространства

Пусть некоторая совокупность $\mathcal{L}$ векторов линейного пространства R обладает свойством: любая линейная комбинация двух произвольных векторов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$. Тогда линейные операции (сложения и умножения на число) над векторами, определенные в R, не выводят за пределы $\mathcal{L}$. В этом случае говорят, что $\mathcal{L}$ замкнуто относительно линейных операций из R. Поэтому множество $\mathcal{L}$, рассматриваемое в качестве самостоятельного объекта, с линейными операциями, определенными так же, как и в R, является линейным пространством, которое называют подпространством линейного пространства R.

Пусть имеем некоторую систему векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ $\ldots$ из линейного пространства R. *Линейной оболочкой* этой системы векторов называется множество всех их линейных комбинаций (обозначается $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка образует подпространство в R.

Теорема 7 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$ равна числу r, если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ имеется линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, а любая подсистема из $(r+1)$ векторов линейно зависима.

Теорему примем без доказательства.

Из этой теоремы и следствия 7 из теоремы о базисном миноре следует, что размерность линейной оболочки векторов из R_n равна рангу матрицы, составленной из координат этих векторов относительно любого базиса.

3.7. Евклидовы линейные пространства

Понятие модуля вектора или его нормы можно ввести многими способами. Мы сделаем это с помощью понятия *скалярного произведения.*

Определение. Предположим, что имеется некоторое правило, позволяющее любой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из линейного пространства R сопоставить число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Это число называется скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, если выполнены следующие условия:

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R;

б) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из R;

в) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любого числа λ и любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R;

г) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Линейное пространство R называется *евклидовым*, если в нём введено понятие скалярного произведения.

Через E^n будем обозначать n-мерное евклидово пространство.

Евклидово линейное пространство называют также *унитарным*, или *предгильбертовым.*

Пусть $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ и $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^T$ — два произвольных вектора из арифметического пространства R^n. Положим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \tag{3.7}$$

При этом условия а) — г), очевидно, выполнены. Тем самым арифметическое пространство превращено в евклидово.

Определение. Длиной вектора $\mathbf{x}$ (модулем, нормой) в евклидовом пространстве называется число

$$|\mathbf{x}| = ||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Если скалярное произведение введено соотношением (3.7), то $|\mathbf{x}| = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + \ldots + {\alpha_n}^2}$.

Теорема 8. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E^n справедливо неравенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{3.8}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}$, где λ — действительное число. При любом λ по свойству скалярного произведения $(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$.

Отсюда

$$\lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0. \tag{3.9}$$

Квадратный трёхчлен в (3.9) не может иметь различных действительных корней, так как в противном случае он не сохранял бы знака для всех значений λ. Поэтому дискриминант трёхчлена не положителен, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0$ или $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Извлекая квадратный корень, приходим к (3.8).

Соотношение (3.8) называют *неравенством Коши-Буняковского.* Из него следует, что $-1 \leq \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leq 1.$

Это даёт основание ввести понятие угла φ между ненулевыми векторами соотношением $\cos\varphi = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$

Определение. Два ненулевых вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E^n называются ортогональными, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Теорема 9. Всякая система ненулевых попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ линейно независима (такая система векторов называется ортогональной).

Доказательство. Предположим, что

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{x}_j$. Получим $c_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) = 0$. Так как $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) > 0$, то $c_j = 0$. Полагая $j = 1, 2, \ldots, m$, получаем, что (3.10) возможно только в случае $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ линейно независимы.

Определение. Базис линейного пространства E^n называется ортогональным, если его векторы образуют ортогональную систему. Базис называется ортонормированным, если он ортогональный, а все его векторы имеют длину, равную единице.

Если скалярное произведение в E^n введено соотношением (3.7), то векторы

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0);\\
&\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

образуют ортонормированный базис.

От произвольного базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейного пространства E^n легко перейти к ортогональному $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, применяя процесс ортогонализации, заключающийся в следующем. Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Вектор $\mathbf{b}_2$ выберем в виде $\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$. Так как $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, а векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы, то $\mathbf{b}_2 \neq 0$ при любом α_1. Число α_1 подберём так, чтобы вектор $\mathbf{b}_2$ был ортогонален $\mathbf{b}_1$, т.е. чтобы было $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) = 0$. Это даёт $\alpha_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0$. Отсюда $\alpha_1 = -\dfrac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$.

Далее, положим $\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$. Поскольку $\mathbf{b}_3$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, то $\mathbf{b}_3 \neq 0$ при любых β_1 и β_2. Числа β_1 и β_2 подберём так, чтобы вектор $\mathbf{b}_3$ был ортогонален векторам $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Требуя это, получим $\beta_1 = -\dfrac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, $\beta_2 = -\dfrac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}$.

Продолжая этот процесс, через n шагов получим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

3.8. Аффинные и точечно-векторные евклидовы пространства

При решении различного рода геометрических задач часто применяется математическая структура — *аффинное пространство*, с которым мы познакомимся в этом подразделе.

Пусть дано множество A элементов произвольной природы, которые мы будем называть точками, и линейное пространство R. Множество A предполагается таким, что каждой упорядоченной паре точек M, N из A можно сопоставить единственный вектор $\mathbf{x}$ из R. Упорядоченную пару точек (M, N) будем называть *вектором*, обозначать $\mathbf{MN}$, считать, что вектор $\mathbf{MN}$ соответствует вектору $\mathbf{x}$ и записывать $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$. При этом точка M называется *началом*, а точка N — *концом* вектора $\mathbf{MN}$. Векторы $\mathbf{MN}$ и $\mathbf{PQ}$, которым соответствует один и тот же вектор $\mathbf{x}$, будем считать равными, отождествляя их между собой, и обозначать $\mathbf{MN} = \mathbf{PQ}$.

Если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{MK} \to \alpha\mathbf{x}$, то полагаем $\mathbf{MK} = \alpha\mathbf{MN}$. Если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{PQ} \to \mathbf{y}$, $\mathbf{TB} \to (\mathbf{x} + \mathbf{y})$, то полагаем $\mathbf{TB} = \mathbf{MN} + \mathbf{PQ}$. Таким образом, операции сложения “новых” векторов и умножения вектора на число введены через соответствующие операции в пространстве R.

Закон соответствия пар точек из A и векторов из R предполагается удовлетворяющим следующим двум условиям:

1) для любой точки M из A и любого вектора $\mathbf{x}$ из R существует точка N из A такая, что $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$;

2) для любых точек M, N и P из A имеет место равенство

$$\mathbf{MN} + \mathbf{NP} = \mathbf{MP}. \tag{3.11}$$

Построенная таким образом математическая структура, состоящая из множества точек с присоединённым к нему линейным пространством и соответствием, удовлетворяющим указанным двум свойствам, называется *аффинным пространством.*

Аффинное пространство A называется n-мерным и обозначается A_n, если пространство R n-мерно.

Очевидны следующие простые утверждения.

1. Для любой точки M из A вектору $\mathbf{MM}$ соответствует $\mathbf{0}$ из R.

Действительно, пусть $\mathbf{NM} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{MM} \to \mathbf{y}$ из R. Так как $\mathbf{NM} = \mathbf{NM} + \mathbf{MM} \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ из R.

2. Для любых точек M и N из A имеет место равенство $\mathbf{MN} = (-1)\mathbf{NM}$.

Действительно, если $\mathbf{MN} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{NM} \to \mathbf{y}$, то $\mathbf{MN}+\mathbf{NM} = \mathbf{MM} \to \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, т.е. $\mathbf{MN} \to (-1)\mathbf{y}$ и $\mathbf{MN} = (-1)\mathbf{NM}$. Пишут также $\mathbf{MN} = -\mathbf{NM}$.

Зафиксируем какую-нибудь точку O в A_n и построим векторы $\mathbf{OK}_i = \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, соответствующие векторам базиса пространства R^n. Полученная конструкция называется *аффинной системой координат.* Точку O называют её *началом.*

Пусть M — любая точка A_n. Вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. Координатами точки M называются координаты её радиус-вектора, т.е. если $\mathbf{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$, то точка M имеет координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ относительно данной системы координат. Существование и единственность координат вектора $\mathbf{OM}$, а потому и координат точки относительно данной системы координат, вытекает из соответствующего утверждения для R^n. Пишут $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Решим следующую задачу. Зная координаты точек M и N относительно данной системы координат, найти координаты вектора $\mathbf{MN}$.

Решение. По формуле (3.11) находим $\mathbf{OM} + \mathbf{MN} = \mathbf{ON}$. Отсюда $\mathbf{MN} = \mathbf{ON} - \mathbf{OM}$, т.е. координаты вектора $\mathbf{MN}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

Если к множеству A точек присоединим n-мерное евклидово пространство E^n таким же образом, как это сделали при построении аффинного пространства A_n, то полученная при этом математическая структура называется *n-мерным евклидовым точечно-векторным пространством* и обозначается V_n.

Если M и N — две любые точки из V_n и $\mathbf{MN} \to x$, то расстоянием между точками M и N или модулем вектора $\mathbf{MN}$ назовём число $\rho(M, N) = |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Возьмём любую точку O n-мерного евклидова точечно-векторного пространства V_n и присоединим к ней систему векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, образующих ортонормированный базис. Полученная конструкция $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ называется *декартовой системой координат* (частный случай аффинной).

Координаты точки относительно декартова базиса называют декартовыми. Если даны две точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ своими декартовыми координатами, то, очевидно,

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{3.12}$$

В случае $n = 2$ декартову систему координат будем обозначать $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, а при $n = 3$ — $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Оси $O\mathbf{i}$, $O\mathbf{j}$, $O\mathbf{k}$ получили специальные названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат соответственно, или ось OX, OY, OZ.

Если поворот на кратчайший угол от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ происходит против часовой стрелки, то систему координат $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ называют *правой*, в противном случае – *левой*. Декартову систему координат $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ называют правой, если с конца вектора $\mathbf{k}$ поворот от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ на кратчайший угол виден совершающимся против часовой стрелки, и левой, если этот поворот происходит по часовой стрелке.

3.9. Формулы перехода от одного базиса к другому. Преобразование систем координат

Пусть в линейном пространстве R^n даны два базиса: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, условно называемый старым, и $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$, называемый новым. Разложим векторы нового базиса по векторам старого:

$$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} c_j^i \mathbf{e}_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Из чисел c_j^i можно построить матрицу

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{bmatrix}.$$

Матрица C называется матрицей перехода от старого базиса к новому. Заметим, что в столбцах матрицы C записаны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса.

Соотношение (3.13) в матричной форме условно можно записать в виде

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)C. \tag{3.14}$$

Так как векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ линейно независимы, то матрица C невырожденная, а потому существует обратная матрица C^{-1}. Умножая справа равенство (3.14) на матрицу C^{-1}, получим

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)C^{-1}.$$

Пусть дан вектор $\mathbf{x}$, причём

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{e}_i; \qquad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathbf{f}_j.$$

Координаты ξ^i будем называть старыми, а η^j — новыми. Установим связь между новыми и старыми координатами. Находим

$$\sum_{j=1}^{n} \eta^j \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \sum_{i=1}^{n} c_j^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta^j c_j^i \right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{e}_i$$

(перестановка порядка суммирования возможна в силу конечности числа слагаемых). Отсюда следует, что

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} c_j^i \eta^j, \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Соотношения (3.15) в матричной форме можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) находим, что

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Пусть в E^n даны два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$. Матрица Q перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному называется *ортогональной*. Сумма квадратов элементов каждого её столбца равна единице как скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_j$ на себя, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю как скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}_j$, $i \neq j$. Ортогональные матрицы обладают замечательным свойством: для них $Q^{-1} = Q^T$. Поэтому формулы (3.16) и (3.17) принимают вид

$$\begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^n \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Пример 6. Пусть в R^3 относительно канонического базиса даны четыре вектора $\mathbf{f}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{f}_2 = \{2, 3, 7\}$, $\mathbf{f}_3 = \{1, 3, 1\}$ $\mathbf{x} = (2, 3, 4)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис. Найдите координаты η^1, η^2, η^3 вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса.

Решение. Записываем матрицу перехода $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ и находим её определитель $|C| = 1 \neq 0$.

Видим, что ранг матрицы C равен трём. По следствию 7 из теоремы о базисном миноре векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ линейно независимы, а потому могут быть приняты в качестве базиса пространства R^3. Применяя формулу (2.5), находим матрицу C^{-1} (она существует, так как матрица C невырожденная): $C^{-1} = \begin{bmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

По формуле (3.17) можно найти координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно нового базиса: $\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Замечание. Мы нашли закон преобразования при переходе к новому базису координат векторов, являющихся матрицами размера $(n \times 1)$. Векторы рассмотренных линейных пространств являются векторами этого типа. Вопроса преобразования координат векторов, являющихся матрицами размера $(1 \times n)$, мы коснёмся в п. 6.6.

Часто требуется переходить от одной декартовой системы координат евклидова точечно-векторного пространства к другой. Получим закон изменения координат точки при таком переходе, ограничиваясь случаем $n = 2$.

Пусть имеем две правые декартовы системы координат $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'$ (рис. 3.1). Матрицу перехода от базиса $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ к базису $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ обозначим $Q = \begin{bmatrix} q_1^1 & q_2^1 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{bmatrix}$, т.е. $\mathbf{i}' = q_1^1\mathbf{i} + q_1^2\mathbf{j}, \mathbf{j}' = q_2^1\mathbf{i} + q_2^2\mathbf{j}$. Первую систему будем называть старой, а вторую — новой. Координаты точки относительно старой системы координат будем обозначать (x, y), а относительно новой — (x', y').

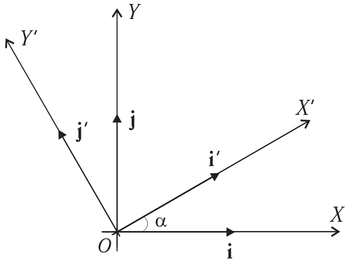

Рис. 3.1.

Рассмотрим сначала случай, когда точки O и O' совпадают. Видим, что $\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$, $\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha$,

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Связь между координатами (x, y) и (x', y') выражается формулами (3.18):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.19}$$

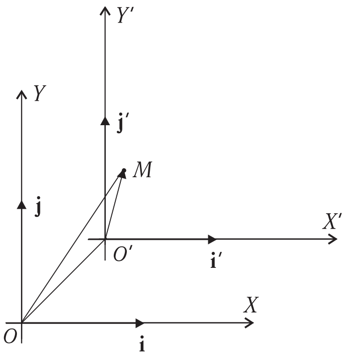

Рис. 3.2.

Мы получили формулы преобразования координат точки при повороте осей координат на угол α.

Рассмотрим теперь параллельный перенос системы координат в новое начало, т.е. случай, когда $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, а точки O и O' различны (рис. 3.2).

Пусть точка O' относительно системы координат XOY имеет координаты a и b, т.е. $\mathbf{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Находим, что $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{O'M} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$, но $\mathbf{OM} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}$, т.е. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x' + a)\mathbf{i} + (y' + b)\mathbf{j}$. Отсюда

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \tag{3.20}$$

Мы получили формулы преобразования координат при параллельном переносе.

В общем случае, совершая сначала параллельный перенос по формулам (3.20), а затем поворот осей по формулам (3.19), получим

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha. \end{cases}$$

Последние формулы устанавливают связь между новыми и старыми координатами точки при переходе от одной декартовой системы координат к другой.

4. Системы линейных уравнений

4.1. Формы записи систем линейных уравнений. Классификация систем

Система m линейных уравнений с n неизвестными может быть записана в виде

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n & = & b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n & = & b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n & = & b^m, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

где a_i^j — коэффициенты, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, x^i — неизвестные; b^j — свободные члены.

Коэффициенты системы a_i^j записаны с двумя индексами. Верхний индекс (j) означает номер уравнения, в котором находится этот коэффициент, а нижний индекс (i) означает номер неизвестного, при котором находится коэффициент.

Если использовать знак суммирования, то систему (4.1) можно записать короче:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.2}$$

А. Эйнштейн предложил в выражениях, подобных (4.2), когда имеется индекс сверху и снизу, по которому производится суммирование, знак суммы опускать и писать

$$a_i^j x^i = b^j, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m},$$

имея в виду, что по i производится суммирование от 1 до n.

Введём матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (4.1) можно записать в матричной форме

$$AX = B. \tag{4.3}$$

Если обозначить $\mathbf{a}_j = (a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^m)^T$, $j = \overline{1,n}$ — векторы, являющиеся столбцами матрицы A, то систему (4.1) можно записать в векторной форме: $\mathbf{a}_1 x^1 + \mathbf{a}_2 x^2 + \ldots + \mathbf{a}_n x^n = \mathbf{b}$ или $\mathbf{a}_j x^j = \mathbf{b}$ ($j = \overline{1,n}$), где $\mathbf{b}$ — вектор, соответствующий столбцу свободных членов.

Матрица A называется *основной* матрицей системы, а матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right]$$

называется *расширенной*. Совокупность чисел $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ называется *решением системы*, если она обращает все уравнения системы в тождества: $a_i^j \alpha^i \equiv b^j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Система называется *совместной*, или *непротиворечивой*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если решений более одного.

Основные задачи теории систем линейных уравнений:

1) установить, система совместна или нет;

2) если система совместна, то выяснить, определённая она или нет;

3) если система определённая, то найти её единственное решение, а если неопределённая, то описать совокупность всех решений.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если любое решение первой из них является решением второй и наоборот.

В ходе решения систему приходится преобразовывать каким-либо способом. При этом нужно следить за тем, чтобы в ходе преобразования получались системы, эквивалентные данной.

4.2. Теорема Кронекера-Капелли (о совместности системы линейных уравнений)

Теорема 1. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство. Если $r_A = r_C$, то существует базисный минор, общий для матриц A и C, в который не входит столбец свободных членов. По теореме о базисном миноре этот столбец является линейной комбинацией остальных столбцов, т.е. существуют числа $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ такие, что $a_i^j \alpha^i = b^j$, следовательно, система совместна и $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ — её решение.

Обратно, если система совместна и $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ — её решение, то столбец из свободных членов системы является линейной комбинацией остальных столбцов ($b^j = a_i^j \alpha^i$), а потому его вычёркивание из расширенной матрицы не изменит ранг. А так как после такого вычёркивания получим основную матрицу A, то следует, что $\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} A$.

4.3. Решение системы в случае $m = n$, $D = \det A \neq 0$

Укажем три способа решения системы.

Способ 1. Матричный метод.

Систему запишем в форме (4.3):

$$AX = B.$$

По условию задачи матрица A невырожденная, а поэтому существует единственная обратная матрица A^{-1}. Матричное уравнение вида (4.3) мы уже решили (см. п. 2.8) и получили

$$X = A^{-1}B. \tag{4.4}$$

Пример 1. Систему

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1, \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ - & 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{a}$$

решить матричным способом.

Решение. Записываем матрицу A системы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Находим её определитель:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \left|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix}\right] = 1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то применима формула (4.4). Находим обратную матрицу A^{-1} способом, указанным в п. 2.7:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = 3, & A_1^2 = -2, & A_1^3 = 2, \\ A_2^1 = -4, & A_2^2 = 3, & A_2^3 = -3, \\ A_3^1 = -11, & A_3^2 = 9, & A_3^3 = -8. \end{array}$$

Получаем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

По формуле (4.4) находим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ -11 & 9 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -4+3 \\ -11+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Мы нашли решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

Поскольку матрица A^{-1} единственна, то данная система имеет единственное решение, т.е. является определённой.

Способ 2. Применение формул Крамера. Матричное равенство (4.4) запишем в развёрнутом виде

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i^1 & A_i^2 & \dots & \dots & A_i^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & \dots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^i \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix},$$

где A_i^k есть алгебраическое дополнение элемента a_k^i определителя $\det A = D$. По правилу умножения матриц (см. п. 1.5), записывая покоординатно, находим

$$x^i = \frac{A_i^1 b^1 + A_i^2 b^2 + \ldots + A_i^n b^n}{D}.$$

В числителе стоит разложение определителя D_i по столбцу с номером i; определитель D_i получен из D заменой его i-го столбца столбцом свободных членов. Следовательно, $x^i = \dfrac{D_i}{D}$. Полагая $i = 1, 2, \ldots, n$, находим решение системы в виде

$$x^1 = \frac{D_1}{D}, \quad x^2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x^n = \frac{D_n}{D}. \tag{4.5}$$

Формулы (4.5) называют формулами Крамера.

Пример 2. Решить систему (а), применяя формулы Крамера.
Решение. Находим

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $D = 1$, то $x^1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $x^2 = \dfrac{-1}{1} = -1$, $x^3 = \dfrac{-2}{1} = -2$.

Способ 3. Метод Гаусса (метод исключения).

Проиллюстрируем этот метод на примере.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему (а).

Решение. Записываем расширенную матрицу системы

$$C = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Действуя только со строками, приводим её к виду, чтобы ниже (или выше) главной диагонали стояли нули. Находим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1, \\ & - & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ & & & - & x_3 & = & 2, \end{array}\right.$$

эквивалентная данной. Из последнего уравнения получаем $x_3 = -2$. Зная x_3, из второго уравнения находим $-8x_2 = 2 + 6 = 8$, $x_2 = -1$. Из первого уравнения теперь получаем $3x_1 = 1 + 2 = 3$, $x_1 = 1$. Мы нашли решение $(1, -1, -2)$.

4.4. Исследование и решение системы в общем случае

Процесс исследования системы и её решения разобьём на отдельные этапы.

Этап 1. Находим ранги основной и расширенной матриц системы. Если они не равны, то система несовместна, и на этом исследование заканчивается.

Этап 2. $r_A = r_C = r$. Система оказалась совместной. В матрице A выделяем базисный минор. Те уравнения, коэффициенты которых не попали в состав базисного минора, вычёркиваем из системы, так как они по теореме о базисном миноре являются линейными комбинациями уравнений, попавших в состав базисного минора.

Этап 3. Все неизвестные системы делим на два класса: те неизвестные, коэффициенты при которых попали в состав базисного минора, назовём зависимыми, а остальные неизвестные — свободными. Перепишем систему, оставив слева члены, содержащие зависимые переменные, а направо перенесём члены, содержащие свободные неизвестные. Объявляем правые части новыми свободными членами. В результате получаем систему, эквивалентную данной, состоящую из r уравнений с r неизвестными, определитель которой отличен от нуля.

Этап 4. Решаем полученную систему одним из способов, рассмотренных в п. 4.3. В итоге мы найдём соотношения, выражающие зависимые переменные через свободные. Такие соотношения называются общим решением системы. Всякое решение, которое получается из общего при фиксированных значениях свободных неизвестных, называется частным.

Заметим, что если $r_A = r_C = r < n$ (n — число неизвестных), то система неопределённа, если же $r_A = r_C = n$, то система определённа.

Обычно, в случае $m \neq n$, применяют метод Гаусса, позволяющий провести исследование системы и найти её общее решение. Всё сказанное проиллюстрируем на примере.

Пример 4. Найдите общее и какое-нибудь частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = -5, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 3x_1 - 20x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу системы и, действуя только со строками, приводим её к удобному для исследования виду

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & -4 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -20 & -7 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]. \qquad (б)$$

Первую строку, умноженную на 2, вычли из второй, из третьей строки вычли первую, а из четвёртой вычли первую, умноженную на 3. Мы получили матрицу с тремя одинаковыми строками. В состав базисного минора может войти только одна из них, например, вторая. Третью и четвёртую строки можно вычеркнуть из матрицы, не меняя ее ранга. Видим, что ранг основной и расширенной матрицы равен двум. Система совместна.

В качестве базисного минора матрицы (б) можно взять обведённый минор. Соответствующий минор исходной матрицы расположен в левом верхнем углу. Третье и четвертое уравнения, коэффициенты которых не попали в состав выбранного базисного минора, можно вычеркнуть из системы. Т.к. мы работали только со строками, то исходная система эквивалентна системе, расширенной матрицей которой служит матрица (б). Согласно выбору базисного минора, неизвестные x_1 и x_2 приняты в качестве зависимых, а x_3, x_4, x_5 — оставлены свободными.

Матрице (б), после вычёркивания из неё двух последних строк, соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ \qquad\ \ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Перенесём члены, содержащие свободные неизвестные, вправо:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 = -3 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5, \\ \qquad\ \ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases}$$

Выражаем зависимые переменные через свободные. Получаем

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 11x_3 + 17x_4 - 9x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 - x_5. \end{cases} \tag{в}$$

Соотношение (в) является общим решением системы. Из (в) можно получить любое число частных решений, придав свободным неизвестным какие-либо значения. Например, положив $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = -1$, получим решение $(2, 0, 1, 0, -1)$.

4.5. Системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений

$$a_i^k x^i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \ k = \overline{1, m}, \tag{4.6}$$

называется однородной.

Система (4.6) всегда совместна, так как всегда имеется решение $(0, 0, \ldots, 0)$. Это решение называется *тривиальным.* Важен вопрос, в каких случаях система имеет нетривиальные решения.

Теорема 2. Система (4.6) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг её матрицы меньше числа неизвестных.

Действительно, только в этом случае система имеет свободные неизвестные, которым можно придать любые, в частности, ненулевые значения.

Теорема 3. Система (4.6) в случае $n = m$ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель её матрицы равен нулю.

Теорема 3 является следствием теоремы 2 и теоремы о базисном миноре.

Теорема 4. Любая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

Доказательство. Пусть $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ — любые два решения системы (4.6) и

$$(\lambda\alpha^1 + \mu\beta^1, \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2, \ldots, \lambda\alpha^n + \mu\beta^n),$$

где λ и μ — любые числа, их линейная комбинация. Имеем $a_i^k(\lambda\alpha^i + \mu\beta^i) = \lambda a_i^k\alpha^i + \mu a_i^k\beta^i$. Так как $a_i^k\alpha^i = 0$ и $a_i^k\beta^i = 0$, поскольку $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ решения системы (4.6), то $a_i^k(\lambda\alpha^i + \mu\beta^i) = 0$, т.е. $(\lambda\alpha^1 + \mu\beta^1, \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2, \ldots, \lambda\alpha^n + \mu\beta^n)$ является решением этой системы.

Теорема 5. Множество всех решений системы линейных однородных уравнений (4.6) образует подпространство $\mathcal{L}$ размерности $(n-r)$ арифметического линейного пространства R^n, где n — число неизвестных, r — ранг матрицы системы, $n > r$.

Доказательство. То, что множество всех решений системы (4.6) образует подпространство $\mathcal{L}$ пространства R^n, следует из теоремы 4 и определения подпространства. Найдём размерность $\mathcal{L}$. Пусть $x^{r+1}, x^{r+2}, \ldots, x^n$ — свободные, а $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — зависимые неизвестные системы. Образуем $(n-r)$ частных решений следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_1^1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^r, 1, 0, 0, \ldots, 0),\\ (\beta_2^1, \beta_2^2, \ldots, \beta_2^r, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\beta_{n-r}^1, \beta_{n-r}^2, \ldots, \beta_{n-r}^r, 0, 0, 0, \ldots, 1).\end{array}\right\} \tag{4.7}$$

Решения (4.7) линейно независимы, так как ранг матрицы A, составленной из этих решений, равен $(n-r)$ (последние $(n-r)$ её столбцов, состоящие из единиц и нулей, образуют единичную матрицу порядка $(n-r)$) и совпадает с числом её строк. Покажем, что любые $(n-r+1)$ решений системы (4.6) линейно зависимы, для чего достаточно доказать, что любое решение системы является линейной комбинацией решений (4.7). Пусть

$$(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r, \alpha^{r+1}, \ldots, \alpha^n) — \tag{4.8}$$

любое решение системы. Умножим первое решение в (4.7) на α^{r+1}, второе — на α^{r+2}, …, $(n-r)$-е — на α^n и вычтем их после этого из решения (4.8). В результате получим

$$(\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^r, 0, 0, \ldots, 0), \tag{4.9}$$

где $\gamma^i = \alpha^i - \alpha^{k+r}\beta_k^i$, $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n-r}$. Вектор (4.9) является решением системы (4.6) по теореме 4, причём это решение получено при нулевых значениях свободных неизвестных, а потому является тривиальным, т.е. $\gamma^i = 0$ или $\alpha^i = \alpha^{k+r}\beta_k^i$, $i = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n-r}$. Это и означает, что решение (4.8) является линейной комбинацией решений

(4.7) с коэффициентами α^{r+1}, α^{r+2}, ..., α^n. Таким образом, в подпространстве $\mathcal{L}$ имеется совокупность $(n-r)$ линейно независимых решений, а любые $(n-r+1)$ решений линейно зависимы. Следовательно, это подпространство имеет размерность $(n-r)$. Теорема доказана.

Базис подпространства $\mathcal{L}$, состоящий из $(n-r)$ решений, называется *фундаментальной системой решений* системы однородных линейных уравнений. Любое другое решение можно представить в виде линейной комбинации решений, составляющих фундаментальную систему.

Решения (4.7) образуют фундаментальную систему. Эту систему иногда называют канонической. Можно получить фундаментальные системы и других видов.

Чтобы отыскать фундаментальную систему решений, достаточно найти общее решение системы и из него получить любые $(n-r)$ линейно независимых решений, для чего можно взять любой определитель порядка $(n-r)$, не равный нулю, и в качестве свободных неизвестных принять поочерёдно значения элементов каждой его строки. Полученные частные решения составят фундаментальную систему решений.

Пример 5. Докажите, что система
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 17x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
имеет нетривиальные решения. Найдите общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

Будем решать задачу методом Гаусса. Записываем матрицу системы и, действуя только со строками, получаем нули ниже главной диагонали:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 17 & -4 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -55 & 11 & -77 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \to$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$
Отсюда следует, что ранг матрицы A равен двум и что последние два уравнения можно вычеркнуть из системы. Примем неизвестные x_1 и x_2 в качестве зависимых, а x_3 и x_4 — в качестве свободных.

Получаем систему, эквивалентную данной:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & x_3 & - & 5x_4, \\ & & 5x_2 & = & x_3 & - & 7x_4. \end{array}\right.$$

Находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{4}{5}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_4. \end{cases}$$

Теперь найдём фундаментальную систему решений, положив $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 5$:

$$\begin{cases} (\ \ 2, & 1, & 5, & 0), \\ (-4, & -7, & 0, & 5). \end{cases}$$

Пусть дана система $a^k_i x^i = b^k$ ($k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$) неоднородных уравнений и соответствующая система однородных уравнений $a^k_i x^i = 0$, которые запишем в матричной форме в виде $AX = B$ и $AX = 0$. Между решениями этих систем имеется тесная связь, выражаемая следующими теоремами.

Теорема 6. Разность любых двух решений системы $AX = B$ является решением системы $AX = 0$.

Доказательство. Пусть $X_1 = (x^1_1, x^2_1, \ldots, x^n_1)^T$ и $X_2 = (x^1_2, x^2_2, \ldots, x^n_2)^T$ — некоторые решения системы $AX = B$, т.е. $AX_1 = B$ и $AX_2 = B$. После вычитания получаем $A(X_1 - X_2) = 0$, т.е. $X_1 - X_2$ есть решение системы $AX = 0$.

Теорема 7. Сумма любого решения X_1 системы $AX = 0$ и любого решения X_2 системы $AX = B$ является решением системы $AX = B$.

Доказательство. Так как по условию теоремы $AX_1 = 0$, $AX_2 = B$, то $A(X_1 + X_2) = B$, т.е. $X_1 + X_2$ является решением системы $AX = B$.

5. Алгебра геометрических векторов

Пусть дано трёхмерное точечное пространство с введённым в нём расстоянием между точками. Взяв за исходное понятие точки, мы построим ещё один пример линейного пространства, элементами которого являются упорядоченные пары точек или направленные отрезки.

5.1. Линейные операции над векторами. Базисы и координаты

Определение. Вектором (геометрическим вектором) в данном точечном пространстве называется упорядоченная пара точек (A, B). Обозначают вектор $\mathbf{AB}$.

Точка A называется началом вектора $\mathbf{AB}$, а B — его концом. Вектор, начало которого совпадает с концом, называется нулевым и обозначается $\mathbf{0}$.

Упорядоченную пару точек (A, B) можно трактовать как направленный отрезок AB, за начало которого принята точка A.

На рисунке ненулевой вектор $\mathbf{AB}$ изображают в виде направленного отрезка, указывая направление от начала к концу стрелкой (рис. 5.1). Расстояние между точками A и B называется модулем вектора $\mathbf{AB}$, обозначается $|\mathbf{AB}|$. Как видим, чтобы задать вектор, нужно задать его направление и модуль.

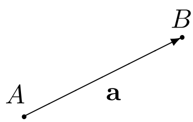

Рис. 5.1.

Величины, которые характеризуются числом и направлением, называются *векторными.*

В физике — это сила, скорость, ускорение, различного рода моменты сил и т.д. Величины, характеризующиеся только числом, называют скалярными, например, температура, масса, площадь и т.д.

Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются коллинеарными (пишут $\mathbf{AB} \| \mathbf{MN}$).

Два коллинеарных вектора $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ могут быть одинаково ориентированными (записывают $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$) или противоположно ориентированными (пишут $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{MN}$).

Строгое определение этих понятий мы опускаем.

Определение. Векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{MN}$ называются равными, если: 1) $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$ и 2) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{MN}|$.

Как видим, векторы считаются равными независимо от положения их начала. Такие векторы называются свободными.

В дальнейшем будем обозначать векторы одной малой буквой: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т.д.

Отложить вектор $\mathbf{a}$ от точки A означает построить вектор $\mathbf{AB}$, равный $\mathbf{a}$. На множестве всех векторов определим две операции: внутреннюю — сложение векторов, и внешнюю — умножение вектора на число.

Пусть даны векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (рис. 5.2). От произвольной точки O отложим вектор $\mathbf{OA}_1$, равный $\mathbf{a}_1$, от точки A_1 отложим вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, равный $\mathbf{a}_2$ и т.д., от точки A_{n-1} отложим вектор $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{A}_n$, равный $\mathbf{a}_n$. Вектор $\mathbf{OA}_n$ называется суммой векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и обозначается $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$.

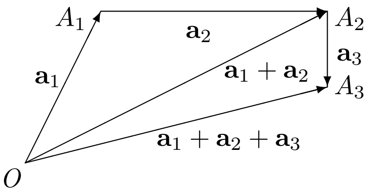

Рис. 5.2.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число α называется вектор $\mathbf{b}$, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ и определяемый условиями: а) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\alpha > 0$; б) $\alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\alpha < 0$; в) $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$; г) $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Верно и обратное утверждение, т.е. если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то существует число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Действительно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ оба нулевые, то $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ при любом значении λ. Если же $\mathbf{b} \neq 0$, то условие $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ выполняется при $\lambda = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, и при $\lambda = -\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Легко показать, что для любых векторов и любых чисел справедливы утверждения:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;

4) для всякого вектора $\mathbf{x}$ найдётся вектор $\mathbf{y}$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (действительно, если $\mathbf{x} = \mathbf{AB}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{BA}$);

5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$; 6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;

7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$; 8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Таким образом, операции умножения вектора на число и сложения векторов удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, т.е. множество всех векторов является линейным пространством. Обозначим его V_3. Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и линейной независимости систем векторов определяются так же, как и для линейного n-мерного пространства. Поскольку исходное точечное пространство принято трёхмерным, то и линейное пространство V_3, ему сопоставленное, также трёхмерно (это утверждение примем без доказательства), а потому его базис состоит из линейно независимой системы трёх векторов.

Подпространствами V_3 являются одномерные пространства V_1 и двумерные — V_2. Подпространство V_1 можно определить как множество всех векторов, параллельных некоторой фиксированной прямой, а V_2 — как множество векторов, параллельных некоторой фиксированной плоскости. Систему трёх и более векторов, параллельных одной плоскости, называют *компланарной*, если же такой плоскости не существует, то система векторов называется *некомпланарной.*

В качестве базиса в V_1 можно принять любой его ненулевой вектор, а в V_2 — любую пару непараллельных векторов этого подпространства.

Определение понятия координат вектора, доказательство их существования и единственности в V_3 (V_1, V_2) производятся так же, как и в линейных n-мерных пространствах. Напомним, что координатами вектора называются коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой данный вектор выражается через базисные. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число. Понятию линейной зависимости векторов в V_3 можно дать геометрическую характеристику, приведённую в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Система из двух векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны.

Доказательство. Пусть система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима, т.е. имеет место $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = 0$, причём среди чисел λ_1, λ_2 есть ненулевые, например, $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\mathbf{a}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2$. Из определения операции умножения вектора на число следует, что $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{a}_2$.

Пусть $\mathbf{a}_1 \| \mathbf{a}_2$. Если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ оба нулевые, то такая система, очевидно, линейно зависима. Если же $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$, что показано ранее при определении операции умножения вектора на число.

Теорема 2. Система из трёх векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда она компланарна.

Доказательство. Пусть система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима, причём среди векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ нет коллинеарных. Поскольку один из этих векторов является линейной комбинацией двух других (по теореме 1 из п.1.3.2), то он параллелен плоскости, определяемой ими, т.е. система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарна. Если же среди векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ есть коллинеарные, то эта система, очевидно, компланарна.

Обратно, если система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарна, то она принадлежит некоторому двумерному подпространству, а потому линейно зависима ($3 > 2$).

Аналогично тому, как это сделано в аффинном и точечновекторном евклидовом пространстве в V_3, можно определить понятия аффинной и декартовой систем координат, радиуса-вектора точки и координат точки.

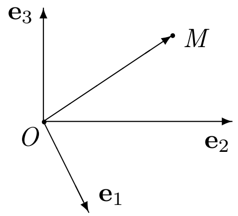

Рис. 5.3.

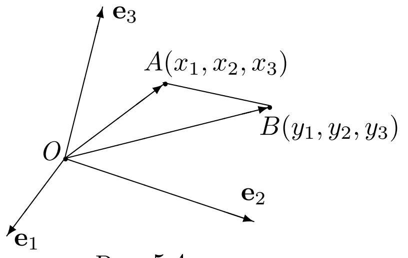

Рис. 5.4.

Конструкция, состоящая из точки O и приложенного к ней векторного базиса, называется *аффинной системой координат* (рис. 5.3). Вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. Координатами точки M называются координаты её радиуса-вектора.

Даны координаты точек $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$ (рис. 5.4). Найдём координаты вектора $\mathbf{AB}$. Видим, что $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Чтобы найти координаты вектора $\mathbf{AB}$, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

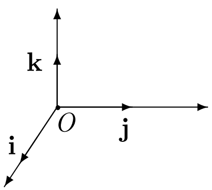

Рис. 5.5.

Векторный базис называют *декартовым*, если его векторы попарно ортогональны и единичны. Векторы декартового базиса обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Конструкция, состоящая из произвольной точки O и приложенного к ней декартова базиса, называется *декартовой системой координат* (рис. 5.5).

Пример 1. Дан вектор $\mathbf{AB} = (2, -5, 4)$. Известны координаты точки $B(-4, 4, 3)$. Найдите координаты точки $A(x, y, z)$.

Решение. Имеем $\mathbf{AB} = (-4-x, 4-y, 3-z) = (2, -5, 4)$. $-4-x = 2$, $x = -6$, $4-y = -5$, $y = 9$, $3-z = 4$, $z = -1$. Таким образом, искомые координаты $(-6, 9, -1)$.

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A(4, 3, 5)$, $B(2, 7, 9)$, $C(6, 1, 1)$. Найдите координаты вектора $\mathbf{CM}$, направленного по медиане треугольника.

Решение. Находим координаты точки $M\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{3+7}{2}, \dfrac{5+9}{2}\right)$, т.е. $M(3, 5, 7)$. Координаты вектора $\mathbf{CM}$ находим, вычитая из координат точки M соответствующие координаты точки C: $\mathbf{CM} = (3-6, 5-1, 7-1)$, $\mathbf{CM} = (-3, 4, 6)$.

5.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны отрезок AB и точка M, лежащая на прямой AB. Говорят, что точка M делит отрезок AB в отношении λ $(\lambda \neq -1)$, если $\mathbf{AM} = \lambda\mathbf{MB}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M лежит внутри отрезка AB, если же $\lambda < 0$, то точка M лежит вне AB.

Выберем некоторую систему координат и пусть относительно этой системы даны координаты точек A и B: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдём координаты (x_0, y_0, z_0) точки M, делящей отрезок AB в отношении $\lambda(\lambda \neq -1)$. Так как $\mathbf{AM} = \lambda\mathbf{MB}$ и
$\mathbf{AM} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$, $\mathbf{MB} = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}$, то $x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0)$, $y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0)$, $z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0)$.

Следовательно:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{5.1}$$

Отсюда, в частности, следует известное из средней школы положение, уже использованное нами: координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов (в этом случае $\lambda = 1$).

Пример 3. Дан треугольник ABC координатами своих вершин $A(1, -3, -2)$, $B(3, 5, 7)$, $C(-1, 5, -3)$. Найдите координаты (x_0, y_0, z_0) точки D пересечения его медиан.

Решение. Как известно, точка D делит медиану AM в отношении $\lambda = 2$. Так как точка M имеет координаты $(1, 5, 2)$, то по формулам (5.1) находим

$$x_0 = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1, \quad y_0 = \frac{-3 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{7}{3}, \quad z_0 = \frac{-2 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}.$$

5.3. Проекция вектора на ось

Прямая с заданными на ней точкой и единичным базисным вектором $\mathbf{e}$ называется *осью*.

Ортогональной проекцией точки A на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A.

Проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось l называется координата вектора $\mathbf{A'B'}$ относительно единичного вектора $\mathbf{e}$ оси, где A' и B' — проекции точек A и B на ось l, т.е. если $\mathbf{A'B'} = \alpha\mathbf{e}$, то число α называется проекцией вектора $\mathbf{AB}$ на ось l. Обозначают $\alpha = \text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{AB}$.

Из правила сложения и умножения на число векторов, заданных своими координатами, следует, что $\text{Пр}_{\mathbf{e}}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a}+\beta\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{b}$, где α и β — любые числа.

Легко показать, что $\text{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{a}$, отсчитанный по правилам тригонометрии: от вектора $\mathbf{e}$ против часовой стрелки до вектора $\mathbf{a}$.

5.4. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, обозначаемое $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$.

Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение полагается равным нулю.

Из определения скалярного произведения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны.

Легко доказать следующие свойства скалярного произведения:

1. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$;
2. $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})$;
3. $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
4. $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0$ при $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ и $(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Таким образом, скалярное произведение, введенное в этом подразделе, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, рассмотренного в п. 3.7.

Скалярное произведение двух векторов, заданных декартовыми координатами, равно сумме произведений одноимённых декартовых координат. Действительно:

$$(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

так как $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = (\mathbf{i},\mathbf{k}) = (\mathbf{j},\mathbf{k}) = 0$, $(\mathbf{i},\mathbf{i}) = (\mathbf{j},\mathbf{j}) = (\mathbf{k},\mathbf{k}) = 1$.

С помощью скалярного произведения можно находить:

1) длину вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$:

$$\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} = |\mathbf{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

2) расстояние d между точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$:

$$d = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(сравните с (3.12));

3) проекцию одного вектора на направление другого:

$$\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|};$$

4) косинус угла между векторами: $\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$;

5) косинусы углов α, β, γ между векторами и осями координат, называемые направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

6) координаты орта вектора $\mathbf{a}$, т.е. координаты вектора $\mathbf{a}_0$, направленного так же, как и $\mathbf{a}$, по длине равного единице. Координаты орта вектора совпадают с его направляющими косинусами.

Пример 4. Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 45°$.

Решение: $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a},\mathbf{a}) = (4\mathbf{p}+\mathbf{r}, 4\mathbf{p}+\mathbf{r}) = 16(\mathbf{p},\mathbf{p}) + 8(\mathbf{p},\mathbf{r}) + $
$+(\mathbf{r},\mathbf{r}) = 16\cdot 1 + 8\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 16+8+2 = 26$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{26}$.

Пример 5. Даны три вектора: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. Найдите $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

Решение. Находим $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \dfrac{(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{c}|}$,

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \{4,-2,-6\}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = 12+8-72 = -52$;

$|\mathbf{c}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$; $\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = -\dfrac{52}{13} = -4$.

5.5. Векторное произведение и его свойства

Пусть дана упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$, построенных из одной точки. Говорят, что эта тройка образует правую связку, если движение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ в кратчайшем направлении происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{c}$. В противном случае связка называется левой.

Определение. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ относительно данной системы координат называется третий вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, который:

1) ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$;

2) имеет длину, равную произведению длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на синус угла между ними, т.е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b})$, $(0 < \mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) < \pi$;

3) тройка векторов $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ образует правую связку, если система координат правая, и левую связку, если система координат левая.

Замечаем, что введенное понятие векторного произведения существенно зависит от ориентации системы координат. Если мы перейдем от одной системы координат к другой системе той же ориентации (от правой к правой либо от левой к левой), то $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ не изменится. При изменении ориентации системы координат вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ изменит лишь направление на противоположное. В дальнейшем мы будем использовать правую систему координат, а потому тройку векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ будем считать образующей правую связку.

Если векторы либо коллинеарны, либо хотя бы один из них нулевой, то полагаем $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Отметим свойства векторного произведения.

1. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, как на сторонах (следует из элементарной геометрии).

2. Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны. Действительно, из $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$, $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = 0$ следует $\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = 0$.

3. Векторное произведение антикоммутативно, т.е. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$.

Действительно, как следует из определения векторного произведения, векторы $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ будут иметь одинаковые длины и противоположные направления.

4. Скалярный множитель можно вынести за знак векторного произведения, т.е. $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Действительно, при $\lambda = 0$ и при $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ равенство очевидно.

При $\lambda > 0$, $\lambda\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, а потому $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$,

$$|[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\lambda\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = \lambda\,|[\mathbf{ab}]|,$$

откуда и следует утверждение.

При $\lambda < 0$, $\lambda\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, поэтому $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\downarrow [\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Тогда

$$[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] \uparrow\uparrow \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}], \quad |[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\lambda\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) =$$

$$= |\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\{\pi - (\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b})\} = |\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}) = |\lambda|\,|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]|.$$

5. Имеет место распределительный закон операции векторного произведения относительно операции сложения векторов, т.е. $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$. Это свойство примем без доказательства.

Получим выражение векторного произведения через декартовы координаты перемножаемых векторов.

Пусть $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ — декартов базис, т.е. $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 0$, $(\mathbf{i},\mathbf{k}) = 0$, $(\mathbf{j},\mathbf{k}) = 0$. Если базис правый, то $[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{i},\mathbf{k}] = -\mathbf{j}$, $[\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}$, $[\mathbf{k},\mathbf{j}] = -\mathbf{i}$, $[\mathbf{j},\mathbf{i}] = -\mathbf{k}$.

По определению $[\mathbf{i},\mathbf{i}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{j},\mathbf{j}] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{k},\mathbf{k}] = \mathbf{0}$.

Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

Используя свойства 4 и 5, получим

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] = x_1x_2[\mathbf{i},\mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i},\mathbf{j}] +$$
$$+x_1z_2[\mathbf{i},\mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j},\mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] + y_1z_2[\mathbf{j},\mathbf{k}] + z_1x_2[\mathbf{k},\mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k},\mathbf{j}] +$$
$$+z_1z_2[\mathbf{k},\mathbf{k}] = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - x_2y_1\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Полученный результат можно записать в компактной форме: $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, так как предыдущее равенство совпадает с разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки, если бы вместо $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ были числа.

Векторное произведение можно применять при нахождении какого-либо вектора, ортогонального двум данным, при вычислении площадей параллелограмма и треугольника, при нахождении линейной скорости через угловую и радиус-вектор точки, при вычислении моментов силы относительно точки и решении других задач.

5.6. Смешанное произведение

Определение. Смешанным произведением трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий. Обозначается векторное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$. Таким образом, $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})$.

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны. Построим параллелепипед на этих векторах, как на рёбрах. Обозначим высоту параллелепипеда через H, а $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ — через d. Тогда

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]||\mathbf{c}|\cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}).$$

Так как $|\mathbf{c}|\cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}) = H$, если тройка $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ правая, и $|\mathbf{c}|\cos(\mathbf{d}\hat{,}\mathbf{c}) = -H$, если тройка левая, а величина $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$ равна площади основания параллелепипеда, то смешанное произведение имеет следующий геометрический смысл: абсолютная величина смешанного произведения трёх некомпланарных векторов равна объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах. Если тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ правая, то $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) > 0$, если левая, то $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) < 0$.

Три вектора $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Получим выражение смешанного произведения через декартовы координаты сомножителей.

Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$.

Тогда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k}$;
$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (y_1 z_2 - y_2 z_1)x_3 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3 =$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в первой строке которого записаны координаты первого вектора, во второй — второго, в третьей — третьего вектора.

Из свойств определителя вытекает, что при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не изменяется, т.е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на обратный.

Смешанное произведение можно применять при вычислении объёмов параллелепипеда, пирамиды, длин их высот. Например, объём пирамиды $ABCD$: $V = \dfrac{1}{6}|(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})|$.

Замечание. Имея векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, можно рассматривать $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ как произведение вектора $\mathbf{c}$ на скаляр $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, а также двойное векторное произведение $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$.

Пример 6. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, где $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{2}$ и $\varphi = (\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 45°$.

Решение.

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[2\mathbf{p} + \mathbf{r}, \mathbf{p} + 3\mathbf{r}]| = |2[\mathbf{p}, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 6[\mathbf{p}, \mathbf{r}] + 3[\mathbf{r}, \mathbf{r}]| =$$
$$= 5|[\mathbf{p}, \mathbf{r}]| = 5|\mathbf{p}||\mathbf{r}| \sin \varphi,$$

так как $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$, а $[\mathbf{r}, \mathbf{p}] = -[\mathbf{p}, \mathbf{r}]$.

Таким образом, $S = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10.$

Пример 7. Дано: $A(0; -3; -2)$; $B(0; -2; -3)$; $C(-2; -5; -1)$; $D(-2; 1; 2)$. Найдите:

а) площадь S параллелограмма, построенного на векторах
$\dfrac{1}{3}\mathbf{DA}$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{DC}$;

б) объём V пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{AB} + \mathbf{DB}$, $\mathbf{DA}$ и $\mathbf{DC}$.

в) длину высоты AH пирамиды $ABCD$.

Решение:

а) $S = \left|\frac{1}{6}[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}]\right|$; $\mathbf{DA} = (2, -4, -4)$; $\mathbf{DC} = (0, -6, -3)$.

$$[\mathbf{DA}, \mathbf{DC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

$S = \frac{1}{6}|6(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = |(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = \sqrt{4+1+4} = 3;$

б) $V = \frac{1}{6}|(\mathbf{AB} + \mathbf{DB}, \mathbf{DA}, \mathbf{DC})|$. Находим $\mathbf{AB} = (0, 1, -1)$; $\mathbf{DB} = (2, -3, -5)$; $\mathbf{AB} + \mathbf{DB} = (2, -2, -6)$.
Находим объём пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \bmod \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = $$
$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6;$$

в) высоту пирамиды AH найдём по формуле $h = \frac{3V}{S}$, где V — объём пирамиды $ABCD$, а S — площадь её основания BCD. Находим объём пирамиды $ABCD$ по формуле

$$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})|.$$

Так как $\mathbf{AB} = (0, 1, -1)$; $\mathbf{AC} = (-2, -2, 1)$; $\mathbf{AD} = (-2, 4, 4)$, то

$$(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18.$$

Поэтому $V = 3$. Вычисляем $S = \frac{1}{2}|[\mathbf{BC}, \mathbf{BD}]|$, где $\mathbf{BC} = (-2, -3, 2)$, $\mathbf{BD} = (-2, 3, 5)$.

$$[\mathbf{BC}, \mathbf{BD}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -21\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k},$$

$$|[\mathbf{BC}, \mathbf{BD}]| = 3\sqrt{7^2 + 2^2 + 4^2} = 3\sqrt{69},$$

$$S = \frac{3\sqrt{69}}{2}.$$

Следовательно, $h = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{3\sqrt{69}} = \frac{6}{\sqrt{69}}.$

6. Функции в линейных пространствах

В этом подразделе будут изучены наиболее важные частные классы функций — классы линейных и билинейных отображений одного линейного пространства в другое, а также во множество вещественных чисел.

6.1. Функции, отображения

Пусть даны два линейных пространства R и R' и некоторые множества $E \subset R$ и $F \subset R'$.

Соответствие, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ из E сопоставляет некоторый вектор $\mathbf{y}$ из F, называется *отображением* E в F.

Если E совпадает с R, а F с R', то имеем отображение R в R'. Отображение называют также *функцией*, или *оператором*, обозначают обычно буквой f и записывают $y = f(x)$ или $f : E \to F$, или $E \xrightarrow{f} F$. Говорят, что f есть функция переменного $\mathbf{x}$ со значениями в F. При этом элемент $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ называют образом элемента $\mathbf{x}$ при отображении f, а $\mathbf{x}$ — прообразом элемента $\mathbf{y}$.

Пусть $R = R^n$, $R' = R^m$. Если в пространстве R^n и R^m фиксировать базисы, то отображение $f : R^n \to R^m$ определит выражения координат $y^1, y^2, \ldots, y^m$ вектора $\mathbf{y}$ через координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ вектора $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{l} y^1 = f_1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ y^2 = f_2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^m = f_m(x^1, x^2, \ldots, x^n). \end{array} \tag{6.1}$$

Таким образом, задание отображения R^n в R^m при фиксированных базисах равносильно заданию m числовых функций n числовых аргументов.

Произвольные отображения изучаются в математическом анализе. В данном разделе будем изучать лишь линейные отображения конечномерных пространств, тот случай, когда все функции в (6.1) линейны, т.е. имеют вид $y^i = a^i_1 x^1 + a^i_2 x^2 + \ldots + a^i_n x^n$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, а коэффициенты a^i_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются некоторыми константами.

6.2. Линейные операторы

Определение. Пусть имеются два (не обязательно различных) линейных пространства R и R'. Линейным отображением пространства R в R' или линейным оператором, действующим из R в R', называется отображение A пространства R в R', обладающее следующим свойством:

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}$$

для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любых действительных чисел α и β.

Это соотношение эквивалентно двум: $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$, $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$, получающимся из данного при $\alpha = \beta = 1$ и при $\beta = 0$.

Иногда в записи $A(\mathbf{x})$ будем скобки опускать и писать $A\mathbf{x}$.

Примеры.

1. Оператор, который каждому вектору из R сопоставляет нуль-вектор из R', называется нулевым. Этот оператор, очевидно, линеен.

2. Пусть оператор Π действует из арифметического линейного пространства R^3 в пространство R^2 по закону $\Pi(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = (\xi^1,\xi^2)$. Этот оператор называется *оператором проектирования.* Покажем, что он линеен. Если $\mathbf{x} = (\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ и $\mathbf{y} = (\eta^1,\eta^2,\eta^3)$ — два произвольных вектора из R^3, то $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} = (\alpha\xi^1+\beta\eta^1, \alpha\xi^2+\beta\eta^2, \alpha\xi^3+\beta\eta^3)$, где α и β — любые числа. Находим $\Pi\mathbf{x} = (\xi^1,\xi^2)$, $\Pi\mathbf{y} = (\eta^1,\eta^2)$, $\Pi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = (\alpha\xi^1+\beta\eta^1, \alpha\xi^2+\beta\eta^2) = \alpha\Pi\mathbf{x} + \beta\Pi\mathbf{y}$, т.е. оператор Π линеен.

Теорема 1. Пусть R^n — n-мерное линейное пространство и $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ — его базис. Какая бы ни была совокупность векторов $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_n$ из R', существует единственный линейный оператор $A : R^n \to R'$, удовлетворяющий условию $A\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Доказательство. Предположим, что линейный оператор A существует. Тогда для любого $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ из R^n выполняется условие $A\mathbf{x} = A(\xi^i\mathbf{e}_i) = \xi^i A\mathbf{e}_i = \xi^i\mathbf{f}_i$, откуда следует единственность оператора A. С другой стороны, для любого $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ положим по определению $A\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{f}_i$, а потому и $A\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$. Докажем, что таким образом построенный оператор A линеен. Действительно, если $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = \eta^i\mathbf{e}_i$ — два произвольных вектора из R_n, а α и β — произвольные числа, то $A\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{f}_i$, $A\mathbf{y} = \eta^i\mathbf{f}_i$, $A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = A[(\alpha\xi^i+\beta\eta^i)\mathbf{e}_i] =$ $= (\alpha\xi^i+\beta\eta^i)\mathbf{f}_i = \alpha\xi^i\mathbf{f}_i + \beta\eta^i\mathbf{f}_i = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}$.

Теорема доказана.

6.3. Матрица линейного оператора

Пусть A — линейный оператор, действующий из R^n в R^m, и $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — произвольный базис R^n, а $\{\mathbf{f}_j\} = (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots,\mathbf{f}_m)$ — базис пространства R^m. Подействуем оператором A на каждый из базисных векторов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$. В результате получим n векторов $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2,\ldots,A\mathbf{e}_n$ пространства R^m, которые можно разложить по векторам базиса $\mathbf{f}_j$ и записать

$$A\mathbf{e}_i = a_i^j\mathbf{f}_j \quad (i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}) \tag{6.2}$$

или в подробной записи

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_1^1\mathbf{f}_1 + a_1^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_1^m\mathbf{f}_m, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_2^1\mathbf{f}_1 + a_2^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_2^m\mathbf{f}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\mathbf{e}_n &= a_n^1\mathbf{f}_1 + a_n^2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_n^m\mathbf{f}_m. \end{aligned}$$

Числа a_i^j определяют матрицу

$$A_{(\mathbf{e}_i,\mathbf{f}_j)} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{bmatrix}$$

размера $(m \times n)$, называемую матрицей оператора A в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$. Заметим, что в s-м столбце матрицы A записаны координаты вектора $A\mathbf{e}_s$ относительно базиса $\{\mathbf{f}_j\}$.

Из теоремы 1 следует, что линейный оператор полностью определяется заданием его матрицы относительно данных базисов, так как она указывает образы базисных векторов. Это значит, что, зная матрицу A, можно найти результат действия линейного оператора на любой вектор. Покажем, как это сделать.

Пусть $\mathbf{x} = \xi^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \eta^j\mathbf{f}_j$. Требуется выразить координаты η^j вектора $A\mathbf{x}$ через числа ξ^i и a_i^j. Находим, используя формулы (6.2), $\eta^j\mathbf{f}_j = A\mathbf{x} = A(\xi^i\mathbf{e}_i) = \xi^i A\mathbf{e}_i = \xi^i a_i^j\mathbf{f}_j$. Отсюда следует, что

$$\eta^j = a_i^j\xi^i \ (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}), \tag{6.3}$$

или в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Таким образом, s-я координата вектора $A\mathbf{x}$ есть линейная комбинация координат вектора $\mathbf{x}$. Коэффициенты этой линейной комбинации образуют s-ю строку матрицы A оператора.

Итак, после выбора базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$ пространств R^n и R^m каждому линейному оператору сопоставляется единственная матрица $[a_i^j]$. Если задана произвольная матрица $[a_i^j]$ размера $(m \times n)$, то её можно считать матрицей линейного оператора $A : R^n \to R^m$, полагая координатами векторов $A\mathbf{e}_i$ столбцы этой матрицы. Таким образом, между всеми матрицами размера $(m \times n)$ и всеми линейными операторами, действующими из R^n в R^m с фиксированными базисами, устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Например, нулевой оператор в любых базисах имеет нулевую матрицу.

Рассмотрим оператор $\Pi : R^3 \to R^2$ проектирования, где R^3 и R^2 — арифметические линейные пространства. Зафиксируем базисы $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ в R^3 и $\mathbf{f}_1 = (1,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1)$ в R^2. Тогда $\Pi\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\Pi\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\Pi\mathbf{e}_3 = (0,0)$. Матрица оператора Π в этих базисах имеет вид $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Матрица линейного оператора, действующего из R^n в R^1, будет состоять из одной строки, а действующего из R^1 в R^n — из одного столбца.

Часто рассматриваются операторы $A : R_n \to R_n$. В этом случае достаточно выбрать базис $\{\mathbf{e}_i\}$, а базис $\{\mathbf{f}_j\}$ считать совпавшим с $\{\mathbf{e}_i\}$. Формулы (6.2) принимают вид

$$A\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{e}_j,$$

причём матрица $[a_i^j]$ — квадратная порядка n. Соотношения (6.3), (6.4) сохраняются и при условии $m = n$.

Пример. Является ли линейным отображение
$A\mathbf{x} = (2x_2, x_1 + x_3, -x_3)$? Если да, то записать матрицу отображения.

Решение. Проверим условия линейности. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

$$A(x + y) = (2x_2 + 2y_2, x_1 + y_1 + x_3 + y_3, -x_3 - y_3) =$$
$$= (2x_2, x_1 + x_3, -x_3) + (2y_2, y_1 + y_3, -y_3) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad \text{и}$$
$$A(\alpha x) = (2\alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_3, -\alpha x_3) = \alpha(2x_1, x_1 + x_3, -x_3) =$$
$$= \alpha A\mathbf{x}.$$

Отображение является линейным. Найдём его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. $A\mathbf{e}_1 = (0,1,0)$, $A\mathbf{e}_2 = (2,0,0)$, $A\mathbf{e}_3 = (0,1,-1)$.

Тогда $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Мы видели, что матрица линейного оператора зависит от выбора базиса. Найдём закон изменения матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Обозначим матрицу оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ через $A = [a_i^k]$, а в базисе $\{\mathbf{f}_j\}$ — через $B = [b_j^k]$. По формулам $\mathbf{f}_j = c_j^m \mathbf{e}_m$ (см. 1.24) перейдём от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{f}_j$. Тогда $A\mathbf{f}_j = b_j^m \mathbf{f}_m = \underline{b_j^m c_m^i \mathbf{e}_i} = A(c_j^m \mathbf{e}_m) = \underline{c_j^m a_m^i \mathbf{e}_i}$. Из подчёркнутого следует, что $b_j^m c_m^i = c_j^m a_m^i$. Если обозначим $C = [c_i^j]$, то в матричной форме это соотношение можем записать в виде $CB = AC$.

Действительно, $b_j^m c_m^i$ — это элемент матрицы CB, стоящий в i-й строке, j-м столбце, а $c_j^m a_m^i$ — это элемент матрицы AC, стоящий в i-й строке, j-м столбце. Размеры матрицы CB и AC одинаковы. Отсюда $B = C^{-1}AC$. Мы получили закон изменения матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Теорема 2. Определитель матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ не изменяется при изменении базиса.

Доказательство. По свойству 9 определителя (см. п. 2.5) имеем $|B| = |C^{-1}||A||C|$, но $|C^{-1}||C| = 1$, поэтому $|B| = |A|$.

Теорема 3. Ранг матрицы линейного оператора $A : R^n \to R^n$ не изменяется при изменении базиса.

Теорему примем без доказательства.

6.4. Действия над линейными операторами

Пусть даны два линейных оператора A и B, отображающих пространство R^n с базисом $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ в линейное пространство R^m с базисом $\{\mathbf{f}_j\} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$. Матрицы этих операторов в выбранных базисах обозначим $A = [a_i^j]$, $B = [b_i^j]$.

1. *Равенство линейных операторов.* Два линейных оператора A и B, действующих из R^n в R^m, называют равными (пишут $A = B$), если для любого вектора $\mathbf{x} \in R^n$ выполняется условие $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$. Очевидно, что равные операторы имеют одинаковые матрицы в одних и тех же базисах.

2. *Сложение линейных операторов.* Суммой линейных операторов A и B называется оператор C, обозначаемый $A + B$, определяемый равенством $C\mathbf{x} = (A + B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$. Покажем, что оператор $C : R^n \to R^m$ линейный. Пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два произвольных вектора из R^n и α, β — произвольные числа. Тогда

$$C(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) + B(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) =$$
$$= \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 + \alpha B\mathbf{x}_1 + \beta B\mathbf{x}_2 =$$
$$= \alpha(A\mathbf{x}_1 + B\mathbf{x}_1) + \beta(A\mathbf{x}_2 + B\mathbf{x}_2) = \alpha C\mathbf{x}_1 + \beta C\mathbf{x}_2,$$

т.е. оператор C — линейный.

Найдём матрицу $C = [c_i^j]$ оператора C в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_j\}$. Находим $C\mathbf{e}_i = c_i^j\mathbf{f}_j = (A + B)\mathbf{e}_i = A\mathbf{e}_i + B\mathbf{e}_i = a_i^j\mathbf{f}_j + b_i^j\mathbf{f}_j = (a_i^j + b_i^j)\mathbf{f}_j$. Отсюда $c_i^j = a_i^j + b_i^j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, т.е. $C = A + B$.

Как видим, при сложении линейных операторов их матрицы относительно одних и тех же базисов складываются.

3. *Умножение оператора на число.* Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор B (обозначается $B = \lambda A$), определяемый условием $B\mathbf{x} = (\lambda A)\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x}$. Предлагается

самостоятельно доказать линейность оператора B и что матрица оператора B равна произведению матрицы оператора A на число λ.

4. *Композиция линейных операторов.* Пусть A — линейный оператор, действующий из пространства R^n в R^m, а B — линейный оператор, действующий из R^m в R^s. В результате возникает отображение C, обозначаемое $C = B \circ A$, линейного пространства R^n в R^s, которое можно определить формулой $C\mathbf{x} = (B \circ A)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x})$. Оператор C называется *композицией*, или *суперпозицией*, операторов A и B. Покажем, что оператор C линеен. Находим

$$C(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = B[A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)] = B[\alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2] =$$
$$= \alpha B(A\mathbf{x}_1) + \beta B(A\mathbf{x}_2) = \alpha C\mathbf{x}_1 + \beta C\mathbf{x}_2,$$

т.е. оператор C линеен.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис R^n, $\{\mathbf{f}_k\} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$ — базис R^m, $\{\mathbf{g}_r\} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_s)$ — базис R^s. Найдём матрицу $C = [c_i^r]$ линейного оператора $C : R^n \to R^s$ в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{g}_r\}$.

Используя определение матрицы линейного оператора (см. формулы (6.2)), находим $C\mathbf{e}_i = \underline{c_i^r \mathbf{g}_r} = B(A\mathbf{e}_i) = B(a_i^k \mathbf{f}_k) = a_i^k B\mathbf{f}_k = \underline{a_i^k b_k^r \mathbf{g}_r}$. Сравнивая подчёркнутые выражения, получаем

$$c_i^r = a_i^k b_k^r,\ i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, r = \overline{1, s}. \tag{6.5}$$

Из соотношений (6.5) и определения произведения матриц (см. п. 1.5) следует, что $C = B \cdot A$, т.е. матрица C композиции линейных операторов A и B является произведением матриц этих операторов.

Рассмотренные действия над линейными операторами обладают теми же свойствами, что и аналогичные операции над матрицами (см. соотношения (1.3)).

Докажем, например, что $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$, где A, B, C — линейные операторы, B и $C : R^n \to R^m$, $A : R^m \to R^s$. Находим

$$[A \circ (B + C)]\mathbf{x} = A[(B + C)\mathbf{x}] = A[B\mathbf{x} + C\mathbf{x}] =$$
$$= A(B\mathbf{x}) + A(C\mathbf{x}) = A \circ B\mathbf{x} + A \circ C\mathbf{x} = (A \circ B + A \circ C)\mathbf{x},$$

т.е. $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$. Если A, B, C — матрицы операторов A, B, C, то $A(B + C) = AB + AC$, что следует из того, что матрица суммы операторов равна сумме их матриц, а матрица композиции операторов равна произведению их матриц. Предлагается таким же образом доказать и все остальные равенства в соотношениях (1.3).

5. *Обратный оператор.* Если линейный оператор A с невырожденной матрицей действует из R^n в R^n, то для него можно определить обратный оператор B условием $B \circ A = E$, где $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x}$. Матрицы взаимно обратных операторов взаимно обратны, так как их произведение даёт единичную матрицу.

Множество всех линейных операторов $A : R^n \to R^m$ образует линейное пространство, если в качестве внешней операции принять умножение оператора на число, а в качестве внутренней — сложение операторов. Предлагается доказать, что его размерность равна $n \cdot m$.

6.5. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть $A : R^n \to R^n$ — линейный оператор и A — его матрица относительно базиса $\mathbf{e}_i$.

Собственным вектором линейного оператора A (матрицы A) называется ненулевой вектор $\mathbf{x}$ такой, что

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{6.6}$$

Число λ называется собственным числом, отвечающим собственному вектору $\mathbf{x}$.

Для единичной матрицы E любой вектор $\mathbf{x}$ является собственным, с собственным числом, равным 1, так как $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$, что следует из формул (6.3).

Получим правило отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы. Соотношение (6.6) можно переписать в виде $A\mathbf{x} = \lambda E\mathbf{x}$ или $A\mathbf{x} - \lambda E\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е.

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{6.7}$$

Соотношение (6.7) представляет собой матричную запись однородной системы n уравнений с n неизвестными, определитель которой равен $\det(A - \lambda E)$.

Для того чтобы система (6.7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{6.8}$$

Равенство (6.8) представляет собой уравнение относительно λ. Это уравнение называется характеристическим.

В подробной записи уравнение (6.8) имеет вид

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив это уравнение, найдём собственные числа $\lambda = \lambda_i$ матрицы. Подставляя их поочерёдно в систему (6.7) и решая её после этого, найдём собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

Среди корней характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ могут быть и кратные. Напомним определение этого понятия, известного из средней школы.

Корень λ_i характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ называется m-кратным, если имеет место $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^m Q(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ — многочлен степени $(n - m)$ относительно λ, причём $Q(\lambda_i) \neq 0$.

Если $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$, то в координатной форме систему (6.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 + \ldots + a_n^2 x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots + (a_n^n - \lambda)x^n = 0. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства собственных векторов.

Теорема 4. Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

Доказательство. Если $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1,\ A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2,\ \ldots,\ A\mathbf{x}_m = \lambda\mathbf{x}_m$, то при любых α_i имеет место

$$A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m) = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m A\mathbf{x}_m =$$
$$= \alpha_1\lambda\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m\lambda\mathbf{x}_m = \lambda(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m).$$

Следствие. Все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному числу, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.

Это подпространство является линейной оболочкой собственных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, отвечающих собственному числу λ.

Теорема 5. Если собственные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независима.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 6. Собственные числа линейного оператора $A : R^n \to R^n$ не изменяются при изменении базиса.

Доказательство. Пусть A и B — матрицы одного линейного оператора в двух разных базисах с матрицей C перехода от одного базиса к другому. Тогда, как показано в п. 6.3, имеет место $B = C^{-1}AC$. Находим

$$|B - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| =$$
$$= |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| = |A - \lambda E|.$$

Таким образом, матрицы A и B имеют общее характеристическое уравнение, а потому их собственные числа совпадают.

Пример. Докажите, что вектор $\mathbf{x} = (1,2,1)^T$ является собственным для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$, и найдите соответствующее ему собственное число. Найдите другие собственные числа и отвечающие им собственные векторы.

Решение. Имеем

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6+4 \\ 4-14+8 \\ 6-14+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{x} = (1,2,1)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = -1$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель, получим $(\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Запишем систему для определения собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

Третье уравнение равно разности второго и первого, поэтому его можно вычеркнуть из системы. Мы получили систему

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

В качестве свободного неизвестного можно выбрать x_3 и выразить через него неизвестные x_1 и x_2. Получим

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3,\ x_2 = x_3.$$

Полагая $x_3 = 2$, найдём собственный вектор $(1,2,2)$. Проверка:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6+8 \\ 4-14+16 \\ 6-14+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

следовательно, вектор $\mathbf{x} = (1,2,2)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = 3$. Собственными векторами, отвечающими числу $\lambda = 3$, будут и векторы $(1,2,2)^T t$, где $t \neq 0$. Если $\mathbf{x}$ — собственный вектор, то $t\mathbf{x}$ при $t \neq 0$ — тоже собственный.

Заметим, что собственному числу $\lambda = -1$ кратности 2 отвечает лишь один с точностью до числового множителя собственный вектор, т.к. в рассматриваемом примере $\operatorname{rang}(A - \lambda E) = 2$ при $\lambda = -1$. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

Если существует базис $\{\mathbf{e}_i\}$, состоящий из собственных векторов оператора $A : R^n \to R^n$, то в этом базисе его матрица имеет диагональный вид, поскольку $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$. При этом по диагонали расположены собственные числа оператора A. Но не всякий линейный оператор имеет такой базис, поскольку собственных линейно независимых векторов может быть менее n (см. пример выше). Рассмотрим частный класс линейных операторов, для которых такой базис всегда существует.

Линейный оператор $A : E^n \to E^n$, действующий в евклидовом пространстве E^n, называется *симметрическим*, или *самосопряженным*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из E^n выполняется условие $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$.

Отметим некоторые свойства симметрического линейного оператора.

Свойство 1. Линейный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица A в любом ортонормированном базисе симметрична, т.е. совпадает с транспонированной матрицей A^T.

Предлагается справедливость свойства доказать самостоятельно.

Свойство 2. Собственные векторы симметрического линейного оператора A, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, ортогональны.

Действительно, если собственные векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ оператора A отвечают собственным числам λ_1 и λ_2, то $A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$, $A\mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{y}$ и поэтому $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \lambda_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Так как оператор A симметрический, то $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = 0$, т.е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Поскольку $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, следовательно, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны.

Свойство 3. Собственному числу кратности m симметрического линейного оператора соответствует линейно независимая система из m собственных векторов этого оператора.

Свойство 4. Для всякого симметрического линейного оператора (симметричной матрицы) существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

Справедливость свойств 3 и 4 примем без доказательства.

6.6. Линейные формы

Отображение $\mathcal{L}$ линейного пространства R во множество вещественных чисел называется *линейной формой*, или *линейным функционалом*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R и любых чисел α и β выполняется условие $\mathcal{L}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{L}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{L}(\mathbf{y})$.

Например, множество всех интегрируемых на (a, b) функций образует линейное пространство. Линейную форму на нём можно определить соотношением

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Пусть дано линейное пространство R^n с выбранным в нём базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n$ — любой вектор из R^n. Если $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ — произвольная линейная форма, заданная на R^n, то $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n) = x^1\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) + x^2\mathcal{L}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x^n\mathcal{L}(\mathbf{e}_n)$. Обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = a_1$, $\mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = a_2$, ..., $\mathcal{L}(\mathbf{e}_n) = a_n$. Числа a_i не зависят от выбора вектора $\mathbf{x}$, а зависят только от выбора базиса. Эти числа называются коэффициентами линейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Теперь можем записать $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ — общий вид линейной формы.

Если перейдём к новому базису $\mathbf{f}_j$ по формулам $\mathbf{f}_j = c_j^k\mathbf{e}_k$ и коэффициенты линейной формы $\mathcal{L}$ в новом базисе обозначим через b_j, то $b_j = \mathcal{L}(\mathbf{f}_j) = \mathcal{L}(c_j^k\mathbf{e}_k) = c_j^k\mathcal{L}(\mathbf{e}_k) = c_j^k a_k$, т.е. $b_j = c_j^k a_k$. Таким образом, коэффициенты линейной формы преобразуются по тому же закону, что и базисные векторы, т.е. $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)C$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому (см. (3.14), п 3.9).

Над линейными формами в R^n можно ввести операции сложения и умножения на число следующим образом. Пусть относительно некоторого базиса даны две линейные формы: $\mathcal{L}_1(\mathbf{x}) = a_ix^i$ и $\mathcal{L}_2(\mathbf{x}) = b_ix^i$. Тогда их суммой называют линейную форму $\mathcal{L}_3(\mathbf{x})$, определённую равенством $\mathcal{L}_3(\mathbf{x}) = (a_i + b_i)x^i$, а произведением линейной формы $\mathcal{L}_1(\mathbf{x})$ на число λ называют линейную форму вида $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = (\lambda a_i)x^i$. Легко показать, что введённые операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Следовательно, множество всех линейных форм, заданных на R^n, образует линейное пространство, обозначаемое R_n. Его векторы, составленные из коэффициентов соответствующих линейных форм, являются примером векторов типа $(1 \times n)$, т.е. векторов-строк.

6.7. Билинейные и квадратичные формы

Говорят, что на линейном пространстве R^n задана билинейная форма B, если имеется правило, позволяющее любой паре векторов

$\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R^n сопоставить число $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$, причём это правило удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &B(\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=\alpha B(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+\beta B(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}),\\ &B(\mathbf{x},\mu\mathbf{y}_1+\nu\mathbf{y}_2)=\mu B(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+\nu B(\mathbf{x},\mathbf{y}_2), \end{aligned} \tag{6.9}$$

где α, β, μ, ν — любые числа, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — любые векторы из R^n.

Из (6.9) следует, что билинейная форма есть линейная форма относительно первого аргумента при фиксированном втором и линейная форма относительно второго аргумента при фиксированном первом.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — произвольный базис R^n и $\mathbf{x}=\xi^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y}=\eta^j\mathbf{e}_j$, — два произвольных вектора из R^n, тогда $B(\mathbf{x},\mathbf{y})=$ $=B(\xi^i\mathbf{e}_i,\eta^j\mathbf{e}_j)=\xi^i\eta^jB(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$. Обозначив $B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=b_{ij}$, получим

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y})=\xi^i\eta^jb_{ij}\ — \tag{6.10}$$

общий вид билинейной формы. Запишем соотношение (6.10) при $n=3$:

$$\begin{aligned} &B(\mathbf{x},\mathbf{y})=\xi^1\eta^1b_{11}+\xi^1\eta^2b_{12}+\xi^2\eta^1b_{21}+\xi^1\eta^3b_{13}+\xi^3\eta^1b_{31}+\\ &+\xi^2\eta^3b_{23}+\xi^3\eta^2b_{32}+\xi^2\eta^2b_{22}+\xi^3\eta^3b_{33}. \end{aligned}$$

Числа b_{ij} называются коэффициентами билинейной формы.
Из этих чисел можно составить матрицу

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \ldots & b_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

называемую матрицей билинейной формы относительно базиса $\mathbf{e}_i$. Выясним, как изменяется матрица билинейной формы при изменении базиса. Пусть $\mathbf{f}_j=c^i_j\mathbf{e}_i$, $C=[c^i_j]$ — формулы перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{f}_j\}$. Коэффициенты билинейной формы $B(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в новом базисе обозначим $\tilde{b}_{ij}$, а её матрицу через $\tilde{B}$. Находим $\tilde{b}_{ij}=B(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)=B(c^k_i\mathbf{e}_k,c^m_j\mathbf{e}_m)=c^k_ic^m_jB(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_m)=c^k_ic^m_jb_{km}$, т.е.

$$\tilde{b}_{ij}=c^k_ic^m_jb_{km},\ \ i,j,k,m=\overline{1,n}. \tag{6.11}$$

Соотношения (6.11) эквивалентны матричному равенству

$$\tilde{B}=C^TBC. \tag{6.12}$$

Теорема 7. Ранг r матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Справедливость теоремы 7 следует непосредственно из соотношения (6.12).

Теорема 8. Если матрица билинейной формы невырождена в одном базисе, то она невырождена и во всех остальных.

Действительно, из (6.12) получаем

$$|\tilde{B}| = |C^T| \cdot |B| \cdot |C| = |B| \cdot |C|^2. \tag{6.13}$$

Эта теорема является следствием теоремы 7.

Теорема 9. Знак определителя матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Это утверждение следует из (6.13).

Билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется *симметричной*, если $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из R^n.

Если билинейная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симметрична, то относительно любого базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ имеем $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = B(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)$, т.е. $b_{ik} = b_{ki}$, следовательно, $B = B^T$.

Функция $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ одного векторного аргумента $\mathbf{x}$, заданная на линейном пространстве R^n, получающаяся из симметричной билинейной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, называется квадратичной формой. Полагая в (6.10) $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\eta^j = \xi^j$, получаем общий вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \xi^i \xi^j b_{ij}. \tag{6.14}$$

Соотношение (6.14) можно принять за новое определение квадратичной формы. При $n = 3$ квадратичная форма в полной записи имеет вид

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = b_{11}(\xi^1)^2 + b_{22}(\xi^2)^2 + b_{33}(\xi^3)^2 + 2b_{12}\xi^1\xi^2 +$$
$$+ 2b_{13}\xi^1\xi^3 + 2b_{23}\xi^2\xi^3.$$

При этом учтено, что $b_{ik} = b_{ki}$, и приведены подобные члены.

Вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = b_{11}(\xi^1)^2 + b_{22}(\xi^2)^2 + \ldots + b_{nn}(\xi^n)^2$$

называется каноническим.

Теорема 10. Всякая квадратичная форма, заданная в R^n, путём перехода к новому базису может быть приведена к каноническому виду.

Теорему примем без доказательства.

Широкое применение находят квадратичные формы, заданные в евклидовых линейных пространствах E^n. Квадратичную форму в евклидовых пространствах относительно ортогонального базиса можно определить равенством $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{x})$, где B — некоторый симметрический линейный оператор $B : E^n \to E^n$.

Возникает вопрос, можно ли квадратичную форму привести к каноническому виду путём перехода к другому ортонормированному базису. Положительный ответ содержится в теореме 11.

Теорема 11. В евклидовом линейном пространстве E^n существует ортонормированный базис $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Доказательство. Заметим, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому матрицы квадратичной формы и линейного оператора изменяются по одному закону, так как в этом случае $C^T = C^{-1}$, где C — матрица перехода. Следовательно, если матрицы линейного оператора и квадратичной формы совпадают в одном ортонормированном базисе, то они совпадают и во всех остальных.

Возьмём симметрический линейный оператор A, матрица которого в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ совпадает с матрицей B квадратичной формы. По свойству 4 симметрического линейного оператора (см. п. 6.5) существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_j\}$, состоящий из собственных векторов этого оператора. В базисе $\{\mathbf{f}_j\}$ матрица оператора A имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа данного линейного оператора. Матрица квадратичной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в этом же базисе совпадает с $\tilde{A}$, но тогда квадратичная форма примет канонический вид, причём её коэффициенты совпадут с числами λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Теорема доказана.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями квадратичной формы.* Опишем последовательность действий, которые нужно совершить, чтобы привести квадратичную форму к главным осям.

1. По квадратичной форме $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ составляем симметричную матрицу $B = [b_{ik}]$.

2. Находим собственные числа λ_1, λ_2, ..., λ_n матрицы B и записываем канонический вид квадратичной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1(\eta^1)^2 + \lambda_2(\eta^2)^2 + \ldots + \lambda_n(\eta^n)^2.$$

3. Находим собственные векторы матрицы B. При этом если какое-нибудь собственное число λ_i имеет кратность m, то ему будет соответствовать система из m собственных линейно независимых векторов. Полученную систему из m векторов ортогонализируем методом, описанным в п. 3.7. Проделав такую операцию с каждым собственным вектором, получим ортогональный базис. Пронормировав его, найдём искомый ортонормированный базис.

4. Записываем выражение новых координат $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n$ через старые $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ и наоборот (см. формулы 1.29).

Пример. Привести к главным осям квадратичную форму $Q(\mathbf{x}) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$.

Решение. Записываем матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ данной квадратичной формы и находим собственные числа этой матрицы, решая уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 =$$

$$= -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Имеем $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Записываем канонический вид квадратичной формы $Q(\mathbf{x}) = 4(y^1)^2 + (y^2)^2 - 2(y^3)^2$.

Находим единичные собственные векторы матрицы A:

$$\mathbf{f}_1 = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\},\ \mathbf{f}_2 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\},\ \mathbf{f}_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\},$$

образующие новый ортонормированный базис. По формулам (3.18) получаем

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

7. Приложение линейной алгебры к задачам аналитической геометрии

7.1. Основные задачи аналитической геометрии. Понятие уравнения линии и поверхности

Возможность характеризовать положение точки на плоскости и в пространстве с помощью пары или тройки чисел позволяет применять для изучения кривых и поверхностей аппарат линейной алгебры и математического анализа.

Пусть на плоскости задана некоторая кривая $\mathcal{L}$ и выбрана декартова система координат $(0, x, y)$.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением кривой* $\mathcal{L}$ в выбранной системе координат, если координаты (x, y) любой точки кривой $\mathcal{L}$ удовлетворяют этому уравнению, и любое решение (x, y) уравнения $F(x, y) = 0$ определяет точку $M(x, y)$, принадлежащую $\mathcal{L}$.

Совершенно аналогично можно определить уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности S относительно декартовой системы координат: *уравнением поверхности* S относительно данной декартовой системы координат называется уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащие на этой поверхности, но не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

Кривую $\mathcal{L}$ в пространстве можно задать как линию пересечения двух поверхностей, т.е. в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

где уравнения $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ определяют некоторые поверхности, проходящие через кривую $\mathcal{L}$.

Задание кривой в виде системы двух уравнений не всегда удобно ввиду неоднозначности этой системы. Часто более удобным оказывается параметрическое задание кривой

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2, \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

при котором положение точки на кривой характеризуется значением некоторого параметра t (в физике в качестве параметра t, как правило, принимается время).

Параметрические уравнения кривой можно записать в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \eta(t)\mathbf{k}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

Параметрически можно также задать и поверхность в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ z = \eta(u,v) \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \eta(u,v)\mathbf{k},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \\ \eta(u,v) \end{bmatrix}.$$

При этом положение точки на поверхности определяется значением двух параметров: u и v.

Задачи аналитической геометрии:

1) по известным геометрическим свойствам кривой $\mathcal{L}$ или поверхности S записать их уравнения;

2) исходя из известных уравнений кривых или поверхностей, изучить геометрические свойства этих кривых или поверхностей.

Рассмотрим примеры задания некоторых кривых и поверхностей уравнениями.

Окружность. Записать уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ радиуса R.

Как известно, *окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от некоторой фиксированной точки этой плоскости.

Точка $M(x,y)$ лежит на данной окружности тогда и только тогда, когда $|\mathbf{CM}| = R$, т.е.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ — \tag{7.1}$$

уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ радиуса R. Уравнение (7.1) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{7.2}$$

Параметрически окружность (7.1) можно задать в виде системы

$$\begin{cases} x = a + R\cos t, \\ y = b + R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Мы решили задачу 1): по известным свойствам кривой получили её уравнение.

Выясним, в каких случаях произвольное уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0, \qquad (7.3)$$

где $a_{ik} = \mathrm{const}$, относительно декартовых координат точки определяет окружность, найдём её центр и радиус.

Сравнивая (7.2) и (7.3), видим, что уравнение (7.3) может определять окружность, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$. В этом случае уравнение (7.3) можно записать в виде

$$x^2 + y^2 + \frac{2a_{01}}{a_{11}}\,x + \frac{2a_{02}}{a_{11}}\,y + \frac{a_{00}}{a_{11}} = 0$$

или, после выделения полных квадратов,

$$\left(x + \frac{a_{01}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{02}}{a_{11}}\right)^2 = \frac{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}{a_{11}^2}. \qquad (7.4)$$

Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$, то уравнение (7.4) определяет окружность, радиус которой равен $\dfrac{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}$, а центр её имеет координаты $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, то уравнению (7.4) удовлетворяют координаты единственной точки $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$. Если же $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} < 0$, то уравнению (7.4) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. Говорят, что в этом случае уравнение (7.4) определяет мнимую окружность. Таким образом, уравнение (7.3) является уравнением окружности только в случае, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{01}^2 + a_{02}^2 - a_{00}a_{11} > 0$.

Частично мы решили задачу 2): зная уравнение (7.3), выяснили, при каких условиях оно определяет окружность. Полное решение этой задачи, т.е. исследование случаев, когда $a_{12} \neq 0$, $a_{11} \neq a_{22}$, будет проведено позднее, после изучения эллипса, гиперболы и параболы.

Пример 1. Найдите центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0. \qquad (а)$$

Решение. Выделяя полные квадраты, уравнение (а) можно записать в виде

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9. \qquad (б)$$

Сравнивая (7.1) и (б), видим, что центр имеет координаты $(-1; 2)$, а радиус $R = 3$.

Парабола. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой этой же плоскости.

Данная точка F называется фокусом параболы, а данная прямая — директрисой параболы. Выберем декартову систему координат следующим образом: ось OX проведём через фокус F перпендикулярно директрисе (рис. 7.1). Начало координат поместим в точку, равноудалённую от фокуса и директрисы. Обозначим расстояние между фокусом и директрисой через p. Величину p называют параметром параболы.

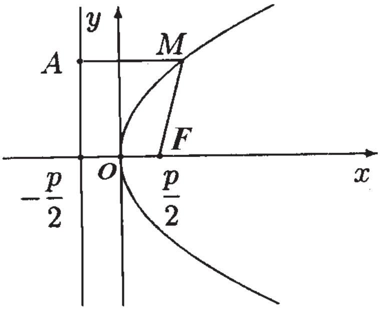

Рис. 7.1.

При таком выборе системы координат для всех точек директрисы $x = -\frac{p}{2}$, а фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. Тогда по определению параболы имеет место равенство $|\mathbf{AM}| = |\mathbf{MF}|$, где $A\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ — точка директрисы. Следовательно,

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2 + y^2}.$$

Из равенства корней следует равенство подкоренных выражений, т.е. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}-x\right)^2 + y^2$ или $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2$, т.е. $y^2 = 2px$. Это соотношение равносильно условию $|\mathbf{AM}| = |\mathbf{MF}|$, так как мы не совершали операций, которые могли бы привести к потере решений и к появлению других решений. Таким образом, мы получили искомое уравнение параболы $y^2 = 2px$, называемое каноническим.

Легко доказать, что уравнение (7.3) может определять параболу, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Это следует из того, что определитель матрицы квадратичной формы не изменяется при изменении базиса, но для квадратичной формы $B(x, y) = y^2$ этот определитель равен нулю. При выполнении условия $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ кривая, определяемая уравнением (7.3), может распасться на пару параллельных или совпавших прямых.

Пример 2. Докажите, что уравнение $y^2 - 6y + 6 + x = 0$ определяет параболу. Найдите значение её параметра p и координаты вершины.

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем $(y-3)^2 + x - 3 = 0$. Если положить $y_1 = y - 3$, $x_1 = -x + 3$, то уравнение приводится к виду $y_1^2 = x_1$. Сравнивая последнее уравнение с каноническим уравнением параболы, находим, что $2p = 1$ и $p = 1/2$. Вершина параболы находится в точке $(3, 3)$.

Сфера. Записать уравнение сферы с центром в точке $C(a, b, c)$ радиуса R.

Как известно, *сферой* называется множество всех точек пространства, равноудалённых от данной фиксированной точки.

Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка сферы, то $|\mathbf{MC}| = R$, следовательно:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \ — \tag{7.5}$$

уравнение сферы.

Аналогично тому, как это сделано для окружности, можно доказать, что произвольное уравнение второго порядка

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0 \end{gathered} \tag{7.6}$$

определяет сферу, если $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} > 0$, с центром в точке $\left(-\dfrac{a_{01}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{02}}{a_{11}}\right)$ радиуса $R = \dfrac{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11}}}{|a_{11}|}$.

Если $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, то уравнению (7.6) удовлетворяют только координаты точки C. При $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 - a_{00}a_{11} < 0$ уравнению (7.6) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства. Имеем так называемую мнимую сферу.

Цилиндрическая поверхность. Пусть даны некоторая кривая $\mathcal{L}$ и ненулевой вектор $\mathbf{l}$. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная всеми прямыми, параллельными вектору $\mathbf{l}$ и пересекающими кривую $\mathcal{L}$. При этом кривую $\mathcal{L}$ называют направляющей, а соответствующие прямые — образующими цилиндрической поверхности. Покажем, что уравнение $F(x, y) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси OZ, а направляющей является кривая в координатной плоскости OXY, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$. Действительно, если координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, то этому уравнению удовлетворяют координаты точки $M(x_0, y_0, z)$ при любом z, т.е. все точки прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, 0)$ параллельно оси OZ. Отсюда и следует, что поверхность $F(x, y) = 0$ есть цилиндрическая с образующими, параллельными оси OZ. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ в пространстве определяет круговой цилиндр, а уравнение $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр.

Аналогично уравнение $F(y, z) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с направляющей $\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ и образующей, параллельной оси OX.

Коническая поверхность. Пусть дана в пространстве некоторая кривая $\mathcal{L}$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Поверхность, образованная движением прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей кривую $\mathcal{L}$, называется конической поверхностью. Точка M_0 называется вершиной конической поверхности.

Пусть дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Функция $F(x, y, z)$ называется однородной степени m $(m > 0)$, если при любом t выполняется условие $F(tx, ty, tz) = t^m F(x, y, z)$. Соответствующее уравнение $F(x, y, z) = 0$ также называется однородным. Например, уравнение $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ однородное степени 2. Можно доказать, что однородное уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат. Доказать самостоятельно после изучения п. 7.5.

Поверхности вращения. Пусть на плоскости XOY задана линия $F(x, y) = 0$. При вращении кривой вокруг оси OX мы получим поверхность, называемую поверхностью вращения. Если точка $M_0(x, y, 0)$ лежала на кривой $F(x, y) = 0$, то при вращении вокруг оси OX она опишет окружность с центром в точке $C(x, 0, 0)$, радиус которой равен $|y|$. Пусть $M(X, Y, Z)$ — точка поверхности. Тогда $x = X,\ y = \pm\sqrt{Y^2 + Z^2}$. Поэтому уравнение поверхности вращения будет иметь вид $F(X, \pm\sqrt{Y^2 + Z^2}) = 0$. Например, вращая параболу $y^2 = 2px$ вокруг оси OX, получим поверхность $y^2 + z^2 = 2px$, называемую эллиптическим параболоидом вращения.

7.2. Полярная система координат

Кроме декартовой системы координат, в математике применяется и ряд других. В этом подразделе познакомимся с одной из них.

Полярная система координат состоит из точки, называемой полюсом, и проходящей через неё оси, называемой полярной осью.

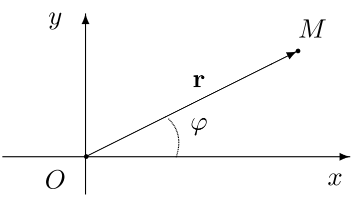

Рис. 7.2.

Числа (r, φ) называются полярными координатами точки M, если $r = |\mathbf{OM}|$, а φ — угол между полярной осью и вектором $\mathbf{OM}$, отсчитанный по правилам тригонометрии (рис. 7.2). Будем считать, что $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Поместим начало декартовой системы в полюс O, а ось OX направим по полярной оси. Тогда можно выразить декартовы координаты через полярные формулами: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этом же случае соотношения $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

Многие кривые удобно изучать в полярной системе координат, задавая их уравнением $F(r,\varphi) = 0$. Отметим уравнения некоторых кривых:

$r = a$ — окружность радиуса a с центром в полюсе;

$r = 2a\cos\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(a, 0)$;

$r = 2a\sin\varphi$ — окружность радиуса a с центром в точке $(0, a)$;

$r = a\varphi$ — спираль Архимеда;

$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската Бернулли;

$r = a(1+\cos\varphi)$ — кардиоида.

Построим кардиоиду (рис. 7.3). Полагая $\varphi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ и вычисляя r, построим соответствующие точки. Соединяя их гладкой кривой, получим дугу кардиоиды, лежащую выше полярной оси. В силу чётности косинуса, строим ей симметричную относительно полярной оси часть кардиоиды. Её вид объясняет название.

Предлагается самостоятельно построить остальные из указанных кривых.

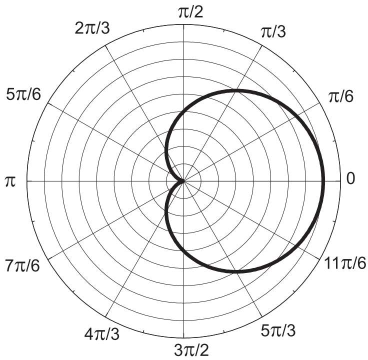

Рис. 7.3.

7.3. Уравнения прямой на плоскости

Задача 1. Найдите уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A, B) \neq 0$, $A^2+B^2 \neq 0$.

Произвольная точка M (рис. 7.4) лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{M_0M} \perp \mathbf{N}$, т.е. когда $(\mathbf{M_0M}, \mathbf{N}) = 0$. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ радиус-векторы точек M и M_0, то $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0 \;\; —$$

векторная форма уравнения прямой.

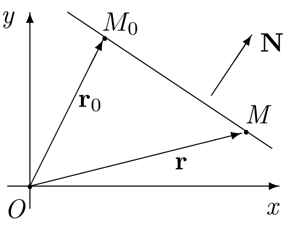

Рис. 7.4.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \;\; — \tag{7.7}$$

координатная форма уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно $\mathbf{N}$. Обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$. Тогда (7.7) приводится к виду

$$Ax + By + C = 0 \ \text{—} \tag{7.8}$$

общее уравнение прямой. Подчеркнём, что в общем уравнении прямой коэффициенты A, B определяют вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный данной прямой. Этот вектор называют вектором нормали прямой.

Пусть $B \neq 0$. Обозначая $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, уравнение (7.8) перепишем в виде $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом. Величина k равна тангенсу угла наклона прямой к оси OX, а величина b по модулю равна длине отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Задача 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно заданному вектору $\mathbf{l}(m, n)$. Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.

Произвольная точка $M(x, y)$ (её радиус-вектор обозначим $\mathbf{r}(x, y)$) лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, т.е. если $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{l}$ или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l} \ \text{—} \tag{7.9}$$

параметрическое уравнение прямой в векторной форме. В координатной форме уравнение (7.9) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & + & tm, \\ y & = & y_0 & + & tn \end{array} \right. \ \text{—} \tag{7.10}$$

параметрические уравнения прямой в координатной форме. Уравнения (7.10) можно переписать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \ \text{—} \tag{7.11}$$

каноническое уравнение прямой. В частности, если прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и уравнение (7.11) записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \ \text{—}$$

уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

Задача 3. Дана прямая L общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Найдите расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой (рис. 7.5).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка на прямой L.

Очевидно, $d = |\text{Пр}_{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1| =$

$$= \frac{|(\mathbf{N}_1, \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1)|}{|\mathbf{N}|} =$$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{|\mathbf{N}|} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$ Итак:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (7.12)$$

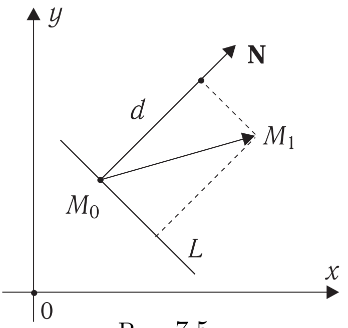

Рис. 7.5.

Пример 1. Найдите расстояние от точки $(2, 3)$ до прямой $3x + 4y + 10 = 0$.

Решение. По формуле (7.12): $d = \dfrac{|6 + 12 + 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{28}{5}$.

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых, заданных своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \mathbf{N}_1(A_1, B_1) \not\parallel \mathbf{N}_2(A_2, B_2)$, то прямые пересекаются и их точку пересечения можно найти, решая систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 & = & 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 & = & 0. \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны. Они различны, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, и совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Задача 5. Найдите угол между прямыми. Пусть прямые пересекаются, т.е. $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. В качестве угла φ между прямыми примем угол между их нормалями. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то тангенс одного из углов между прямыми можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Пример 2. На отрезке $[1, 4]$ задана функция, график которой приведён на рисунке 7.6. Записать аналитическое выражение этой функции.

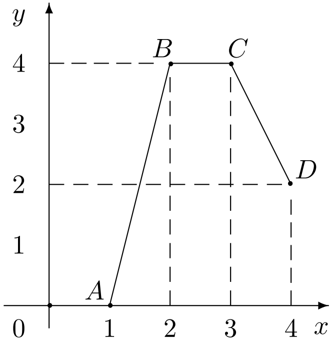

Рис. 7.6.

Решение. Для решения задачи необходимо найти уравнения прямых AB, BC и CD. Будем искать их в виде $y = k_1x + b_1$. На прямой AB лежат точки $A(1, 0)$ и $B(2, 4)$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 0 &=& k_1 &+& b_1, \\ 4 &=& 2k_1 &+& b_1. \end{array}\right\}$$

Отсюда $k_1 = 4$, $b_1 = -4$. Уравнение AB имеет вид $y = 4x - 4$. Прямая BC имеет уравнение $y = 4$. Уравнение прямой CD также ищем в виде $y = k_2x + b_2$.

Из условия принадлежности этой прямой точек $C(3, 4)$ и $D(4, 2)$ получаем систему

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 4 &=& 3k_2 &+& b_2, \\ 2 &=& 4k_2 &+& b_2, \end{array}\right\}$$

из которой находим $k_2 = -2$, $b_2 = 10$. Следовательно, прямая CD имеет уравнение $y = -2x + 10$. Аналитически функцию $f(x)$ можно задать в виде

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & \text{если} \quad 1 \le x \le 2; \\ 4, & \text{если} \quad 2 < x \le 3; \\ -2x + 10, & \text{если} \quad 3 < x \le 4. \end{cases}$$

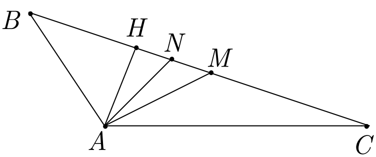

Рис. 7.7.

Пример 3. Треугольник (рис. 7.7) задан координатами своих вершин $A(1, -1)$, $B(4, -5)$, $C(-5, -9)$. Найдите уравнения прямых, на которых лежат:

а) высота AH;

б) медиана AM;

в) биссектриса AN.

Решение. а) Так как прямая AH перпендикулярна BC, то в качестве вектора нормали к прямой AH можно взять любой параллельный BC вектор. $\mathbf{BC} = (-9, -4) \parallel (9, 4)$. Уравнение прямой AH можно записать в виде $9x + 4y + C = 0$. Так как точка A лежит на прямой AH, то $9 - 4 + C = 0$, $C = -5$. Получаем уравнение прямой AH в виде $9x + 4y - 5 = 0$.

б) Середина M отрезка BC имеет координаты $\left(-\dfrac{1}{2}, -7\right)$, а вектор $\mathbf{AM}$ имеет координаты $\left(-\dfrac{3}{2}, -6\right)$. Очевидно, вектор $(1,4)$ коллинеарен вектору $\mathbf{AM}$. Уравнение прямой AM запишем в каноническом виде $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4}$ или $4x - y - 5 = 0$.

в) Направляющий вектор прямой AN можно получить как сумму ортов векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$. Так как $\mathbf{AB} = (3, -4)$, а $\mathbf{AC} = (-6, -8)$, то их ортами являются векторы $\mathbf{a}_1 = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ и $\mathbf{a}_2 = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$; $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \left(0, -\dfrac{8}{5}\right)$. Таким образом, прямая AN параллельна оси OY, а так как она проходит через точку $A(1,-1)$, то её уравнение $x = 1$.

7.4. Уравнение плоскости

Задача 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(A, B, C)$. (Вектор $\mathbf{N}$ называется вектором нормали плоскости.)

Как и при решении задачи 1 из подраздела 7.3, получаем

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0 \ — \tag{7.13}$$

векторная форма уравнения плоскости, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости. В координатной форме (7.13) можно записать в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ или, обозначая $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ —$$

общее уравнение плоскости.

Задача 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\mathbf{l}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mathbf{l}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$.

В этом случае можно положить $\mathbf{N} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]$, из (7.13) получить искомое уравнение в векторной форме

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0 \tag{7.14}$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.15}$$

В частности, если плоскость проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то можно в (7.14) и (7.15) положить $\mathbf{l}_1 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$, т.е. $m_1 = x_1 - x_0$, $n_1 = y_1 - y_0$, $p_1 = z_1 - z_0$; $m_2 = x_2 - x_0$, $n_2 = y_2 - y_0$, $p_2 = z_2 - z_0$.

Задача 3. Охарактеризовать взаимное расположение трёх различных плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z = D_i$, $i = 1, 2, 3$.

Три плоскости пересекаются в одной точке, если их векторы нормалей $\mathbf{N}_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2, 3$, не компланарны, т.е. $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) \neq 0$. Если же $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) = 0$ и среди векторов $\mathbf{N}_i$ нет параллельных, то эти плоскости пересекаются либо по трём параллельным прямым, либо по одной прямой.

Предлагается самостоятельно охарактеризовать случай, когда среди векторов $\mathbf{N}_i$ есть параллельные.

Задача 4. Найдите расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Совершенно аналогично, как и при выводе формулы (7.12), получаем $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7.5. Уравнения прямой в пространстве

Задача 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно вектору $\mathbf{l}(m, n, p)$. (Вектор $\mathbf{l}$ называют направляющим вектором прямой.) Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой. Тогда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{l}$, а поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l} \ —$$

параметрическое уравнение прямой в векторной форме. Выражая через координаты, получаем

$$\begin{cases} x &= & x_0 + tm, \\ y &= & y_0 + tn, \\ z &= & z_0 + tp \end{cases} —$$

параметрические уравнения прямой в координатной форме. Воспользовавшись условием параллельности двух векторов (их координаты пропорциональны), находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \ —$$

канонические уравнения прямой. Если прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то в качестве вектора $\mathbf{l}$ можно взять вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, т.е. $m = x_1 - x_0$, $n = y_1 - y_0$, $p = z_1 - z_0$.

Прямую линию можно задать так же, как линию пересечения двух плоскостей
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (7.16)$$
если векторы $\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ непараллельны. Соотношения (7.16) называют общими уравнениями прямой.

Чтобы перейти от общих уравнений прямой (7.16) к каноническим и параметрическим, нужно найти направляющий вектор и точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой. В качестве $\mathbf{l}$ можно принять вектор параллельный $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, а точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ найти из системы (7.16), найдя её частное решение.

Задача 2. Найдите расстояние d от точки M_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$ (рис. 7.8).

Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_1H параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{l}$, а потому
$$d = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]|}{|\mathbf{l}|}.$$

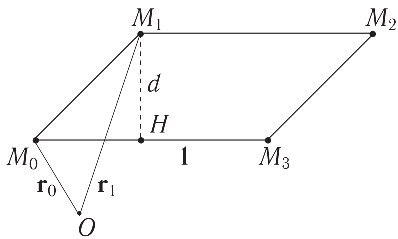

Рис. 7.8.

Задача 3. Найдите расстояние d между двумя непараллельными прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_1 \nparallel \mathbf{l}_2$ (рис. 7.9).

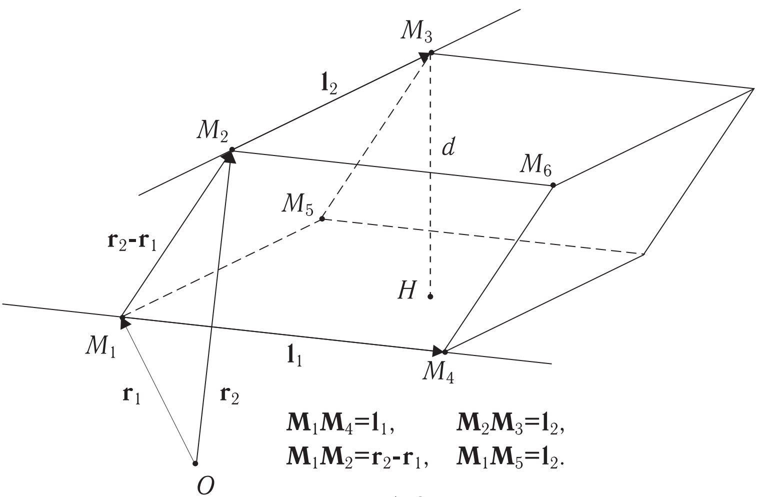

Рис. 7.9.

Искомое расстояние, очевидно, равно высоте M_3H параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, а потому

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)|}{|[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]|}. \tag{7.17}$$

Задача 4. Охарактеризовать взаимное расположение прямых

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Если $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ параллельны, то прямые (7.18) либо параллельны, либо совпадают. Если прямые совпадают, то вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ параллелен общему направляющему вектору этих прямых. Если $\mathbf{l}_1 \not\parallel \mathbf{l}_2$, то прямые либо пересекаются, либо являются скрещивающимися. Если прямые пересекаются, то расстояние d между ними равно нулю. Из (7.17) получаем

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0, \quad \mathbf{l}_1 \not\parallel \mathbf{l}_2 \ —$$

условие пересечения прямых.

Если прямые скрещиваются, то $d \neq 0$, т.е.

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) \neq 0, \ —$$

условие того, что прямые (7.18) скрещиваются.

Как видим, прямые и плоскости задаются линейными уравнениями относительно декартовых координат. В последующих разделах изучим кривые, задаваемые уравнением второго порядка относительно декартовых координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{01}y + a_{00} = 0, \tag{7.19}$$

где a_{ik} — константы. Такие кривые называют кривыми второго порядка. К ним относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола. К изучению этих кривых мы и переходим. Заметим, что первые три слагаемые в (7.19) образуют квадратичную форму, а следующие два — линейную.

При некоторых соотношениях на коэффициенты a_{ik} уравнение (7.19) может не определять ни одной точки или определять только одну, левая часть этого уравнения может иногда разлагаться на два линейных сомножителя, в этом случае уравнение (7.19) определяет пару пересекающихся или параллельных прямых, которые могут и совпасть между собой.

7.6. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Задача. Получить уравнение эллипса.

Пусть F_1 и F_2 — фокусы (рис. 7.10). Положим $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. Декартову систему координат выберем следующим образом: ось OX направим по прямой F_1F_2, а начало поместим в середину отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| + |\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = 2a$ (величина a дана, причём $a > c$). Имеем $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. И, следовательно, уравнение эллипса имеет вид

$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Числа r_1 и r_2 называют *фокальными радиусами* эллипса.

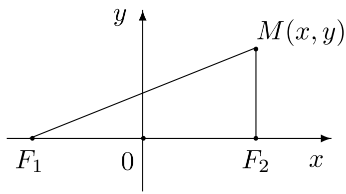

Рис. 7.10.

Упростим это уравнение. Так как $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, $r_1 + r_2 = 2a$, то $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$, $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$, т.е. $a \pm \dfrac{c}{a}x = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}$. Возведём обе части этого равенства в квадрат. Получим $\dfrac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$. Так как $a > c$, то можно обозначить $a^2 - c^2 = b^2$ и записать $\dfrac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ — \tag{7.20}$$

каноническое уравнение эллипса. Можно доказать, что при возведении в квадрат мы получили уравнение, эквивалентное исходному.

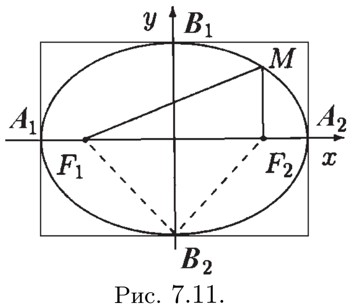

Рис. 7.11.

Оси OX и OY являются осями симметрии, а $O(0, 0)$ — центром симметрии. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$ называются вершинами эллипса. Так как $|x| \le a$, $|y| \le b$, то эллипс — кривая, расположенная внутри прямоугольника, стороны которого расположены на прямых $x = \pm a$, $y = \pm b$ (рис. 7.11).

Число a в уравнении (7.20) называют большой, а b — малой полуосью эллипса. Прямую, на которой расположены фокусы эллипса, называют фокальной осью.

Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса. Предлагается доказать, что $\dfrac{r_1}{d} = \varepsilon$, где d — расстояние от точки M эллипса до ближайшей от фокуса F_1 директрисы $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, и что $\dfrac{r_2}{d} = \varepsilon$, где d — расстояние от точки M эллипса до директрисы $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, а $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, — фокальные радиусы точки M. Если $c = 0$, то $a^2 = b^2$ и эллипс превращается в окружность, при этом $\varepsilon = 0$.

Пример. Докажите, что уравнение $x^2 + 4x + 4y^2 - 16y - 4 = 0$ определяет эллипс. Найдите координаты его центра симметрии и эксцентриситет.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты: $(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 4 + 4 + 16 = 24$. Введём новые переменные $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 2$. Тогда $x_1^2 + 4y_1^2 = 24$ или $\dfrac{x_1^2}{24} + \dfrac{y_1^2}{6} = 1$. Последнее уравнение определяет эллипс, причём $a^2 = 24$, $b^2 = 6$. Центр его находится в точке $(-2, 2)$. Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, то в нашем случае $c = \sqrt{24 - 6} = \sqrt{18}$, а потому $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7.7. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Точки F_1 и F_2 называют фокусами гиперболы.

Задача. Получить уравнение гиперболы.

Положим $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. Систему координат выберем так же, как и в случае эллипса. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы, то

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a,$$

$a = \text{const}$, $c > a$. Последнее уравнение и определяет гиперболу. Проведя упрощение этого уравнения, как и в случае эллипса, обозначив

$b^2 = c^2 - a^2$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

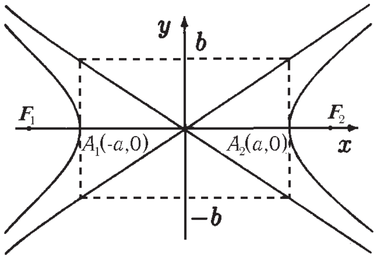

Рис. 7.12.

Гипербола — кривая, симметричная относительно осей координат и начала координат (рис. 7.12). Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ называются вершинами гиперболы. Так как $|x| \geq a$, то гипербола находится вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$. Ось OY называют мнимой осью гиперболы, а ось OX — действительной. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Число a называют действительной полуосью гиперболы, а число b — мнимой полуосью.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы, $\varepsilon > 1$, а прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — её директрисами. Они обладают тем же свойством, что и для эллипса.

Пример. Докажите, что уравнение $4x^2 - 24x - 9y^2 + 36y = 36$ определяет гиперболу. Найдите её центр симметрии и асимптоты.

Решение. Выделяя полные квадраты, данное уравнение можно записать в виде $4(x-3)^2 - 9(y-2)^2 = 36$ или $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. Положим $x_1 = x - 3$, $y_1 = y - 2$. Тогда $\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{4} = 1$. Данная кривая — гипербола с центром в точке $x_1 = x - 3 = 0$, $y_1 = y - 2 = 0$, т.е. в точке $(3,2)$. Уравнение асимптот гиперболы имеет вид $y - 2 = \pm\frac{2}{3}(x-3)$ или $2x - 3y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Итак, мы рассмотрели кривые второго порядка: эллипс, эксцентриситет которого меньше единицы, гиперболу, эксцентриситет которого больше единицы. Кривая второго порядка, эксцентриситет которой равен единице, является параболой (рассмотрена в п. 7.1).

7.8. Приведение уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Если кривая задана уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0, \tag{7.21}$$

то это уравнение можно привести к каноническому виду путём перехода к новой системе координат. Этот процесс можно разбить на два этапа.

1. Отыскание главных осей квадратичной формы

$$B = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

Для этого находим её собственные числа λ_1 и λ_2 и собственные векторы. Если окажется, что $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то кривая эллиптического типа, если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то гиперболического типа. При $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ имеем кривую параболического типа. Приняв в качестве новых базисных векторов декартовой системы главные оси квадратичной формы, уравнение (7.21) приведём к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0,$$

причём $(a, b) = (a_{01}, a_{02})Q$, где Q — матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому.

2. Отыскание нового начала системы координат O_1, преобразование параллельного переноса начала O в точку O_1.

Как это делать практически, покажем на примере. Предполагаем, что все системы координат имеют правую ориентацию.

Пример 1. Построить кривую

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y = -2. \tag{a}$$

Приводим квадратичную форму $B = x^2 + y^2 + xy$ к главным осям (как в п. 6.7). Её матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$.

Записываем характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)^2 - 0{,}25 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 1{,}5$ являются собственными числами. Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то кривая (a) — эллипс. Координаты собственного вектора, отвечающего числу $\lambda_1 = 0{,}5$, удовлетворяют соотношению $\xi^1 + \xi^2 = 0$. В качестве нового базисного вектора примем вектор $\mathbf{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Другой базисный вектор $\mathbf{j}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Записываем матрицу Q перехода от базиса $0, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ к $0, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

По формуле (3.18) выражаем новые координаты x_1 и y_1 через старые

$$x_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}. \tag{б}$$

Уравнение (а) в новой системе координат принимает вид

$$0{,}5x_1^2 + 1{,}5y_1^2 + \frac{-3\cdot 1 + (-3)(-1)}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{-3\cdot 1 - 3\cdot 1}{\sqrt{2}}y_1 = -2,$$

или $0{,}5x_1^2 + 1{,}5y_1^2 - \dfrac{6}{\sqrt{2}}y_1 = -2$. После выделения полных квадратов получаем

$$0{,}5x_1^2 + 1{,}5\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2+3 = 1. \tag{в}$$

Перейдём к новой системе координат $0_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ по формулам

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Теперь уравнение (в) приводится к виду

$$0{,}5x_2^2 + 1{,}5y_2^2 = 1, \quad \frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{2/3} = 1, \tag{г}$$

причём, как это следует из (б),

$$x_2 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}.$$

Решая систему $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, найдём координаты (1,1) нового начала O_1 в старой системе координат (рис. 7.13). Строим кривую (а). Для этого сначала в старой системе координат строим новую систему координат. Новые оси направлены по прямым $x - y = 0$ (ось O_1Y_2) и $x + y - 2 = 0$ (ось O_1X_2). В системе (O_1, X_2, Y_2) строим эллипс (г). Зная уравнение (г), можно дать полную геометрическую характеристику эллипса (а). Например, его большая полуось равна $\sqrt{2}$, а малая — $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

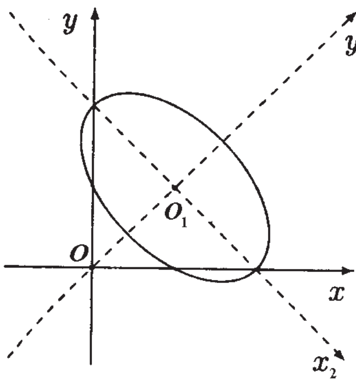

Рис. 7.13.

Расстояние между фокусами равно $2\sqrt{2-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

7.9. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, которая в декартовой системе координат описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ +2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0, \end{aligned} \tag{7.22}$$

где a_{ik} — константы. Заметим, что первые шесть слагаемых в (7.22) образуют квадратичную форму, а следующие три — линейную. Отметим следующие поверхности второго порядка:

1. Сфера с центром в точке (a, b, c) радиуса R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(рассмотрена в п.7.1).

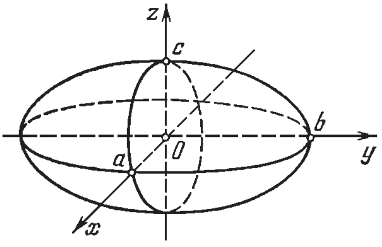

Рис. 7.14.

2. Эллипсоид.

Поверхность, определяемая относительно какой-либо декартовой системы координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

называется эллипсоидом (рис. 7.14), а величины a, b, c — его полуосями. Исследуем эту поверхность с помощью сечений. Сечением эллипсоида плоскостью $z = h$ будет эллипс (при $|h| < c$)

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left[a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2} + \dfrac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right]^2} = 1. \end{cases}$$

Полуоси этого эллипса $a_1 = a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ будут наибольшими при $h = 0$. Сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным, также являются эллипсами.

Если две полуоси эллипсоида равны, то это эллипсоид вращения. При $a = b = c$ имеем сферу.

3. Однополостный гиперболоид.

Если гиперболу $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ плоскости ZOY вращать вокруг оси OZ, то мы получим поверхность $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, называемую однополостным гиперболоидом вращения.

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

называется однополостным гиперболоидом (рис. 7.15).

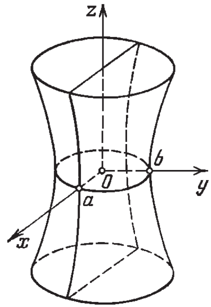

Рис. 7.15.

В сечениях этой поверхности плоскостями $z = h$ получим эллипсы

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$$

с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \text{ и } b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

В сечениях плоскостями $x = h$ или $y = h$ получим гиперболы.

4. Двуполостный гиперболоид.

Вращая гиперболу $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ плоскости YOZ вокруг оси OZ, получим поверхность

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

называется двуполостным гиперболоидом (рис. 7.16).

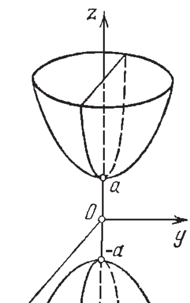

Рис. 7.16.

Сечениями этой поверхности плоскостями $z = h$ будут эллипсы

$$\begin{cases} z = h \quad (|h| > c), \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

В сечении плоскостью $x = 0$ получим гиперболу

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

5. Эллиптический параболоид.

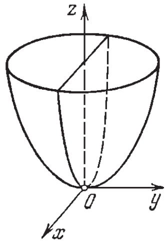

Рис. 7.17.

При вращении параболы $y^2 = 2pz$ плоскости YOZ вокруг оси OZ получим поверхность $x^2 + y^2 = 2pz$. Поверхность, определяемая уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p > 0),$$
называется эллиптическим параболоидом (рис. 7.17). При пересечении эллиптического параболоида плоскостями $z = h > 0$ получим эллипсы, а плоскостями, параллельными плоскостям XOZ и YOZ, параболы.

6. Гиперболический параболоид.

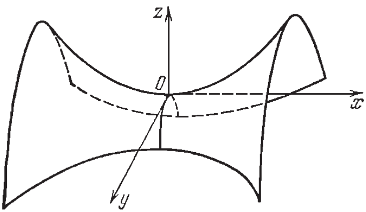

Рис. 7.18.

Поверхность, определяемая уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p > 0),$$
называется гиперболическим параболоидом (рис. 7.18). Его сечения
$$\begin{cases} z = h \neq 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2ph \end{cases} \text{— гиперболы;}$$
$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} + 2pz \end{cases} \text{— параболы;} \qquad \begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{b^2} = -2pz + \dfrac{y^2}{a^2} \end{cases} \text{— параболы.}$$

7. Конусы второго порядка.

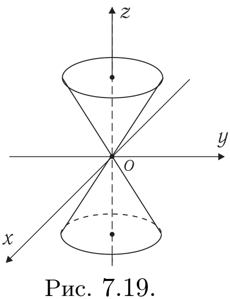

Рис. 7.19.

Поверхность, задаваемая уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$
называется конусом второго порядка (рис. 7.19). Это уравнение является однородным второй степени. В сечении плоскостями $z = h$ получим эллипсы $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$

В сечении плоскостью $x = 0$ получим две пересекающиеся прямые: $\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{y}{b} = \pm\dfrac{z}{c}. \end{cases}$

8. Цилиндры второго порядка.

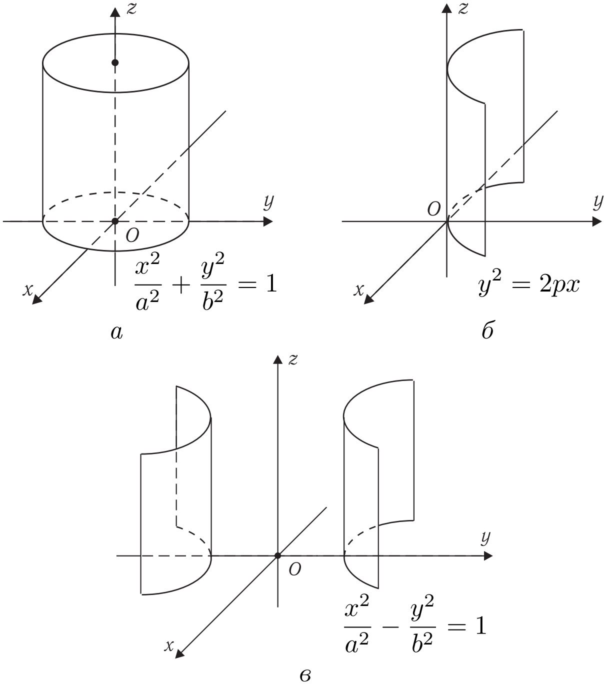

Рис. 7.20.

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=2px, \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

на плоскости XOY определяют эллипс, параболу и гиперболу, а в пространстве — эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры, показанные на рисунках 7.20, *а*, *б*, *в* соответственно. Образующие цилиндров параллельны оси аппликат, а направляющими служат названные кривые.

Если уравнение второй степени распадается на два уравнения первой степени, то уравнение будет определять пару либо пересекающихся, либо параллельных, либо слившихся плоскостей.

Уравнение (7.22) можно привести к каноническому виду по той же схеме, как и в случае кривых второго порядка: сначала перейти к новому ортонормированному базису из собственных векторов входящей в него квадратичной формы, а затем совершить параллельный перенос системы координат в новое начало.

8. Методические указания (контрольная работа №1)

8.1. Действия над матрицами (задача 1)

Для решения задачи 1 необходимо изучить подразделы 1.1 — 1.5 и рассмотренные там примеры. Приведём ещё два подобных примера.

8.1.1. Найдите матрицу $D = 2CA - 4BA$, если
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.
В ответе запишите сумму элементов матрицы D.

Решение. Используя свойство операций над матрицами, можем записать $D = (2C - 4B)A$. Так как $2C = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$, $-4B = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 16 & -12 \end{bmatrix}$, то

$$2C + (-4B) = \begin{bmatrix} -4+8 & -8+20 \\ -6+16 & 2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$D = (2C - 4B)A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + 12\cdot(-2) & 4\cdot 2 + 12\cdot(-3) & 4\cdot(-1) + 12\cdot 0 \\ 10\cdot 1 + (-10)\cdot(-2) & 10\cdot 2 + (-10)\cdot(-3) & 10\cdot(-1) + (-10)\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4-24 & 8-36 & -4+0 \\ 10+20 & 20+30 & -10+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -28 & -4 \\ 30 & 50 & -10 \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов матрицы D равна $80 - 62 = 18$.

Ответ. 18

8.1.2. Найдите матрицу $D = AC + 3CB$, если
$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
В ответе запишите сумму элементов матрицы D.

Решение. Так как в общем случае $CB \neq BC$, то в выражении $AC + 3CB$ матрицу C за скобки вынести нельзя. Поэтому находим каждое слагаемое отдельно.

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-6 & -2-3 \\ 16+10 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix},$$

$$CB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 8+4 \\ 2-3 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$3CB = 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = AC + 3CB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 26 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 36 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 23 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов матрицы D равна $23 + 31 + 23 + 1 = 78$.

Ответ. 78

Задачи для самостоятельного решения

8.1.3. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу $C = 2A - 3B$. В ответ запишите сумму элементов матрицы C.

Ответ. 3.

8.1.4. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Найдите матрицы $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$.

Ответ. $C = \begin{bmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

8.1.5. Дано произведение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Укажите значения x_2, x_3, y_1.

Ответ. 6; -7; 17.

8.1.6. Дано произведение матриц

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 16 & 24 & 8 \\ 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите следующие элементы матрицы C: c_2^4, c_3^1, c_1^3 (верхний индекс — номер строки).

Ответ. $c_2^4 = 0$, $c_3^1 = -8$, $c_1^3 = 0$.

8.2. Вычисление определителей (задача 2)

Предлагается изучить подразделы 2.1 — 2.6. Необходимо уметь вычислять определители второго и третьего порядка, знать свойства определителей n-го порядка, уметь разлагать определитель по элементам строки или столбца.

8.2.1. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. В подразделе 2.3 показано, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Пользуясь этим правилом, находим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11.$$

Ответ. 11.

8.2.2. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ третьего порядка.

Решение. Приведём три способа вычисления этого определителя.

Первый способ. По правилу “треугольников”, описанному в подразделе 2.4, находим:

$$D = 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 \cdot 1 =$$
$$= -16 + 45 + 4 - 24 + 24 - 5 = 28.$$

Второй способ. Разлагая определитель по элементам первой строки (см. теоремы 1 и 2, подраздел 2.6), сводим вычисление определителя D к вычислению трёх определителей второго порядка.

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} +$$
$$+2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -21 + 3 \cdot 23 - 2 \cdot 10 = -21 + 69 - 20 = 28.$$

Третий способ. Пользуясь свойством определителя: “Определитель не изменится, если к какой-либо строке прибавить другую, умноженную на любое число”, получим в первом столбце два нуля. Для этого первую строку, умноженную на -2, прибавим ко второй; первую строку, умноженную на -3, прибавим к третьей. В результате получаем

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = 20 + 8 = 28.$$

Мы свели вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителя второго порядка.

8.2.3. Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Пользуясь теоремой 2 (с. 17), вычисление определителя можно свести к вычислению четырех определителей третьего порядка. Число этих определителей можно снизить до одного, получив, пользуясь свойствами определителя, в каких-либо строке или столбце три нулевых элемента. Получим нули в первом столбце. Для этого его вторую строку, умноженную на 2, вычтем из первой, а затем эту же строку, умноженную на 5, вычтем из третьей и, умноженную на три, вычтем из четвертой. В результате получим, что

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -13 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -10 & -23 & 14 \\ 0 & -5 & -11 & 11 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, получаем $D = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ -10 & -23 & 14 \\ -5 & -11 & 11 \end{vmatrix}$.

Последний определитель можно вычислить по правилу треугольников, но можно и его упростить, получив нули в первом столбце:

$$D = -\begin{vmatrix} -5 & -13 & 2 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -(-5)\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot(27-20) = 35$$

(умножили первую строку на 2 и вычли ее из второй, затем первую строку вычли из третьей). Мы применяли свойство определителя: определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить другую, умноженную на некоторое число. Иногда допускается ошибка, заключающаяся в том, что к какой-либо строке, умноженной на некоторое число α, добавляется другая строка. При такой процедуре определитель изменится и станет равным αD. Обратите на это внимание и не допускайте подобной ошибки.

Задачи для самостоятельного решения

8.2.4. Вычислите следующие определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 13542 & 13642 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $D_1 = 18$, $D_2 = -12$, $D_3 = -1488100$.

8.2.5. Вычислите определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 14 & 10 & 27 \\ 21 & -25 & -18 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $D_1 = 5880$, $D_2 = -29400000$.

8.2.6. Вычислите определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2/3 & 3/8 & -3 & 4 \\ 2/3 & 1/8 & -1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 & 0 \\ 2/3 & 3/8 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8/3 & 7/5 & 2/5 & 0 \\ -8/3 & 2/5 & 7/5 & 10 \\ 4/3 & 4/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $D_1 = 2$; $D_2 = 24$.

8.3. Обратная матрица. Матричные уравнения (задача 3)

Необходимо изучить подразделы 2.7 и 2.8, научиться находить обратную матрицу и решать простейшие матричные уравнения.

8.3.1. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. Докажите, что она имеет обратную матрицу, и найдите её.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -29 & 0 \\ 10 & -16 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$

$= (-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 10 & -16 \end{vmatrix} = -(-16 \cdot 18 + 10 \cdot 29) =$

$= -(290 - 288) = -2.$

Матрица A невырожденная, а потому имеет обратную. Элементы обратной матрицы находим по формуле $b_i^j = \dfrac{A_j^i}{\det A}$ (обратите внимание, что для отыскания элемента b_i^j, стоящего в j-й строке и i-м столбце, нужно найти алгебраическое дополнение A_j^i элемента a_j^i, стоящего в i-й строке и j-м столбце матрицы A, разделить его на определитель этой матрицы). Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A, т.е. элементы присоединённой матрицы.

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 16;\ A_1^2 = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29;\ A_1^3 = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 22;$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10;\ A_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18;\ A_2^3 = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2;\quad A_3^2 = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3;\quad A_3^3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -2.$$

Алгебраические дополнения элементов строк мы записали в столбцы. Поделив найденные элементы присоединённой матрицы на определитель $\det A$, получим $A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$.

Проверить результаты можно, найдя произведение $A \cdot A^{-1}$. Должна получиться единичная матрица E.

Проверка. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 29/2 & -11 \\ -5 & 9 & -7 \\ 1 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -24+20+5 & 87/2-36-15/2 & -33+28+5 \\ -32+30+2 & 58-54-3 & -44+42+2 \\ -24+25-1 & 87/2-45+3/2 & -33+35-1 \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Обратная матрица найдена верно.

8.3.2. Решите матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $AX = B$. Вычисляем:

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = -12.$$

(ко второй строке прибавили первую, к третьей прибавили первую, умноженную на (-3)). Матрица A невырожденная, а потому имеет обратную A^{-1}. Поэтому $X = A^{-1}B$ (см. подраздел 2.8). Находим матрицу A^{-1} подобно тому, как это делали в задаче 8.3.1.

$$A_1^1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4,\ A_1^2 = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_1^3 = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_2^1 = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_2^2 = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_2^3 = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_3^1 = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4,\ A_3^2 = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_3^3 = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4/12 & -7/12 & -1/12 \\ -8/12 & -5/12 & 1/12 \\ -4/12 & -1/12 & 5/12 \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -4/12 & -7/12 & -1/12 \\ -8/12 & -5/12 & 1/12 \\ -4/12 & -1/12 & 5/12 \end{bmatrix} \cdot 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -7 & -1 \\ -8 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4-2 & -8-7 & -14-1 \\ -8+2 & -16-5 & -10+1 \\ -4+10 & -8-1 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -15 & -15 \\ -6 & -21 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Проверка. $A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -15 & -15 \\ -6 & -21 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -12+18+6 & -30+63-9 & -30+27+3 \\ 18-12-6 & 45-42+9 & 45-18-3 \\ -6+12+18 & -15+42-27 & -15+18+9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 24 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 24 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрица X найдена верно.

8.3.3. Решите матричное уравнение $X \cdot A = B$, где матрицы A и B те же, что и в задаче 8.3.2.

Решение. В задаче 8.3.2 показано, что матрица A невырожденная, поэтому $X = B \cdot A^{-1}$. Матрица A^{-1} уже найдена, следовательно

$$X = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4/12 & -7/12 & -1/12 \\ -8/12 & -5/12 & 1/12 \\ -4/12 & -1/12 & 5/12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -7 & -1 \\ -8 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4-16 & -7-10 & -1+2 \\ -8-8 & -5-2 & 1+10 \\ -8-4 & -14-1 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Проверка.

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -40+51+1 & 60-34-2 & -20+17+3 \\ -32+21+11 & 48-14-22 & -16+7+33 \\ -24+45+3 & 36-30-6 & -12+15+9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 24 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 24 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Матрица X найдена верно.

Ответ. $X = \begin{bmatrix} -20 & -17 & 1 \\ -16 & -7 & 11 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix}$.

8.3.4. Найдите матрицу X, если $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$.

Решение. (См. подраздел 2.8.) Обозначим $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $A \cdot X = B$. Так как $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, то матрица A невырожденная, а поэтому $A^{-1}AX = A^{-1}B$, следовательно, $X = A^{-1}B$. Находим матрицу A^{-1}.

$$A_1^1 = 4,\ A_1^2 = -2,\ A_2^1 = -3,\ A_2^2 = 1.$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \times$

$$\times \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16+18 & -2-1 \\ 12-9 & 3/2+1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проверка. Подставим матрицу X в данное уравнение.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -3+4 \\ 6+12 & -9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица X найдена верно.

Ответ. $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

8.3.5. Найдите матрицу X, если $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$.

Решение. Имеем уравнение $X = BA^{-1}$. Матрицу A^{-1} мы нашли в задаче 8.3.4. Вычисляем матрицу X.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16+1{,}5 & 8-0{,}5 \\ -36-1{,}5 & 18+0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -14{,}5 & 7{,}5 \\ -37{,}5 & 18{,}5 \end{bmatrix}.$$

Проверка.

$$\begin{bmatrix} -14{,}5 & 7{,}5 \\ -37{,}5 & 18{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14{,}5+22{,}5 & -29+30 \\ -37{,}5+55{,}5 & -75+74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица X удовлетворяет данному уравнению, следовательно, найдена верно. Как видим, уравнения $XA = B$ и $AX = B$ имеют разные решения.

Задачи для самостоятельного решения

8.3.6. Докажите, что матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ имеет обратную A^{-1}, и найдите её.

Ответ. $A^{-1} = \dfrac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

8.3.7. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, причём $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq 0$. Докажите, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

8.3.8. Решите матричные уравнения: $AX_1 = B$ и $X_2 \cdot A = B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответ. $X_1 = \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -22 & 13 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$.

8.3.9. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -1 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -40 & 27 & 8 \end{bmatrix}$.

8.4. Ранг матрицы (задача 4)

Необходимо изучить подразделы 3.2 — 3.6 и знать определения понятий линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой систем векторов, а также ранга матрицы. Очень важна теорема о базисном миноре и её следствия.

8.4.1. Докажите, что третья строка матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

Решение. Ранг матрицы A не меньше двух, так как минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$. Ранг матрицы A равен двум, если $\det A = 0$. Проверим это.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ -14 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен двум, и минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$ является базисным, первые две строки являются базисными. Третья строка в состав базисных не попала, по теореме о базисном миноре она является линейной комбинацией первых двух. Обозначим через λ_1 и λ_2 коэффициенты этой линейной комбинации. Тогда $\lambda_1(1, -2, 4) + \lambda_2(3, 1, 5) = (-5, -4, -6)$. Отсюда получаем систему $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -5, \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -4, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = -6, \end{cases}$ решая которую, находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

8.4.2. Найдите те значения параметров p и q, если они существуют, при которых ранг матрицы $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ p & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & q \end{bmatrix}$ равен двум.

Решение. Так как обведенный минор второго порядка не равен нулю, то ранг матрицы не меньше двух. Он будет равен двум, если ни третья, ни четвертая строки вместе с первыми двумя не попадут в состав базисного минора, т.е. только тогда, когда третья и четвертая строки являются линейными комбинациями первых двух строк.

Обозначим через λ_1 и λ_2 коэффициенты линейной комбинации, с помощью которых третья строка выражается через первые две, т.е. $\lambda_1(1,-3,4,1)+\lambda_2(3,1,2,5)=(p,-3,14,17)$. Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1+3\lambda_2=p, \\ -3\lambda_1+\lambda_2=-3, \\ 4\lambda_1+2\lambda_2=14, \\ \lambda_1+5\lambda_2=17. \end{cases}$$

Решая систему $\begin{cases} -3\lambda_1+\lambda_2=-3, \\ 4\lambda_1+2\lambda_2=14, \end{cases}$ находим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2=3$. При этих значениях λ_1 и λ_2 четвертое уравнение обращается в тождество, так как $2+15=17$. Из первого уравнения находим $p=2+9=11$. Если бы четвертому уравнению найденные значения λ_1 и λ_2 не удовлетворяли, то это означало бы, что не существует значений параметра p, при которых третья строка являлась бы линейной комбинацией первых двух. В этом случае ранг матрицы A был бы не менее трёх.

Совершенно аналогично можно доказать, что четвертая строка является линейной комбинацией первых двух только при $q=7$. При любых значениях $p\neq 11$ и $q\neq 7$ ранг матрицы A равен четырём. (Объясните почему.)

8.4.3. Найдите то значение параметра p, при котором ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 18 & -12 & 7 & p \end{bmatrix}$ равен трём.

Решение. Задачу можно было бы решить тем же способом, что и задачу 8.4.2, но при этом возникла бы довольно сложная система. Чтобы избежать этого, преобразуем матрицу A, получив нули ниже диагонали 1, 7, 2, 7. Для этого вычитаем первую строку, умноженную на три, из второй и четвертой; умноженную на два — из третьей. Получаем матрицу $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & -6 & -2 & p-12 \end{bmatrix}$.

Во втором столбце ниже единицы также получили нули.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 21 & -23 & -54 \\ 0 & 0 & -42 & 46 & p+108 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A_2 не менее трёх, так как обведённый минор третьего порядка отличен от нуля. Ранг равен трём в том случае, когда третья и четвёртая строки пропорциональны, т.е. если $\dfrac{21}{-42} = \dfrac{-23}{46} = \dfrac{-54}{p+108}$. Отсюда $+108 = +p + 108$, следовательно, $p = 0$. Итак, ранг матрицы A равен трём только при $p = 0$. При других значениях p ранг матрицы A равен четырём.

8.4.4. В арифметическом линейном пространстве R_5. даны четыре вектора $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 5, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 8, 13, 1, 4)$ и $\mathbf{a}_4 = (3, 4, 7, 3, 0)$. Найдите размерность линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ и какой-нибудь её базис.

Решение. Размерность линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ совпадает с рангом матрицы A, составленной из координат векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$. Находим ранг этой матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 13 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

(первую строку, умноженную на 2, вычли из второй, умноженную на 5 вычли из третьей и умноженную на 3 — из последней).

Три последние строки полученной матрицы пропорциональны. Любые две из них можно вычеркнуть, не изменив ранга матрицы. Видим, что ранг матрицы A равен двум, а потому и размерность линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ также равна двум. Первые две строки матрицы A линейно независимы (объясните, почему). Поэтому в качестве базиса в $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ можно принять векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

Задачи для самостоятельного решения

8.4.5. Докажите, что ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ при любых значениях a, b, c, d не меньше двух.

8.4.6. Докажите, что столбцы матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

8.4.7. Докажите, что третья строка матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 13 & 17 & -9 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух, и найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

Ответ. -2; 3.

8.4.8. Найдите ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ответ. 2.

8.4.9. Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$ арифметического линейного пространства R_4.

Ответ. 3; например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$.

8.5. Формулы перехода к новому базису (задача 5)

Необходимо изучить подраздел 3.9.

8.5.1. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1 = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (1, -2, 3)$, $\mathbf{f}_3 = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{x} = (-3, -2, 7)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса.

Решение. Составим матрицу C, записав в её столбцах координаты векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$: $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Вычислим определитель этой матрицы. Находим

$$\det C = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

Так как $\det C \neq 0$, то векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ линейно независимы, а потому могут быть приняты в качестве базиса в R_3.

Матрица C невырожденная, а потому имеет обратную C^{-1}. Найдём её (см. задачу 8.3.1).

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1; \; A_1^2 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5; \; A_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3; \; A_2^2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7; \; A_2^3 = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_3^2 = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad A_3^3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как $\det C = -8$, то $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -3/8 & -7/8 & -1/8 \\ -7/8 & -11/8 & -5/8 \end{bmatrix}$. Новые координаты η^1, η^2, η^3 вектора $\mathbf{x}$ находятся по формуле (3.17).

$$\begin{bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 5/8 & 3/8 \\ -3/8 & -7/8 & -1/8 \\ -7/8 & -11/8 & -5/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-3-10+21}{8} \\ \dfrac{9+14-7}{8} \\ \dfrac{21+22-35}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8.5.2. Дана декартова система координат $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ и в ней точка $M(-2, 3)$. Новая декартова система $O', \mathbf{i}, \mathbf{j}$ получена параллельным переносом старой системы в новое начало $O'(1, 2)$. Найдите координаты точки M относительно новой системы координат.

Решение. По формулам (3.20), полагая в них $a = 1$, $b = 2$, $x = -2$, $y = 3$, находим: $x' = -2 - 1 = -3$, $y' = 3 - 2 = 1$. Следовательно, точка M в новой системе координат будет иметь координаты $(-3, 1)$.

Ответ. $(-3, 1)$.

8.5.3. Дана декартова система координат $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ и в ней точка $M(-2, 3)$. Новая декартова система $O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'$ получена параллельным переносом в новое начало $O'(1, 2)$ и последующим поворотом на угол 60°. Найдите координаты точки M относительно системы $O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'$.

Решение. В задаче 8.5.2 мы нашли, что после параллельного переноса точка M будет иметь координаты $(-3, 1)$. По формулам (3.19), полагая в них $x = -3$, $y = 1$, $\alpha = 60^\circ$, находим

$$x' = -3 \cdot \cos 60^\circ + 1 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2},$$

$$y' = -(-3) \cdot \sin 60^\circ + 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Ответ. $\left(\dfrac{\sqrt{3} - 3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3} + 1}{2} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

8.5.4. Относительно канонического базиса в R_2 даны три вектора $\mathbf{f}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{f}_2 = (3, 2)$, $\mathbf{x} = (10, 10)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Ответ. 1; 3.

8.5.5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1 = (1, 3, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (-3, -4, -5)$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{x} = (-2, 4, 6)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Ответ. $(48, 30, 20)$.

8.6. Решение систем линейных уравнений (задачи 6, 7 и 8)

В задачах 6, 7 и 8 проверяется умение решать системы линейных уравнений трёх типов. В задаче 6 дана система, число уравнений в которой совпадает с числом неизвестных, а определитель матрицы системы отличен от нуля. Способы решения таких систем описаны в подразделе 4.3. В задаче 7 дана система произвольного вида. Их исследование и решение рассмотрено в подразделе 4.4. В задаче 8 содержится система линейных однородных уравнений. Для её решения необходимо изучить подраздел 4.5. Приводим примеры решения систем всех трёх типов.

8.6.1. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Неизвестное x_4 найдите по формуле Крамера. Решите эту систему методом Гаусса.

Решение. Вычислим определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

$D \neq 0$, поэтому система имеет единственное решение.

Находим определитель D_4 (в определителе D четвёртый столбец заменён столбцом свободных членов).

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 0 & -9 & -19 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -28.$$

По формуле Крамера $x_4 = \dfrac{D_4}{D} = \dfrac{-28}{-14} = 2$. Решим данную систему методом Гаусса.

Записываем расширенную матрицу системы и преобразуем её к треугольному виду, действуя только со строками.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ \quad\; - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -9, \\ \qquad\qquad - 8x_3 - 6x_4 = -20, \\ \qquad\qquad\qquad - 14x_4 = -28, \end{cases}$$

из которой легко находим $x_4 = 2$; $8x_3 = 20 - 12$, $x_3 = 1$; $x_2 = 9 - 5 - 6 = -2$; $x_1 = 4 + 4 - 3 - 4 = 1$. Получено решение: $(1, -2, 1, 2)$.

8.6.2. Дана система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 7x_5 = -11. \end{cases}$

Докажите, что эта система совместна, найдите её общее решение и частное решение, если $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$.

Решение. Применим к этой системе метод Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем её, действуя только со строками, к виду, из которого легко увидеть базисный минор.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & -11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 & -46 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что ранг основной и расширенной матриц равен 2, следовательно, система совместна. В качестве базисного выберем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. неизвестные x_1 и x_2 приняты в качестве зависимых, а x_3, x_4, x_5 — в качестве свободных. Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30, \\ \quad\; - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23. \end{cases}$$

Выражаем зависимые переменные через свободные:

$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$ — общее решение системы. Полагая $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 3$, находим $x_1 = -16 + 1 + 1 + 15 = 1$, $x_2 = 23 - 2 - 2 - 18 = 1$.

Мы получили частное решение $(1, 1, 1, 1, 3)$.

8.6.3. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальные решения. Запишите общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решения.

Решение. Исследовать систему будем методом Гаусса. Записываем её матрицу и, действуя только со строками, упрощаем ее, не меняя ранга.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Видим, что последние три строки пропорциональны. Две из них, например две последних, можно вычеркнуть, не меняя ранга матрицы. Ранг матрицы равен двум, следовательно, он меньше числа неизвестных. По теореме 2 из подраздела 4.5 система имеет нетривиальное решение. Впрочем, это можно было заметить сразу: поскольку уравнений в системе четыре, то ранг ее матрицы не может быть больше четырех, а поэтому он меньше пяти — числа неизвестных. Обведенный минор можно принять в качестве базисного. При таком выборе базисного минора неизвестные x_1 и x_2 — зависимые, а x_3, x_4, x_5 — свободные. Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 - 2x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases}$$

Выражая зависимые переменные через свободные, находим общее решение: $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases}$

Фундаментальная система решений содержит $5 - 2 = 3$ решения (разность между числом неизвестных и рангом). Получаем три частных линейно независимых решения, придавая поочередно свободным неизвестным значения (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1):
$(-1, 0, 1, 0, 0)$,
$(0, 1, 0, 1, 0)$,
$(-1, 1, 0, 0, 1)$.

Эти решения образуют фундаментальную систему решений. Любое другое решение является их линейной комбинацией.

Задачи для самостоятельного решения

8.6.4. Дана система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -14, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$

Докажите, что она имеет единственное решение. Неизвестное x_2 найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

Ответ. $(0, -3, 3, 1)$.

8.6.5. Дана система система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что эта система совместна; найдите общее решение и частное решение при $x_4 = 1$.

Ответ. $(1, 1, 1, 1)$; $x_1 = 2 - x_4$, $x_2 = -1 + 2x - 4$, $x_3 = x_4$.

8.6.6. Дана система система линейных уравнений
$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что эта система имеет нетривиальное решение. Запишите её общее решение и какую-нибудь фундаментальную систему решений.

Ответ. $(1, 1, 2, 0)$, $(3, 1, 0, 2)$.

8.7. Алгебра геометрических векторов (задачи 9 и 10)

Необходимо изучить подразделы 5.1 — 5.6.

8.7.1. Найдите $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $\mathbf{r} = 2$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = (2/3)\pi$.

Решение. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}, 3\mathbf{p} - \mathbf{r}) = 6(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 9(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - 2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) -$
$- 3(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 6|\mathbf{p}|^2 + 7|\mathbf{p}||\mathbf{r}| \cdot \cos 120^\circ - 3|\mathbf{r}|^2 = 6 \cdot 16 - 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} - 3 \cdot 4 =$
$= 96 - 28 - 12 = 56.$

(Мы учли, что $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{r}), (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2$, $(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$.)

Ответ. 56.

8.7.2. Вычислите $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{r}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 135^\circ$.

Решение.

$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |[2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}, 3\mathbf{p} - \mathbf{r}]| = |6[\mathbf{p}, \mathbf{p}] + 9[\mathbf{r}, \mathbf{p}] - 2[\mathbf{p}, \mathbf{r}] - 3[\mathbf{r}, \mathbf{r}]| =$
$= |0 + 9[\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 2[\mathbf{r}, \mathbf{p}] + 0| = 11\,|[\mathbf{r}, \mathbf{p}]| = 11|\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin 135^\circ =$
$= 11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 88.$

(Использовали свойства $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$, $[\mathbf{p}, \mathbf{r}] = -[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$.)

Ответ. 88.

8.7.3. Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45^\circ$.

Решение.

$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (4\mathbf{p} + \mathbf{r}, 4\mathbf{p} + \mathbf{r}) = 16|\mathbf{p}|^2 + 8(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + |\mathbf{r}|^2 =$
$= 32 + 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 16 = 32 + 32 + 16 = 80.$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$

Ответ. $4\sqrt{5}$.

8.7.4. При каком значении α векторы $\mathbf{p} = \mathbf{c} + \alpha\mathbf{d}$ и $\mathbf{r} = 2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}$ перпендикулярны, если $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{c},\mathbf{d}}) = 120°$?

Решение. Если векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ перпендикулярны, то $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0$. Следовательно, $(2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}, \mathbf{c} + \alpha\mathbf{d}) = 0{,}2|\mathbf{c}|^2 + (3 + 2\alpha)(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + 3\alpha|\mathbf{d}|^2 = 2\cdot 16 - (3+2\alpha)\cdot 4\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + 4\cdot 4\cdot 3\alpha = 32 - 8(3+2\alpha)\cdot 16 + 48\alpha = 8 + 32\alpha = 0$; $\alpha = -1/4$.

Ответ. $-1/4$.

8.7.5. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1, -2, 1)$, $B(0, -3, 2)$, $C(2, 0, 1)$. Найдите площадь треугольника ABC и длину его высоты AH.

Решение. Известно, что величина $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}|[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]|$. Так как $\mathbf{AB} = (-1, -1, 1)$, $\mathbf{AC} = (1, 2, 0)$, то $[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,

$|[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, $S = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Поскольку $S = \frac{1}{2}|\mathbf{AH}| \times |\mathbf{BC}| = \frac{1}{2}h \cdot |\mathbf{BC}|$, то $h = \dfrac{2S}{|\mathbf{BC}|}$; $\mathbf{BC} = (2, 3, -1)$, $|\mathbf{BC}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$, $h = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

8.7.6. Треугольная пирамида $ABCD$ задана координатами своих вершин: $A(-5, 1, 1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(1, -1, -3)$, $D(-1, -4, -1)$. Вычислите объём V этой пирамиды, длину её высоты CH, косинус угла α между рёбрами $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AD}$, $\text{Пр}_{AB}\mathbf{AD}$.

Решение. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$, объём пирамиды, рёбрами которой являются векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен $\frac{1}{6}|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. В нашей задаче $V = \frac{1}{6}|(\mathbf{CB}, \mathbf{CA}, \mathbf{CD})|$. Так как $\mathbf{CB} = (0, -1, 1)$, $\mathbf{CA} = (-6, 2, 4)$, $\mathbf{CD} = (-2, -3, 2)$, то

$$(\mathbf{CB}, \mathbf{CA}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (2 - 11) = 18 \text{ и } V = \frac{18}{6} = 3.$$

Объём пирамиды, как это известно из школьного курса,

$V=\dfrac{1}{3}Sh$, тогда $h=\dfrac{3V}{S}$. Так как требуется найти высоту CH, то величиной S является площадь грани ADB, которую находим подобно тому, как в задаче 8.7.5: $S=\dfrac{1}{2}|[\mathbf{AB},\mathbf{AD}]|$, $\mathbf{AB}=(6,-3,-3)$, $\mathbf{AD}=(4,-5,-2)$,

$$[\mathbf{AB},\mathbf{AD}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 6 & -3 & -3\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix}=-9\mathbf{i}+0\cdot\mathbf{j}-18\mathbf{k}=-9\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{k});$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{1+4}=\frac{9}{2}\sqrt{5};\ CH=h=\frac{3\cdot 3\cdot 2}{9\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0{,}4\sqrt{5}.$$

Косинус угла между векторами $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AD}$ находим по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{AB},\mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AD}|}=\frac{6\cdot 4+(-3)\cdot(-5)+(-3)\cdot(-2)}{\sqrt{36+9+9}\cdot\sqrt{16+25+4}}=$$
$$=\frac{24+15+6}{\sqrt{54\cdot 45}}=\frac{45}{9\sqrt{6\cdot 5}}=\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

(см. подраздел 5.4).

Проекцию вектора $\mathbf{AD}$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{AB}$, находим по формуле

$$\text{Пр}_{AB}\mathbf{AD}=\frac{(\mathbf{AB},\mathbf{AD})}{|\mathbf{AB}|}=\frac{24+15+6}{\sqrt{36+9+9}}=\frac{45}{\sqrt{54}}=\frac{15}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

8.7.7. В треугольнике ABC даны $\mathbf{AB}=2\mathbf{p}+5\mathbf{q}$, $\mathbf{AC}=8\mathbf{p}-7\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — произвольные неколлинеарные векторы. Выразите через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ вектор $\mathbf{BC}$.

Ответ. $6\mathbf{p}-12\mathbf{q}$.

8.7.8. В треугольнике ABC сторона BC точками M_1, M_2, M_3 разделена на четыре равные части, так что $\mathbf{BM}_1=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3=\mathbf{M}_3\mathbf{C}$. Дано, что $\mathbf{AM}_1=a$, $\mathbf{AM}_2=b$. Выразите через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AC}$.

Ответ. $\mathbf{AB}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{BC}=4(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\mathbf{AC}=3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

8.7.9. Найдите числа α и β, если известно: $\mathbf{AB}=\alpha\mathbf{p}+4\mathbf{q}$, $\mathbf{BC}=2\mathbf{p}-\beta\mathbf{q}$, $\mathbf{AC}=\beta\mathbf{p}+\alpha\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — неколлинеарные векторы.

Ответ. 1; 3.

8.7.10. Вектор $\mathbf{a}=(2,-4,3)$ отложен от точки $A(3,-5,2)$. Найдите координаты точки B — его конца.

Ответ. $B(5,-9,5)$.

8.7.11. Найдите скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. 33.

8.7.12. Найдите квадрат длины вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ — единичные векторы, составляющие между собой углы, равные $\dfrac{2}{3}\pi$.

Ответ. 37.

8.7.13. Найдите косинус угла между векторами $\mathbf{a} = (3, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 1, -3)$.

Ответ. $9/19$.

8.7.14. Найдите координаты орта вектора $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Ответ. $(6/7, -3/7, -2/7)$.

8.7.15. Найдите проекцию вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Ответ. 2.

8.7.16. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Ответ. 92.

8.7.17. Даны координаты вершин треугольника $A(1, 2, 2)$, $B(3, -2, 2)$, $C(1, -4, -1)$. Найдите длину его высоты CH.

Ответ. $9/\sqrt{5}$.

8.7.18. Даны координаты точек $A(2, 3, 1)$, $B(6, 2, 0)$, $C(4, 2, 1)$, $D(4, 6, 0)$. Найдите высоту DH пирамиды $ABCD$.

Ответ. 2.

8.8. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы матрицы (задача 11)

Для решения этой задачи необходимо изучить подразделы 6.1 — 6.5.

8.8.1. Операторы A и B действуют в пространстве V_3 по законам $A\mathbf{x} = [\mathbf{c}, \mathbf{x}]$; $B\mathbf{x} = (-2x_3, -x_2, x_1)$, где $\mathbf{c} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор.

1. Докажите, что оператор A линеен.
2. Найдите координаты вектора $A\mathbf{c}$.
3. Найдите координаты вектора $B\mathbf{c}$.
4. Найдите матрицу оператора BA в базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Решение.

1. Чтобы доказать, что оператор A линейный, надо проверить, что выполняется условие $A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y}$. В нашем случае, используя свойства векторного произведения, находим

$$A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=[\mathbf{c},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}]=\alpha[\mathbf{c},\mathbf{x}]+\beta[\mathbf{c},\mathbf{y}]=\alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y},$$

т.е. оператор A линейный.

2. Поскольку $A\mathbf{c}=[\mathbf{c},\mathbf{c}]=\mathbf{0}$, то $A\mathbf{c}=(0,0,0)$.

3. Находим вектор $B\mathbf{c}$. В этом случае $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=2$. Поэтому $B\mathbf{c}=(-4,-3,-1)$.

4. Матрицу оператора BA можно найти двумя способами: а) найти матрицы операторов B и A, а затем найти их произведение; б) найти координаты векторов $BA\mathbf{i}$, $BA\mathbf{j}$, $BA\mathbf{k}$ и записать их в столбцы. Найти матрицы операторов A и B.

Имеем:

$$A\mathbf{i}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&3&2\\1&0&0\end{vmatrix}=2\mathbf{j}-3\mathbf{k},\quad A\mathbf{j}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&3&2\\0&1&0\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}-\mathbf{k},$$

$$A\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=3\mathbf{i}+\mathbf{j},\quad A=\begin{bmatrix}0&-2&3\\2&0&1\\-3&-1&0\end{bmatrix}.$$

$$B\mathbf{i}=(0,0,1);\ B\mathbf{j}=(0,-1,0);\ B\mathbf{k}=(-2,0,0);\ B=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&3\\2&0&1\\-3&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&0\\-2&0&-1\\0&-2&3\end{bmatrix}.$$

Мы нашли матрицу оператора BA способом *а*. Найдём эту матрицу способом *б*. $(BA)\mathbf{i}=B(A\mathbf{i})=B(2\mathbf{j}-3\mathbf{k})=(6,-2,0)$; $B(A\mathbf{j})=$ $=B(-2\mathbf{i}-\mathbf{k})=(2,0,-2)$; $B(A\mathbf{k})=B(3\mathbf{i}+\mathbf{j})=(0,-1,3)$. Мы получили $BA=\begin{bmatrix}6&2&0\\-2&0&-1\\0&-2&3\end{bmatrix}$.

8.8.2. Линейный оператор A действует в $R_3\to R_3$ по закону $A\mathbf{a}=$ $=(5x_1+2x_2-3x_3, 4x_1+5x_2-4x_3, 6x_1+4x_2-4x_3)$, где $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ — произвольный вектор из R_3.

1. Найдите матрицу оператора A в каноническом базисе.

2. Докажите, что вектор $\mathbf{x}=(1,2,2)$ является собственным для оператора A, и найдите собственное число λ_0, ему отвечающее. Найдите все другие собственные векторы оператора A и сделайте проверку.

Решение.

1. Так как $A(1,0,0) = (5,4,6)$, $A(0,1,0) = (2,5,4)$, $A(0,0,1) = (-3,-4,-4)$, то, записав в столбцы координаты полученных векторов, найдём матрицу A: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

2. Проверим, что вектор $\mathbf{x} = (1,2,2)$ является собственным матрицы A. Находим

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4-6 \\ 4+10-8 \\ 6+8-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Так как $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, то отсюда следует, что вектор $\mathbf{x}(1,2,2)$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda_0 = 3$.

3. Чтобы найти все другие собственные числа, составляем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 4) - 2(-4\lambda + 8) - 3(6\lambda - 14) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 5\lambda^2 - 5\lambda - 20 + 8\lambda - 16 - 18\lambda + 42 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Нам уже известно, что число $\lambda_0 = 3$ — корень этого уравнения. Разделив многочлен $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ на $(\lambda - 3)$, получим $\lambda^2 - 3\lambda + 2$. Другие собственные числа найдём, решая уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Итак, собственными числами являются 1, 2, 3.

Находим собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

$\lambda = 1$. Собственные векторы, отвечающие этому собственному числу, образуют фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$ Определитель системы совпадает с определителем $|A - E| = 0$.

Ранг матрицы этой системы, очевидно, равен двум. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного решения. Вычитая первое уравнение из второго, получаем $x_1 = x_2$. Таким образом,

$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$ является общим решением системы. Положив, например, $x_2 = 1$, найдём собственный вектор $\mathbf{x} = (1,1,2)$.

Проверка: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2-6 \\ 4+5-8 \\ 6+4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

т.е. вектор (1,1,2) является собственным и отвечает собственному числу $\lambda = 1$.

Совершенно аналогично находим, что собственному числу $\lambda = 2$ отвечает собственный вектор (1,0,1).

Задачи для самостоятельного решения

8.8.3. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Докажите, что вектор $\mathbf{x} = (0,2,-1)$ является собственным этой матрицы и найдите отвечающее ему собственное число A. Найдите все собственные числа и собственные векторы этой матрицы и сделайте проверку.

Ответ. Собственные числа 1; 4; 16.

8.8.4. Квадратичные формы

а) $B(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$,

б) $B(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 5x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 7z^2$

приведите к главным осям и найдите соответствующее преобразование системы координат.

Ответ. а) $2y_1^2 + 3z_1^2$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

б) $\lambda^3 - 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0$; $3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2$;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

9. Методические указания (контрольная работа №2)

Эта контрольная работа содержит пять типов задач: 1) прямая линия на плоскости; 2) плоскость; 3) прямая в пространстве; 4) окружность, сфера; 5) эллипс, гипербола, парабола. Для решения задач первых трёх типов широко применяется векторная алгебра. Следует повторить теоретический материал по скалярному, векторному и смешанному произведению (пп. 5.4, 5.5, 5.6).

9.1. Прямая линия на плоскости (задачи 1 и 2)

Необходимо изучить подраздел 7.1. Напомним, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициенты A и B определяют вектор $\mathbf{N} = (A, B)$, перпендикулярный данной прямой, называемый вектором нормали. Чтобы записать общее уравнение прямой, достаточно найти её вектор нормали $\mathbf{N} = (A, B)$ и координаты (x_0, y_0) какой-либо точки M_0, лежащей на этой прямой. Рекомендуется использовать следующие правила.

1. Если прямая, заданная общим уравнением $Ax + By + C = 0$, проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$, следовательно, $C = -(Ax_0 + By_0)$.

2. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = (A, B)$, то её общее уравнение можно записать в виде $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$.

3. Если прямая параллельна вектору $\mathbf{l} = (p, q)$, то в качестве её вектора нормали можно принять либо вектор $\mathbf{N}_1 = (q, -p)$, либо $\mathbf{N}_2 = (-q, p)$.

4. Если прямые параллельны, то их векторы нормали также параллельны (их можно принять одинаковыми). Если прямые перпендикулярны, то их векторы нормали также перпендикулярны.

5. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Следующие простые задачи (9.1.1—9.1.6) встречаются при решении многих задач.

9.1.1. Найдите то значение параметра C, при котором прямая, заданная уравнением $2x - 3y + C = 0$, проходит через точку $M_0(2, 4)$.

Решение. По правилу 1 при $x_0 = 2, y_0 = 4$ находим $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + {}$ ${}+C = 0$ (в уравнение прямой подставили координаты точки M_0), $4 - 12 + C = 0$, $C = 8$.

9.1.2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = (4,5)$.

Решение. По правилу 2 находим искомое уравнение $4x + 5y - (4 \cdot 2 + 5 \cdot 5) = 0$, $4x + 5y - 23 = 0$.

9.1.3. Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,3)$ параллельно прямой $x - 4y + 5 = 0$.

Решение. В качестве вектора нормали можно принять вектор $\mathbf{N} = (1,-4)$ и записать искомое уравнение $x - 4y - (-2 - 12) = 0$, или $x - 4y + 14 = 0$.

9.1.4. Запишите общее уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(3,-2)$ перпендикулярно к прямой $4x - 5y + 2 = 0$.

Решение. В качестве вектора нормали прямой L можно принять любой вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{N}_1(4,-5)$, например вектор $\mathbf{N}_2(5,4)$, $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = 0$. Задача 9.1.4 свелась к задаче 9.1.2. Записываем искомое уравнение $5x + 4y - (5 \cdot 3 - 4 \cdot 2) = 0$ или $5x + 4y - 7 = 0$.

9.1.5. Запишите уравнение прямой L, проходящей через точки $M_0(3,4)$ и $M_1(5,-3)$.

Решение. Приведём три способа решения этой задачи.

Первый способ. Прямая L параллельна вектору $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1 = (2,-7)$, а потому перпендикулярна вектору $\mathbf{N} = (7,2)$, который можно принять в качестве вектора нормали прямой L. Записываем искомое уравнение: $7x + 2y - (7 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 0$, или $7x + 2y - 29 = 0$.

Второй способ. Уравнение прямой L будем искать в виде $y = kx + b$. Требуется найти значения k и b. Так как эта прямая проходит через точки M_0 и M_1, то $\begin{cases} 4 = 3k + b, \\ -3 = 5k + b. \end{cases}$

Решая эту систему, находим $k = -\dfrac{7}{2}$, $b = \dfrac{29}{2}$. Уравнение прямой L можно записать в виде $y = -\dfrac{7}{2}x + \dfrac{29}{2}$, или $7x + 2y - 29 = 0$.

Третий способ. Уравнение прямой M_0M_1 можно записать в виде $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$. В нашем случае $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$. Поэтому $\dfrac{x-3}{5-3} = \dfrac{y-4}{-3-4}$, $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-7}$, или $-7(x-3) = 2(y-4)$, $7x + 2y - 29 = 0$.

9.1.6. Найдите расстояние d от точки $M(2,5)$ до прямой $8x + 6y - 7 = 0$.

Решение. По формуле (7.12), в которой надо положить $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $A = 8$, $B = 6$, находим

$$d = \frac{|8 \cdot 2 + 5 \cdot 6 - 7|}{\sqrt{64+36}} = \frac{|16+30-7|}{10} = \frac{39}{10} = 3{,}9.$$

9.1.7. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1,-3)$; $B(-5,7)$; $C(-3,-1)$. Запишите уравнения прямых, на которых расположены: а) медиана AM; б) высота BH этого треугольника.

Решение: а) прямая AM проходит через точку $A(1,-3)$ и точку M, являющуюся серединой отрезка BC. Находим координаты точки M: $x = \dfrac{-5-3}{2} = -4$, $y = \dfrac{7-1}{2} = 3$, т.е. $M(-4,3)$. Прямая AM параллельна вектору $\mathbf{AM} = (-5,6)$. В качестве вектора нормали прямой AM можно принять вектор $\mathbf{N} = (6,5)$. Записываем уравнение прямой AM (см. правило 2): $6x + 5y - (6-15) = 0$, или $6x + 5y + 9 = 0$;

б) прямая BH перпендикулярна вектору $\mathbf{AC} = (-4,2) \| (2,-1)$. В качестве вектора нормали прямой BH можно принять вектор $\mathbf{N}(2,-1)$. Пользуясь правилом 2, записываем уравнение прямой BH: $2x - y - (-10-7) = 0$, или $2x - y + 17 = 0$.

9.1.8. Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,6)$ и отсекающей от второго координатного угла треугольник площадью $S = 0{,}5$.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$. По условию задачи $b > 0$, $k > 0$. Так как эта прямая проходит через точку $M_0(1,6)$, то $6 = k + b$. Находим точки пересечения искомой прямой с осями координат: $B(0,b)$, $A\left(-\dfrac{b}{k}, 0\right)$. Площадь треугольника OAB (рис. 9.1) равна $S = \dfrac{b^2}{2k}$.

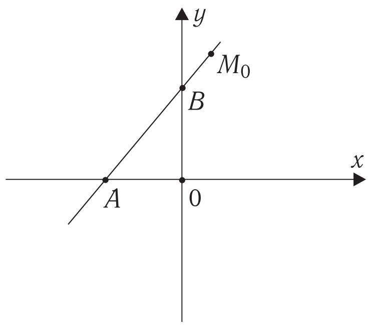

Рис. 9.1.

По условию задачи $S = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{b^2}{2k} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $k = b^2$. Имеем систему $\begin{cases} k = b^2, \\ 6 = k + b. \end{cases}$ Отсюда $b^2 + b - 6 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим $b_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$. Поскольку $b > 0$, то $b = 2$, а потому $k = 4$. Таким образом, искомое уравнение $y = 4x + 2$, или $4x - y + 2 = 0$.

9.1.9. Найдите проекцию точки $P(6, 0)$ на прямую L, заданную уравнением $4x - 3y + 1 = 0$. Найдите точку S, симметричную точке $P(6, 0)$ относительно этой прямой.

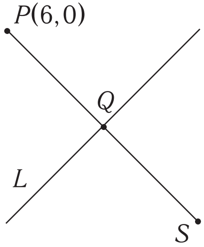

Рис. 9.2.

Решение. Точку Q, являющуюся проекцией точки P на данную прямую, можно найти как точку пересечения прямой L и прямой PQ (рис. 9.2), перпендикулярной к данной и проходящей через точку P. Прямая PQ параллельна вектору $\mathbf{N}_1(4, -3)$ — нормали прямой L. В качестве вектора нормали прямой PQ можно принять вектор $\mathbf{N}_2(3, 4)$, а потому уравнение прямой PQ имеет вид $3x + 4y - (18 - 0) = 0$, или $3x + 4y - 18 = 0$. Для отыскания координат точки Q мы получили систему $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 18 = 0, \end{cases}$ решая которую, находим $x = 2$, $y = 3$, т.е. $Q(2, 3)$. Обозначим координаты точки S через x и y. Точка Q делит пополам отрезок PS, поэтому $\dfrac{6 + x}{2} = 2$, $\dfrac{0 + y}{2} = 3$. Отсюда $x = -2$, $y = 6$, т.е. $S(-2, 6)$.

Ответ. $Q(2, 3)$, $S(-2, 6)$.

9.1.10. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $P(6, 10)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(2, 8)$ и $M_2(4, -12)$.

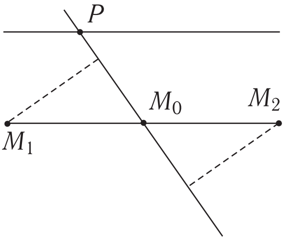

Рис. 9.3.

Решение. Будем искать уравнение в виде $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Так как эта прямая проходит через точку P, то $6A + 10B + C = 0$. Прямая $Ax + By + C = 0$ находится на одинаковом расстоянии от точек $M_1(2, 8)$ и $M_2(4, -12)$ (рис. 9.3). Используя формулу (7.12), получаем

$$\frac{|2A + 8B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4A - 12B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

или $|2A + 8B + C| = |4A - 12B + C|$, $2A + 8B + C = \pm(4A - 12B + C)$. Для отыскания неизвестных коэффициентов A, B, C получаем две различные системы:

$$\text{а)} \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 2A - 20B = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б)} \begin{cases} 6A + 10B + C = 0, \\ 6A - 4B + 2C = 0, \end{cases} \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Общее решение системы а) можно записать в виде $\begin{cases} A = 10B, \\ C = -70B, \\ B \neq 0. \end{cases}$

Находим искомое уравнение $10Bx + By - 70B = 0$ или, так как $B \neq 0$, $10x + y - 70 = 0$.

Легко получить общее решение системы б): $\begin{cases} A = -4B, \\ C = 14B, \\ B \neq 0. \end{cases}$ Теперь общее уравнение искомой прямой можно записать в виде $-4Bx+$ $+By + 14B = 0$, или $4x - y - 14 = 0$.

Эту задачу можно решить проще, если заметить, что одна из прямых проходит через точку P параллельно прямой M_1M_2, а вторая проходит через точку P и середину M_0 отрезка M_1M_2 (рис. 9.3). Необходимо дважды применить правило 3.

Ответ. $4x - y - 14 = 0$,
$10x + y - 70 = 0$.

9.1.11. В треугольнике ABC из вершины A проведены высота и медиана (рис. 9.4). Даны: вершина $B(3, 7)$, уравнение высоты $2x - y + 1 = 0$ и уравнение медианы $3x - 4y + 9 = 0$. Найдите координаты вершины C.

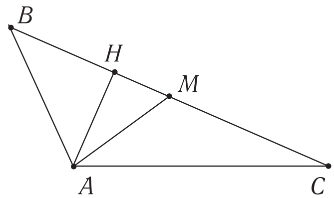

Рис. 9.4.

Решение. Координаты вершины A можно найти как точку пересечения высоты AH и медианы AM, решая систему $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 3x - 4y + 9 = 0. \end{cases}$

Получим $x = 1$, $y = 3$, т.е. $A(1, 3)$. Обозначим через x_0, y_0 координаты точки C. Тогда точка M имеет координаты $\left(\dfrac{x_0 + 3}{2}, \dfrac{y_0 + 7}{2}\right)$. Точка C лежит на прямой BC, а M — на медиане. Прямая BC перпендикулярна высоте, поэтому в качестве вектора нормали можно взять любой вектор, перпендикулярный к вектору $(2, -1)$, например $\mathbf{N}(1, 2)$. Уравнение BC по правилу 2 можно записать в виде $x + 2y - (3 + 14) = 0$, $x + 2y - 17 = 0$. Для отыскания x_0 и y_0 имеем систему $\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 17 = 0, \\ 3 \cdot \dfrac{x_0 + 3}{2} - 4 \cdot \dfrac{y_0 + 7}{2} + 9 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 17 = 0, \\ 3x_0 - 4y_0 - 1 = 0. \end{cases}$
Решая систему, находим $x_0 = 7$, $y_0 = 5$.

Ответ. $C(7, 5)$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1.12. Укажите координаты точек пересечения прямой $3x - 4y+$ $+12 = 0$ с осями координат.

Ответ. $(-4, 0)$, $(0, 3)$.

9.1.13. Дана прямая $4x + 3y + 5 = 0$. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$:
а) параллельно данной прямой;
б) перпендикулярно данной прямой.
Ответ. а) $4x + 3y - 11 = 0$; б) $3x - 4y - 2 = 0$.

9.1.14. Найдите проекцию точки $P(6, 4)$ на прямую $4x+5y-3 = 0$.
Ответ. $(2, -1)$.

9.1.15. Найдите точку Q, симметричную точке $P(-5, 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.
Ответ. $(11, -11)$.

9.1.16. Составьте уравнение средней линии треугольника $A(5, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$, параллельной стороне AC.
Ответ. $x + 4y = 0$.

9.1.17. Даны вершины треугольника $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(3, 2)$. Составьте уравнение его высоты CH и уравнения всех его сторон.
Ответ. $3x + 2y - 13 = 0$, $2x - 3y - 1 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

9.1.18. Даны вершины треугольника $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. Запишите уравнение биссектрисы его внутреннего угла A.
Ответ. $5x + y - 3 = 0$.

9.1.19. Даны вершины треугольника $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$. Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану CM.
Ответ. 4.

9.1.20. Определите угол φ, образованный прямыми:
а) $3x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 7 = 0$;
б) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ и $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.
Ответ. а) $\varphi = 45°$, б) $\varphi = 90°$.

9.2. Плоскость (задача 3)

Для решения задач по данной теме необходимо изучить подраздел 7.4, а также повторить скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется заданием вектора $\mathbf{N} = (A, B, C)$, перпендикулярного плоскости и называемого вектором нормали, и какой-нибудь точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на плоскости. В этом случае уравнение плоскости можно записать в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как плоскость проходит через точку M_0, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, следовательно, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Как видим, чтобы записать уравнение плоскости, нужно найти её вектор нормали $\mathbf{N}$ и точку M_0, лежащую на плоскости. Если найдены какие-нибудь два вектора $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, параллельные плоскости, то, очевидно, $\mathbf{N} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]$. Это замечание очень часто используется при решении задач. Отметим, что перпендикулярно данной плоскости через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно провести бесконечно много плоскостей. Все они параллельны вектору нормали данной плоскости.

9.2.1. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -2, 3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}(4, -3, 2)$.

Решение. Так как в данном случае вектор $\mathbf{N}(4, -3, 2)$ есть нормаль плоскости, то в её общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ можно положить $A = 4$; $B = -3$; $C = 2$, т.е. $4x - 3y + 2z + D = 0$. Поскольку точка $M_0(1, -2, 3)$ лежит в плоскости, то $4 + 6 + 6 + D = 0$, $D = -16$. Мы нашли уравнение плоскости: $4x - 3y + 2z - 16 = 0$.

9.2.2. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(3, 1, -2)$, $M_3(4, 5, -3)$.

Решение. Данная плоскость параллельна векторам $\mathbf{l}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (2, -1, -1)$ и $\mathbf{l}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 = (3, 3, -2)$. Поэтому в качестве вектора нормали можно взять вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. Разложим этот определитель по первой строке:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k},$$

т.е. $\mathbf{N} = (5, 1, 9)$. Записываем уравнение плоскости $5x + y + 9z + D = 0$. Для определения D используем условие, что плоскость проходит через точку $M_1(1, 2, -1)$: $5 + 2 - 9 + D = 0$, $D = 2$. Уравнение $5x + y + 9z + 2 = 0$ является искомым. Убедитесь, что точки M_2 и M_3 также лежат в этой плоскости.

Ответ. $5x + y + 9z + 2 = 0$.

9.2.3. Запишите уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляр к плоскости $4x - 3y + 2z - 3 = 0$, опущенный из точки $P(1, -5, 3)$, и точку $M_0(2, 7, -4)$.

Решение. Искомая плоскость параллельна вектору $\mathbf{l}_1 = (4, -3, 2)$ нормали данной плоскости и вектору $\mathbf{l}_2 = \mathbf{PM}_0 = (1, 12, -7)$, поэтому вектор нормали $\mathbf{N}$ искомой плоскости находится из условия

$$\mathbf{N} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 12 & -7 \end{vmatrix} = (-3\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 51\mathbf{k}) \| (1, -10, -17).$$

Записываем уравнение плоскости: $x - 10y - 17z + D = 0$. Так как плоскость проходит через точку P (или M_0), то $1+50-51+D=0$, $D=0$. Мы получили уравнение $x-10y-17z=0$.

Ответ. $x-10y-17z=0$.

9.2.4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,-3,5)$ и $M_2(4,1,-1)$ параллельно оси OY.

Решение. Данная плоскость параллельна векторам $\mathbf{l}_1=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2=$ $=(2,4,-6)$ и $\mathbf{l}_2=(0,1,0)=\mathbf{j}$, поэтому её вектор нормали

$$\mathbf{N}=[\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=6\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}\|(3,0,1).$$

Записываем уравнение плоскости $3x+z+D=0$. Так как плоскость проходит через точку $M_1(2,-3,5)$ (или M_2), то $6+5+D=0$, $D=-11$. Искомое уравнение имеет вид $3x+z-11=0$.

Ответ. $3x+z-11=0$.

Решение приведённых задач можно оформить и по-другому. Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ параллельно векторам $\mathbf{l}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\mathbf{l}_2=(m_2,n_2,p_2)$, то в векторной форме уравнение плоскости можно записать в виде

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=0, \text{ или } \begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0.$$

9.2.5. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,4,3)$ перпендикулярно плоскостям $2x-3y+4z-1=0$ и $x+4y-z+5=0$.

Решение. Так как искомая плоскость перпендикулярна к данным плоскостям, то она параллельна их нормальным векторам $\mathbf{l}_1=\mathbf{N}_1=(2,-3,4)$ и $\mathbf{l}_2=\mathbf{N}_2=(1,4,-1)$. Поэтому уравнение плоскости, согласно сделанному замечанию, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-4 & z-3\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=0, \text{ или } -13(x-1)+6(y-4)+11(z-3)=0,$$

$13x-6y-11z-13+24+33=0$, $13x-6y-11z+44=0$.

Ответ. $13x-6y-11z+44=0$.

9.2.6. Запишите уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и точку $M_1(2,-5,6)$.

Решение. Искомая плоскость параллельна оси OZ, т.е. вектору $\mathbf{k}=(0,0,1)$ и вектору $OM_1=(2,-5,6)$, где $O(0,0,0)$ — начало координат. Взяв в качестве точки M_0 точку $(0,0,0)$, записываем уравнение плоскости $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$, $-5x-2y=0$, или $5x+2y=0$.

Ответ. $5x+2y=0$.

9.2.7. Найдите расстояние d от точки $P(1,4,5)$ до плоскости $x-2y-2z+3=0$.

Решение. Используя формулу подраздела 7.4 (задача 4), находим $d=\dfrac{|1-8-10+3|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{14}{3}$.

9.2.8. Запишите уравнения плоскостей, удалённых от плоскости $2x+6y+3z-6=0$ на расстояние $d=5$.

Решение. Искомые плоскости параллельны данной, а потому их векторы нормали можно взять совпадающими с вектором нормали $\mathbf{N}=(2,6,3)$ данной плоскости. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $2x+6y+3z+D=0$. Осталось определить свободный член D. Возьмём любую точку на данной плоскости, например $M_0(3,0,0)$. По условию она удалена от плоскости $2x+6y+3z+D=0$ на расстояние $d=5$. Поэтому $\dfrac{|6+D|}{\sqrt{4+36+9}}=5$, $\dfrac{|6+D|}{7}=5$, $6+D=$ $=\pm 35$. Отсюда $D_1=29$, $D_2=-41$. Имеем две плоскости $2x+6y+3z+$ $+29=0$ и $2x+6y+3z-41=0$, удалённые от данной точки на расстояние $d=5$.

Ответ. $2x+6y+3z+29=0$, $2x+6y+3z-41=0$.

Задачи для самостоятельного решения

9.2.9. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1,2,-3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}=(3,-2,5)$.

Ответ. $3x-2y+5z+22=0$.

9.2.10. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,0,-4)$ параллельно плоскости $x-4y+2z+6=0$.

Ответ. $x-4y+2z+5=0$.

9.2.11. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(0,-1,2)$, $M_2(2,0,3)$, $M_3(-3,4,0)$.

Ответ. $7x-y-13z+25=0$.

9.2.12. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2,1,4)$ и $M_2(0,3,1)$ перпендикулярно плоскости $4x+3y-5z+$ $+4=0$.

Ответ. $x+2y+2z-8=0$.

9.2.13. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-5,2,-1)$ параллельно плоскости OXZ.

Ответ. $y-2=0$.

9.2.14. Вычислите площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла OXY.

Ответ. 240.

9.2.15. Вычислите объём пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

Ответ. 8.

9.2.16. На оси OY найдите точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстояние $d = 4$.

Ответ. $(0, 7, 0)$, $(0, -5, 0)$.

9.3. Прямая в пространстве (задачи 4, 5, 6)

Необходимо изучить подраздел 7.5.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} - \tag{1}$$

общее уравнение прямой, где $\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \not\parallel \mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Если известен направляющий вектор $\mathbf{l} = (m, n, p)$ прямой и какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ней, то прямую можно определить соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любой точки прямой, $t(-\infty < t < +\infty)$ — числовой параметр.

В координатной форме уравнение (2) можно записать в двух видах:

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + tm,\\ y = y_0 + tn,\\ z = z_0 + tp \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\text{и} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{4}$$

Соотношения (3) называют параметрическими, а (4) — каноническими уравнениями прямой. Подчеркнём, что в параметрических уравнениях прямой коэффициенты при параметре t определяют координаты направляющего вектора. Нужно уметь переходить от уравнения прямой в форме (1) к уравнениям прямой в формах (3) и (4). Покажем, как это сделать.

Уравнения (1) можно рассматривать как систему относительно неизвестных x, y, z. Так как векторы $\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ непараллельны, то один из определителей $D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ или $D_3 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. Следовательно, ранг основной матрицы системы, а потому и расширенной, равен двум. Поэтому в системе (1) одно неизвестное свободное, а два других — зависимые. Если, например,

$D_1 = (A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0$, то в качестве свободного можно принять неизвестное z, а в качестве зависимых — x и y. Разрешая систему (1) относительно x и y, получаем общее решение системы $\begin{cases} x = \alpha z + \gamma, \\ y = \beta z + \delta. \end{cases}$

Положив $z = t$, находим параметрические уравнения $\begin{cases} x = \alpha t + \gamma, \\ y = \beta t + \delta, \\ z = t \end{cases}$ и канонические уравнения $\dfrac{x-\gamma}{\alpha} = \dfrac{y-\delta}{\beta} = \dfrac{z-0}{1}$ прямой. Заметим, что направляющий вектор $\mathbf{l}$ параллелен вектору $[\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}]$, поскольку $\mathbf{l} \perp \mathbf{N_1}$ и $\mathbf{l} \perp \mathbf{N_2}$.

Параметрические и канонические уравнения прямой определяются неоднозначно, поскольку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно выбрать на прямой многими способами, направляющий вектор $\mathbf{l}$ определяется также с точностью до скалярного множителя, т.е. если $\mathbf{l}$ — направляющий, то вектор $\lambda \mathbf{l}$ $(\lambda \neq 0)$ также направляющий.

Итак, чтобы записать уравнение прямой, необходимо найти либо две плоскости, проходящие через эту прямую, либо её направляющий вектор и точку, лежащую на прямой.

Две прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{l}_2$ могут быть параллельными, если $\mathbf{l}_1 \| \mathbf{l}_2$; совпадать, если $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \| \mathbf{l}_1 \| \mathbf{l}_2$; пересекаться, если $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0$; скрещиваться, если $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) \neq 0$.

Напомним, что здесь $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы каких-нибудь точек, лежащих на первой или второй прямой соответственно, а $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ — направляющие векторы.

Следующие простые задачи (9.3.1—9.3.5) встречаются во многих более сложных.

9.3.1. Запишите параметрические и канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 16 = 0, \\ x + 2y - z + 6 = 0. \end{cases} \tag{a}$$

Решение. Так как $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то неизвестное z системы (а) можно принять в качестве свободного и записать $\begin{cases} 2x + 3y = 16 - z, \\ x + 2y = -6 + z. \end{cases}$ Находим общее решение этой системы, выражая x и y через z: $\begin{cases} x = -5z + 50, \\ y = 3z - 28. \end{cases}$ Полагая $z = t$, записываем параметрические $\begin{cases} x = -5t + 50, \\ y = 3t - 28, \\ z = t \end{cases}$ и канонические $\dfrac{x-50}{-5} = \dfrac{y+28}{3} = \dfrac{z}{1}$

уравнения прямой. Точка $M_0(50,-28,0)$ получена из параметрических уравнений при $t=0$. В качестве точки M_0 можно взять и другую точку, например $(0,2,10)$, получающуюся при $t=10$.

Ответ. $\mathbf{l}=(-5,3,1)$; $M_0(50,-28,0)$.

9.3.2. Запишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1,-3,4)$ и $M_2(-2,1,2)$.

Решение. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{l}=\mathbf{M_1M_2}=(-3,4,-2)$, а в качестве точки M_0 — любую из точек M_1 или M_2. Поэтому $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$ — канонические уравнения прямой M_1M_2.

9.3.3. Найдите точку M_0 пересечения прямой $\begin{cases} x=3t-2,\\ y=-2t+3,\\ z=4t-1\end{cases}$ и плоскости $x+2y+4z-30=0$.

Решение. Находим то значение параметра t_0, при котором происходит пересечение прямой и плоскости. Так как точка $M_0(3t_0-2,-2t_0+3,4t_0-1)$ лежит в данной плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению плоскости, следовательно, $3t_0-{}$ $-2+2(-2t_0+3)+4(4t-1)-30=0$, $3t_0-2-4t_0+6+16t-4-30=$ $=15t_0-30=0$, $t_0=2$.

Полагая в параметрических уравнениях прямой $t=2$, находим точку пересечения $M_0(4,-1,7)$.

Ответ. $(4,-1,7)$.

9.3.4. Докажите, что прямые $\begin{cases} x=3t-4,\\ y=-2t+1,\\ z=t+3\end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t-5,\\ y=-3t+5,\\ z=4t-4\end{cases}$ пересекаются. Найдите уравнение плоскости, в которой они расположены.

Решение. Как мы уже отмечали, условием пересечения двух прямых является выполнение равенства $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=0$. В нашем случае $\mathbf{r}_1=(-4,1,3)$, $\mathbf{r}_2=(-5,5,-4)$, $\mathbf{l}_1=(3,-2,1)$, $\mathbf{l}_2=(2,-3,4)$. Находим

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=\begin{vmatrix} -1 & 4 & -7\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 4 & -7\\ 0 & 10 & -20\\ 0 & 5 & -10\end{vmatrix}=0,$$

т.е. прямые пересекаются.

Плоскость, в которой они расположены, параллельна векторам $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ и проходит через точку $M_1(-4,1,3)$. В качестве вектора нормали можно взять $\mathbf{N}=[\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=(-5\mathbf{i}-10\mathbf{j}-5\mathbf{k})\|(1,2,1)$.

Поэтому уравнение плоскости можно записать в виде $x+2y+z+$ $+D=0$. Поскольку плоскость проходит через точку $M_1(-4,1,3)$, то $-4+2+3+D=0,\ D=-1$. Уравнение $x+2y+z-1=0$ является искомым.

Ответ. $x+2y+z-1=0$.

9.3.5. Докажите, что прямые $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t+4, \\ z=-2t+3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=t+4, \\ y=2t+8, \\ z=3t-4 \end{cases}$ пересекаются. Найдите координаты точки M_0 их пересечения.

Решение. Доказать, что прямые пересекаются можно так же, как и в задаче 9.3.4. Но мы рассмотрим другой способ решения. Если данные прямые пересекаются, например, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то существуют значения параметра $t=t_1$ для первой прямой и $t=t_2$ — для другой, которые соответствуют одной и той же точке M_0. Поэтому получаем систему $\begin{cases} 2t_1+1=t_2+4, \\ 3t_1+4=2t_2+8, \\ -2t_1+3=3t_2-4, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2t_1-t_2=3, \\ 3t_1-2t_2=4, \\ 2t_1+3t_2=7. \end{cases}$ Имеем систему трёх уравнений с двумя неизвестными t_1 и t_2. Если система совместна, то прямые пересекаются, если несовместна, то не пересекаются. Записываем основную и расширенную матрицу системы: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$ (первую строку умножили на три и вычли её из второй, умноженной на два, затем первую строку вычли из последней).

Видим, что ранг основной и расширенной матриц равен двум, т.е. система совместна, и прямые пересекаются. Данная система эквивалентна системе $\begin{cases} 2t_1-t_2=3, \\ \quad -t_2=-1. \end{cases}$ Следовательно, $t_2=1,\ t_1=2$. Положив в уравнении первой прямой $t=2$ (второй прямой $t=1$), найдём точку пересечения $M_0(5,10,-1)$.

9.3.6. Найдите точку Q, являющуюся проекцией точки $P(-46,2,-12)$ на прямую L

$$\begin{cases} x-2y+z+12=0, \\ 2x+3y-z-22=0. \end{cases} \tag{б}$$

Найдите точку S, симметричную точке P относительно этой прямой.

Решение. Точку Q найдём как точку пересечения прямой L с плоскостью Π, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L. Запишем параметрические уравнения прямой L. Так как $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, то неизвестное x можно принять в качестве свободного системы (б). Положим $x = t$ и выразим из системы (б) неизвестные y и z через t.

$$\left.\begin{array}{l} x = t, \\ y = -3t + 10, \\ z = -7t + 8 \end{array}\right\} - \qquad \text{(в)}$$

параметрические уравнения данной прямой. Направляющий вектор $\mathbf{l} = (1, -3, -7)$ можно принять в качестве вектора нормали плоскости П. Записываем уравнение плоскости П: $x - 3y - 7z + D = 0$, $-46 - 6 + 84 + D = 0$ (поскольку точка P лежит в плоскости П), $D = -32$. Уравнение плоскости П: $x - 3y - 7z - 32 = 0$. Находим точку пересечения прямой (в) с плоскостью П (см. задачу 9.3.3): $t - 3(-3t + 10) - 7(-7t + 8) - 32 = 0$, $59t - 118 = 0$, $t = 2$. Из (в) при $t = 2$ находим координаты точки $Q(2, 4, -6)$.

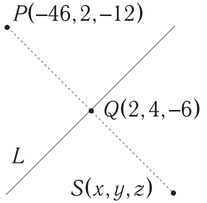

Рис. 9.5.

Координаты точки S обозначим (x, y, z). Так как точка Q — середина отрезка PS (рис. 9.5), то $\dfrac{-46 + x}{2} = 2$, $x = 50$; $\dfrac{2 + y}{2} = 4$, $y = 6$; $\dfrac{-12 + z}{2} = -6$, $z = 0$, $S(50, 6, 0)$.

Ответ. $Q(2, 4, -6)$; $S(50, 6, 0)$.

9.3.7. Найдите координаты точки Q, являющейся проекцией точки $P(-2, 1, 4)$ на плоскость $x - 4y + 5z + 28 = 0$. Найдите координаты точки S, симметричной точке P относительно данной плоскости.

Решение. Точку Q находим как точку пересечения прямой L, проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости. Прямая L параллельна вектору нормали $\mathbf{N} = (1, -4, 5)$ плоскости, поэтому вектор $\mathbf{N}$ является направляющим для этой прямой. Записываем параметрические уравнения прямой L: $\left\{\begin{array}{l} x = t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 5t + 4 \end{array}\right.$ и находим точку пересечения её с плоскостью: $(t-2) - 4(-4t+1) + 5(5t+4) + 28 = 0$, $42t + 42 = 0$; $t = -1$. Следовательно, $Q(-3, 5, -1)$. (В уравнении прямой положили $t = -1$.) Координаты точки S находим таким же способом, как и в задаче 9.3.6: $S(-4, 9, -6)$.

Ответ. $Q(-3, 5, -1)$; $S(-4, 9, -6)$.

9.3.8. Найдите расстояние d от точки $P(1, -2, 3)$ до прямой L
$\left\{\begin{array}{l} x = 2t + 4, \\ y = -t + 3, \\ z = 2t - 1. \end{array}\right.$

Решение. В п. 7.5 (задача 2) приведена формула вычисления расстояния d от точки до прямой: $d = \dfrac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]|}{\mathbf{l}}$, где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор данной точки, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор какой-нибудь точки прямой, $\mathbf{l}$ — направляющий вектор прямой. В нашем случае $\mathbf{r}_1 = (1, -2, 3)$, $\mathbf{r}_0 = (4, 3, -1)$, $\mathbf{l} = (2, -1, 2)$. Находим

$$[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 13\mathbf{k},$$

$$|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{l}]| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 13^2} = \sqrt{401},$$

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3; \quad d = \frac{\sqrt{401}}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{401}}{3}$.

Если прямая L задана общим уравнением, то нужно перейти к параметрическим, как это сделано в задаче 9.3.1.

9.3.9. Найдите расстояние d между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2, заданными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t + 1, \\ z = t + 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t + 4, \\ z = t + 2. \end{cases}$$

Решение. В п. 7.5 (задача 3) приведена формула вычисления величины d:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)|}{|[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2]|},$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точек, лежащих на первой (второй) прямой, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ — направляющие векторы этих прямых. В нашем случае $\mathbf{r}_1 = (2, 1, 3)$, $\mathbf{r}_2 = (1, 4, 2)$, $\mathbf{l}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{l}_2 = (2, 2, 1)$.

Вычисляем: $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$

$[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $d = \dfrac{5}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$.

Ответ. $\sqrt{5}$.

9.3.10. Дано, что прямая L пересекает ось ординат в точке $(0, 4, 0)$, параллельна плоскости $x + 2y + 3z + 2 = 0$ и перпендикулярна оси OZ. Найдите координаты точки Q пересечения этой прямой с плоскостью $Y = 0$.

Решение. Неизвестен направляющий вектор $\mathbf{l}$ прямой L. Пусть $\mathbf{l} = (m, n, p)$. По условию задачи вектор $\mathbf{l}$ параллелен плоскости $x + 2y + 3z + 2 = 0$, следовательно, он перпендикулярен вектору её нормали $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$. Поэтому $(\mathbf{l}, \mathbf{N}) = 0$, $m + 2n + 3p = 0$. Вектор $\mathbf{l}$ также перпендикулярен оси OZ, т.е. вектору $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, следовательно, $p = 0$. Таким образом, $m + 2n = 0$. Положим $n = 1$, тогда $m = -2$, т.е. $\mathbf{l} = (-2, 1, 0)$. Запишем каноническое уравнение прямой L: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z}{0}$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, получим $x = 8$, $z = 0$. Точка Q имеет координаты $(8, 0, 0)$.

Ответ. $(8, 0, 0)$.

Замечание. Из условия перпендикулярности прямой L оси OZ не следует, что прямая L пересекает ось OZ, следует лишь перпендикулярность вектора $\mathbf{l}$ оси OZ.

9.3.11. Две прямые, пересекающиеся в точке $P(2, 3, 1)$, параллельны плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$. Одна из них пересекает ось OZ, а вторая — ось OY. Найдите косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

Решение. Одна из прямых проходит через точку $P(2, 3, 1)$ и точку $M_1(0, 0, z_0)$, а вторая — через точку $P(2, 3, 1)$ и точку $M_2(0, y_0, 0)$. Поэтому их направляющими векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ являются векторы $\mathbf{PM}_1$ и $\mathbf{PM}_2$, следовательно, $\mathbf{l}_1 = (-2, -3, z_0 - 1)$, $\mathbf{l}_2 = (-2, y_0 - 3, -1)$. По условию задачи векторы $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ параллельны плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$, т.е. перпендикулярны вектору $\mathbf{N} = (1, 2, 2)$. Поэтому $(\mathbf{l}_1, \mathbf{N}) = 0$, $-2 - 6 + 2(z_0 - 1) = 0$, $(\mathbf{l}_2, \mathbf{N}) = -4 + 2(y_0 - 3) = 0$. Отсюда $z_0 = 5$; $y_0 = 5$. Таким образом, $\mathbf{l}_1 = (-2, -3, 4)$, $\mathbf{l}_2 = (-2, 2, -1)$. Находим косинус угла между векторами $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|} = \frac{4 - 6 - 4}{\sqrt{4 + 9 + 16}\sqrt{4 + 4 + 1}} = -\frac{2}{3\sqrt{29}}.$$

Ответ. $\cos\varphi = -\dfrac{2}{3\sqrt{29}}$.

9.3.12. Прямая L проходит через точку $P(1, 2, -4)$, пересекает ось OX в точке $Q(x_0, 0, 0)$ и пересекает прямую $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 3t - 1, \\ z = 4t + 3. \end{cases}$ Найдите x_0.

Решение. Как нам известно, условием пересечения двух прямых является равенство $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = 0$. В нашем случае $\mathbf{r}_2 = (1, 2, -4)$, $\mathbf{r}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{l}_1 = (1, 3, 4)$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{PQ} = (x_0 - 1, -2, 4)$.

Находим $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7\\ 1 & 3 & 4\\ x_0-1 & -2 & 4\end{vmatrix}=$

$$=(x_0-1)\begin{vmatrix} 3 & -7\\ 3 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & -7\\ 1 & 4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$$

$=33(x_0-1)+6-24=0,\ 33x_0-33+6-24=0,\ 33x_0-33+6-24=0,$

$33x_0=51;\ x_0=\dfrac{17}{11}.$

Ответ. $\dfrac{17}{11}$.

9.3.13. Запишите уравнение плоскости П, проходящей через прямую $\begin{cases} x+2y+3z-1=0,\\ x-3y+2z+4=0\end{cases}$ параллельно вектору $\mathbf{AB}=(3,-4,5)$.

Решение. Плоскость П параллельна направляющему вектору $\mathbf{l}$ прямой и вектору $\mathbf{AB}$, поэтому вектор $\mathbf{N}=[\mathbf{l},\mathbf{AB}]$ является вектором нормали. Найдём вектор $\mathbf{l}$.

Разрешив данную систему относительно x и z (y — свободное неизвестное), получим $\begin{cases} x=13y-14,\\ z=5-5y.\end{cases}$ Полагая $y=t$, запишем параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x=13t-14,\\ y=t,\\ z=-5t+5.\end{cases}$ Видим, что вектор $\mathbf{l}=(13,1,-5)$ — направляющий прямой и что точка $M_0(-14,0,5)$ лежит на прямой. Находим

$$\mathbf{N}=[\mathbf{l},\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -4 & 5\\ 13 & 1 & -5\end{vmatrix}=(15\mathbf{i}+80\mathbf{j}+55\mathbf{k})\|(3,16,11).$$

Записываем уравнение плоскости $3x+16y+11z+D=0$. Точка M_0 лежит на плоскости, поэтому $-42+55+D=0$; $D=-13$.

Уравнение $3x+16y+11z-13=0$ — искомое.

Ответ. $3x+16y+11z-13=0$.

Задачи для самостоятельного решения

9.3.14. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $5x-7y+2z-3=0$ с плоскостью $z=0$.

Ответ. $\dfrac{x-0{,}6}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{0}$.

9.3.15. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,4,-3)$ параллельно вектору $\mathbf{l}=(5,-2,3)$.

Ответ. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+3}{3}$; $\begin{cases} x=5t+2, \\ y=-2t+4, \\ z=3t-3. \end{cases}$

9.3.16. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3,-2,2)$ и $M_2(0,1,-2)$, и найдите точку её пересечения с плоскостью $Z=0$.

Ответ. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$; $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$.

9.3.17. Докажите, что прямая $\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0, \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ пересекает ось OY. Укажите координаты точки пересечения.

Ответ. $(0,-2,0)$.

9.3.18. Запишите параметрические уравнения прямой
$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=7t-1, \\ z=4t. \end{cases}$

9.3.19. Составьте канонические уравнения проекции прямой
$\begin{cases} 5x-4y-2z-6=0, \\ x+2z-2=0 \end{cases}$ на плоскость $2x-y+z-3=0$.

Ответ. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$.

9.3.20. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,3,5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

9.3.21. Докажите, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t-2, \\ z=-4t+6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=t+5, \\ y=-4t-1, \\ z=t-4 \end{cases}$ пересекаются, и найдите их точку пересечения.

Ответ. $(3,7,-6)$.

9.3.22. Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4,-5,3)$ и пересекающей две прямые: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Ответ. $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

9.3.23. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Ответ. $(2,-3,6)$.

9.3.24. Запишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3,-5)$ перпендикулярно плоскости $2x+7y-6z+2=0$.

Ответ. $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=7t-3, \\ z=-6t-5. \end{cases}$

9.3.25. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,-1,3)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=4t+1, \\ z=5t-1. \end{cases}$

Ответ. $2x+4y+5z-15=0$.

9.3.26. Найдите точку Q, симметричную точке $P(2,-5,7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5,4,6)$ и $M_2(-2,-17,-8)$.

Ответ. $(4,1,-3)$.

9.3.27. Найдите точку Q, симметричную точке $P(1,3,-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Ответ. $(-5,1,0)$.

9.3.28. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямые $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-5}{5}$; $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$.

Ответ. $35x+10y+22z=0$.

9.3.29. Докажите, что прямые $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$ и $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-7}{2}$ пересекаются, и запишите уравнение плоскости, в которой они расположены.

Ответ. $22x-8y-17z+61=0$.

9.3.30. Вычислите расстояние от точки $P(2,3,-1)$ до прямой $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$.

Ответ. 21.

9.3.31. Вычислите расстояние между прямыми
$\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2};\quad \dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}.$

Ответ. 13.

9.3.32. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=t+1, \\ y=3t-2, \\ z=4t \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

Ответ. $x-3y+2z-7=0$.

9.3.33. Запишите параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3,-2,-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-17=0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Ответ. $\begin{cases} x=5t+3, \\ y=-6t-2, \\ z=9t-4. \end{cases}$

9.4. Окружность. Сфера (задача 7)

Окружность с центром в точке (x_0,y_0) радиуса R на плоскости можно задать уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Уравнение вида $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+a_{01}x+a_{02}y+a_{00}=0$ определяет на плоскости окружность, если $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$. При этом кривая может выродиться в точку или быть мнимой.

Сферу с центром в точке (x_0,y_0) радиуса R можно задать уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Уравнение $a_{11}x^2+a_{22}y^2+$ $+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+a_{00}=0$ определяет сферу, если $a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. При этом поверхность может выродиться в точку или быть мнимой.

9.4.1. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+6x-10y=11$ определяет окружность. Найдите её центр и радиус. Запишите уравнение касательной к этой окружности в точке $M_0(0,-1)$.

Решение. Выделяем полные квадраты: $(x+3)^2-9+(y-5)^2-$ $-25=11$, $(x+3)^2+(y-5)^2=45$. Видим, что заданная кривая — окружность и центр её находится в точке $C(-3,5)$, а радиус $R=\sqrt{45}$.

Как известно, касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Поэтому вектор $\mathbf{CM}_0=(3,-6)\|(1,-2)$ можно принять в качестве вектора нормали касательной, следовательно, уравнение касательной можно записать в виде $x-2y+C=0$. Эта прямая проходит через точку $M_0(0,-1)$, т.е. $2+C=0$, $C=-2$. Уравнение $x-2y-2=0$ — искомое.

Ответ. $C(-3,5)$, $R=\sqrt{45}$, $x-2y-2=0$.

9.4.2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2+2x+4y-8z+2=0$ определяет сферу, найдите её центр, радиус и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(2,1,5)$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты: $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2-1-4-16+2=0$, $(x+1)^2+$ $+(y+2)^2+(z-4)^2=19$. Следовательно, данное уравнение определяет сферу с центром в точке $C(-1,-2,4)$ радиуса $R=\sqrt{19}$. Вектор $\mathbf{CM_0}=(3,3,1)$ является вектором нормали касательной плоскости к сфере в точке M_0. Поэтому уравнение этой плоскости: $3x+3y+z+D=0$. Точка $M_0(2,1,5)$ лежит в плоскости. Поэтому $6+3+5+D=0$, $D=-14$. Уравнение $3x+3y+z-14=0$ — искомое.

Ответ. $C(-1,-2,4)$, $R=\sqrt{19}$, $3x+3y+z-14=0$.

Задачи для самостоятельного решения

9.4.3. Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(4,-6)$, радиус которой $R=5$.

Ответ. $(x-4)^2+(y+6)^2=25$.

9.4.4. Запишите уравнение окружности, проходящей через точку $M(3,-2)$, с центром в точке $C(-5,4)$.

Ответ. $(x+5)^2+(y-4)^2=100$.

9.4.5. Запишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки: $M_1(-1,5)$; $M_2(-2,-2)$ и $M_3(5,5)$.

Указание. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Ответ. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

9.4.6. Запишите уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1,0)$ и касаются двух параллельных прямых $2x+y+$ $+2=0$, $2x+y-18=0$.

Ответ. $(x-5)^2+(y+2)^2=20$, $(x-9/5)^2+(y-22/5)^2=20$.

9.4.7. Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(1,-1)$, касающейся прямой $5x-12y+9=0$.

Ответ. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

9.4.8. Найдите центр и радиус окружности $x^2+y^2-2x+4y-$ $-20=0$.

Ответ. $C(1,-2)$, $R=5$.

9.4.9. Запишите уравнение касательной к окружности $(x+2)^2+$ $+(y-3)^2=25$ в точке $A(-5,7)$.

Ответ. $3x-4y+43=0$.

9.4.10. Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(5,-4,2)$ и радиусом $R=3$.

Ответ. $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9$.

9.4.11. Найдите центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-4x-2y+$ $+2z-19=0$.

Ответ. $C(2,1,-1)$, $R=5$.

9.4.12. Запишите уравнение сферы с центром в точке $C(3,-5,-2)$, касающейся плоскости $2x-y-3z+11=0$.

Ответ. $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$.

9.4.13. Запишите уравнение касательной плоскости к сфере $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ в точке $M(-1,3,0)$.

Ответ. $2x-y-z+5=0$.

9.5. Эллипс. Гипербола. Парабола (задачи 8, 9, 10)

В контрольную работу № 2 на тему “Кривые второго порядка” включены задачи 8, 9 и 10. Задачи 8 и 9 трудностей не представляют (см. пример 2 в п. 7.1 и примеры в п. 7.6, 7.7). Приведём решение задачи 10.

9.5.1. Дана кривая $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ относительно правой декартовой системы координат. Докажите, что эта кривая — гипербола. Найдите её действительную, мнимую полуоси и центр симметрии. Запишите уравнение фокальной оси. Постройте данную гиперболу.

Решение. Квадратичную форму $B(x,y)=3x^2+10xy+3y^2$ приводим к главным осям. Для этого записываем матрицу этой квадратичной формы $B=\begin{bmatrix}3&5\\5&3\end{bmatrix}$ и находим её собственные числа и собственные векторы. Записываем и решаем характеристическое уравнение матрицы B:

$$\begin{bmatrix}3-\lambda&5\\5&3-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-6\lambda-16=0,$$

$$\lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{9+16}=3\pm5,\ \ \lambda_1=8,\ \ \lambda_2=-2.$$

Так как собственные числа имеют разные знаки, то данное уравнение определяет кривую гиперболического типа. Находим собственные векторы матрицы B. Для собственного числа $\lambda_1=8$ получаем систему $\begin{cases}-5\xi_1+5\xi_2=0,\\ \ \ 5\xi_1-5\xi_2=0,\end{cases}$ отсюда $\xi_1=\xi_2$.

Полагая $\xi_1 = 1$, найдём единичный собственный вектор $\mathbf{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. По свойству собственных векторов симметрического оператора второй собственный вектор $\mathbf{j}_1$ ортогонален вектору $\mathbf{i}_1$. Выберем вектор $\mathbf{j}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ таким образом, чтобы базис $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ был правым. От старого базиса $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ перейдём к новому базису $(0, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$. Матрица перехода имеет вид $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Старые координаты (x, y) связаны с новыми (x_1, y_1) соотношениями $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, или $\begin{cases} x = (x_1 - y_1)/\sqrt{2}, \\ y = (x_1 + y_1)/\sqrt{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = (x + y)/\sqrt{2}, \\ y_1 = (-x + y)/\sqrt{2} \end{cases}$ (см. формулы (3.18)).

В новой системе координат уравнение данной кривой примет следующий вид: $8x_1^2 - 2y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) - \frac{14}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) - 13 = 0$, или $8x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x_1 - 2y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}y_1 - 13 = 0$. Выделяя полные квадраты, получаем

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 13 - 4 + 9 = 0,$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8,$$

$$\frac{\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$

Видим, что действительная полуось $a = 1$, а мнимая $b = 2$.

Произведём преобразование параллельного переноса системы координат в новое начало O_1 по формулам $\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = y_1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \end{cases}$

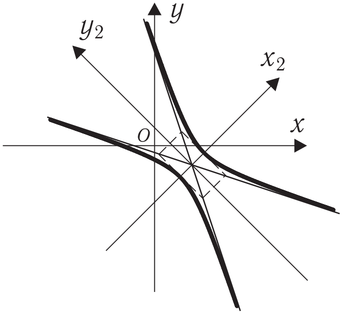

Рис. 9.6.

или $\begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = y_2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ Теперь $\begin{cases} x_2 = (x+y-1)/\sqrt{2}, \\ y_2 = (-x+y+3)/\sqrt{2}. \end{cases}$

В системе координат $(O_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ гипербола имеет уравнение $\dfrac{x_2^2}{1} - \dfrac{y_2^2}{4} = 1$. Оси O_1x_2, O_1y_2 направлены по прямым $x+y-1=0$, $x-y-3=0$. Координаты точки O_1, являющиеся центром симметрии гиперболы, находим, решая систему $\begin{cases} x+y=1, \\ -x+y=-3. \end{cases}$ Получаем $x=2$, $y=-1$, $O_1(2,-1)$. Фокальной осью является прямая $y_2=0$, $x-y-3=0$. Для построения гиперболы строим в старой системе новую систему, в которой строим данную гиперболу (рис. 9.6). Заметим, что прямые $y_2 = \pm 2x_2$ являются её асимптотами.

9.5.2. Дана кривая $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ относительно правой системы координат. Докажите, что эта кривая — парабола. Найдите значение её параметра p, координаты вершины и уравнение её оси симметрии.

Решение. Аналогично решению задачи 9.5.1.

Находим собственные векторы и собственные числа матрицы квадратичной формы $B = 9x^2 - 24xy + 16y^2$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$. Так как одно из собственных чисел равно нулю, то кривая — параболического типа. Находим собственные векторы. Для числа $\lambda_1 = 0$ имеем $B = \begin{cases} 9\xi_1 - 12\xi_2 = 0, \\ -12\xi_1 + 16\xi_2 = 0, \end{cases}$ $3\xi_1 = 4\xi_2$. Если положим $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 3$, то единичный собственный вектор $\mathbf{i}_1$ имеет координаты $\mathbf{i}_1 = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

Другой собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda_2 = 25$, может быть задан в виде $\mathbf{j}_1 = \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Базис $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ принят правым. Переходим от базиса $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ к $(O_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$. Запишем матрицу перехода $Q = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ и обратную к ней $Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$. Новые координаты (x_1, y_1) связаны со старыми (x, y) соотношениями $\begin{cases} x = (4x_1 - 3y_1)/5, \\ y = (3x_1 + 4y_1)/5, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = (4x + 3y)/5, \\ y_1 = (-3x + 4y)/5. \end{cases}$

В новой системе координат уравнение параболы принимает вид $25y_1^2 - \dfrac{20}{5}(4x_1 - 3y_1) + \dfrac{110}{5}(3x_1 + 4y_1) - 50 = 0$, или $25y_1^2 + 100y_1 + 50x_1 - 50 = 0$; $25(y_1 + 2)^2 = 50(3 - x_1)$; $(y_1 + 2)^2 = 2(3 - x_1)$. Видим, что параметр p параболы равен единице.

Совершим параллельный перенос осей координат в новое начало O_1 по формулам $\begin{cases} x_2 = (x_1 - 3), \\ y_2 = y_1 + 2. \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 3 + x_2, \\ y_1 = -2 + y_2. \end{cases}$ Теперь

$$\begin{cases} x_2 = (4x + 3y - 15)/5, \\ y_2 = (-3x + 4y + 10)/5. \end{cases}$$

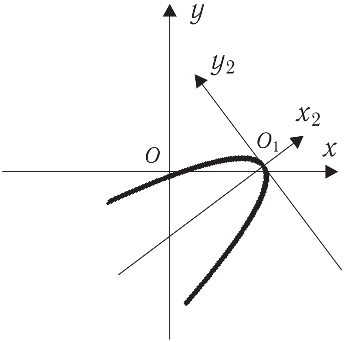

Рис. 9.7.

В системе координат $(O_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ парабола имеет уравнение $y_2^2 = -2x_2$. Осью симметрии является прямая $y_2 = 0$, т.е. $3x - 4y - 10 = 0$. Вершина O_1 параболы находится в точке $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, следовательно, её координаты удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 15, \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$

Решая систему, получаем $O_1\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$ — вершину параболы. Теперь можно построить данную параболу. Для этого в старой системе строим новую систему координат, а затем строим параболу (рис. 9.7).

Задачи для самостоятельного решения

9.5.3. Каждое из уравнений

а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$,

б) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$,

в) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 229 = 0$

приведите к каноническому виду; определите, какие геометрические образы они определяют; укажите координаты центра симметрии и уравнение фокальной оси, если кривая — эллипс или гипербола, и координаты вершины, если кривая парабола; укажите величины полуосей для эллипса или гиперболы, или величину параметра p для параболы; укажите координаты новых базисных векторов; в случае параболы запишите уравнение оси симметрии; постройте кривые в старой системе координат.

Ответы: а) эллипс; б) гипербола; в) парабола.

10. Контрольные работы

10.1. О самоконтроле при выполнении работ

Те студенты, которые имеют в своём распоряжении устройство СИМВОЛ либо его компьютерный аналог, могут выполнять контрольные в режиме автоматизированного самоконтроля. Как осуществлять самоконтроль, объяснено в инструкции, прилагаемой к устройству. В данных контрольных работах необходимо соблюдать следующие требования:

1) если ответом является матрица и нет никаких дополнительных указаний, то вводить её элементы по строкам, начиная с первой;

2) если ответом является неупорядоченная совокупность чисел, то вводить эти числа следует в порядке возрастания, начиная с наименьшего;

3) уравнения прямых или плоскостей вводить в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

приняв положительным первый коэффициент и все коэффициенты целыми и несократимыми (задачи подобраны таким образом, что это можно сделать);

4) если нет дополнительных указаний, то рациональные дроби вводить в виде обыкновенной дроби, не выделяя целой части;

5) в задачах 8 и 9 контрольной работы № 2 уравнения прямых, параллельных осям координат, записывать в виде $y = a$ или $x = b$, где числа a и b определяются условиями задачи.

10.2. Требования к оформлению работ

1. На титульном листе должно быть указано:
   а) название работы;
   б) номер контрольной работы и номер варианта;
   в) фамилия, имя, отчество полностью;
   г) почтовый адрес.

2. Выполнять только свой вариант, определяемый по общим правилам. Решение не своего варианта не проверяется.

3. Записав условие задачи, ниже приведите её полное решение, не опуская промежуточных вычислений, с полным теоретическим обоснованием и ссылками на используемые учебные пособия.

4. Решить необходимо все задачи с построением графиков в тех задачах, где это требуется по условию.

5. Работа выполняется либо в рукописном виде, либо в виде файла, набранного в редакторе MS WORD с использованием встроенного редактора формул.

6. Не проверяются работы, являющиеся копиями уже проверенных работ. В этом случае выдаётся новый вариант.

7. В случае направления на проверку исправленной, ранее не зачтённой работы, необходимо прилагать старую рецензию.

10.3. Контрольная работа № 1

Вариант 1.1

1(РТ1.РП). Найдите матрицу $D = (3A - 4B)C$, если
$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2(ДП1). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3(491.РП). Решите матричное уравнение $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$.

4(Д51.РП). Найдите такие значения параметров p и q, если они существуют, при которых ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 0 & -5 & 6 & q \end{bmatrix}$ равен двум.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,-1,-1)$, $\mathbf{f}_2(1,1,-1)$, $\mathbf{f}_3(1,1,1)$, $\mathbf{x}(4,0,-2)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (9В5.Р7). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (3Т0). Неизвестное x_4 найдите по формулам Крамера. (Р7П.Б7). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (729.БП). Найдите частное решение, если $x_4 = -8$, $x_5 = -4$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(537). Вычислите $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{r}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}|=7$, $|\mathbf{r}|=\sqrt{2}$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r})=45^\circ$.

10(СК). Вычислите объём пирамиды, заданной координатами своих вершин: $A(-4,2,2)$; $B(2,-1,-1)$; $C(2,0,-2)$; $D(0,-3,0)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3\to R_3$ по закону $Ax=(4x_1-5x_2+2x_3, 5x_1-7x_2+3x_3, 6x_1-9x_2+4x_3)$. (ТА1.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1,1,1)$ является собственным для матрицы A. (323). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (081). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.2

1(352.РП). Найдите матрицу $D=C(3A-4B)$, если

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-1&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&-1&-3\\-1&2&-4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\\-2&3\end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(225). Вычислите определитель $D=\begin{vmatrix}1&1&-3&2\\3&5&-3&4\\0&4&-1&3\\1&1&-2&1\end{vmatrix}$.

3(Д82.РП). Решите матричное уравнение $X\begin{bmatrix}-1&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&10\\7&21\end{bmatrix}$.

4(962.РП). Докажите, что третья строка матрицы $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&5\\8&16&13\end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(9,3,5)$, $\mathbf{f}_2(2,0,3)$, $\mathbf{f}_3(0,1,-1)$, $\mathbf{x}(-14,-7,-3)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (9АЛ.РП). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3+2x_4=3,\\3x_1+5x_2-3x_3+4x_4=7,\\4x_2-x_3+3x_4=2,\\x_1+x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}$$

имеет единственное решение. (245). Неизвестное x_3 найдите по формулам Крамера. (СП7.РП). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (ПД7.БП). Найдите частное решение, если $x_4 = x_5 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(Д89). Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} + \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{r}) = 135^\circ$.

10(454). Вычислите длину высоты AH пирамиды $ABCD$, если $A(-3, 3, 3)$; $B(3, 0, 0)$; $C(3, 1, -1)$; $D(1, -2, 1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_2 + 2x_3, x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор из R_3. (492.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(2, 2, 1)$ является собственным для матрицы A. (278). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (С42.5П). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.3

1(5Т3.РП). Найдите $D = (2AB + 3AC)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(0Б8). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -13 & 15 & 18 \\ 3 & -6 & 9 & 21 \end{vmatrix}$.

3(П79.РП). Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4(9Д3). Найдите то значение параметра p, если оно существует, при котором строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & p & 10 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(3, 2, -4)$, $\mathbf{f}_2(4, 1, -2)$, $\mathbf{f}_3(5, 2, -3)$, $\mathbf{x}(9, 5, -8)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (31К.РП). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 4, \\ 6x_1 & - & 13x_2 & + & 15x_3 & + & 18x_4 & = & 17, \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 21 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение. (2Т8). Неизвестное x_4 найдите по формулам Крамера. (5С5.РП). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 4, \\ x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 5. \end{array} \right.$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (919.Р7). Найдите частное решение, если $x_2 = x_3 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 14x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 10x_1 & + & 3x_2 & + & 15x_3 & - & 7x_4 & & & = & 0. \end{array} \right.$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(350). Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 60^\circ$.

10(858). Даны точки $A(-2, 4, 4)$; $B(4, 1, 1)$; $C(4, 2, 0)$; $D(2, -1, 2)$. Найдите объём пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{AB}$, $2\mathbf{BC}$, $\mathbf{CD}$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 + 5x_2 - 7x_3, -2x_2 + 4x_3, 3x_2 + 2x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (Д13.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1, 0, 0)$ является собственным для матрицы A. (8Р8). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (243). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.4

1(АС3.РП). Найдите матрицу $D = (2BA + 3CA)$, если

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2(203). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & -4 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.

3(082.РП). Решите матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 11 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4(4Р4). При каком значении параметра p ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 8 & p & -5 & 1 \end{bmatrix}$ равен трём?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(4, 2, -1)$, $\mathbf{f}_2(5, 3, -2)$, $\mathbf{f}_3(3, 2, -1)$, $\mathbf{x}(4, 3, -2)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (01М.Р7). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} - 6x_3 - 9x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 10, \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Д47). Неизвестное x_4 найдите по формулам Крамера. (218.РЛ). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (242.БП). Найдите частное решение, если $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(89П). Найдите $|\mathbf{r}|^2$, если $\mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = 120^\circ$.

10(9А2). Даны три вершины параллелограмма: $A(0,1,2)$; $B(3,5,2)$; $C(5,1,2)$. Найдите длину высоты параллелограмма, опущенной на AB.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (2x_1 + 3x_3, 10x_1 - 3x_2 - 6x_3, -x_1 - 2x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (9С4.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1, 8, -1)$ является собственным для матрицы A. (863). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (284.5П). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.5

1(Т85.РП). Найдите матрицу $D = (AC - AB)$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(3Т0). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

3(598.Р7). Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix} = 16 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4(4П5). При каком значении параметра p, если оно существует, последняя строка матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & p & 11 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых трёх строк?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,1,1)$, $\mathbf{f}_2(1,2,3)$, $\mathbf{f}_3(1,3,6)$, $\mathbf{x}(4,7,10)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (ТР0.РП). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (362). Неизвестное x_2 найдите по формулам Крамера. (0М1.РЛ). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (392.БЛ). Найдите частное решение, если $x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(3СА). Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{r}$, если $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45^\circ$.

10(78Т). Вычислите $\text{Пр}_{\mathbf{BD}}[\mathbf{BC}, \mathbf{CD}]$, если $B(6,3,3)$; $C(6,4,2)$; $D(4,1,4)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (-x_1 + 2x_2 + x_3, 5x_2, 3x_1 + 2x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (125.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1, 0, 3)$ является собственным для матрицы A. (Т56). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (Д25.РП). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.6

1(906.РП). Найдите матрицу $D = (CA - BA)$, если

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2(696). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 16 \end{vmatrix}$.

3(567.РП). Решите матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = 42 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4(7Т6). При каком значении параметра q, если оно существует, обведённый минор матрицы A является базисным? Матрица A имеет вид $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 7 & q & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(4, 2, -1)$, $\mathbf{f}_2(5, 3, -2)$, $\mathbf{f}_3(3, 2, -1)$, $\mathbf{x}(12, 7, -3)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (В10.БЛ). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -9 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (ДС7). Неизвестное x_2 найдите по формулам Крамера. (4Д8.РП). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (Т50.Б7). Найдите частное решение, если $x_2 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(ДД8). Найдите $|\mathbf{a}|$, если $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45^\circ$.

10(09). Найдите угол (в градусах), образованный вектором $[\mathbf{AB}, \mathbf{BD}]$ с осью OY, если $A(-5, 1, 1)$; $B(1, -2, -2)$; $D(-1, -4, -1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (3x_1, -x_1 + x_3, 2x_1 - 4x_2 + 4x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (П66.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1, 3, 10)$ является собственным для матрицы A. (278). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (Т56). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.7

1(897.РП). Найдите матрицу $D = A + 2AC$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести вторую строку матрицы D.)

2(С17). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3(СД8.БП). Решите матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4(0А7). Найдите то значение параметра q, при котором ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & q & 5 & 4 \end{bmatrix}$ минимален.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,-3,4)$, $\mathbf{f}_2(2,1,-5)$, $\mathbf{f}_3(-3,5,1)$, $\mathbf{x}(-1,9,-4)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (0Р1.Р7). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ -2x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -2, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (25М). Неизвестное x_2 найдите по формулам Крамера. (999.РЛ). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (5П1.Р7). Найдите частное решение, если $x_3 = 1$, $x_4 = -2$, $x_5 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(40Р). Найдите $|\mathbf{a}|^2$, если $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{r}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 60^\circ$.

10(3ПП). Найдите высоту треугольника ABD, опущенную из точки D, если $A(-2,1,1)$; $B(0,-3,-3)$; $D(-2,-5,-2)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1 - 2x_2 + 2x_3, -5x_1 + 7x_2 - 5x_3, 3x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ — произвольный вектор. (367.РП). Найдите матрицу A этого оператора

в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(1,1,0)$ является собственным для матрицы A. (299). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (887.5П). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.8

1(ДС8.РП). Найдите матрицу $D = A + 2CA$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(В ответ ввести третью строку матрицы D.)

2(2Д3). Вычислите определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3(ДД7.БЛ). Решите матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4(858). При каком значении параметра p, если оно существует, строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & p & 8 & 0 \end{bmatrix}$ линейно зависимы?

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(5,3,5)$, $\mathbf{f}_2(2,0,3)$, $\mathbf{f}_3(0,1,-1)$, $\mathbf{x}(-14,-7,-13)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (Н30.РП). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (0С9). Неизвестное x_4 найдите по формулам Крамера. (520.РП). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -2, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (612.Р7). Найдите частное решение, если $x_4 = x_5 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 10x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(301). Вычислите $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) = 45^\circ$.

10(3Т0). Вычислите высоту пирамиды, опущенную на ABD, если пирамида построена на векторах $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD}$, и $A(-1, 2, 1)$; $B(1, -2, -3)$; $C(1, -1, -4)$; $D(-1, -4, -2)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (4x_1, 2x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (А98.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(0, 2, -1)$ является собственным для матрицы A. (0А8). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (648.5П). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.9

1(С0Р.РП). Найдите матрицу $C = AB - BA$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2(204). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -6 \\ 3 & 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

3(246.РЛ). Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

4(299). При каком значении параметра p, если оно существует, строки матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & p & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ линейно зависимы.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(1,2,3)$, $\mathbf{f}_2(2,3,1)$, $\mathbf{f}_3(1,1,-3)$, $\mathbf{x}(2,4,1)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (35Н.БЛ). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 = 12, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (2ТМ). Неизвестное x_3 найдите по формулам Крамера. (499.РП). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -14. \end{cases}$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (А11.Р7). Найдите частное решение, если $x_3 = x_4 = -1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(5СС). Найдите $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{r}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{r}}) = 45^\circ$.

10(3ПП). Вычислите высоту треугольника ABD, опущенную из точки D, если $A(1,2,2)$; $B(3,-2,-2)$; $D(1,-4,-1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (3x_1, 2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — произвольный вектор. (2Р0.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(0, 1, 2)$ является собственным для матрицы A. (Т97). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (280.5П). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

Вариант 1.10

1(64А). Найдите сумму диагональных элементов матрицы $C = AB - BA$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2(08Б). Вычислите определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

3(754.РП). Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & -16 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4(650.РП). Докажите, что третья строка матрицы $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

5. Относительно канонического базиса в R_3 даны четыре вектора: $\mathbf{f}_1(3, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2(2, 3, 1)$, $\mathbf{f}_3(-1, -3, -1)$, $\mathbf{x}(2, 1, 1)$. Докажите, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. (РС7.Б7). Найдите координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_i$.

6. Докажите, что система

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -2, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение. (С35). Неизвестное x_3 найдите по формулам Крамера. (386.Б7). Решите систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 5, \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -5, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5. \end{array} \right.$$

Докажите, что система совместна. Найдите её общее решение. (П18.РП). Найдите частное решение, если $x_3 = x_4 = 1$.

8. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Докажите, что система имеет нетривиальное решение. Найдите общее решение системы. Найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений.

9(Т8Т). При каком значении α вектор $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{r} = 5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = 60°$.

10(3Т0). Вычислите высоту CH пирамиды $ABCD$, если $A(-2, 2, 2)$; $B(0, -2, -2)$; $C(0, -1, -3)$; $D(-2, -4, -1)$.

11. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $Ax = (-x_1, 3x_1 + 2x_2 - 2x_3, -2x_1 + 3x_2 - 3x_3)$. (А29.РП). Найдите матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Докажите, что вектор $\mathbf{x}(0, 2, 3)$ является собственным для матрицы A. (245). Найдите собственное число λ_0, соответствующее вектору $\mathbf{x}$. (099). Найдите другие собственные числа, отличные от λ_0. Найдите все собственные векторы матрицы A и сделайте проверку.

10.4. Контрольная работа № 2

Вариант 2.1

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-1, 2)$ и $M_2(-3, -2)$. (141.РП). Найдите значения параметров k и b для этой прямой.

2. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. (С71). Вычислите его площадь.

3(811.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через перпендикуляры, опущенные из точки $P(-3, 2, 5)$ на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

4(Д82). Найдите длину отрезка прямой, параллельной вектору $\mathbf{l} = (0, 3, 4)$, между точками пересечения её с плоскостями $2x + y - z - 6 = 0$ и $2x + y - z - 4 = 0$.

5(РР4.Р7). Найдите те значения m и n, при которых прямая $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y-2}{n} = \dfrac{z}{34}$ пересекает прямые

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0, \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - 3z - 4 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

6(ПАМ). Дано, что прямая, пересекающая ось аппликат в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 > 0$, параллельна плоскости $2x + 3y + 6z + 7 = 0$, отстоит от неё на расстоянии 7 и перпендикулярна оси ординат. Найдите абсциссу точки пересечения этой прямой с координатной плоскостью $z = 0$.

7(АТ1.РП). Запишите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 17$ в точке $M(1, 2)$.

8. Дана кривая $9x^2 + 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0$.
8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.
8.2(021.Б7). Найдите координаты центра его симметрии.
8.3(631.Б7). Найдите его большую и малую полуоси.
8.4(С91). Запишите уравнение фокальной оси.
8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая $x^2 - 10x + 2y + 25 = 0$.
9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.
9.2(С11.Б7). Найдите координаты её вершины.
9.3(221). Найдите значение её параметра p.
9.4(СП1.Б7). Запишите уравнение её оси симметрии.
9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $15x^2 - 20xy - 70x + 20y + 135 = 0$.
10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.
10.2(ПР1.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.
10.3(6Р1.Б7). Найдите действительную и мнимую полуоси.
10.4(АП1.Б7). Запишите общее уравнение фокальной оси.
10.5. Постройте данную гиперболу.

Вариант 2.2

1(РД2.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3)$ параллельно вектору $\mathbf{AB}$, если $A(4, 5)$, $B(3, -7)$.

2(А82.Б7). Стороны треугольника ABC заданы уравнениями AB: $4x - y - 7 = 0$; BC: $x + 3y - 31 = 0$; AC: $x + 5y - 7 = 0$. Запишите общее уравнение высоты AH.

3(432.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3, 0, 4)$ и $M_2(1, 1, 0)$ перпендикулярно плоскости $2x + y + 4z - 7 = 0$.

4(С35). Найдите расстояние от точки $P(2, 4, 4)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

5(435). Плоскость проходит через прямую $\begin{cases} x-y+1=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ параллельно вектору $\mathbf{AB}=(8,4,7)$. Найдите длину отрезка, отсекаемого этой плоскостью от оси ординат.

6(СП5). Две прямые, пересекающиеся в точке $P(0,0,z_0)$, $z_0>0$ параллельны плоскости $2x+y+2z+6=0$ и отстоят от неё на расстоянии 4. Одна из прямых пересекает ось абсцисс, а вторая — ось ординат. Найдите тангенс острого угла между ними.

7(942). Найдите радиус окружности с центром в точке $M(2,4)$, если известно, что прямая $3x+4y+8=0$ касается этой окружности.

8. Дана кривая $25x^2+16y^2-150x-32y-159=0$.
8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.
8.2(922.РП). Найдите координаты центра его симметрии.
8.3(С12.РП). Найдите его большую и малую полуоси.
8.4(932). Запишите уравнение фокальной оси.
8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая $y^2-2y+4x+9=0$.
9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.
9.2(7Т2.РП). Найдите координаты её вершины.
9.3(342). Найдите значение её параметра p.
9.4(312). Запишите уравнение её оси симметрии.
9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $x^2-7y^2-6xy+2x+26y+57=0$.
10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.
10.2(9С2.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.
10.3(382.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.
10.4(АМ2.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.
10.5. Постройте данную гиперболу.

Вариант 2.3

1(2С3.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,4)$ перпендикулярно прямой $x+2y+5=0$.
(2Д3). Найдите площадь треугольника, образованного данной прямой с осями координат.

2(Р43.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2,2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью $S=4{,}5$ кв. ед.

3(Т33.БЛ). Даны вершины треугольника $A(2,1,0)$, $B(3,-1,1)$ и $C(1,2,-4)$. Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через сторону AB перпендикулярно плоскости треугольника ABC.

4(839). Найдите расстояние от точки $P(1,2,0)$ до прямой $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{0}$.

5(925). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, которая проходит через точку $A(1,1,6)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{AB}$, где B — точка пересечения медиан треугольника, вершины которого совпадают с точками пересечения осей координат с плоскостью $12x+6y+z-24=0$.

6(512). Две прямые параллельны плоскости $4x+3y+6z=0$. Первая прямая проходит через точку $P(1,2,3)$ и пересекает ось абсцисс, а вторая — проходит через точку $Q(3,0,0)$ и пересекает ось ординат. Найдите косинус острого угла между направляющими векторами этих прямых.

7(С93.Б7). Найдите координаты центра $C(x_0,y_0)$ окружности радиусом 5, касающейся прямой $3x+4y-6=0$ в точке $M(2,0)$, если известно, что точка C расположена в первой четверти.

8. Дана кривая $9x^2-4y^2-18x+56y-223=0$.
8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.
8.2(223.РП). Найдите координаты её центра симметрии.
8.3(9С3.Р7). Найдите действительную и мнимую полуоси.
8.4(893.РП). Запишите уравнение фокальной оси.
8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая $x^2+2x-2y+5=0$.
9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.
9.2(793.РП). Найдите координаты её вершины.
9.3(323). Найдите значение её параметра p.
9.4(753.Б7). Запишите уравнение её оси симметрии.
9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $8x^2+17y^2+12xy-28x-46y=43$.
10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.
10.2(803.РП). Найдите координаты центра его симметрии.
10.3(4Р3.РП). Найдите его большую и малую полуоси.
10.4(433.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.
10.5. Постройте данную кривую.

Вариант 2.4

1(781.РП). Составьте общее уравнение прямой, если точка $P(2,5)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

2(882.БЛ). Запишите общее уравнение прямой, параллельной прямой $4x + 2y + 5 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник площадью 9 кв. ед.

3(5А3.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, -1, 3)$ параллельно оси OX и перпендикулярной к плоскости $x - 3y + 4z - 5 = 0$.

4(2Д2). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси ординат плоскостью, содержащей прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+8}{4}$ и параллельной вектору $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$.

5(576). Прямая, проходящая через точку $P(1, 2, 3)$ и пересекающая ось аппликат в точке $(0, 0, z_0)$, параллельна плоскости $2x + y + z + 6 = 0$. Найдите z_0.

6(712.РП). Найдите координаты точки пересечения с плоскостью $x = 1$ прямой, перпендикулярной плоскости $4x + 2y + 4z + 5 = 0$ и пересекающей две заданные прямые $x + 1 = y = z$ и $2x = 2y = z + 4$.

7(8Д1). Найдите радиус окружности, если известно, что она касается двух прямых $3x + 4y - 16 = 0$ и $3x + 4y + 24 = 0$.

8. Дана кривая $x^2 - 4x - 9y^2 + 72y - 149 = 0$.
8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.
8.2(9С4.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.
8.3(385.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.
8.4(9С6.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.
8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая $x^2 + 4y = 0$.
9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.
9.2(9Т7.РП). Найдите координаты её вершины.
9.3(258). Найдите значение её параметра p.
9.4(АР9.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.
9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2 + 8y^2 + 4xy - 24x - 24y = 0$.
10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.
10.2(9А0.БЛ). Найдите координаты центра его симметрии.
10.3(ПД1.РП). Найдите его большую и малую полуоси.
10.4(С82.РП). Запишите уравнение фокальной оси.
10.5. Постройте данную кривую.

Вариант 2.5

1(Д01.РП). Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 4)$ параллельно прямой $2x + 3y + 5 = 0$.

2(3A2.РП). Найдите координаты проекции точки $M(3, 6)$ на прямую $x + 2y - 10 = 0$.

3(103.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$, $M_3(10, -7, 1)$.

4(203). Известно, что прямая $\mathcal{L}$ параллельна вектору $\mathbf{l} = (0, 6, 8)$. Найдите длину отрезка этой прямой между плоскостями $x + y + z - 3 = 0$ и $x + y + z - 24 = 0$,

5(3C2). Некоторая прямая проходит через точку $P(2, 2, 1)$, пересекает ось ординат в точке $Q(0, y_0, 0)$ и пересекает прямую

$$\begin{cases} x - 3z + 2 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Найдите y_0.

6(7АД). Плоскость содержит прямую $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{(z-6)}{-2}$ и параллельна прямой $x-3 = y-3 = -2(z-6)$. Найдите квадрат расстояния от второй прямой до плоскости.

7(C04.РП). Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$ определяет на плоскости XOY окружность. Найдите её центр и радиус R. В ответе сначала указать x_0, y_0 — координаты центра, затем R.

8. Дана кривая $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0$.

8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

8.2(325.Б7). Найдите координаты её центра симметрии.

8.3(Д06.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

8.4(267.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая $y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$.

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(058.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(2П9). Найдите значения её параметра p.

9.4(289.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y = 16$.

10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

10.2(822.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

10.3(470.Б7). Найдите его большую и малую полуоси.

10.4(941.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную кривую.

Вариант 2.6

1(ПД1.РП). Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,4)$ перпендикулярно прямой $3x+4y+5=0$.

2(342.РП). Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $P(3,5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7,3)$ и $B(11,-15)$. В ответ ввести уравнение той прямой, которая отсекает от осей координат треугольник, расположенный в первой четверти.

3(ПР3.БЛ). Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4,2,1)$ и $M_2(3,3,2)$ параллельно вектору $\mathbf{AB}=(4,-3,-2)$.

4(ПР4.РП). Найдите координаты проекции начала координат на прямую
$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-2}.$$

5(2С5). При каком значении параметра C прямая
$$\begin{cases} 3x+y-2z+5=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$
параллельна плоскости $x+3y+Cz-2=0$.

6(Р06). Две грани куба лежат на плоскостях $3x-6y+2z-5=$ $=0$ и $3x-6y+2z+30=0$. Вычислите объём куба.

7(977.РП). Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z-$ $-35=0$ определяет сферу. Найдите координаты (x_0,y_0,z_0) её центра и радиус R. В ответе запишите четвёрку чисел (x_0,y_0,z_0,R).

8. Дана кривая $25x^2+16y^2-350x+825=0$.

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(ТП8.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(АП9.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(3Т0.Б7). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая $14y=(x-8)^2$.

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(0Р1.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(962). Найдите значение её параметра p.

9.4(Д93.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $x^2+y^2+3xy+x+4y=0{,}5$.

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(0Д4.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(3Т5.РП). Найдите квадраты её действительной и мнимой полуосей.

10.4(416.БЛ). Запишите общее уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

Вариант 2.7

1(П81.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(1,3)$, $B(2,8)$, $C(6,6)$. Запишите общее уравнение прямой, на которой расположена медиана AM треугольника ABC.

2(6Б2.БЛ). Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(3,2)$ относительно прямой $x+2y-2=0$.

3(983.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,1)$ перпендикулярно двум плоскостям: $x-2y+3z-2=0$ и $x+4y-2z+1=0$.

4(8С4). Найдите то значение параметра p, при котором прямые
$$\begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t-2, \\ z=-4t+6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{p}=\frac{z+4}{1} \quad \text{пересекаются.}$$

5(С35). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси абсцисс плоскостью, проходящей через прямую $\begin{cases} x-y+3z+1=0, \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$ и точку $M(1,1,0)$.

6(Д06). Найдите расстояние между плоскостями $x-2y+2z+11=0$ и $x-2y+2z-25=0$.

7(597). Найдите радиус сферы $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\lambda=0$, если известно, что она касается плоскости $3x-2y+6z+23=0$.

8. Дана кривая $x^2+y^2-8x-2y=47$.
8.1. Докажите, что эта кривая — окружность.
8.2(671.Б7). Найдите координаты её центра.
8.3(ПА2). Найдите её радиус.

9. Дана кривая $25x^2-16y^2+32y-416=0$.
9.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.
9.2(ПР8.РП). Найдите координаты её центра симметрии.
9.3(А59.БЛ). Найдите действительную и мнимую полуоси.
9.4(3Р0.РП). Запишите уравнение фокальной оси.
9.5. Постройте данную гиперболу.

10. Дана кривая $9x^2+16y^2+24xy-40x+30y=0$.
10.1. Докажите, что данная кривая — парабола.
10.2(1Р3.РП). Найдите координаты её вершины.
10.3(СТ4). Найдите значение её параметра p.
10.4(П95.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.
10.5. Постройте данную параболу.

Вариант 2.8

1(376.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(1,3)$, $B(2,8)$, $C(6,7)$. Запишите общее уравнение его высоты AH.

2(345.Р7). В треугольнике ABC из вершины A проведены высота и медиана. Даны: вершина $B(6,5)$, уравнение высоты $x+y=2$ и уравнение медианы $2x-3y+1=0$. Найдите координаты x_0, y_0 вершины C.

3(0С7.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-2,4)$ и $M_2(2,-1,2)$ перпендикулярно плоскости $x+4y-5z+3=0$.

4(058.РП). Найдите координаты проекции точки $M(3,-1,-3)$ на плоскость $2x+y-4z+4=0$.

5(878). Найдите коэффициент A в уравнении плоскости $Ax+y+Cz+D=0$, проходящей через точки $P(1,1,8)$, $O(0,0,0)$ параллельно прямой $x-1=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{6}$.

6(П49.РП). При каких значениях параметров a и c прямая $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{c}$ пересекает две другие прямые:

$$\begin{cases} y-3z-3=0, \\ 3x-2y-3=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-y+1=0, \\ 3x-z-2=0. \end{cases}$$

7(350). Найдите радиус сферы, если известно, что она касается двух плоскостей $x-2y+2z+22=0$ и $x-2y+2z+10=0$.

8. Дана кривая $9x^2+4y^2-36x-64y+256=0$.

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(341.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(982.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(813.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая $x^2-4x+8y=36$.

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(9А4.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(415). Найдите значение её параметра p.

9.4(9А6.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$.

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(Д87.РП). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(ПД8.БЛ). Найдите действительную и мнимую полуоси.

10.4(299.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

Вариант 2.9

1(940.РП). Даны координаты вершин треугольника $A(3,4)$, $B(-1,2)$, $C(2,-1)$. Запишите общее уравнение средней линии треугольника, параллельной BC.

2(1А1.БЛ). В прямоугольном треугольнике ABC известны: уравнение медианы $3x-4y+8=0$, проведённой из вершины $A(0,2)$ прямого угла, и вершина $B(2,1)$. Найдите координаты (x_0, y_0) вершины C треугольника.

3(Т32.РП). Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7,2,-3)$ и $M_2(5,6,-4)$ параллельно оси OY.

4(9Д3). Найдите коэффициент B в уравнении плоскости $x+By+CZ+D=0$, проходящей через точки $P(1,-1,1)$, $O(0,0,0)$ параллельно прямой $\begin{cases} x=0, \\ 4y+3z=0. \end{cases}$

5(1А6.РП). При каких значениях параметров A_1 и A_2 прямая $\begin{cases} A_1x+3y-5z=0, \\ A_2x+2y+3z-6=0 \end{cases}$ параллельна прямой $\begin{cases} x-19z+19=0, \\ y+11z-11=0. \end{cases}$ Ответ запишите в виде пары чисел (A_1, A_2).

6(ДД3). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат, плоскостью, содержащей прямую $x+3=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-6}{4}$ и отсекающей на осях абсцисс и ординат одинаковой длины отрезки.

7(8Т3.РП). Найдите уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2-8x+6y+4z-12=0$ в точке $M_0(1,1,2)$.

8. Дана кривая $4x^2-32x-y^2+6y+51=0$.

8.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

8.2(С54.БЛ). Найдите координаты её центра симметрии.

8.3(225.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

8.4(346.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную гиперболу.

9. Дана кривая $4x+6y-y^2=21$.

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(1Д7.РП). Найдите координаты её вершины.

9.3(258). Найдите значение её параметра p.

9.4(С59.БЛ). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $5x^2+5y^2+8xy-18x-18y+9=0$.

10.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

10.2(8Д0.РП). Найдите координаты центра его симметрии.

10.3(П01.БЛ). Найдите его большую и малую полуоси.

10.4(162.РП). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную кривую.

Вариант 2.10

1(С83.РП). В прямоугольном треугольнике даны: вершина острого угла $A(7,-2)$ и уравнение $3x-5y+15=0$ одного из катетов. Запишите общее уравнение другого катета.

2(П64.РП). Высота, проведённая из вершины $A(4,4)$ треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке $D(1,1)$. $x+2y+1=0$ — уравнение высоты, опущенной из вершины B. Определить координаты x_0, y_0 вершины C.

3(ПА5.БЛ). Запишите общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1,2,3)$ и ось OY.

4(3А2). Найдите значение параметра m в уравнении прямой $\begin{cases} x=0, \\ my+18z=0, \end{cases}$ если известно, что эта прямая параллельна плоскости $x+4y+3z+5=0$.

5(983). Найдите длину отрезка, отсекаемого от оси аппликат плоскостью, проходящей через точки $P_1(2,1,0)$, $P_2(1,0,4)$ и пересекающей оси ординат и абсцисс в точках $A_1(0,a,0)$, $A_2(a,0,0)$.

6(Б62.БП). Найдите координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{12}=z$ с плоскостью, содержащей прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4},\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

7(5Т6). Найдите радиус сферы с центром в точке $C(-1,-2,3)$, если она касается плоскости $2x-2y+z+10=0$.

8. Дана кривая $4x^2+9y^2-32x-18y+37=0$.

8.1. Докажите, что эта кривая — эллипс.

8.2(А57.БЛ). Найдите координаты центра его симметрии.

8.3(П08.РП). Найдите его большую и малую полуоси.

8.4(СР9.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

8.5. Постройте данную кривую.

9. Дана кривая $y^2-4y+10x+14=0$.

9.1. Докажите, что данная кривая — парабола.

9.2(430.БЛ). Найдите координаты её вершины.

9.3(821). Найдите значение её параметра p.

9.4(3П2.РП). Запишите уравнение её оси симметрии.

9.5. Постройте данную параболу.

10. Дана кривая $7y^2+24xy+24x+62y+199=0$.

10.1. Докажите, что эта кривая — гипербола.

10.2(2Р3.БЛ). Найдите координаты её центра симметрии.

10.3(С54.РП). Найдите действительную и мнимую полуоси.

10.4(А65.БЛ). Запишите уравнение фокальной оси.

10.5. Постройте данную гиперболу.

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1971. — 328 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980. — 176 с.

3. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. — М.: АЙРИС, 1996. — 288 с.

4. Головина М.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

5. Горбанёв Н.Н., Ельцов А.А., Магазинников Л.И. Высшая математика I. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. — Томск: Томкий гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2001. — 164 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1980. — 320 с.

7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 432 с.

8. Магазинников Л.И., Горбанёв Н.Н. Линейная алгебра. — Томск: Томская академия систем управления и радиоэлектроники, 1993. — 182 с.

Предметный указатель