Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Кафедра электронных приборов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Электроника и микроэлектроника»
(специальность 210105 – Электронные приборы и устройства)

2012

Квасница Мирон Степанович

Статистические модели для систем передачи и обработки информации: Методические указания к практическим занятиям для студентов направления «Электроника и микроэлектроника» (специальность 210105 – Электронные приборы и устройства) / М.С. Квасница. Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. – 23 с.

На практических занятиях студенты приобретают навык моделирования и прогнозирования систем передачи информации. Студентам предлагается оценка граничных условий применения соотношений, умение составления программ для расчетов, умение сравнивать полученные результаты с аналогами и достижениями в данной области.

Перед практическими занятиями студент должен повторить лекционный материал, ответив на вопросы для самоконтроля по необходимой теме, а также просмотреть рекомендации по решению типичных задач этой темы.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по специальности 210105.65 – Электронные приборы и устройства по дисциплине «Статистические модели для систем передачи и обработки информации».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
________С.М. Шандаров
«___» ________ 2012 г.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Электроника и микроэлектроника»
(специальность 210105 – Электронные приборы и устройства)

Разработчик
доц. каф. ЭП
__________М.С. Квасница
«____» _________ 2012 г

2012

Содержание

1 Введение

На практических занятиях студенты приобретают навык моделирования и прогнозирования работы приборов квантовой электроники, систем передачи информации. Студентам предлагается оценка граничных условий применения соотношений, умение составления программ для расчетов, умение сравнивать полученные результаты с аналогами и достижениями в данной области.

Перед практическими занятиями студент должен повторить лекционный материал, ответив на вопросы для самоконтроля по необходимой теме, а также просмотреть рекомендации по решению типичных задач этой темы. Занятия проводятся по укрупненной схеме и предполагают элементы самоанализа работы электронного прибора.

2 Информационные системы с постоянными сигналами. Параметры случайных величин, оценивание информационных сигналов

2.1 Основные понятия темы

Случайная величина и ее параметры.

Случайная величина X однозначно задана, если известна ее функция распределения

$$F(x) = P(X \leq x)$$

где X - аргумент функции,

или плотность ее распределения

$$dF / dx = f(x)$$

В качестве параметров выступают, как правило, начальные $m_к$ или центральные моменты распределения:

$$m_k = \overline{X^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \quad k=1,\ 2,\ 3$$

Начальный момент первого порядка m_1 является средним значением $\overline{X}$ случайной величины X, а центральный момент второго порядка M_2 имеет персональное наименование - дисперсия σ^2 случайной величины X. Квадратный корень из дисперсии - среднеквадратическое отклонение. Отношение

$$\delta = \frac{\sqrt{M_2}}{m_1} = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\overline{x}}$$

2.2 Примеры решения задач

Задача 1. Интервал времени безотказной работы информационной системы T является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей

$$f(N) = \alpha \cdot e^{-\alpha T}, \qquad \alpha>0;T>0$$

Определить относительные флуктуации интервала времени безотказной работы системы.

Решение: Среднее $\overline{T}$ и дисперсия $\sigma_T{}^2$ равны:

$$\overline{T} = \int_0^\infty T\alpha e^{-\alpha T} dT$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty T^2 \alpha e^{-\alpha T} dT - \overline{T}^2$$

Вычисление данных интервалов, например, интегрируя по частям, в принципе не сложно, но довольно утомительно и громоздко. Технически проще вычислить $\overline{T}$ и $\sigma_T{}^2$ используя характеристическую функцию

$$\varphi(\omega) - \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-\alpha T} e^{j\omega T} dT = \frac{\alpha}{\alpha - j\omega}$$

Тогда

$$\overline{T} = 1/\alpha\,;\ \overline{T^2} = 2/\alpha^2;\ \ \sigma_T{}^2 \ = -1/\alpha^2$$

а относительные флюктуации

$$\delta = \sigma_T / T = 1$$

То есть, являются постоянными величинами.

Роль данного распределения в различных областях науки и техники трудно переоценить. Так, например, распределены расстояния между звездами, интервалы времени между актами распада ядер радионуклидов, моментами спонтанных переходов и др. его значимость в квантовой механике сравнима, по мнению автора, с распределение Лоренца и позволяет формировать соотношения неопределенностей.

Задача 2. Число ***n*** квантов спонтанного излучения регистрируемого фотоприемником за время измерения Т является случайной величиной с вероятностью

$$P_n = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

где λ - параметр распределения.

Определить относительные флуктуации числа ***n*** квантов спонтанного распределения.

Решение: Среднее и дисперсия

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T}$$

$$\overline{n^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T}$$

$$\sigma^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2$$

Непосредственное вычисление данных сумм весьма громоздко и утомительно. Технически проще найти $\overline{n}$ и $\overline{n^2}$ на основе производящей функции ν (z) для данного распределения P_n

$$\nu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^i}{i!} = e^{-\lambda T + \lambda T z}$$

Тогда $\overline{n} = \frac{\partial \nu}{\partial z}\Big|_{z=1} = \lambda T$

Для данного распределения

$$\overline{n^2} = (\lambda T)^2 + \lambda T$$

$$\sigma^2 = \lambda T$$

$$\sigma_n^2 = \overline{n}$$

Относительные флуктуации

$$\delta = \frac{\sqrt{\lambda T}}{\lambda T} = \frac{1}{\sqrt{\lambda T}}$$

Рассмотренное распределение является распределение Пуассона и его роль в различных областях также трудно переоценить. Это распределение является базовым в квантовой электронике и оптоэлектронике, астрофизике, теории надежности, теории массового обслуживания, биологии и др. данные выражения для относительных флуктуаций является основой для расчета и проектирования целых классов приборов и систем. Величина λT характеризует, по существу, объем сигналов в теории связи. С другой стороны, величину λ можно рассматривать как мощность сигнала, а параметр Т как постоянную времени измерительной системы.

2.3 Задачи для проработки темы

Задача 2.1. Случайна величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}; \quad \alpha > 0,\ x \geq 0.$$

$$f(x) = 0,\ x \prec 0$$

Определить относительные флуктуации данной случайной величины.

Задача 2.2. На вход усилителя с коэффициент усиления к = 10 поступает постоянное во времени напряжение, величина которого равномерно распределена на интервале (0 ÷ 1)В. Определить относительные флуктуации выходного сигнала.

Задача 2.3. На вход логарифмического усилителя поступает сигнал *S,* уровень которого является случайной величиной равномерно распределенной на интервале (0 ÷ 5)В. Определить относительные флуктуации сигала на выходе логарифмического усилителя.

Задача 2.4. Среднее число квантов оптического излучения некогерентного источника света равно 10^9 квантов. Определить среднее и дисперсию числа квантов данного источника за 8 с.

Задача 2.5. Относительные флуктуации отклика лавинного фотодиода на отдельный квант света составляют 120%, зарегистрировано 10^8 квантов света. Определить относительные флуктуации суммарного отклика фотодиода.

Задача 2.6. Среднее число квантов света, поступающих на вход фотоприемника, составляет 10^{10} квантов света за 5 с. Вероятность регистрации отдельного кванта составляет 0,97. Определить среднее, дисперсию и относительные флуктуации числа квантов зарегистрированных фотоприемником за 15 с.

Задача 2.7. Коэффициент усиления усилителя является случайной величиной с относительными флуктуациями 12%. Определить относительные флуктуации выходного сигнала, если на вход усилителя поступает постоянное напряжение.

Задача 2.8. Доказать, что дисперсия суммы двух и более независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Задача 2.9. Выходной сигнал имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

где x_i - независимые и одинаково распределенные случайные величины с относительными флуктуациями равными 0,1%. Определить относительные флуктуации величины у .

Задача 2.10. Выходной сигнал имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

где $\boldsymbol{x_i}$ - независимые и одинаково распределенные случайные величины с относительными флуктуациями равными 0,1%. Определить относительные флуктуации величины $\boldsymbol{y}$, если **n** принимает значение 10^2 с вероятностью 0,4 и 10^3 с вероятность 0,3.

Задача 2.11. Доказать, что для пуассоновского распределения целочисленной случайной величины n с $P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, i=0, 1,…n среднее значение $\bar{n}$ равно дисперсии этого числа

Задача 2.12. Определить относительные флуктуации суммы случайного числа случайных слагаемых. Указанные слагаемые независимы и одинаково распределены.

Задача 2.13. Имеются три независимых измерения неизвестного параметра S с относительными погрешностями 0,1%, 0,1% и 0,2%. определить параметры оптимальной по минимуму среднеквадратической погрешности линейной системы, формирующей итоговую оценку параметра S. Найти погрешность данной итоговой оценки.

Задача 2.14. «Мертвое» время непродлевающегося типа детектора ионизирующего излучения составляет 10^{-8} с, а среднее число частиц поступающих на вход детектора составляет 10^7 *частиц/с*. Определить относительные флуктуации числа частиц, зарегистрированных за 5 с.

Задача 2.15. Параметр λ пуассоновского распределения

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \ i=0, 1,\ldots n$$

является случайной величиной с плотностью распределения

$$f(\lambda)=e^{-\lambda}, \ \lambda \geq 0$$

$$f(\lambda)=0, \ \lambda<0$$

Определить распределение p_i, в данном случае. (Искомое распределение носит наименование распределение Бозе-Эйнштейна).

Задача 2.16. На вход усилителя с коэффициентом усиления k поступает сигнал s с известным средним S и дисперсией σ^2. При этом коэффициент усиления k - случайная величина с известными $\bar{k}$ и σ^2. Определить относительные флуктуации сигнала на выходе усилителя.

Задача 2.17. Связь между током и напряжением в диоде выражается уравнением:

$$I = \mathrm{A}(\mathrm{e}^{\mathrm{BU}} - 1)$$

где A и B - постоянные; U - случайная величина с известными средними и дисперсией. Оценить относительные флуктуации тока, протекающего через диод.

Задача 2.18. Доказать, что относительные флуктуации среднего

$$y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

где x_i - независимо и одинаково распределенные случайные величины, пропорциональные величине $\frac{1}{\sqrt{N}}$

Задача 2.19. Доказать, что характеристическая функция суммы фиксированного числа независимых случайных слагаемых равна произведению характеристических функций этих слагаемых.

Задача 2.20. Доказать, что дисперсия целочисленной случайной величины:

$$\sigma_n^2 = \frac{\partial \nu(z)}{\partial z^2}\Big|_{z=1} + \frac{\partial \nu(z)}{\partial z}\ {}_{z=1}\Big| - \left(\frac{\partial \nu(z)}{\partial z}\Big|_{z=1}\right)^2,$$

где $v(z)$ – производящая функция случайной величины.

3 Информационные системы с переменными во времени сигналами. Случайные величины и их погрешности. Оценка текущих значений случайных процессов (Винеровская фильтрация).

3.1 Основные понятия темы

Функция X(t) действительного переменного *t* называется случайной, если при каждом значении аргумента *t* она представляет случайную величину. Если параметром *t* является величина, то случайная функция X(t) является случайным процессом. В отличие от детерминированного процесса, развитие которого априори определено однозначно, случайный процесс представляет такие изменения во времени физического явления или состояния технического объекта, которые задание определить точно не возможно.

Случайный процесс характеризуется множеством функций x_i *(t)* , каждая из которых называется реализацией случайного процесса X(t).

Различают два класса случайных процессов: с дискретным временем и с непрерывным временем.

Значения случайного процесса $X(t_i)$ являются в общем случае, связанными случайными величинами. Однозначно задать случайный процесс означает задать многомерную функцию распределения указанных значений. Для случайных процессов с непрерывным временем данная функция представляет собой функционал.

Усреднение реализаций x_i (t) процесса X(t) или их функциональных преобразований может быть двух типов: усреднение по времени и усреднение по множеству реализаций. Усреднение по множеству реализаций, например, представляет собой выполнение следующей операции:

$$\overline{X(t)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_i(t)\,, \tag{3.1}$$

где N - число наблюдаемых реализаций.

Случайный процесс *X(t)* называется стационарным (в узком смысле) тогда и только тогда, когда функция распределения любого порядка не зависит от начала отчета времени. Иными словами, когда любые вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвига переменной *t*.

Случайный процесс называется эргодическим, если любая вероятностная характеристика, полученная усреднением с вероятностью сколь угодно близкой к единице, равна среднему, за достаточно большой промежуток времени из единственной реализации случайного процесса. Например,

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)dt \tag{3.2}$$

равно $\overline{X}(t)$ определяемому выражением (3.1). Заметим, что в данном случае рассматривается, стационарные эргодические процессы.

Корреляционная функция $B(t_1,t_2)$ случайного процесса X(t) характеризует связь двух случайных величин: $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Если бы случайные величины были бы не связаны между собой (не коррелированны), то

$$\overline{X(t_1)X(t_2)} = \overline{X(t_1)}\cdot\overline{X(t_2)}$$

Поэтому мерой связи данных случайных величин является разность между средним от их произведения и произведением средних. Эту разность называют корреляционной функцией $B(t_1, t_2)$:

$$B(t_1,t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} - \overline{X(t_1)}\cdot\overline{X(t_2)} \tag{3.3}$$

Для стационарных случайных процессов

$$B(t_1,t_2) = B(\tau) = \overline{X(t)X}(t+\tau) - a^2 \tag{3.4}$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $a = \overline{X(t)}$. Заметим, что

$$B(0) = \sigma^2, \quad \lim B(\tau) = 0, \; B(\tau) = B(-\tau),$$

где σ^2 - дисперсия данного случайного процесса.

Отношение

$$R(\tau) = B(\tau)/B(0)$$

называют нормированной корреляционной функцией (коэффициентом корреляции случайного процесса). Величину

$$\tau_0 = \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau \tag{3.5}$$

называют интервалом корреляции.

Практическое значение корреляционной функции трудно переоценить, так как данная функция определяет энергетический спектр случайного процесса:

$$S(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{3.6}$$

или в случае четности функции B(τ)

$$S(\omega) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} B(\tau)\cos\ \omega\tau\, d\tau \tag{3.7}$$

Справедливо обратное:

$$B(\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega \tag{3.8}$$

Корреляционная функция B(τ) и энергетический спектр S(ω) как пара преобразований Фурье преобладает всеми присущими преобразованию свойствами. В частности, чем «шире» спектр *S(ω)* ? тем «уже» корреляционная функция *B(τ)* и наоборот.

Из выражения (3.4) и (3.8), следует, что средняя мощность случайного процесса с нулевым средним определяется выражением

$$B(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)d\omega$$

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Определить энергетический спектр случайного процесса с корреляционной функцией B(τ)=$\sigma^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}$, α>0

Решение:

$$S(\omega) = 2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right] =$$

$$= 2\sigma^2\left[\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha^2 + j\omega}\right] = \frac{4\sigma^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Преобразования случайных процессов могут быть линейные и нелинейные. Для линейных преобразований случайных процессов определение параметров выходного процесса $y(t)$ базируется на выражении

$$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

где $h(\tau)$ импульсная переходная функция линейного фильтра. Процесс $y(\tau)$ в переходном режиме является нестационарным и лишь при $t\to\infty$ становится стационарным.

Задача 2. Определить среднее $\overline{y(t)}$ процесса $y(t)$, если $x(t)$ - стационарный процесс.

Решение:

$$\overline{y(t)} = \overline{\int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)dt} = a\int\limits_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$\overline{x(t) = a}$$

Если линейный фильтр устойчивый, то есть, интервал

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau < M$$

сходится, то в установившемся режиме

$$\overline{y(t)} = a\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau$$

постоянно (во времени не изменяется)

3.3 Задачи для проработки темы

Задача 3.1. Корреляционная функция случайного процесса имеет определенный вид. Определить энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса.

Задача 3.2. Энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ имеет определенный вид: Определить дисперсию и корреляционную функцию данного процесса.

Задача 3.3. Корреляционная функция случайного процесса

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau,$$

где ω_0 и α - параметры.

Определить интервал корреляционного процесса и его энергетический спектр.

Задача 3.4. Доказать, что корреляционная функция суммы двух и более независимых случайных процессов равна сумме корреляционных функций каждого из них.

Задача 3.5. 0пределить дисперсию наблюдаемого сигнала

$$y(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

где x(t) - случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Задача 3.6. Определить дисперсию наблюдаемого процесса

$$\mathrm{y(t)}=dX\,(t)/\mathrm{dt},$$

где X (t) – случайный процесс с корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{\frac{\tau^2}{2\alpha^2}}$$

Задача 3.7. На вход интегрирующей RC – цепочки действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0 . Определить дисперсию выходного сигнала в установившемся режиме.

Задача 3.8. На вход колебательного контура с добротностью Q и резонансной частотой ω_0 действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0. Определить энергетический спектр выходного сигнала.

Задача 3.9. На вход интегрирующей RC - цепочки действует пуассоновская δ-импульсная последовательности с интенсивностью λ. Определить относительные флуктуации выходного сигнала в установившемся режиме.

Задача 3.10. На вход усилителя с АРУ поступает детерминированный сигнал $x(t)=k(t)$. Определить установившееся значение выходного сигнала.

Задача 3.11. Определить условие устойчивости по среднему значению с АРУ при поступлении на его вход пуассоновской последовательности, причем амплитуда импульсов - независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(A) = p_0\delta(A + A_0) + (1 - p_0)\delta(A - A_0)$$

Задача 3.12. Определить среднеквадратическую погрешность восстановления случайного процесса с корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

по пуассоновской последовательности отсчетов с интенсивностью λ .

Задача 3.13. Определить корреляционную функцию и энергетический спектр случайного процесса на выходе интегрирующей *RC* - цепи при поступлении на ее входе случайного процесса с корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Задача 3.14. Определить дисперсию случайного процесса на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход пуассоновской δ - импульсной последовательности с интенсивностью λ .

Задача 3.15. Случайный процесс наблюдается в два момента времени: t и $t - T$. Построить линейную оценку значения случайного процесса в момент времени t - (T/2) по минимуму среднеквадратической погрешности. Определить данную погрешность (задача интерполяции).

Задача 3.16. Построить линейную оценку по минимуму среднеквадратической погрешности производной

$$y(t)=dx(t)/\,dt$$

случайного процесса $x(t)$ по двум значениям: $x(t)$ и $x(t - T)$. Определить погрешность данной оценки.

Задача 3.17. Наблюдаются два значения: x(t) и x(t-T) аддитивной смеси

$$\mathbf{x}(t) = s(t) + n(t)$$

полезного сигнала s(t) и шума n(t) с нулевыми средними и корреляционными функциями $B_s(\tau)$ и $B_n(\tau)$ соответственно. Построить линейную оценку полезного сигнала. Определить погрешность оценивания (задача фильтрации).

Задача 3.18. Какой фильтр называют физически нереализуемым? Как можно практически использовать такие фильтры?

Задача 3.19. Из определения среднеквадратической погрешности оценивания получить интегральное уравнение Винера-Хопфа.

4 Информационные характеристики систем передачи и отображения информации. Информационные модели объектов. Основные понятия теории информации и кодирования.

4.1 Основные понятия темы

Собственная информация отдельного сообщения a_i $(i = 1,2...,K)$

$$I(a_i) = -log_b p_i$$

где p_i - вероятность появления сообщения $\boldsymbol{a_i}$; $\boldsymbol{K}$ - объем алфавита. Среднее количество собственной информации одного сообщения

$$\overline{I} = -\sum_{i=1}^{K} p(a_i) log_b p_i$$

Носит наименование энтропии источника сообщений Н. Максимальное значение данной энтропии достигается при

$$p_1 = p_2 = ... = p_K = 1/K;$$

и равно

$$H_{max} = log_b K$$

Основание логарифма b определяет масштаб измерения собственной информации и энтропии. Обычно $b = 2,$ тогда единица информации - бит. Взаимная информация

$$I(a_i,x_k) = log p(x_i/y_k) - log\, p(x_i)$$

Средняя взаимная информация

$$I(A:X) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{M} p(a_i, x_k) log \frac{p(\frac{a_i}{y_k})}{p(a_i)}$$

где M – объем наблюдаемого алфавита X .

Пропускная способность дискретного канала с шумами без памяти

$$C = \max_{p(A)} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{M} p(a_i)\,p\left(\frac{x_k}{a_i}\right) log \frac{p(\frac{a_i}{x_k})}{p(a_i)}$$

Пропускная способность непрерывного канала

$$C = \Delta f\ log(1 + \frac{P_{C'}}{P_ш})\ \text{бит/сек}$$

где Δf- полоса сигнала; $P_{C'}$ - средняя мощность стационарного входного сигнала, $P_ш$ – средняя мощность шума, попадающего в полосу частот Δf

4.2 Примеры решения задач

Задача 1. По каналу связи без памяти передается сигнал s(t), представляющий собой нормальный процесс с нулевым средним значением, дисперсией σ^2=*8 мВт* и равномерным энергетическим спектром N_0 в полосе частот Δf = 3100 *Гц.* В канале действует независимая от сигнала флуктуационная помеха типа «белый шум» с энергетическим спектром $N_ш$ = 3,22.10^{-7} Вт/Гц, с нормальным распределением и средним значением. Определить средние количество информации, переданное по каналу на один отсчет сигнала.

Решение: Поскольку спектр равномерный, то отсчеты входного сигнала и помеха, а следовательно, и сигнал на выходе независимы.

$$I(s,z) = h(z) - h\frac{z}{s} = h(s) - h(\frac{s}{z})$$

где *h(s)* – дифференциальная энтропия сигнала *s* ; *z* – наблюдаемая сумма сигнала и помехи.

$$I(s,z) = \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{\sigma_S^2}{\sigma_ш^2}\right) = 1{,}58 \text{ бит/отсчет}$$

Задача 2. Чему равна пропускная способность канала, если средняя мощность сигнала 1мкВт, а помехой является тепловой шум приемного устройства с полосой 10 кГц и рабочей температурой 20° *C*.

Решение: Мощность теплового шума может быть оценена из соотношения

$$P_ш = 4кT\Delta f$$

где *к* - постоянная Больцмана. В данном случае Δf=*10 кГц; T* = 293 .

Следовательно

$$P_ш = 4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 10^4 = 1{,}64 \cdot 10^{-16}\ Вт$$

Тогда пропускная способность

$$C = 10^4\, log\left(1 + \frac{10^6}{10^6 \cdot 1{,}64}\right) = 3{,}26 \cdot 10^5 \text{ бит/сек}$$

Кодирование – это сопоставление дискретному сообщению *a, (i=l,2...,К)* определенной последовательности кодовых символов, выбираемых из конечного множества элементарных символов {b}, *j = 1,2,...m*; *m* - основание кода. Обычно *m = 2* (двоичное кодирование).

Особый класс образуют статические коды. Эти коды являются неравномерными. Длина кодовой комбинации таких кодов зависит от вероятности выбора соответствующей буквы данного алфавита. Это означает, что наиболее вероятным буквам сопоставляют короткие кодовые комбинации, а менее вероятным - более длинные. Такое кодирование очень часто называют экономным, так как оно позволяет сократить среднюю длину кодовой комбинации. Представителями таких кодов являются код Шеннона - Фоно и код Хаффмана. Необходимо учесть, что средняя длина кодового слова

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{K} p_i n_i \geq \frac{H(A)}{log\, m}$$

4.3 Задачи для проработки темы

Задача 4.1. Задан алфавит:

a_1 - $p_1 = 0.1$;
a_2 - $p_2 = 0.1$;
a_3 - $p_3 = 0.2$;
a_4 - $p_4 = 0.03$;
a_5 - $p_5 = 0.07$;
a_6 - $p_6 = 0.15$;
a_7 - $p_7 = 0.05$;
a_8 - $p_8 = 0.12$;
a_9 - $p_9 = 0.08$;
a_{10} - $p_{10} = 0.1$.

Определить собственную информацию каждой буквы данного алфавита.

Задача 4.2. Для алфавита, заданного в задачи 4.1 определить энтропию источника сообщений и вычислить его избыточность.

Задача 4.3. Доказать, что максимум энтропии дискретного источника сообщений достигается при равных вероятностях появления отдельных сообщений.

Задача 4.4. Доказать, что условная энтропия не превосходит безусловную.

Задача 4.5. Вычислить дифференциальную энтропию гауссова непрерывного источника сообщений.

Задача 4.6. Вычислить дифференциальную энтропию непрерывного источника сообщений при равномерном распределении значений на интервале (0,1).

Задача 4.7. Вычислить дифференциальную энтропию непрерывного источника сообщений при плотности сообщений при плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{C}{x^2 + 1}$$

где C – постоянная, определяемая из условия нормировки функции $f(x)$.

Данное распределение в теории вероятностей называют распределение Коши, а в физике - распределение Лоренца.

Задача 4.8. Показать, что максимально возможное значение дифференциальной энтропии при заданной средней мощности сигнала P_c

$$H_0(A)_{max} = \frac{1}{2} log \frac{P_{C\cdot}}{P_ш}$$

где $P_ш$ - средняя мощность шума распределения.

Задача 4.9. Показать, что при заданной мощности шума информационный объем сигнала не может превысит величину

$$V_0 = \Delta f T_C \, log \frac{P_{C\cdot}}{P_ш}$$

где Δf - полоса частот сигнала; T_c - длительность сигнала. Обозначения P_{c} и $P_ш$ раскрыты в предыдущей задаче.

Задача 4.10. Показать, что пропускная способность гауссовского канала непрерывного времени не может превышать величину

$$C = \Delta f T_0 \log \frac{P_C}{P_ш}$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

Задача 4.11. Определить максимально возможную пропускную способность гауссовского канала при неограниченной полосе частот.

Задача 4.12. Показать, что для передачи одной единицы информации по каналу с шумами сигнала должен иметь энергию $E > 0,69N_ш$, где $N_ш$ – энергия шума в единичной полосе частот.

Задача 4.13. Для алфавита, заданного в задаче 4.1 построить методом Шеннона Фано двоичный код. Найти среднюю длину кодового слова и сравнить ее энтропией источника сообщений.

Задача 4.14. Для алфавита, заданного в задаче 4.1 построить методом Хаффмана двоичный код. Найти среднюю длину кодового слова и сравнить ее энтропией источника сообщений.

Задача 4.15. Источник сообщений выдает символ из ансамбля (алфавита) имеющего объем $\boldsymbol{к} = 8.$ Записать кодовые комбинации примитивного равномерного кода, соответствующие буквам данного алфавита. Построить граф кода (кодовое дерево).

Задача 4.16. Показать, что кодировании равномерным кодом с основание $\boldsymbol{m}$ букв источника сообщений, имеющего производительность $H'(A)$ число разрядов в кодовой комбинации не может быть меньше, чем:

$$\overline{n}_{\min} = \frac{\log K}{\log m}$$

где K - объем алфавита; m - основание кода.

Задача 4.17. Показать, что при использовании n - разрядного примитивного кода вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации не может быть сколь угодно малой при фиксированной вероятности ошибочного приема элементарного символа.

Задача 4.18. Сравнить дифференциальные энтропии нормального процесса и процесса равномерно распределенного на интервале (— a, a), если их дисперсии одинаковы.

Задача 4.19. Показать, что вероятность ошибки в канале с шумами не может быть сколь угодно малой, если пропускная способность канала C меньше производительности источника $H'(A)$.

Задача 4.20. Найти энтропию шума в двоичном симметричном канале без памяти, если энтропия на входе источника на входе канала

$$H(A)=1000 \text{ бит/символ},$$

а энтропия источника, образованного выходом канала

$$H(B)=2000 \text{ бит/символ};$$

ненадежность канала

$$H(A/B)=200 \text{ бит/символ}.$$

5 Рекомендуемая литература

1. Теоретические основы передачи информации / Е.Г. Лебедько, СПб.: Лань, 2011. – 352 с. 1-е изд. ISBN: 978-5-8114-1139-9 Гриф: Рекомендовано УМО вузов РФ по образованию в области приборостроения и оптотехники http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1543

2. Теория вероятностей и математическая статистика / Туганбаев А.А., Крупин В.Г.– СПб.: Лань , 2011. – 320 с 1-е изд 978-5-8114-1079-8ISBN: http://e.lanbook.com/ books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=652

3. Статистические модели для информационных систем, квантовых и оптоэлектронных приборов: Учебное пособие / М. С. Квасница– Томск: ТУСУР, 2012. – 95 с http://edu.tusur.ru/training/publications/2181

4. Пуговкин А.В., Серебренников Л.Я., Шандаров С.М. Введение в оптическую обработку информации. - Томск: Изд-во ТГУ, 1981. - 60 с.

5. Семенов А.С., Смирнов В.Л., Шмалько А.В. Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации. - М.: Радио и связь, 1990. - 225 с.

6. Шандаров С.М., Башкиров А.И. Введение в квантовую и оптическую электронику. Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2007.

Учебное пособие

Квасница М.С.

Статистические модели для систем передачи
и обработки информации

Методические указания к практическим занятиям

Усл. печ. л. Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40