МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Л.И. Магазинников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА IV

Теория вероятностей

Издание четвёртое, переработанное и дополненное

*Рекомендовано
Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
в качестве учебного пособия для студентов
и преподавателей вузов*

Томск 2012

УДК 519.21(075)
ББК 22.1я73
М 12

Рецензенты:
Кафедра высшей математики Томск. политехн. ун-та,
зав. каф. д-р физ.-мат. наук профессор **К.П. Арефьев**
Канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории вероятностей и мат. статистики Томского гос. ун-та **Л.Е. Радюк**

Магазинников Л.И.
М 12 Высшая математика IV. Теория вероятностей: Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 151 с.
ISBN 5-86889-072-8

В пособии изложен материал по теории вероятностей в объеме, предусмотренном программой курса высшей математики для студентов технических вузов. Теоретический материал дополнен многочисленными примерами и контрольными заданиями для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для студентов высших технических учебных заведений.

УДК 519.21(075)
ББК 22.1я73

ISBN 5-86889-072-8

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В четвёртой части пособия изложен материал по теории вероятностей, предусмотренный ныне действующей программой по курсу высшей математики. Пособие состоит из пяти глав. В первой главе охарактеризованы основные понятия теории вероятностей и приведены некоторые формулы действия с вероятностями случайных событий. Во второй главе изучаются одномерные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики. Из частных законов распределения изучены биномиальное распределение, распределение Пуассона, равномерное, показательное и нормальное распределение. Завершается вторая глава простейшими теоремами, относящимися к закону больших чисел. Третья глава посвящена многомерным случайным величинам. Довольно подробно изучаются характеристики связи двух случайных величин: функция регрессии, линейная среднеквадратическая регрессия, коэффициент корреляции. В четвёртой главе изучаются основные понятия математической статистики. Кратко охарактеризован выборочный метод, приводятся некоторые положения из теории точечной оценки параметров распределения. В качестве примера получены оценки параметров нормального распределения и построены для них доверительные интервалы. В пятой главе приводятся два индивидуальных задания в десяти вариантах каждое, которые можно использовать в качестве контрольных работ для заочников. Контрольные работы при наличии устройства СИМВОЛ или его компьютерного аналога можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля.

Предмет теории вероятностей

Для описания закономерной связи между некоторыми условиями S и событием A, наступление или ненаступление которого может быть точно установлено, естествознание обычно использует одну из следующих схем:

1) при каждом осуществлении условий S наступает событие A. Такой вид, например, имеют все законы классической механики. Подобные закономерности называют детерминированными;

2) при выполнении условий S событие A может как наступить, так и не наступить, но имеет определённую вероятность $P(A/S)$ наступления, равную p. Это означает следующее: пусть n раз были выполнены условия S, при этом событие A наступило m раз. Отношение $P^* = \dfrac{m}{n}$ называют относительной частотой события A. Наличие у события A при условии S определённой вероятности p означает, что почти в каждой достаточно длинной серии испытаний, т.е. выполнения условий S, относительная частота P^* события A приблизительно

равна p. Вероятность при этом выступает как количественная мера степени возможности наступления события A. Закономерности, описанные в схеме 2, называют статистическими.

Примеры статистических закономерностей: при подбрасывании правильной монеты достаточно много раз примерно в половине случаев выпадет герб, независимо от результата каждого отдельного подбрасывания, который предсказать невозможно; давление газа на стенку сосуда определяется совокупным действием всех молекул, практически не зависит от поведения каждой отдельной молекулы и подчиняется очень простой закономерности.

Статистические закономерности широко распространены в природе и составляют один из предметов изучения многих наук, таких как квантовая механика, демография, термодинамика и др., и имеют большое практическое значение. Теория вероятностей — математическая наука, являющаяся теоретической базой изучения статистических закономерностей. Возможность применения теории вероятностей к изучению явлений, относящихся к весьма далёким друг от друга областям науки, основана на том, что вероятности событий удовлетворяют некоторым простым соотношениям, независимо от конкретного содержания изучаемого явления.

Одной из основных задач теории вероятностей является установление правил, позволяющих по вероятности одних событий находить вероятности других, как-то связанных с первыми.

Наступление или ненаступление события A обычно зависит от большого числа мало связанных друг с другом случайных факторов. Поэтому можно сказать, что теория вероятностей есть математическая наука, выясняющая закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов. Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.Н. Гнеденко и многие другие, поставившие теорию вероятностей на прочную логическую и математическую основу. В настоящее время теория вероятностей стала одним из надёжных, точных и эффективных методов познания реальной действительности.

1. Случайные события. Вероятности и действия над ними

1.1. Понятие события. Классификация событий

Теория вероятностей рассматривает действительные или мнимые опыты (эксперименты) со случайными исходами. Например, эксперимент — выстрел по заданной цели, исходы: цель поражена или не поражена; подброшена игральная кость, исходы: может выпасть от одного до шести очков.

При построении математической модели случайного эксперимента в качестве первоначального принимают понятие пространства элементарных событий. Множество Ω всех взаимоисключающих исходов такое, что результатом эксперимента является один и только один исход, называется *пространством элементарных событий*. В зависимости от характера эксперимента множество Ω может быть конечным, бесконечным, дискретным, непрерывным. Элементы множества Ω иногда будем называть точками. Отыскание множества Ω в задачу теории вероятностей не входит, предполагается, что оно каким-либо образом задано.

При решении конкретных прикладных задач построение множества Ω является одним из важных вопросов. Строить множество Ω приходится в каждом случае отдельно, учитывая особенности решаемой задачи. Например, опыт — стрельба по круглой мишени. Результат стрельбы можно обработать по-разному. Если указать отклонение δ точки попадания от центра круга, то множеством Ω является луч $[0, +\infty)$, если же мишень, как в спортивных соревнованиях, разделена на 10 пронумерованных концентрических кругов, то результат стрельбы можно охарактеризовать числом выбитых очков. Множество Ω в этом случае дискретно и состоит из чисел $0, 1, 2, \ldots, 10$. Если на мишени выбрать декартову систему координат с началом в центре круга, то результат стрельбы однозначно характеризуется координатами точки попадания (x, y). Множество Ω в этом случае состоит из всех упорядоченных пар вещественных чисел. Как видим, одному и тому же опыту мы различным образом сопоставили пространство элементарных событий Ω, в зависимости от того, что мы принимаем в качестве результата опыта.

Следующими основными понятиями математической модели случайного эксперимента являются событие и поле событий. Выделим в пространстве элементарных событий Ω некоторый класс Q подмножеств, таких, что в результате применения любой из операций пересечения, объединения, разности и отрицания (см. подраздел 1.2) к любым подмножествам из Q получается подмножество из класса Q пространства элементарных событий Ω. *Событием* называется любое подмножество из класса Q пространства элементарных событий. Множество всех событий, которые могут наблюдаться в данном эксперименте, называется *полем событий*, соответствующим данному эксперименту.

Пример 1. Опыт: последовательно подброшены две монеты, при этом может выпасть на каждой монете либо герб (Г), либо цифра (Ц). Пространство элементарных событий Ω состоит из четырёх точек (Г,Г), (Г,Ц), (Ц,Г), (Ц,Ц). Событие A $\{$выпал хотя бы один герб$\}$ состоит из точек (Г,Г), (Г,Ц), (Ц,Г). Событие B $\{$выпал ровно один герб$\}$ состоит из двух точек (Г,Ц), (Ц,Г). Событие C $\{$герб на первой монете$\}$ также состоит из двух точек (Г,Г), и (Г,Ц).

Пример 2. Опыт: произведён один выстрел по круглой мишени для спортивных соревнований. Наблюдаемый результат — число выбитых очков. Как мы уже отмечали, пространство элементарных событий состоит из одиннадцати точек (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Событие A $\{$выбито менее четырёх очков$\}$ образует множество (0, 1, 2, 3). Событие B $\{$выбито не менее семи очков$\}$ состоит из точек (7, 8, 9, 10).

Если множество, соответствующее событию A, принадлежит множеству, соответствующему событию B, то говорят, что событие A влечёт за собой событие B или A является частным случаем B. Пишут $A \subset B$. В этом случае, если происходит A, то происходит и B, но из того, что произошло событие B в общем случае не следует, что произошло и A. Например, события A $\{$выбито 8 очков$\}$, B $\{$выбито чётное число очков$\}$, очевидно, $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются *равными* или *эквивалентными*. Записывают $A = B$.

Событие, состоящее из всех точек пространства элементарных событий Ω называется *достоверным.* Оно в результате опыта произойдёт обязательно (например, при одном выстреле выбито не более 10 очков).

Событие, не содержащее ни одной точки данного пространства элементарных событий, называется *невозможным* (например, при одном выстреле выбито более 10 очков). Невозможное событие будем обозначать $\oslash$.

Событие, не совпадающее со всем множеством Ω и содержащее хотя бы одну его точку, называется *случайным.* Оно в результате опыта может как произойти, так и не произойти (например, при одном выстреле выбито более 8 очков).

Случайное событие, содержащее только одну точку множества Ω, называется *элементарным.* Если оно содержит более одной точки, то событие называется *сложным*, или *составным.*

Два события A и B называются *несовместными*, если они не содержат общих точек, и *совместными*, если у них имеются общие точки. Появление одного из несовместных событий исключает появление другого. Совместные же события могут произойти одновременно. Например, опыт — произведено два выстрела по мишени, событие A — выбито менее 18 очков, B — выбито менее 14 очков. События A и B совместны. Если стрелок набрал 12 очков, то наступили события A и B. Событие C — выбито более 18 очков, несовместно с событием A.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, или просто *несовместными*, если появление одного из них, исключает появление каждого из остальных.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, если в результате опыта произойдёт хотя бы одно из них.

Событие $\bar{A}$, состоящее из всех тех точек пространства элементарных событий Ω, которые не входят в A, называется *противоположным* событию A или его *отрицанием.* Если событие A произойдёт, то, очевидно, $\bar{A}$ не произойдёт и наоборот.

Противоположные события несовместны, но несовместные события могут и не быть противоположными. Например, события: A — при одном выстреле цель поражена и выбито чётное число очков и B — выбито 9 очков — несовместны, но $B \neq \bar{A}$. В данном случае событие $\bar{A}$ состоит из точек (0, 1, 3, 5, 7, 9).

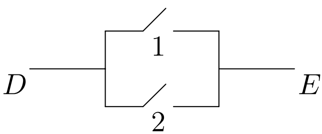
1.2. Объединение, пересечение и разность событий

Над событиями можно выполнять те же операции, что и над множествами. При этом надо предполагать, что все события принадлежат одному и тому же пространству элементарных событий Ω.

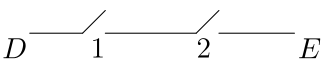
Событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступит хотя бы одно из событий A или B, называется *суммой* (*объединением*) событий A и B. Пишут $C = A \cup B$, или $C = A + B$. Событие $A + B$ состоит из объединения множеств, соответствующих событиям A и B.

Событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступают одновременно события A и B называется *произведением* (*пересечением*) событий A и B. Пишут $C = A \cap B$, или $C = A \cdot B$. Событие $A \cdot B$ состоит из тех точек множества Ω, которые принадлежат одновременно событиям A и B.

Если события A и B несовместны, то очевидно, $A \cdot B = \oslash$.



Пусть дана схема. Обозначим: A {контакт 1 замкнут}, B {контакт 2 замкнут}, C {цепь DE замкнута}. Цепь DE замкнута тогда и только тогда, когда замкнут хотя бы один из контактов, поэтому $C = A + B$. Заметим, что при этом случай, когда оба контакта замкнуты не исключается.



Пусть контакты 1 и 2 соединены последовательно. Через A, B и C обозначим те же события. Очевидно, что в этом случае $C = A \cdot B$, так как цепь DE замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта. Заметим, что если перейти к противоположным событиям $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, то в первом случае $\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, а во втором — $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$.

Понятия объединения и пересечения можно распространить на любое число слагаемых и сомножителей (что равносильно включению параллельно или последовательно в рассмотренные схемы любого числа контактов). Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то

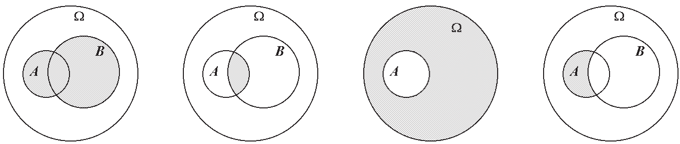
$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Разностью событий A и B называется событие C, наступающее тогда и только тогда, когда наступает событие A, но не наступает событие B. Пишут $C = A \setminus B$. Событие $A \setminus B$ состоит из тех точек Ω, которые принадлежат A, но не принадлежат B. Очевидно, что $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Отметим следующие свойства операций над событиями:

1) $A + B = B + A$; 2) $A + A = A$;
3) $\Omega + A = \Omega$; 4) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
5) $A \cdot B = B \cdot A$; 6) $A \cdot A = A$;
7) $\Omega \cdot A = A$; 8) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
9) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
10) $(A + B)(A + C) = A + B \cdot C$;
11) $\bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}$; 12) $\bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A + B}$.

Убедиться в справедливости этих свойств предлагается самостоятельно в качестве упражнения.



$C = A \cup B$ $C = A \cap B$ $C = \bar{A}$ $C = A \setminus B$

Введённые операции над событиями удобно изображать схематически, как это показано на рисунках (области, соответствующие событиям C, заштрихованы).

1.3. Понятие вероятности события

Имеется несколько подходов, поясняющих понятие вероятностей, указывающих правила приписывания случайному событию числа, характеризующего объективно существующую степень возможности наступления событий.

1. *Статистический подход к определению вероятности.* Пусть проведена серия из n опытов и в результате μ раз наступило событие A. Число $P^*(A) = \dfrac{\mu}{n}$, как мы уже отмечали, называется относительной частотой события A в данной серии опытов.

Если проделать другую серию опытов, то, как правило, получится другое число $P_1^*(A)$. Если в различных сериях опытов относительные частоты наступления события A отличаются друг от друга незначительно, то говорят, что частоты обладают свойством устойчивости.

В качестве *вероятности события* A принимают число $P(A)$, близкое к относительной частоте события A. Основанием для этого определения является теорема, доказанная Якобом Бернулли о том, что при увеличении числа опытов частота в некотором смысле сходится к вероятности.

Установить экспериментально устойчивость частоты наступления некоторого события можно только путём проведения большого числа испытаний в одинаковых условиях, что представляет большие трудности. Только после того, как для данного явления доказана устойчивость частоты его появления, выводы теории вероятностей об этом явлении имеют практическую ценность. Это ещё раз подчёркивает, что теория вероятностей изучает закономерности массовых явлений, так как только для таких явлений имеет смысл говорить о свойстве устойчивости частот.

2. *Классическое определение вероятностей.* Пусть пространство элементарных событий Ω дискретно и состоит из конечного числа n элементарных равновозможных несовместных событий ω_i, называемых случаями. Если событие A содержит m случаев, то по определению полагают

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Те m элементарных событий, из которых состоит событие A, называются случаями, благоприятствующими событию A. Таким образом, $P(A)$ равно числу случаев, благоприятствующих событию A, делённому на общее число случаев.

Способ введения вероятности по формуле (1.1) называют классическим. Исторически он появился первым и явился основой для дальнейшего абстрактного построения теории вероятностей.

Классическое определение вероятностей служит хорошей математической моделью тех случайных явлений, число исходов которых конечно, а сами исходы в каком-либо смысле симметричны, поэтому естественно предположение о их равновозможности. Иногда равновозможность исходов удаётся обеспечить соответствующей организацией эксперимента. Если же число исходов бесконечно или исходы неравноправны, то формула (1.1) не применима.

Пример 1. Подброшена монета два раза. Найти вероятность того, что при этом появится герб хотя бы один раз (событие A).

Решение. Пространство элементарных событий Ω состоит из четырёх точек (Г,Г), (Г,Ц), (Ц,Г), (Ц,Ц), т.е. $n = 4$. Событию A благоприятствует три точки (Г,Г), (Г,Ц), (Ц,Г), т.е. $m = 3$. По формуле (1.1) находим $P(A) = 3/4 = 0{,}75$.

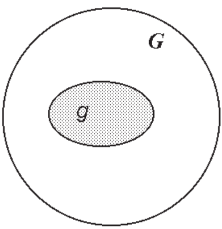
В задачах на классическое определение вероятности часто применяются понятия комбинаторики. Читателям, которые не знакомы с ними, рекомендуется изучить приложение А.

Пример 2. В партии, состоящей из 10 изделий, имеется четыре нестандартных. Из партии для контроля выбирается 5 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных будет две нестандартных (событие A).

Решение. Пять деталей из десяти можно выбрать C_{10}^5 способами (число сочетаний из 10 элементов по 5). Поэтому $n = C_{10}^5$. Три стандартных детали из шести можно выбрать C_6^3, а две нестандартных из четырёх — C_4^2 способами. Каждый выбор нестандартной детали может сочетаться с каждым выбором стандартной, поэтому $m = C_6^3 \cdot C_4^2$. По формуле (1.1)

$$P(A) = \frac{C_6^3 C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5\,!}{3\,! \cdot 2\,! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{10}{21}.$$

3. *Геометрическое определение вероятности.* Пусть пространством элементарных событий является некоторая область G плоскости, причём все её точки равноправны. Требуется определить вероятность попадания точки в область $g \subset G$ (событие A). Полагают, что



$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}, \tag{1.2}$$

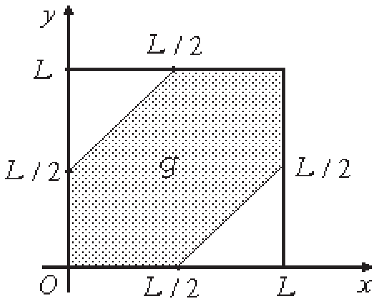
где S_G — площадь области G, S_g — площадь области g.

Геометрически определяют вероятности и для многомерных областей по формуле

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}, \tag{1.3}$$

где mes g и mes G — меры соответствующих областей.

Формулы (1.2) и (1.3) представляют собой обобщения классического определения вероятностей на несчётное множество элементарных событий.



Пример 3. На отрезке OA, длиной L, случайно поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше $L/2$.

Решение. Пусть задана декартова система координат OXY. Положение точки B будем отмечать на оси OX, а точки C — на оси OY. По условию задачи координаты точек B и C связаны неравенствами

$$\left.\begin{aligned} &0 \le x \le L, \\ &0 \le y \le L, \\ &|y - x| < \frac{L}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Точки квадрата со стороной L характеризуют все возможные расположения точек B и C (область G). Точки области g удовлетворяют неравенствам (a). На рисунке область g заштрихована.

$S_G = L^2$, $S_g = L^2 - 2\,\dfrac{1}{2}\dfrac{L}{2}\dfrac{L}{2} = \dfrac{3}{4}L^2.$

По формуле (1.3) находим $P\left(|BC| < \dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{0{,}75L^2}{L^2} = 0{,}75.$

Геометрическое определение вероятностей является математической моделью случайных экспериментов, число исходов которых хотя и бесконечно, но все они равноправны. Это очень частный случай и, как мы увидим позднее, имеет место только для равномерных распределений.

Пользуясь классическим или геометрическим определением вероятности, легко получить следующие свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1, \quad P(\oslash) = 0, \quad P(\Omega) = 1$;

2) если события A и B несовместны, то
$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

4. *Аксиоматическое определение вероятности.* Существуют и другие определения вероятности, имеющие также ограниченные применения. Но для теоретических построений достаточно лишь утверждения, что каждому событию можно сопоставить число, подчиняющееся определённым требованиям, называемое вероятностью этого события. Как это сделать практически в задачу теории вероятностей не входит, поскольку основной её целью является вывод правил, позволяющих по заданным вероятностям одних событий находить вероятности других, как-либо связанных с первыми. Поэтому в современной математической теории понятие вероятности вводят аксиоматически, описывая лишь требования самого общего характера, предъявляемые к этому понятию, абстрагируясь от конкретного содержания изучаемых событий.

Пусть F — поле событий для данного случайного эксперимента. Вероятностью $P(A)$ называется функция, определённая для всех $A \in F$ и удовлетворяющая трём условиям (аксиомам вероятностей):

1) $P(A) \ge 0$; 2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P\left(\sum\limits_k A_k\right) = \sum\limits_k P(A_k)$ для любой конечной или бесконечной последовательности наблюдаемых событий
$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ таких, что $A_i \cdot A_j = 0$ при $i \ne j$.

Основой для их введения явились интуитивно очевидные свойства вероятности, следующие из классического определения. Аксиоматическая теория вероятностей была создана А.Н. Колмогоровым.

Итак, введены три исходных понятия, — пространство элементарных событий (Ω), поле событий (F) и вероятность событий (P) — лежащие в основе теории вероятностей. Тройка (Ω, F, P) называется *вероятностным пространством* для данного случайного эксперимента.

1.4. Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Формулы умножения вероятностей

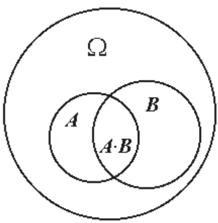
С вероятностной точки зрения, вероятность события даёт полную исчерпывающую характеристику этого события. Если же имеются два случайных события A и B, то возникает проблема характеристики их взаимосвязи. Если известно, что событие B наступило, то это может дать в некоторых случаях дополнительную информацию о событии A, а потому изменить его вероятность, а в других случаях эта информация не оказывает никакого влияния на вероятность события A.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется *условной* вероятностью события A относительно события B. Обозначается $P(A/B)$.

Аналогично определяется условная вероятность $P(B/A)$.

Установим связь между условными и безусловными вероятностями для тех случайных экспериментов, для которых применимо геометрическое определение вероятностей.

Пусть $P(B) > 0$ и s, s_1, s_2, s_{12} — площади областей, соответствующих пространству элементарных событий Ω и событиям A, B, $A \cdot B$. Схематически множества Ω, A, B и $A \cdot B$ изображены на рисунке. Если стало известно, что событие B



произошло, то пространством элементарных событий Ω' для A становится область, соответствующая событию B. Событию A в этом случае соответствует лишь область $A \cdot B$. По формуле (1.2) получаем, что $P(A/B) = \dfrac{s_{12}}{s_2} = \dfrac{s_{12}/s}{s_2/s}$. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \tag{1.4}$$

Аналогично, если $P(A) \neq 0$, можно получить, что

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \tag{1.5}$$

В аксиоматической теории вероятностей соотношения (1.4) и (1.5) принимают в качестве определения условных вероятностей $P(A/B)$ и $P(B/A)$.

Говорят, что событие A *не зависит* от события B, если $P(A/B) = P(A)$. Если же $P(A/B) \neq P(A)$, то говорят, что событие A *зависит* от B.

Из формул (1.4) и (1.5) следует, что если событие A не зависит от B и $P(AB) > 0$, то и событие B не зависит от A. Действительно, если $P(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$, то

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{P(A \cdot B)P(B)}{P(A \cdot B)} = P(B),$$

т.е. и событие B не зависит от A. Следовательно, свойство зависимости и независимости двух событий взаимно, и можно дать определение: события A и B называются *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Если же наступление одного из них изменяет вероятность наступления другого, то события называются *зависимыми*.

Пример 1. Опыт: последовательно подброшены две монеты. События: B {выпала хотя бы одна цифра}, C {герб на второй монете}. Найти $P(B)$, $P(B/C)$ и выяснить, зависимы или нет события B и C.

Решение. Пространство элементарных событий содержит четыре точки: (Г,Г), (Г,Ц), (Ц,Г) и (Ц,Ц), три из них — (Г,Ц), (Ц,Г), (Ц,Ц) благоприятствуют событию B. $P(B) = \dfrac{3}{4}$. Если событие C наступило, то имело место одно из двух событий — (Г,Г) или (Ц,Г), а потому $P(B/C) = \dfrac{1}{2} \neq P(B)$, т.е. события B и C зависимы.

В случае n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно рассматривать многие условные вероятности, например $P(A_n/A_1)$, $P(A_n/A_1 \times \times A_2)$, …, $P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$ и понятия независимости и зависимости распространить на любое число событий. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них не зависит от каждого из остальных и от всех возможных их пересечений. Если это условие не выполняется, то события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются зависимыми.

Из соотношений (1.4) и (1.5) следуют равенства

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B), \tag{1.6}$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A), \tag{1.7}$$

называемые формулами умножения вероятностей. Практическое значение они имеют в тех случаях, когда условные вероятности $P(A/B)$ или $P(B/A)$ удаётся найти, не пользуясь формулами (1.4) и (1.5).

Пример 2. В урне находятся 3 белых и 7 чёрных шаров. Последовательно, без возвращения извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут чёрными.

Решение. Введём события: A {первый шар чёрный}, B {второй шар чёрный}. Тогда $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. По формуле (1.7) получаем $P(A \cdot B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$.

Если события A и B независимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.8}$$

Верно и обратное утверждение.

Пример 3. В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Взят один шар, возвращён в урну, после перемешивания взят другой шар. События: A {первый шар чёрный}, B {второй шар белый}. Найти $P(A \cdot B)$.

Решение. Применяя классическое определение вероятности, находим $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$. В данном случае события A и B независимы. По формуле (1.8) умножения вероятностей получаем: $P(A \cdot B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}21$.

Формулы умножения вероятностей можно обобщить на любое число сомножителей. Например, для трёх сомножителей:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2)$.

Если события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

1.5. Правило сложения вероятностей

Формулу для вычисления $P(A+B)$ получим для частного случая, когда применимо геометрическое определение вероятностей. Через S_Ω, S_{A+B}, S_A, S_B, S_{AB} обозначим площади, соответствующие пространству элементарных событий Ω, событиям $A+B$, A, B и AB. Очевидно, $S_{A+B} = S_A + S_B - S_{AB}$ или $\dfrac{S_{A+B}}{S_\Omega} = \dfrac{S_A}{S_\Omega} + \dfrac{S_B}{S_\Omega} - \dfrac{S_{AB}}{S_\Omega}$. Отсюда, по геометрическому определению вероятности, получаем

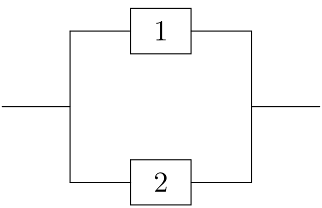
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{1.9}$$

Будем считать, что и в общем случае формула (1.9) справедлива.

Если события A и B несовместны, то $A \cdot B = 0$, $P(A \cdot B) = 0$, поэтому

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.10}$$

Пример 1. Прибор состоит из двух блоков, дублирующих друг друга (соединённых параллельно). Найти вероятность безотказной работы прибора, если вероятность безотказной работы первого блока равна $p_1 = 0{,}8$, а второго — $p_2 = 0{,}9$.



Решение. Если A {прибор работает безотказно}, B {первый блок работает безотказно}, C{второй блок работает безотказно}, то $A = B + C$. По формуле (1.9) $P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cdot C)$. При параллельном соединении блоки работают независимо, поэтому $P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C)$. По условию задачи $P(B) = 0{,}8$, $P(C) = 0{,}9$, поэтому $P(A) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98$.

Пример 2. Два орудия независимо друг от друга произвели залп по одной цели. Вероятность попадания первым орудием $P_1 = 0{,}6$, а вторым — $P_2 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что в цель попадёт только одно орудие (какое, неизвестно).

Решение. Введём события A_1{первое орудие в цель попало}, A_2{второе орудие в цель попало}, $\bar{A}_1${первое орудие в цель не попало}, $\bar{A}_2${второе орудие в цель не попало}, B{в цель попало только одно орудие}. Тогда $B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$. События $A_1 \cdot \bar{A}_2$ и $\bar{A}_1 \cdot A_2$, очевидно, несовместны. Поэтому применима формула (1.10): $P(B) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2)$. Так как выстрелы независимы, то $P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2)$, $P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = P(\bar{A}_1) \times$ $\times P(A_2)$. По условию задачи $P(A_1) = 0{,}6$, $P(\bar{A}_1) = 1 - 0{,}6 =$ $= 0{,}4$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(\bar{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Следовательно, $P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46$.

Предлагается самостоятельно найти вероятность того, что оба орудия промахнутся, оба орудия поразят цель.

Пример 3. Три орудия произвели независимо друг от друга залп по одной цели. Вероятность попадания первым орудием $P_1 = 0{,}6$, а вторым — $P_2 = 0{,}7$, третьим — $P_3 = 0{,}8$. Найти вероятность разрушения цели, если для этого достаточно хотя бы одного попадания.

Решение. События A\{цель разрушена\} и $\bar{A}$\{цель не разрушена\} противоположны, поэтому

$$A + \bar{A} = \Omega, \; P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Обозначим $\bar{A}_i$\{i-е орудие в цель не попало\}, $i = 1, 2, 3$. Тогда $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ (все три орудия промахнулись). По условию задачи $P(\bar{A}_1) = 0{,}4$, $P(\bar{A}_2) = 0{,}3$, $P(\bar{A}_3) = 0{,}2$. Находим

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3), \; P(\bar{A}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024.$$

Поэтому $P(A) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$.

Предлагается вычислить вероятности следующих событий в примере 3: B_1\{ровно одно попадание\} (отв. 0,188), B_2\{ровно два попадания\} (отв. 0,452), B_3\{три попадания\} (отв. 0,336), B_4\{не менее одного попадания\} (отв. 0,976), B_5\{не более одного попадания\} (отв. 0,212), B_6\{не менее двух попаданий\} (отв. 0,788).

Формулу (1.9) можно обобщить на любое число слагаемых. Например, для трёх слагаемых

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) -$$
$$- P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

1.6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть событие A может произойти с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами. Предположим, что известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ и условные вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$. Требуется найти вероятность $P(A)$ события A.

В нашем случае $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$ есть событие достоверное. Можем записать, что

$$A = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n \quad (1.11)$$

Так как события H_i несовместны, то несовместны и события AH_i. Поэтому по правилу сложения вероятностей несовместных событий и правилу умножения вероятностей из (1.11) получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots +$$
$$+P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \quad (1.12)$$

Соотношение (1.12) называют формулой полной вероятности.

Пример 1. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}35$ и $p_3 = 0{,}40$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Определить вероятность того, что случайно взятая лампа проработает заданное число часов.

Решение. Рассмотрим события: A{лампа проработает заданное число часов}, H_1, H_2, H_3{лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии.} По условию задачи $P(H_1) = p_1 = 0{,}25$, $P(H_2) = p_2 = 0{,}35$, $P(H_3) = p_3 = 0{,}40$, $P(A/H_1) = 0{,}1$, $P(A/H_2) = 0{,}2$, $P(A/H_3) = 0{,}3$. По формуле (1.12) находим: $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$, $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}40 \cdot 0{,}3 = 0{,}215$.

Пример 2. Из 10 приборов 6 — первого сорта, а 4 — второго. Вероятность исправности прибора первого сорта $P_1 = 0{,}9$, а второго — $P_2 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что случайно взятые два прибора исправны.

Решение. Пусть: A\{оба прибора исправны\}, гипотезы: H_1\{оба взятых прибора первого сорта\}, H_2\{первый взятый прибор первого, а второй — второго сорта\}, H_3\{первый взятый прибор второго сорта, а второй — первого\}, H_4\{оба прибора второго сорта\}.

Применяя формулы умножения вероятностей, находим:

$$P(H_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90}, \quad P(A/H_1) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81,$$
$$P(H_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}, \quad P(A/H_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63,$$
$$P(H_3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}, \quad P(A/H_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63,$$
$$P(H_4) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}, \quad P(A/H_4) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

По формуле (1.12) получаем:

$$P(A) = \frac{30}{90} \cdot 0{,}81 + \frac{24}{90} \cdot 0{,}63 + \frac{24}{90} \cdot 0{,}63 + \frac{12}{90} \cdot 0{,}49 = \frac{10{,}07}{15} \cong 0{,}67.$$

Пусть по-прежнему имеет место (1.11), т.е. $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$, где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа несовместных событий. Предположим, что произведён эксперимент, в результате которого событие A наступило. Эта дополнительная информация позволяет произвести переоценку вероятностей гипотез H_i, вычислив $P(A/H_i)$.

По формуле умножения вероятностей
$P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$. Отсюда
$P(H_i/A) = \dfrac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$, или вычислив $P(A)$ по формуле (1.12), получаем

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Эту формулу называют формулой Байеса.

Вероятности $P(H_i)$ — это априорные вероятности, они вычислены до опыта. Вероятности же $P(H_i/A)$ — это апостериорные вероятности, они вычислены после опыта. Формула Байеса (1.13) позволяет вычислить апостериорные вероятности по априорным и условным вероятностям события A.

Обратим внимание на то, что в числителе формулы Байеса стоит вероятность появления события A вместе с гипотезой H_i до проведения опыта.

Пример 3. Производится стрельба из трёх орудий по одной цели. Вероятность попадания первым орудием $p_1 = 0{,}6$, вторым — $p_2 = 0{,}7$, третьим — $p_3 = 0{,}8$. Найти вероятность разрушения цели, если известно, что при одном попадании цель будет разрушена с вероятностью $p_4 = 0{,}1$, при двух — $p_5 = 0{,}4$, при трёх — $p_6 = 0{,}9$. В результате одного залпа цель была разрушена. Найти вероятность того, что при этом было два попадания в цель.

Решение. Пусть $A\{$цель разрушена$\}$. Гипотезы: $H_k\{$имеется k попаданий в цель$\}$, $k = 0, 1, 2, 3$, события $A_i\{i$-е орудие попало в цель$\}$, $\bar{A}_i\{i$-е орудие промахнулось$\}$, $i = 1, 2, 3$. Находим:

$P(H_0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$, $P(A/H_0) = 0$,
$P(H_1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = 0{,}036 + {}$ $+ 0{,}056 + 0{,}096 = 0{,}188$, $P(A/H_1) = 0{,}1$,
$P(H_2) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}084 + {}$ $+0{,}144 + 0{,}224 = 0{,}452$,
$P(A/H_2) = 0{,}4$, $P(H_3) = P(A_1 A_2 A_3) = 0{,}336$, $P(A/H_3) = 0{,}9$.

По формуле (1.13) находим $P(H_2/A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)}$,

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}452 \cdot 0{,}4}{0{,}024 \cdot 0 + 0{,}188 \cdot 0{,}1 + 0{,}452 \cdot 0{,}4 + 0{,}336 \cdot 0{,}9} = \frac{0{,}1808}{0{,}502} \approx 0{,}360.$$

Найдите самостоятельно вероятности того, что было: а) одно попадание в цель (отв. $\approx 0{,}04$), б) три попадания в цель (отв. $\approx 0{,}6$).

1.7. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число появления события в схеме Бернулли

Часто встречаются задачи, в которых один и тот же опыт повторяется многократно. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A. Нас будет интересовать число наступлений события A в серии n опытов (испытаний). Например, при проверке партии радиоламп важно общее количество годных, а не результат проверки каждой отдельной лампы.

Предположим, что проводится серия n опытов по схеме, называемой схемой Бернулли и заключающейся в следующем:

1) опыты независимы, т.е. результат каждого опыта не оказывает влияния на другие;

2) вероятность $P(A) = p$ наступления события A в каждом опыте одна и та же.

Построим математическую модель схемы Бернулли. В случае одного опыта пространство элементарных событий состоит из двух элементов. Один из них, соответствующий наступлению события A, назовём "успехом"и будем обозначать единицей, а другой назовём "неудачей"и будем обозначать нулём. Если вероятность успеха p, то $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p = q$. Если проводится серия n испытаний по схеме Бернулли, то исход каждой отдельной серии однозначно определяется последовательностью $\omega = \{1, 0, 0, 1, \ldots, 0, 1\}$ из нулей и единиц длины n. Требованию независимости опытов удовлетворим, если положим $P(\omega) = p^{\mu(\omega)}q^{n-\mu(\omega)}$, где $\mu(\omega)$ — число единиц в последовательности ω. Схемой испытаний Бернулли назовём пространство элементарных событий Ω, состоящее из всех возможных последовательностей $\{\omega\}$ длины n, состоящих из нулей и единиц, причём для любого $\omega \in \Omega$ полагается $P(\omega) = p^{\mu(\omega)}q^{n-\mu(\omega)}$, $0 \le p \le 1$, $q = 1 - p$.

Если событие C состоит из подмножества $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, то $P(C) = \sum_{i=1}^{m} p^{\mu(\omega_i)}q^{n-\mu(\omega_i)}$. Можно показать, что введённые таким образом вероятности удовлетворяют всем аксиомам, определяющим вероятность.

Пусть проводится серия n испытаний по схеме Бернулли.

Поставим задачу: найти вероятность того, что событие A наступит при этом m раз (событие B). Эту вероятность будем обозначать $P_n(m)$, т.е. $P(B) = P_n(m)$. Событие B состоит из тех последовательностей $\{\omega\}$, которые содержат ровно m единиц. Таких последовательностей, очевидно, C_n^m, поэтому

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.14}$$

Напомним, что $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний из n по m.

Соотношение (1.14) называют формулой Бернулли или формулой биномиального распределения, так как (1.14) представляет собой член бинома $(q+p)^n$, содержащий p^m.

Пример 1. Произведены четыре независимых выстрела по мишени. Найти вероятность того, что мишень будет поражена три раза, если вероятность попадания при одном выстреле равна $p = 0{,}6$.

Решение. Полагая в формуле (1.14) $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, получаем $P_4(3) = C_4^3(0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}216\cdot 0{,}4 = 0{,}3456$.

По условиям этого примера найти, что мишень будет поражена: а) ни разу (отв. 0,0256); б) один раз (отв. 0,1536); в) два раза (отв. 0,3456); г) четыре раза (отв. 0,1296).

Число k_0 называют наивероятнейшим, если $P_n(k_0)$ не меньше $P_n(k)$ при всех k. Исследуя поведение $P_n(k)$ при возрастании k можно показать, что:

1) если число $np-q$ дробное, то существует единственное наивероятнейшее число k_0, оно удовлетворяет условию

$$np - q < k_0 < np + p;$$

2) если число np целое, то $k_0 = np$;

3) если число $np-q$ целое, то существуют два наивероятнейших числа $k_1 = np - q$ и $k_2 = np - q + 1 = np + p = p(n+1) = k_1 + 1$.

Пример 2. Найти наивероятнейшее число годных деталей среди 19 проверяемых, если вероятность детали быть годной равна 0,9.

Решение. В нашем случае $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 19$. Число $np-q = 0{,}9 \cdot 19 - 0{,}1 = 17$ оказалось целым. Поэтому существуют два наивероятнейших числа $k_1 = 17$ и $k_2 = 18$.

1.8. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

При больших m и n вычисление вероятностей $P_n(m)$ по формуле (1.14) представляет значительные трудности, так как возникают факториалы больших чисел и большие степени p и q. Для таких случаев найдены приближённые формулы, позволяющие с достаточной для практических задач точностью определить эти вероятности.

Теорема 1 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Вероятность того, что в n независимых опытах событие A наступит m раз, если в каждом из опытов вероятность появления события A постоянна и равна $p (0 < p < 1)$, приближённо выражается формулой:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{1.15}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ (напомним, что $\exp(x) = e^x$).

Теорему примем без доказательства. Функция $\varphi(x)$ табулирована. (см. приложение В). Заметим, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример 1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

Решение. Полагая в формуле (1.15) $n = 100$, $m = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, получаем

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\,\varphi\left(\frac{75-80}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\,\varphi(1{,}25) = \frac{1}{4}\,0{,}1826 = 0{,}0457.$$

На практике часто требуется найти вероятность того, что число m наступления события A содержится в заданных пределах: $m_1 \leq m \leq m_2$. При небольших n можно воспользоваться формулой (1.14) и получить

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

При больших n величину $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ можно вычислить приближённо, пользуясь следующей теоремой.

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что в n независимых опытах событие A наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раза, если в каждом из опытов вероятность наступления события A постоянна и равна $p(0 < p < 1)$, приближённо равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.16}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — функция Лапласа;
$x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.
Заметим, что функция Лапласа нечётная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для функции Лапласа имеются подробные таблицы (приложение С).

Пример 2. Вероятность появления события A в каждом из 2100 независимых испытаний равна $p = 0{,}7$. Найти
$P(1470 \le m \le 1500)$.

Решение. Полагая в формуле (1.16) $n = 2100$, $m_1 = 1470$, $m_2 = 1500$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, получаем $P_{2100}(1470 \le m \le 1500) \cong$
$\cong \Phi\left(\dfrac{1500 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) - \Phi\left(\dfrac{1470 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) = \Phi\left(\dfrac{10}{7}\right) -$
$-\Phi(0) \cong \Phi(1{,}43) - \Phi(0) \cong 0{,}4236.$

1.9. Простейший (пуассоновский) поток событий. Формула Пуассона

Часто встречаются задачи, связанные с изучением распределения некоторых событий на данном промежутке времени. Например, на станцию скорой помощи в среднем за час поступает k вызовов. Какова вероятность, что за данную минуту поступит m вызовов? Наладчик обслуживает группу станков-автоматов. За смену в среднем случается k неполадок. Какова вероятность, что в течение данного часа произойдёт m неполадок?

Последовательность событий, наступающих в случайные, заранее неизвестные моменты времени называют *потоком событий.* Поток событий называется *простейшим*, или *пуассоновским*, если он обладает следующими тремя свойствами.

1. Свойство стационарности: вероятность $P_t(m)$ появления m событий на любых непересекающихся промежутках времени t зависит только от величин m и t и не зависит от начала отсчёта времени.

2. Свойство отсутствия последействия или независимости событий: вероятность $P_t(m)$ не зависит от того, появлялись или нет события в предшествующие промежутки времени.

3. Свойство ординарности: вероятность $P_{\Delta t}(1)$ появления события один раз в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ есть бесконечно малая величина первого порядка малости относительно Δt; вероятность $P_{\Delta t}(m > 1)$ есть бесконечно малая порядка выше первого относительно Δt.

Пусть в течение времени t действует простейший поток. Требуется вычислить вероятность $P_t(m)$ того, что за промежуток времени t событие A наступит m раз. Отрезок времени t разобьём на n одинаковых частей $\Delta t = \dfrac{t}{n}$ (n достаточно велико). На каждом отрезке Δt по свойству ординарности может появиться событие не более одного раза. Возможностью появления события более одного раза мы пренебрегаем. По свойству же ординарности $P_{\Delta t} \approx \lambda \Delta t = \dfrac{\lambda t}{n}$ ($\lambda = \text{const}$). Величина λ является одной из основных характеристик потока. Она показывает среднее число событий, появляющихся в единицу времени. Эту величину называют интенсивностью потока. Промежуток времени Δt_i назовём пустым, если в течение этого времени событие потока не наступило, и занятым, если событие произошло.

Каждый отдельный промежуток времени Δt можно рассматривать как некоторый опыт, в результате которого этот промежуток может оказаться занятым с вероятностью $p = \lambda \dfrac{t}{n}$, или быть свободным с вероятностью $q = 1 - \dfrac{\lambda t}{n}$. Требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в n опытах m отрезков окажется занятыми. Эту вероятность можно подсчитать, воспользовавшись формулой Бернулли (1.14):

$$P_n(m) = C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}.$$

При достаточно больших n величина $P_n(m)$ приближённо равна $P_t(m)$. Чтобы найти $P_t(m)$, перейдём в последнем соотношении к пределу при $n \to \infty$.

$$P_t(m) = \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{(\lambda t)^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-m} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots\ldots \cdot \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad \text{так как}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}, \ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-m} = 1.$$

Таким образом,

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}. \tag{1.17}$$

Соотношение (1.17) называется формулой Пуассона. Обозначая $\lambda t = a$, формулу (1.17) можно переписать в виде

$$P_t(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{1.18}$$

Эту формулу часто используют для приближённого вычисления величины $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ при больших n и малых p, полагая $a = pn$ (в таких случаях применение формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа затруднительно). Основанием для этого служит тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$ при условии, что $pn = a$.

Пример 1. Станция скорой помощи за час получает в среднем k вызовов. Найти вероятность того, что за данную минуту поступит m вызовов.

Решение. Можно применить формулу (1.17), положив в ней $\lambda t = \dfrac{k}{60}$. Получим $P_{\frac{1}{60}}(m) = \dfrac{\left(\dfrac{k}{60}\right)^m}{m!} e^{-\frac{k}{60}}$.

Пример 2. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна $p = 0{,}002$. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено менее трёх изделий.

Решение. Искомую вероятность $P_{500}(m < 3)$ можно представить в виде суммы $P_{500}(m < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2)$. Так как p мало, а n велико, то можно применить для приближённого вычисления каждого из слагаемых формулу (1.18), положив $a = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$. Поэтому $P_{500}(m < 3) = e^{-1} + e^{-1} + \dfrac{1}{2}e^{-1} = \dfrac{5}{2}e^{-1} = \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}3679 = 0{,}9197$.

1.10. Цепи Маркова

Рассмотрим следующее обобщение схемы испытаний Бернулли.

Пусть проводится последовательность испытаний по схеме: 1) в каждом испытании может появиться одно из несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$, образующих полную группу; 2) условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s - м испытании наступит событие A_j, если в $(s-1)$ - м испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предыдущих испытаний. Такую последовательность испытаний называют цепью Маркова.

Цепи Маркова применяются для изучения систем, которые в каждый момент времени могут находиться в одном из m состояний $(m = 1, 2, \ldots, k)$, обозначенных как события $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Различают цепи Маркова с непрерывным временем, когда изменение состояния системы происходит в любые случайные моменты времени, и с дискретным временем, когда изменение состояния системы происходит в определённые фиксированные моменты времени. Цепь называется однородной, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ перехода из состояния A_i в состояние A_j не зависит от номера испытания s. Будем рассматривать только дискретные однородные цепи с конечным числом состояний. В этом случае вместо $p_{ij}(s)$ можно записать p_{ij}. Величину p_{ij} называют переходной вероятностью из состояния с номером i в состояние с номером j. Если число состояний конечно и равно k, то из чисел p_{ij} можно построить квадратную матрицу

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix},$$

называемую матрицей перехода системы. Сумма элементов каждой строки этой матрицы равна единице, так как эта сумма совпадает с вероятностью достоверного события, т.е.

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \ (i = 1, 2, \dots, k).$$

Заметим, что схема испытаний Бернулли является частным случаем однородной цепи Маркова с двумя состояниями $A_1 = A$ и $A_2 = \overline{A}$. Если при этом $P(A) = p$, то матрица перехода, очевидно, имеет вид

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{bmatrix},$$

что следует из определения схемы Бернулли.

Обозначим за $P_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате n испытаний система перейдёт из состояния i в состояние j. Заметим, что $P_{ij}(1) = p_{ij}$. Для вычисления величин $P_{ij}(n)$ рассмотрим следующие события: A {система за n шагов перейдёт из начального состояния i в состояние j}; B_r $(r = 1, 2, \dots, k)$ — гипотезы {за m шагов система из состояния i перейдёт в промежуточное состояние r}. Ясно, что $P(A/B_r) = P_{rj}(n-m)$. По формуле полной вероятности (1.12) имеем

$$P(A) = \sum_{r=1}^{k} P(B_r)P(A/B_r), \text{ или}$$

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m)P_{rj}(n-m). \qquad (1.19)$$

Эту формулу называют равенством Маркова.

Зная переходные вероятности $p_{ij} = P_{ij}(1)$, можно найти вероятности $P_{ij}(2)$ перехода системы из состояния i в состояние

j за два шага. Для этого в равенстве (1.19) положим $n = 2$, $m = 1$. Получим

$P_{ij}(2) = \sum\limits_{r=1}^{k} P_{ir}(1)P_{rj}(2-1)$, или

$$P_{ij}(2) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}p_{ri}. \qquad (1.20)$$

По формуле (1.20) можно найти все элементы матрицы $\mathcal{P} = [P_{ij}(2)]$, причём $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^2$. Положив в (1.19) $n = 3$, $m = 2$, получим $[P_{ij}(3)] = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1^3$. В общем случае

$$[P_{ij}(n)] = \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1^n. \qquad (1.21)$$

Пример 1. Дана матрица перехода $\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$. Найти матрицу $[P_{ij}(2)] = \mathcal{P}_2$.

Решение. По формуле (1.21) при $n = 2$ получаем:

$$\mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 & 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \\ 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 & 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}04 + 0{,}24 & 0{,}16 + 0{,}56 \\ 0{,}06 + 0{,}21 & 0{,}24 + 0{,}49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}28 & 0{,}72 \\ 0{,}27 & 0{,}73 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Доказать, что в случае цепи Маркова, определяемой схемой Бернулли, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1^n = \mathcal{P}_1$.

Решение. Справедливость этого равенства следует из определения схемы Бернулли, и из того, что

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

2. Одномерные случайные величины

2.1. Понятие случайной величины и её закона распределения. Одномерные дискретные случайные величины

Пусть для некоторого случайного эксперимента построено пространство элементарных событий Ω. *Случайной величиной* называется функция $\xi(\omega)$, определённая на пространстве элементарных событий Ω, со значениями в R или R_n. Множество значений $\xi(\omega)$ называют множеством значений случайной величины.

При этом случайная величина называется одномерной, если множество её значений есть подмножество вещественных чисел. Если же область значений входит в R_n, то случайная величина называется n-мерной. В последнем случае каждой точке пространства элементарных событий сопоставляется n-мерный вектор, называемый случайным вектором.

Если множество значений случайной величины конечно или счётно, то такая величина называется *дискретной*. Среди случайных величин, множество значений которых несчётно, наиболее важен подкласс величин, называемых *непрерывными*. Понятие непрерывных случайных величин уточним позднее.

Примеры случайных величин: число вызовов за 1 час на станции скорой помощи, продолжительность времени между двумя соседними вызовами, время безотказной работы радиолампы, количество успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли и др.

С помощью случайных величин удаётся изучение случайных событий сводить к изучению числовых множеств и их отображений, что позволяет использовать в теории вероятностей хорошо разработанный аппарат математического анализа. В этом и заключается основная цель введения случайной величины.

Случайные величины будем обозначать большими буквами: X, Y, $Z, \ldots$, а их значения малыми x, y, $z, \ldots$.

Значения случайной величины, как правило, неравноправны, они различаются вероятностями их наступления. Например, производится серия из 100 испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}8$. Возникает случайная величина X — число успехов. Её область значений $(0{,}1,\ldots,100)$. Ясно, что крайние значения 0 или 100 очень маловероятны. Для полной характеристики случайной величины нужно указать не только её область значений, но и вероятности этих значений.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений, называется *законом распределения* случайной величины.

Закон распределения представляет собой некоторую функцию, заданную на множестве значений случайной величины со значениями в $[0{,}1]$, или сложную функцию на пространстве элементарных событий. Как и всякая функция закон распределения может быть задан: а) аналитически, б) графически, в) таблично.

Остановимся более подробно на одномерной дискретной случайной величине. В этом случае наиболее удобен табличный способ задания закона распределения, в одной строке таблицы указывают значения случайной величины, а в другой — вероятности этих значений:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

,

где $p_i = P(X = x_i)$. Эту таблицу называют *рядом распределения* X. Так как событие A{случайная величина X примет одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$} достоверно, то $p_1 + p_2 + \ldots \ldots + p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ (условие нормировки).

Пример 1. Произведено два независимых выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, а при втором — 0,8. Найти ряд распределения случайной величины X — число попаданий в мишень.

Решение. Случайная величина X может принять значения $(0{,}1{,}2)$. Найдём вероятности этих значений. Используя правила умножения и сложения вероятностей, получаем: $P(X = 0) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$ (два промаха с вероятностями $1 - 0{,}6 = 0{,}4$ и $1 - 0{,}8 = 0{,}2$); $P(X = 1) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44$ (попадание при первом выстреле и промах при втором и наоборот); $P(X = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$ (попадание при первом и втором выстрелах). Записываем ряд распределения:

x	0	1	2
p	0,08	0,44	0,48

Пример 2. Производится n опытов по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть X — число успехов. Случайная величина X имеет область значений $\{0,1,2,\ldots,n\}$. Вероятности этих значений можно найти по формуле (1.14). Ряд распределения имеет вид:

x	0	1	$\ldots$	m	$\ldots$	n
p	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$	$\ldots$	p^n

Эту таблицу называют распределением Бернулли, или биномиальным распределением.

Пример 3. Пусть производятся испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. X — число испытаний до первого успеха. Найти самостоятельно ряд распределения X.

Ответ:

x	1	2	3	4	$\ldots$	k	$\ldots$
p	p	qp	q^2p	q^3p	$\ldots$	$q^{k-1}p$	$\ldots$

Закон распределения, описываемый этой таблицей, называется геометрическим распределением (вероятности образуют геометрическую прогрессию).

2.2. Функция распределения одномерной случайной величины и её свойства

Ряд распределения невозможно составить для случайных величин, область значений которых несчётна. Для характеристики таких величин указывают не вероятности отдельных значений (что сделать невозможно), а вероятности попадания этих значений в некоторые области. Одним из таких способов описания закона распределения и является функция распределения.

Пусть дана одномерная случайная величина X. Функция $F(x)$, определяемая равенством $F(x) = P(X < x)$, указывающая вероятность попадания значений случайной величины в область $(-\infty, x)$ вещественных чисел, называется *функцией распределения* случайной величины X.

Рассмотрим свойства функции распределения.

1. $F(x)$ определена на всей числовой оси (независимо от области значений X).

2. $0 \leq F(x) \leq 1$. Следует из определения $F(x)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, так как событие $X < +\infty$ достоверно, а событие $X < -\infty$ невозможно. Если значения случайной величины распределены на (a, b), то $F(a) = 0$, $F(b) = 1$.

4. $F(x)$ есть неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Для доказательства этого свойства рассмотрим три события: $A\{X < x_1\}$, $B\{x_1 \leq X < x_2\}$, $C\{X < x_2\}$. Очевидно, что $C = A + B$. Так как события A и B несовместны, то $P(C) = P(A) + P(B)$, т.е. $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$, следовательно,

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2). \tag{2.1}$$

Поскольку $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, то отсюда следует, что $F(x_2) \geq F(x_1)$. Свойство 4 доказано. Из соотношения (2.1) получаем

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2.2}$$

Пользуясь формулой (2.2), находят вероятность попадания значений случайной величины на любой промежуток.

Полагая в (2.2) $x_2 = x_1 + \Delta x$, получаем

$$P(x_1 \leq X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \tag{2.3}$$

Если функция $F(x)$ непрерывна в точке x_1, то переходя в формуле (2.3) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $P(X = x_1) = 0$, т.е. вероятность принять какое-либо заранее фиксированное значение равна нулю. Под непрерывными случайными величинами будем понимать те, для которых функция $F(x)$ непрерывна. Для непрерывных случайных величин равенство нулю вероятности не означает невозможности события. Ведь в результате опыта случайная величина примет какое-то значение, хотя до опыта вероятность этого равна нулю.

5. Функция $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке x_0, т.е. существует $F(x_0)$, и $F(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} F(x)$.

6. При любом x_0 существует $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} F(x)$, равный $P(X \leq x_0)$.

Свойства 5 и 6 примем без доказательства.

Как видим, функция распределения может иметь разрывы только первого рода (скачки), причём в силу монотонности $F(x)$ и неравенства $0 \le F(x) \le 1$ таких разрывов счётное или конечное множество.

Всякая функция $F(x)$, удовлетворяющая перечисленным свойствам, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0{,}5x - 1 & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) $P(X < 2{,}5)$; б) $P(2{,}4 \le X < 3{,}2)$; в) $P(1 \le X < 3)$; г) $P(3 < X < 5)$.

Решение: а) $P(X < 2{,}5) = F(2{,}5) = 0{,}5 \cdot 2{,}5 - 1 = 0{,}25$;
б) по формуле (2.2) находим $P(2{,}4 \le X < 3{,}2) = F(3{,}2) -$
$-F(2{,}4) = 0{,}5 \cdot 3{,}2 - 1 - 0{,}5 \cdot 2{,}4 + 1 = 0{,}4$;
в) $P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}5 \cdot 3 - 1 - 0 = 0{,}5$;
г) $P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - 0{,}5 \cdot 3 + 1 = 0{,}5$.

От ряда распределения дискретной случайной величины

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

можно перейти к функции распределения, пользуясь соотношением

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta(x - x_i) p_i, \tag{2.4}$$

где $\eta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le x_i, \\ 1, & \text{если} \quad x > x_i. \end{cases}$

Из (2.4) следует, что функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой со скачками в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, равными вероятностям этих значений.

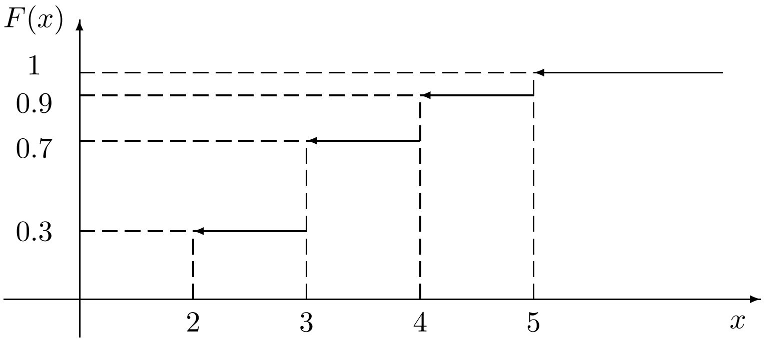
Пример 2. Найти функцию распределения дискретной случайной величины X по заданному ряду распределения.

x	2	3	4	5
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Решение. Применяя формулу (2.4), получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 2, \\ 0{,}3, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}7, & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x > 5. \end{cases}$$

График $F(x)$ имеет вид:



2.3. Плотность распределения одномерной случайной величины

Случайная величина X называется *абсолютно непрерывной* в точке x, если её функция распределения $F(x)$ дифференцируема.

Полагая в выражении (2.3) $x_1 = x$, можем записать

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Поделим обе части этого равенства на Δx и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \qquad (2.5)$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}$, если он существует и конечен, называется плотностью распределения случайной величины x и обозначается $\rho(x)$, т.е.

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.6)$$

Как следует из соотношения (2.5), если случайная величина X абсолютно непрерывна, то плотность распределения $\rho(x)$ существует и при этом

$$\rho(x) = F'(x). \tag{2.7}$$

Отметим свойства функции $\rho(x)$.

1. $\rho(x) \geq 0$ как производная от неубывающей функции.

2. Справедлива формула:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \rho(x)dx. \tag{2.8}$$

Действительно, из формулы (2.7) следует, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $\rho(x)$, а потому $\int_a^b \rho(x)dx = F(b) - F(a)$, но из (2.2) при $x_1 = a$, $x_2 = b$ получаем, что $F(b) - F(a) = P(a \leq X < b)$, и формула (2.8) доказана.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$ (условие нормировки). Этот интеграл определяет вероятность достоверного события
$A\{-\infty < X < +\infty\}$.

4. Функции $F(x)$ и $\rho(x)$ связаны соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx. \tag{2.9}$$

Действительно, по определению $F(x)$ имеем, что
$$F(x) = P(-\infty < X < x\},$$
а из формулы (2.8) при $a = -\infty$, $b = x$ следует, что
$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx = F(x),$$
и свойство 4 доказано.

5. С точностью до бесконечно малых выше первого порядка малости относительно Δx, имеет место $P(x \leq X < x + \Delta x) \cong \cong \rho(x)\Delta x$. Справедливость этого свойства следует из выражения (2.6).

Пример 1. Случайная величина X задана плотностью распределения вида $\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ ax + 1, & \text{если} \quad 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{если} \quad x \geq 2. \end{cases}$
Найти значение параметра a и вычислить $P(0{,}5 \leq X < 1)$.

Решение. Из условия нормировки следует, что $\int_0^2 (ax+$ $+1)dx = 1$. Отсюда $\left(\frac{1}{2}ax^2 + x\right)\Big|_0^2 = 1$, т.е. $2a + 2 = 1$, следовательно, $a = -0{,}5$. По формуле (2.8) находим $P(0{,}5 \le X < 1) =$ $= \int_{0,5}^1 (1 - 0{,}5x)dx = (x - 0{,}25x^2)|_{0,5}^1 = 1 - 0{,}25 - 0{,}5 + 0{,}0625 =$ $= 0{,}3125$.

По известной плотности распределения $\rho(x)$ легко восстановить функцию распределения $F(x)$, пользуясь соотношением (2.9).

Пример 2. Дана плотность распределения случайной величины X: $\rho(x) = \begin{cases} 1{,}5\sin 3x, \text{ если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$ Найти $F(x)$.

Решение. Если $x \le 0$, то $\rho(x) = 0$, поэтому $F(x) =$ $= \int_{-\infty}^x 0\,dx = 0$. При $0 < x \le \dfrac{\pi}{3}$ по формуле (2.9) получаем

$F(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dx + \int_0^x 1{,}5\sin 3x dx = -0{,}5\cos 3x|_0^x = 0{,}5(1-$ $-\cos 3x)$.

Если $x > \dfrac{\pi}{3}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0\,dx + \int_0^{\pi/3} 1{,}5\sin 3x dx + \int_{\pi/3}^x 0\,dx =$ $= -0{,}5\cos 3x|_0^{\pi/3} = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}5(1 - \cos 3x), & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Позднее мы будем изучать случайные величины, задаваемые плотностью распределения частного вида:

а) $\rho(x) = c$, $a < x < b$, $c = \text{const}$ —
равномерное распределение;

б) $\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$, $a = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ —
нормальное распределение;

в) $\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \ge 0, \end{cases}$ $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$ —
показательное распределение.

2.4. Математическое ожидание случайной величины

Функция распределения $F(x)$ и плотность $\rho(x)$ дают полную исчерпывающую характеристику случайной величине X. Однако эти функции не всегда известны, да и во многих задачах они не нужны. На практике часто применяются менее подробные данные о случайной величине, но характеризующие более наглядно ту или иную особенность закона распределения, например, некоторое среднее значение, вокруг которого группируются все остальные значения случайной величины, какое-либо число, характеризующее степень разбросанности значений относительно среднего значения и т.д. Эти характеристики, как правило, представляют собой некоторые числовые параметры, назначение которых выразить в сжатой форме наиболее существенные свойства закона распределения. Такие параметры называют числовыми характеристиками случайной величины. Наиболее важной среди них и является понятие математического ожидания. К его изучению мы и приступаем.

Пусть задана некоторая дискретная случайная величина X своим рядом распределения.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Составим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \tag{2.10}$$

Если ряд (2.10) сходится абсолютно, то его сумма называется *математическим ожиданием* случайной величины X.

Математическое ожидание обозначают одним из символов $M[X]$, m_x, $< X >$, $\bar{X}$. По определению

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \tag{2.11}$$

Если число значений случайной величины конечно и равно n, то ряд (2.11) заменяется конечной суммой

$$M[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{2.12}$$

Так как вероятность p_k близка к относительной частоте события $A(X = x_k)$, то и математическое ожидание близко к среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Если считать, что на оси OX в точках x_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ помещены точечные массы p_k, причём $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, то $M[x] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ совпадает с центром тяжести этой системы материальных точек.

Пример 1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины

X	5	10	15	20	25	30
P	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

. Найти её математическое ожидание $M[X]$.

Решение. По формуле (2.12) находим $M[X] = 5 \cdot 0{,}24 + 10 \cdot 0{,}36 + 15 \cdot 0{,}20 + 20 \cdot 0{,}15 + 25 \cdot 0{,}03 + 30 \cdot 0{,}02 = 12{,}15$.

Пусть на участке (a, b) задана непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $\rho(x)$. Функцию $\rho(x)$ будем считать интегрируемой по Риману. Разобьём участок (a, b) на n частичных промежутков Δx_k, на каждом из них выберем по точке ξ_k и построим дискретную случайную величину $\tilde{X}$ с рядом распределения

$\tilde{X}$	ξ_1	ξ_2	$\ldots$	ξ_n
P	$\rho(\xi_1)\Delta x_1$	$\rho(\xi_2)\Delta x_2$	$\ldots$	$\rho(\xi_n)\Delta x_n$

Найдём её математическое ожидание

$$M[\tilde{X}] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k) \Delta x_k. \tag{2.13}$$

Величину $M[\tilde{X}]$ можно считать приближённым значением математического ожидания случайной величины X. Переходя в (2.13) к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и учитывая, что выражение (2.13) есть интегральная сумма Римана для функции $x\rho(x)$, получаем, что правая часть в (2.13) стремится к $\int_a^b x\rho(x)dx$. Эту величину и принимают за математическое ожидание X. Таким образом,

$$M[X] = \int_a^b x\rho(x)dx. \tag{2.14}$$

Если величина X распределена на всей числовой оси, то переходя к пределу в интеграле (2.14) при $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$, получаем

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx \tag{2.15}$$

(один из пределов в последнем интеграле может быть конечным). При этом предполагается, что несобственный интеграл (2.15) сходится. Если же он расходится, то случайная величина X математического ожидания не имеет.

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей плотность распределения вида

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}x & \text{в интервале} \quad (0,3), \\ 0 & \text{вне интервала} \quad (0,3). \end{cases}$$

Решение. По формуле (2.15) при $a = 0$, $b = 3$ находим

$$M[X] = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 2.$$

Пример 3. Найти математическое ожидание показательного распределения $\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \geq 0,\ \lambda > 0. \end{cases}$

Решение.

$$M[x] = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \left\{ \begin{array}{c} x = u,\ dv = e^{-\lambda x}dx \\ v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \\ du = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \lambda \left(-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx \right) =$$

$$= \lambda \left(-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x} \right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

При изучении случайных величин иногда их непосредственное наблюдение очень сложно или невозможно. Часто такие величины удаётся выразить через другие, более доступные для изучения. В таких случаях получают случайные величины, являющиеся функциями одного или нескольких случайных аргументов $Y = \varphi(X)$, $Y = \Psi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Если случайная величина X дискретна и задана рядом распределения

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

, то случайная величина $Y = \varphi(X)$ будет также дискретной с рядом распределения

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

(2.16)

При этом, если среди чисел $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\ldots$, $\varphi(x_n)$ есть одинаковые, то их следует объединить в один столбец, сложив соответствующие вероятности.

По формуле (2.12), в которой надо положить $x_k = \varphi(x_k)$, из ряда распределения (2.16) получаем, что

$$M[Y] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) p_k. \tag{2.17}$$

Пусть X — заданная на (a, b) случайная непрерывная величина с плотностью распределения $\rho(x)$. Функции $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ будем предполагать интегрируемыми по Риману. Промежуток (a, b) разобьём на n частичных промежутков Δx_k и выберем на каждом из частичных интервалов по точке ξ_k. Непрерывную случайную величину $Y = \varphi(X)$ можно приближённо представить дискретной случайной величиной $\tilde{Y}$, имеющей ряд распределения вида

$\tilde{Y}$	$\varphi(\xi_1)$	$\varphi(\xi_2)$	$\ldots$	$\varphi(\xi_n)$
P	$\rho(\xi_1)\Delta x_1$	$\rho(\xi_2)\Delta x_2$	$\ldots$	$\rho(\xi_n)\Delta x_n$

Число $M[\tilde{Y}] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta x_k$ можно принять в качестве приближённого значения $M[Y]$. Переходя к пределу при $\max|\Delta x_k| \to 0$, учитывая интегрируемость функции $\rho(x)\varphi(x)$, получаем

$$M[Y] = \int_a^b \varphi(x)\rho(x)dx. \tag{2.18}$$

Если X задана на всей числовой оси, то

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\rho(x)dx. \tag{2.19}$$

Один из пределов интегрирования в интеграле (2.19), если X задана либо на $(a, +\infty)$, либо на $(-\infty, a)$, может быть конечным.

Пример 3. Дан ряд распределения дискретной случайной величины

X	-1	2	4	5
P	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}4$

. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X^2 - 4$.

Решение. Полагая в формуле (2.17) $\varphi(x) = x^2 - 4$, находим $M[Y] = (1-4)\cdot 0{,}2 - (2^2-4)\cdot 0{,}3 + (4^2-4)\cdot 0{,}1 + (5^2-4)\cdot 0{,}4 =$ $= -0{,}6 + 0 + 1{,}2 + 8{,}4 = 9.$

Пример 4. Случайная величина X распределена по закону $\rho(x) = 2\cos 2x$ на $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Найти математическое ожидание величины $Y = \sin 2X$.

Решение. Применяя формулу (2.18), получаем:

$$M[Y] = \int_0^{\pi/4} 2\sin 2x \cos 2x dx = \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}5.$$

Отметим некоторые свойства математического ожидания.

1. $M[C] = C$, $C = \mathrm{const}$. Константу C можно трактовать как случайную величину X, принимающую единственное значение C с вероятностью $p = 1$. Из формулы (2.12) следует, что $M[C] = C$.

2. $M[CX] = CM[X]$, $C = \mathrm{const}$. Справедливость этого свойства следует из того, что константу можно выносить за знак суммы или за знак интеграла.

3. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$, $M[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n] =$ $= \alpha_1 M[X_1] + \alpha_2 M[X_2] + \ldots + \alpha_n M[X_n]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — константы. Свойство будет доказано позднее.

Пусть даны две случайные величины X и Y. Рассмотрим два события $A(X < x)$ и $B(Y < y)$. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события A и B независимы, и *зависимыми*, если эти события зависимы.

4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$. Свойство 4 будет доказано позднее.

Пример 5. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону (см. пример 2 из подраздела 2.1).

Решение. Введём в рассмотрение случайную величину X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определяющую число наступлений события A в k-м опыте. Очевидно, что величина X_k принимает значения 0 или 1 с вероятностями $q = 1 - p$ или p. Поэтому $M[X_k] = p$. Так как $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, то по свойству 3 математического ожидания $M[X] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n] = p \cdot n$.

2.5. Мода, медиана, квантиль порядка p

Математическое ожидание характеризует расположение случайной величины на оси OX. Для этой же цели используются и другие числовые параметры. К таким параметрам и относятся мода, медиана и квантиль порядка p. Если X дискретна, то *модой* $\mathcal{M}$ называют то её значение, которое достигается с наибольшей вероятностью. Для непрерывной случайной величины модой называют то её значение, в котором плотность распределения имеет максимум. Различают унимодальные и полимодальные распределения. Унимодальное распределение имеет единственный максимум, полимодальное — два и более.

Пример 1. Случайная величина R — расстояние от точки попадания до центра мишени распределена по закону Рэлея: $\rho(r) = 2h^2 r e^{-h^2 r^2}$ $(r > 0)$. Найти моду $\mathcal{M}$ величины R.

Решение. Исследуем на экстремум функцию $\rho(r)$. Для этого находим $\rho'(r) = (2h^2 - 4r^2 h^4) e^{-h^2 r^2}$, $\rho''(r) = 4h^2 r(2h^2 r^2 - {}$ ${} - 2 - h^2) e^{-h^2 r^2}$. В единственной точке $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}h}$ производная $\rho'(r) = 0$. Так как $\rho''(r) < 0$, то в точке r_0 функция $\rho(r)$ имеет максимум, следовательно, мода $\mathcal{M} = \dfrac{1}{\sqrt{2}h}$.

Недостатком математического ожидания и моды является то, что для довольно широкого класса распределений эти характеристики не существуют. Поэтому используют и другие величины, например, квантиль порядка p.

Квантилью порядка p случайной величины X называется точка η_p вещественной оси, в которой функция распределения $F(x)$ переходит от значений, меньших p, к значениям, большим p: $F(\eta_p - 0) \le p$, $F(\eta_p + 0) > p$. Квантиль порядка $\dfrac{1}{2}$

называется *медианой* случайной величины. Достоинства квантилей и медианы заключаются в том, что они существуют для любых случайных величин, легко могут быть измерены, обладают свойством устойчивости.

Пример 2. Дана случайная величина X, распределённая по закону Коши: $\rho(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$. Найти её квантили порядка p.

Решение. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\eta_p} \frac{dx}{1+x^2} = p$, что следует из определения величины η_p, т.е. $\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\eta_p + \dfrac{\pi}{2}\right) = p$, или $\operatorname{arctg}\eta_p = \pi\left(p - \dfrac{1}{2}\right)$, следовательно, $\eta_p = \operatorname{tg}\pi(p - 0{,}5)$. В частности, $\eta_{0{,}75} = \operatorname{tg}\pi(0{,}75 - 0{,}5) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, а медиана $\eta_{0{,}5} = 0$, что непосредственно следует из чётности функции $\rho(x)$.

Заметим, что данная случайная величина не имеет математического ожидания, так как интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ расходится.

2.6. Дисперсия случайной величины

Случайные величины, имеющие одинаковые математические ожидания, могут очень сильно различаться между собой. По этой причине следует охарактеризовать степень разброса значений случайной величины вокруг её математического ожидания. Можно было бы рассмотреть разность $X - m_x$, но эта разность принимает значения различных знаков, что искажает картину разброса. Более полно характеризует разброс величина $|X - m_x|$, но модули приводят к недифференцируемым функциям, усложняющим вычисления. За основу принято брать случайную величину $(X - m_x)^2$, свободную от недостатков предыдущих величин.

Пусть дана случайная величина X с конечным математическим ожиданием m_x. *Дисперсией* величины X называется математическое ожидание случайной величины $Y = (X - m_x)^2$. Обозначают дисперсию $D[X]$, D_x.

Таким образом, по определению

$$D_x = M[(X - m_x)^2]. \tag{2.20}$$

Случайная величина $X - m_x$ называется отклонением величины X от её математического ожидания. Дисперсия представляет собой математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от математического ожидания. Механически дисперсию можно интерпретировать как момент инерции масс $\rho(x)$ относительно центра тяжести (математического ожидания). Размерность дисперсии равна квадрату размерности величины X. Чтобы избежать этого недостатка, вводят величину $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$, называемую средним квадратичным отклонением, или стандартным отклонением.

Если случайная величина X дискретна с рядом распределения вида

X	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

, то, положив в формуле (2.17) $\varphi(x) = (x - m_x)^2$, получим

$$D[X] = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m_x)^2 p_k. \tag{2.21}$$

Если же величина X непрерывна и задана на (a, b) плотностью распределения $\rho(x)$, то, применяя формулу (2.18), получаем

$$D[X] = \int_a^b (x - m_x)^2 \rho(x) dx. \tag{2.22}$$

В случае распределения на всей числовой оси в интеграле (2.22) нужно перейти к пределу при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$. Получим

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \rho(x) dx. \tag{2.23}$$

Покажем, что соотношение (2.20) эквивалентно формуле

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2. \tag{2.24}$$

Действительно, $D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x^2] = = M[X^2] - 2m_x M[X] + M[m_x^2] = M[X^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[X^2] - - m_x^2$. При этом мы воспользовались свойствами 1—3 математического ожидания (см. подраздел 2.4).

Пример 1. Найти двумя способами: по формуле (2.21) и по формуле (2.24) дисперсию случайной величины X, заданной рядом распределения

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

.

Решение. Находим $m_x = 0{,}1 + 0{,}6 + 1{,}5 + 2{,}1 + 0{,}9 = 5{,}2$. Ряд распределения случайной величины $Y = (X - m_x)^2$ имеет вид

$Y = (X - m_x)^2$	17,64	4,84	0,04	3,24	14,44
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

По формуле (2.21) получаем $D_x = 1{,}764 + 0{,}968 + 0{,}012 + 0{,}972 + 1{,}444 = 5{,}16$.

Если же воспользоваться формулой (2.24), то вычисления будут несколько проще: $M[X^2] = 0{,}1 + 1{,}8 + 7{,}5 + 14{,}7 + 8{,}1 = 32{,}2$. Следовательно, $D_x = 32{,}2 - (5{,}2)^2 = 32{,}2 - 27{,}04 = 5{,}16$.

Пример 2. Найти дисперсию непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $\rho(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$ (распределение Лапласа).

Решение. Функция $x\rho(x)$ нечётна, поэтому $m_x = 0$. Следовательно, по формуле (2.23) $D_x = \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x|}dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx$. Интегрируя дважды по частям, получаем $D_x = -x^2 e^{-\lambda x}\big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x}dx = \dfrac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \dfrac{2}{\lambda}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = -\dfrac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Отметим следующие свойства дисперсии.

1. $D[C] = 0$, где $C = \mathrm{const}$.

Действительно,
$D[C] = M[(C - M[C])^2] = M[(C - C)^2] = M(0) = 0$.

2. $D[CX] = C^2 D[X]$.

Доказательство. $D[CX] = M[(CX - M[CX])^2] = M[(CX - Cm_x)^2] = M[C^2(X - m_x)^2] = C^2 M[(X - m_x)^2] = C^2 D_x$.

3. Если величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то

$$D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n].$$

Свойство докажем позднее.

Из свойств 2 и 3 следует, что
$D[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n] = \alpha_1^2 D[X_1] + \alpha_2^2 D[X_2] + \ldots + \alpha_n^2 D[X_n]$.

Пример 3. Найти дисперсию случайной величины X, распределённой по биномиальному закону.

Решение. В примере 5 из подраздела 2.4 мы представили случайную величину X в виде суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ независимых случайных величин X_k, где

X_k	0	1
P	$1-p$	p

. Так как $M[X_k] = p$, то

$(X_k - M[X_k])^2$	p^2	$(1-p)^2$
P	$1-p$	p

.

Поэтому $D[X_k] = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = (1-p)[p^2 + p(1-p)] = p(1-p) = pq$. Так как случайные величины X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ независимы, то по свойству 3 дисперсии $D[X] = \sum\limits_{k=1}^{n} D[X_k] = np(1-p) = npq$.

2.7. Моменты случайной величины

Кроме отмеченных уже числовых характеристик, применяется и ряд других, описывающих различные особенности распределения. В качестве таких характеристик применяются центральные и начальные моменты.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется число $m_k = M[X^k]$. Для дискретной величины $m_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i$, а для непрерывной — $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x) dx$.

Центральным моментом k-го порядка называется число $\mu_k = M[(X - m_x)^k]$. Для дискретных величин $\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^k p_i$, а для непрерывных — $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k \rho(x) dx$.

Начальный момент m_1 совпадает с математическим ожиданием $M[X]$. Центральный момент μ_1 для любых случайных величин равен нулю, так как $\mu_1 = M[(X - m_x)] = M[X] - m_x = 0$. Момент μ_2 совпадает с дисперсией D_x.

Если случайная величина распределена симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечётного порядка равны нулю. Для характеристики степени отличия распределения от симметричного берут центральный момент третьего порядка.

Величину $S_k = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$, где $\sigma = \sqrt{D_x}$ — среднее квадратичное отклонение, называют *коэффициентом асимметрии*, или *коэффициентом скошенности.*

Важнейшим для приложений является нормальное распределение $\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$. Для нормального распределения $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Рассматривают величину $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, называемую *эксцессом* случайной величины, или *коэффициентом островершинности.* Эксцесс характеризует степень отличия распределения от нормального.

Центральные и начальные моменты m_k и μ_k легко выразить друг через друга. Например,

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \quad \mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4.$$

2.8. Характеристические функции

В теории вероятностей широко используется частный случай функций от случайной величины, позволяющий применять для решения многих вероятностных задач теорию преобразований Фурье, хорошо разработанную в математическом анализе.

Характеристической функцией случайной величины X называется математическое ожидание величины $Z = e^{itX}$, где t — вещественный параметр, i — мнимая единица. Обозначать характеристическую функцию будем $g(t)$ или $g_x(t)$. Если X — дискретная случайная величина, то

$$g_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \tag{2.25}$$

где $p_k = P(X = x_k)$ (см. (2.17)). Если же X непрерывна с плотностью распределения $\rho(x)$, то

$$g_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{itx}\, dx \tag{2.26}$$

(см. формулу (2.19)).

Как видим, характеристическая функция есть преобразование Фурье плотности распределения. Зная характеристическую функцию $g_x(t)$, обратным преобразованием Фурье можно найти плотность распределения $\rho(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_x(t)dt$. Характеристическую функцию можно трактовать как ещё одну из форм закона распределения.

Для упрощения вычислений часто рассматривают также функцию $\varphi(t) = \ln g_x(t)$, называемую кумулянтной функцией.

Пример 1. Найти характеристическую и кумулянтную функции случайной величины X, распределённой по закону Пуассона: $P_T(X = m) = \dfrac{(\lambda T)^m}{m!} e^{-\lambda T}$ (см. формулу (1.17)).

Решение. По формуле (2.25) находим

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} P_T(X = m) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} \frac{(\lambda T)^m}{m!} e^{-\lambda T} =$$

$$= e^{-\lambda T} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda T e^{it})^m}{m!} = e^{-\lambda T} e^{\lambda T e^{it}} = e^{\lambda T(e^{it}-1)}.$$

Итак, $g(t) = e^{\lambda T(e^{it}-1)}$, $\varphi(t) = \lambda T(e^{it} - 1)$.

Пример 2. Найти характеристическую и кумулянтную функции случайной величины, распределённой по нормальному закону: $\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$.

Решение. По формуле (2.26) находим

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] e^{itx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} + itx\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x^2 - 2ax + a^2 - 2\sigma^2 itx}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{[x - (a + \sigma^2 it)]^2 + (\sigma^4 t^2 - 2a\sigma^2 it)}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left[\frac{x-(a+\sigma^2 it)}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2\right\} d\left[\frac{x-(a+\sigma^2 it)}{\sqrt{2}\sigma}\right] =$$

$$= \exp\left[iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \text{ (учтено, что } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}).$$

Таким образом, $g(t) = \exp\left[iat - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$, $\varphi(t) = iat - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}$.

Отметим следующие свойства характеристической функции.

1. Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей числовой оси и удовлетворяет соотношениям

$$g(0) = 1, \quad |g(t)| \leq 1. \tag{2.27}$$

То, что функция $g(t)$ равномерно непрерывна, примем без доказательства. Проверим справедливость соотношений (2.27): $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$, $|g(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)|e^{itx}|dx =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$.

2. Если $Y = aX + b$, где a и b — постоянные величины, то

$$g_y(t) = g_x(at)e^{ibt}, \quad \varphi_y(t) = ibt + \varphi_x(at). \tag{2.28}$$

Доказательство:
$g_y(t) = M[e^{itY}] = M\left[e^{it(aX+b)}\right] = M\left[e^{itb} \cdot e^{itaX}\right] =$ $= e^{itb} M\left[e^{i(at)X}\right] = e^{itb} g_x(at)$. Второе соотношение в (2.28) получается логарифмированием первого.

3. Характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций, т.е. если $Z = X + Y$, а X и Y независимы, то

$$g_z(t) = g_x(t) g_y(t). \tag{2.29}$$

Доказательство. $g_z(t) = M\left[e^{it(X+Y)}\right] = M\left[e^{itX} \cdot e^{itY}\right]$. Так как X и Y независимы, то независимы и величины e^{itX} и e^{itY}. По свойству 4 математического ожидания (см. подраздел 2.4) от произведения независимых величин получаем $g_z(t) =$ $= M\left[e^{itX}\right] \cdot M\left[e^{itY}\right] = g_x(t) \cdot g_y(t)$. Свойство 3 легко распространяется на любое число попарно независимых случайных величин.

Логарифмируя соотношение (2.29), получим $\varphi_z(t) = \varphi_x(t) + \varphi_y(t)$, т.е. при сложении независимых случайных величин их кумулянтные функции складываются.

4. Если существует конечное математическое ожидание $M[|X|^k]$, то характеристическая функция $g_x(t)$ дифференцируема k раз и при этом

$$g_x^{(k)}(0) = i^k M[X^k]. \tag{2.30}$$

Справедливость свойства 4 примем без доказательства.

Из формулы (2.30) следует простое правило вычисления начальных моментов $m_k = M[X^k] = (-i)^k g_x^{(k)}(0)$. В частности, $m_x = -ig'_x(0)$. Так как $M[X^2] = -g''_x(0)$, то по формуле (2.24) получаем $D_x = -g''_x(0) + [g'_x(0)]^2$. Математическое ожидание и дисперсия просто выражаются через производные кумулянтной функции:

$$m_x = -i\varphi'(0), \quad D_x = -\varphi''(0). \tag{2.31}$$

Величины $i^k\varphi^k(0)$ называются *кумулянтами* k-го порядка. Из свойства 3 следует, что при сложении независимых случайных величин их кумулянты складываются.

Пример 3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределённой по закону Пуассона

$$P_T(m) = \frac{(\lambda T)^m}{m!} e^{-\lambda T}$$

Решение. В примере 1 мы нашли кумулянтную функцию закона Пуассона. $\varphi(t) = \lambda T(e^{it} - 1)$. Так как $\varphi'(t) = i\lambda T e^{it}$, $\varphi''(t) = i^2\lambda T e^{it}$, то из формул (2.31) следует, что $M[X] = \lambda T$, $D[X] = \lambda T$.

Пример 4. Пусть даны две независимые случайные величины X и Y, распределённые по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2. Найти закон распределения их суммы.

Решение. Находим кумулянтную функцию случайной величины Z: $\varphi_z(t) = \varphi_x(t) + \varphi_y(t) = \lambda_1 T(e^{it} - 1) + \lambda_2 T(e^{it} - 1) = (\lambda_1 + \lambda_2)T(e^{it} - 1)$, т.е. случайная величина Z также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

2.9. Равномерное распределение

Распределение вероятностей случайной величины X называется *равномерным*, если на множестве, которому принадлежат всевозможные значения X, плотность распределения постоянна.

Пусть все значения непрерывной случайной величины заполняют промежуток (a, b), причём $\rho(x) = C$ (const) на (a, b). Так как X не имеет значений вне (a, b), то $\rho(x) = 0$ вне этого интервала. Поскольку $\int_a^b \rho(x)dx = 1$, то $\int_a^b C dx = C(b-a) = 1$. Отсюда $C = \dfrac{1}{b-a}$. Таким образом

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Найдём функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x)dx$:

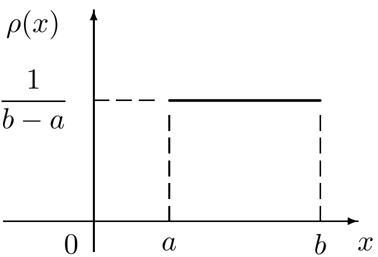
1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx$, если $x \leq a$;

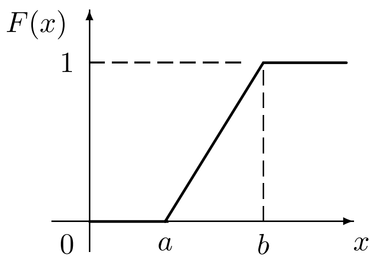
2) $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0\, dx + \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$, если $a < x \leq b$;

3) $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0\, dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^x 0\, dx = 1$, если $x \geq b$.

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \leq b, \\ 1, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$

Графики $\rho(x)$ и $F(x)$ равномерного распределения имеют вид, изображённый на рисунках.





Найдём $M[X]$, $D[X]$ и $\sigma[X]$ равномерного распределения. $M[X] = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$. Для отыскания дисперсии вычислим $M[X^2]$:

$$M[X^2] = \int_a^b \frac{x^2dx}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3};$$

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$
$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2.10. Показательное распределение, гамма-распределение

Показательным или *экспоненциальным* называют закон распределения, описываемый плотностью распределения вида

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

Примером случайной величины, распределённой по показательному закону, является длительность промежутка времени между двумя последовательными событиями пуассоновского потока.

Найдём числовые характеристики показательного распределения. Математическое ожидание $M[X] = \frac{1}{\lambda}$ найдено в примере 3 подраздела 2.4. Для вычисления центральных моментов получим рекуррентное соотношение

$$\mu_k = \lambda \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^k e^{-\lambda x} dx =$$
$$= -\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^k e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\lambda x} dx.$$ Отсюда следует, что

$$\mu_k = \frac{(-1)^k}{\lambda^k} + \frac{k}{\lambda}\mu_{k-1}. \tag{2.32}$$

Так как для любых распределений $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, то из (2.32) следует $\mu_2 = D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, т.е. $\sigma = \sqrt{D_x} = \frac{1}{\lambda} = m_x$.

Как видим, для показательного распределения среднее квадратичное отклонение совпадает с математическим ожиданием. Это свойство используется при экспериментальном изучении случайных величин как основание считать величину распределённой по показательному закону.

Далее из (2.32) находим $\mu_3 = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}$, $S_k = 2$, $\mu_4 = \frac{9}{\lambda^4}$, $E_x = 6$.

Показательное распределение широко используется в теории массового обслуживания, теории надёжности и в других вопросах.

Обобщением показательного распределения является *гамма-распределение* (Г-*распределение*), задаваемое плотностью вида

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

где $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, а $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — Г-функция (эйлеров интеграл второго рода). При $\alpha = 1$ гамма-распределение совпадает с показательным. Выполнив несложные вычисления, можно найти числовые характеристики распределения (2.33): $M[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$, $D[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. В частном случае, когда $\alpha = k$ целочисленно, Г-распределение называют распределением Эрланга. Оно может быть интерпретировано как распределение длительности промежутка между первым и $(k+1)$ наступлением события A пуассоновского потока.

2.11. Нормальное распределение

2.11.1. Числовые характеристики нормального распределения

Непрерывная случайная величина X называется *нормальной*, если её плотность распределения имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{2.34}$$

Распределение (2.34) будем также называть нормальным.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ. Кратко этот закон распределения будем записывать $N(a, \sigma^2)$.

В подразделе 2.7 мы нашли кумулянтную функцию нормального распределения $\varphi(t) = iat - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}$. Так как $\varphi'(t) = ia - \sigma^2 t$, $\varphi''(t) = -\sigma^2$, то используя формулы (2.31), получаем $a = m_x$, $\sigma^2 = D_x$. Отсюда следует смысл параметров a и σ: a — математическое ожидание, σ — среднее квадратичное отклонение.

Нормальное распределение симметрично относительно прямой $x = a = m_x$, поэтому все центральные моменты нечётного порядка равны нулю. Для вычисления эксцесса найдём центральный момент μ_4. По определению $\mu_4 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^4 \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx$. Этот интеграл вычислим по частям, положив $u = (x-a)^3$, $du = 3(x-a)^2 dx$,

$$dv = (x-a)\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \quad v = -\sigma^2 \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Следовательно, $\mu_4 = -\dfrac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-a)^3 \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + 3\sigma^2 \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx$. Первое слагаемое за счёт показательной функции обращается в нуль, а второе равно $3\sigma^2 D[X]$. Поэтому $\mu_4 = 3\sigma^4$, следовательно, $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$.

Если a и σ произвольны, то нормальное распределение называют общим. Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то нормальное распределение называют нормированным. От общего нормального распределения к нормированному можно перейти заменой $u = \dfrac{x-a}{\sigma}$.

Так как $M[u] = 0$, $\sigma[u] = 1$, то $\rho(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{u^2}{2}\right]$. Для функции $\rho(u)$ составлены подробные таблицы.

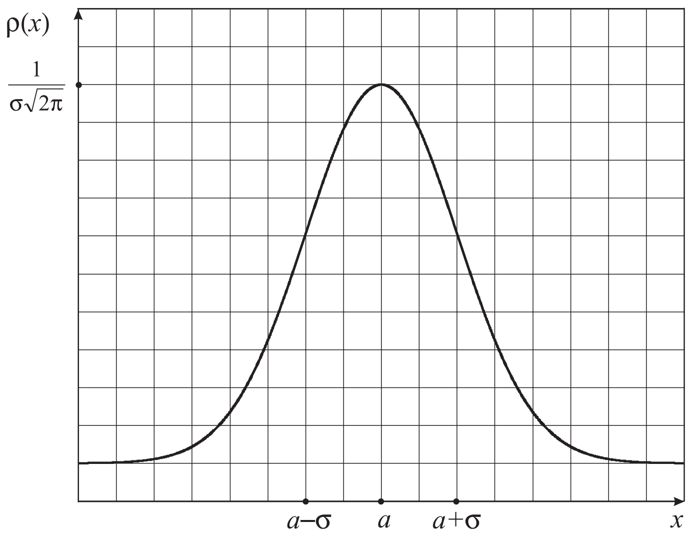
Функция

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz \tag{2.35}$$

является функцией распределения для нормальной величины X. Если $a = 0$, $\sigma = 1$, то $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$. Если в интеграле (2.35) сделать замену $u = \dfrac{z-a}{\sigma}$, то получим, что $F(x) = F_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. Функция $F_0(x)$ табулирована.

2.11.2. График нормального распределения

График функции $\rho(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$ называют нормальной кривой. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \rho(x) = 0$, то ось OX является горизонтальной асимптотой. Кривая симметрична относительно прямой $x = a$.



Находим:

$$\rho'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$\rho''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Отсюда следует, что функция $\rho(x)$ имеет единственную точку экстремума $x = a$, в которой принимает наибольшее значение $\rho(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. В точках $x_{1,2} = a \pm \sigma$ кривая имеет перегиб. При увеличении параметра a график $\rho(x)$ сдвигается вправо. Изменение параметра σ ведёт к изменению формы кривой. Чем меньше σ, тем кривая круче. При увеличении σ кривая всё более распрямляется и становится более пологой.

2.11.3. Вычисление $P(\alpha < X < \beta)$ и $P(|X - a| < \delta)$ для нормальной величины. Правило трёх сигм

По формуле (2.8) находим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \tag{2.36}$$

Данный интеграл в элементарных функциях не выражается. Его вычисление сводят к табулированной функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$ путём замены $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$, $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$. Осуществив в интеграле (2.36) эту замену, получим $P(\alpha < X < \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$. Отсюда и из свойств определённого интеграла следует, что

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{2.37}$$

Заметим, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. функция Лапласа нечётна.

Пример 1. Дана случайная величина $N(1;4)$. Найти $P(2 < X < 3)$.

Решение. По формуле (2.37) при $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $a = 1$, $\sigma = 2$ получаем $P(2 < X < 3) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5)$. По таблице для функции Лапласа (приложение С) находим $\Phi(0{,}5) = 0{,}1915$, $\Phi(1) = 0{,}3413$. $P(2 < X < 3) = 0{,}3413 - 0{,}1915 = 0{,}1498$.

Пусть $\delta > 0$ — произвольное число. Вычислим вероятность $P(|X - a| < \delta)$ того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую δ. Так как $P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta)$, то по формуле (2.37) при $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$ получаем

$$P(|X - a| < \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (2.38)$$

Пусть $\delta = 3\sigma$. Тогда из (2.38) следует, что

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973,$$

т.е. событие $|X - a| < 3\sigma$ почти достоверно.

Таким образом, вероятность того, что нормальная случайная величина примет значения вне интервала $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ равна всего 0,0027. Такое событие можно практически считать невозможным. В этом и заключается правило трёх сигм, часто применяемое на практике для доказательства нормальности эмпирических случайных величин.

2.11.4. Линейное преобразование нормальной случайной величины. Композиция нормальных законов распределения. Центральная предельная теорема

Пусть X — нормальная случайная величина $N(a, \sigma^2)$. Покажем, что величина $Z = \alpha X + \beta$, где α и β константы, также нормальна и найдём её параметры. По второй формуле из (2.28) кумулянтная функция величины Z может быть записана в виде $\varphi_z(t) = it\beta + \varphi_x(\alpha t)$. Так как $\varphi_x(\alpha t) = ia\alpha t - \dfrac{\sigma^2(\alpha^2 t^2)}{2}$, то $\varphi_z(t) = it(a\alpha + \beta) - \dfrac{\alpha^2\sigma^2 t^2}{2}$. Отсюда и из того, что характеристическая, а также кумулянтная функции однозначно определяют плотность распределения, следует, что величина $Z = \alpha X + \beta$ распределена нормально с законом $N(\alpha a + \beta, \alpha^2\sigma^2)$. Как видим, при линейном преобразовании нормальной величины она остаётся нормальной, при этом изменяется как расположение, так и форма нормальной кривой.

Пусть даны две независимые нормальные случайные величины X и Y с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2) соответственно. Запишем их кумулянтные функции $\varphi_x(t) = ia_1 t - \dfrac{\sigma_1^2 t^2}{2}$, $\varphi_y(t) = ia_2 t - \dfrac{\sigma_2^2 t^2}{2}$. Для случайной величины $Z = X + Y$ кумулянтную функцию можно получить сложением функций $\varphi_x(t)$ и $\varphi_y(t)$. Следовательно, $\varphi_z(t) = i(a_1 + a_2)t - \dfrac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}$. Отсюда следует, что величина Z также нормальна, причём $M[Z] = a_1 + a_2$, $\sigma[Z] = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Легко показать, что сумма любого числа нормальных величин приводит к нормальной же величине. Как показано А.М. Ляпуновым, нормальный закон возникает во всех случаях, когда случайная величина может быть представлена в виде суммы большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин (не обязательно нормальных), каждая из которых в отдельности незначительно влияет на сумму. Этим объясняется широкое распространение в природе нормального распределения.

Теоремы, выясняющие условия, которые приводят к нормальному, закону, называют центральными предельными теоремами. Мы познакомимся с одной простейшей формой предельной теоремы, относящейся к одинаково распределённым величинам.

Теорема. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, то при неограниченном увеличении n закон распределения величины

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

неограниченно приближается к нормальному закону.

Доказательство. Так как величины X_i имеют общий закон распределения, то они имеют и общую кумулянтную функцию $\varphi(t)$. Представим функцию $\varphi(t)$ рядом Тейлора в окрестности точки $t = 0$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — величина порядка малости выше второго относительно t. Так как $\varphi(0)=0$, $\varphi\prime(0)=im, \varphi''(0)=-\sigma^2$ (см. формулу (2.31)), то $\varphi(t)=imt-\dfrac{\sigma^2}{2}t^2+\alpha(t)$. По свойству кумулянтной функции сумма случайных величин $\widetilde{Y}_n=X_1+X_2+ +\ldots+X_n$ будет иметь кумулянтную функцию $n\varphi(t)$. Следовательно, $\varphi_{\widetilde{Y}}(t) = imnt-\dfrac{\sigma^2t^2}{2}n+n\alpha(t)$. Так как величина $Y_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sigma}\widetilde{Y}-\dfrac{nm}{\sqrt{n}\sigma}$ получена линейным преобразованием величины $\widetilde{Y}$, то по формуле (2.28), в которой надо положить $a=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sigma}$, $b=-\dfrac{nm}{\sqrt{n}\sigma}$, получим, что

$$\varphi_{y_n}(t)=-i\frac{nm}{\sqrt{n}\sigma}t+\varphi_{\widetilde{Y}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)=-i\frac{nm}{\sqrt{n}\sigma}+$$

$$+imn\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}-\frac{\sigma^2}{2}n\frac{t^2}{n\sigma^2}+n\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)=-\frac{t^2}{2}+n\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

При $n\longrightarrow\infty$ величина $n\alpha\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\longrightarrow 0$, поскольку множитель $\alpha\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ имеет порядок малости выше второго относительно $\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}$, т. е. $\left|\alpha\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right|<\dfrac{t^2}{n^s}$, $s>1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\widetilde{Y}_n}(t)=-\dfrac{t^2}{2}$. Следовательно, кумулянтная функция величины Y_n при $n\longrightarrow\infty$ неограниченно приближается к кумулянтной функции нормированного нормального закона. Можно доказать, что при этом закон распределения величин Y_n неограниченно приближается к нормальному.

Замечание. Если закон распределения случайных величин $\dfrac{X_n-A_n}{B_n}$ сходится при $n\longrightarrow\infty$ к нормальному закону, то можно доказать, что случайную величину X_n при достаточно больших n приближённо можно считать нормальной с параметрами (A_n, B_n^2).

Ранее (см. подраздел 2.4, пример 5) мы показали, что случайную величину X, распределённую по биномиальному закону, можно представить в виде суммы $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ величин, распределённых по одному закону с математическим ожиданием p и дисперсией $p(1-p)$. При этом $M[X] = np$, $D(X) = np(1-p) = npq$, $q = 1-p$. По центральной предельной теореме при неограниченном возрастании n закон распределения величин $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ сходится к нормированному нормальному, следовательно величина X является приближённо нормальной с параметрами $m_X = np$, $\sigma_X^2 = npq$. Отсюда следует справедливость локальной теоремы Лапласа (подраздел 1.8):

$$P_n(X=m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \exp\left[-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right]$$

при достаточно больших m. Интегральная теорема Лапласа следует из формулы (2.37), в которой надо положить $\alpha = m_1$, $\beta = m_2$, $a = np$, $\sigma = npq$.

2.12. Закон больших чисел

При выполнении некоторых широко встречающихся условий средний результат действия большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и может быть предсказан с большой степенью точности. Эти условия выясняются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. В данном подразделе мы приведём несколько теорем, относящихся к этому типу.

2.12.1. Неравенство Чебышева. Понятие сходимости по вероятности

Пусть дана случайная величина X с конечным математическим ожиданием m_x и конечной дисперсией D_x. Тогда для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X-m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2} \tag{2.39}$$

или, переходя к противоположным событиям,

$$P(|X-m_x| < \alpha) > 1 - \frac{D_x}{\alpha^2}. \tag{2.40}$$

Неравенства (2.39) и (2.40) получены Чебышевым и называются его именем.

Доказательство. Проведём для непрерывных случайных величин. Пусть $\rho(x)$ — плотность распределения X. Тогда

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \rho(x) dx \geq \int_{|x - m_x| \geq \alpha} (x - m_x)^2 \rho(x) dx \geq$$

$$\geq \alpha^2 \int_{|x - m_x| \geq \alpha} \rho(x) dx = \alpha^2 P(|X - m_x| \geq \alpha),$$

отсюда и следует неравенство (2.39).

Неравенство Чебышева даёт только верхнюю границу вероятности заданного отклонения. Последняя не может превзойти эту границу ни при каком законе распределения. Для некоторых распределений эта граница может быть уточнена. Например, если в неравенстве (2.39) положить $\alpha = 3\sigma_x$, то $P(|X - m_x| \geq 3\sigma_x) \leq \dfrac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2} = \dfrac{1}{9}$. Для большинства законов распределения, встречающихся на практике, вероятность того, что значения случайной величины выйдут за пределы участка $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$, значительно меньше $\dfrac{1}{9}$. Так, для нормального распределения она равна примерно 0,0027.

Дадим определение нового понятия — *сходимости по вероятности.*

Пусть дана последовательность случайных величин $\{X_n\}$. Говорят, что последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к числу a, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдётся такое число $N(\varepsilon, \delta)$, зависящее от ε и δ, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta. \tag{2.41}$$

Подчеркнём, что a — величина не случайная.

2.12.2. Теорема Чебышева и некоторые её следствия (теоремы Бернулли и Пуассона)

Теорема 1. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность попарно независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}, \ldots$ и дисперсиями $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}, \ldots$, ограниченными одним числом $\mathcal{L}$, т.е.

$D_{x_i} < \mathcal{L}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, то последовательность $Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ сходится по вероятности к $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}$.

Доказательство. Используя свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин, находим, что $m_{y_n} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}$, $D_{y_n} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} D_{x_k}}{n^2}$. Запишем для случайной величины Y_n неравенство Чебышева (2.40):

$P(|Y_n - m_{y_n}| < \varepsilon) > 1 - \dfrac{D_{y_n}}{\varepsilon^2}$ или

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{x_k}}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Так как $D_{x_k} < \mathcal{L}$, то $\sum_{k=1}^{n} D_{x_k} < n\mathcal{L}$. Поэтому

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon^2 n}.$$

Какое бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно выбрать n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{\mathcal{L}}{\varepsilon^2 n} < \delta$ для любого $\delta > 0$. Тогда

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta, \tag{2.42}$$

что согласно выражению (2.41) означает сходимость по вероятности последовательности $Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ к $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n}$, т.е. с увеличением n разность между средним значением случайных величин и средним значением математических ожиданий стремится по вероятности к нулю.

Следствие 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, распределённых по одному закону, имеющему конечное математическое ожидание m и конечную дисперсию D. Тогда среднее арифметическое этих величин

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

сходится по вероятности к m.

Доказательство. В данном случае $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n} = m$, $D[Y_n] = \dfrac{D}{n}$. Положив $D[X_k] = D$ и выбрав n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{D}{n\varepsilon^2} < \delta$, неравенство (2.42) приведём к виду

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - m\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta, \tag{2.43}$$

что и утверждается в следствии.

Следствие 2 (теорема Бернулли). Пусть производится n независимых опытов по схеме Бернулли (см. подраздел 1.7), в каждом из которых может появиться с постоянной вероятностью p некоторое событие A. При неограниченном увеличении числа опытов n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к p.

Доказательство. Введём в рассмотрение величины X_k — число наступлений события A в k-ом опыте. Так как $P(X_k = 0) = 1 - p$, $P(X_k = 1) = p$, то $M[X_k] = p$, $D[X_k] = p(1-p)$. Если X — число наступлений события A в n опытах, то $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $M[X] = np$, $D[X] = np(1-p)$. Теперь, так как $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} = p^*$, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n} = m = p$, то неравенство (2.43) принимает вид $P\left(|p^* - p| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$. Отсюда и следует справедливость теоремы Бернулли.

Теорема Бернулли объясняет причину устойчивости относительной частоты при большом числе испытаний и даёт теоретическое обоснование статистическому определению вероятности.

Следствие 3 (теорема Пуассона). Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в k-ом опыте равна p_k, то при возрастании n относительная частота p^* появления события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_k.

Доказательство. Представим величину X — число наступлений события A в n опытах, как и в следствии 2, в виде суммы $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где X_k — число наступлений события A в k-ом опыте. В нашем случае $P(X_k = 1) = p_k$, $P(X_k = 0) = 1 - p_k$, $m_{x_k} = p_k$, $D[X_k] = p_k(1 - p_k)$, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} = p^*$, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}}{n} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}$. Неравенство (2.42) принимает вид

$P\left(\left|p^* - \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$, что и утверждается в доказываемом следствии.

Теорема Пуассона имеет большое значение для практических применений теории вероятностей, так как обычно при повторении опытов трудно, а иногда и невозможно соблюсти одни и те же условия опыта. Однако, как утверждает теорема Пуассона, и здесь наблюдается определённая устойчивость средних.

На теореме Чебышева, её обобщениях и следствиях основан выборочный метод в математической статистике, позволяющий по сравнительно небольшому числу обследованных объектов делать достаточно надёжные выводы о всей совокупности этих объектов.

3. Многомерные случайные величины

3.1. Матрица распределения двумерной случайной величины

В подразделе 2.1 мы определили n-мерную случайную величину как функцию, сопоставляющую каждой точке пространства элементарных событий вектор из арифметического линейного пространства R_n. Каждая его координата является одномерной случайной величиной. Следовательно, n-мерную случайную величину можно трактовать как систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ одномерных случайных величин.

С вероятностной точки зрения, системы случайных величин, так же как и одномерные величины, описываются законами распределения, т.е. любым соотношением, устанавливающим связь между значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

Пусть все случайные величины, входящие в систему, дискретны. Ограничимся двумерным случаем (X, Y). Если $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, то описать систему (X, Y) можно, указав вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ того, что случайная величина Xпримет значение x_i, а случайная величина Y — y_j. Из чисел p_{ij} можно составить матрицу

Y	X			
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\cdots$	p_{nm}

(3.1)

размера $(m \times n)$, называемую матрицей распределения системы (X, Y). Так как все события $(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ образуют полную группу, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Зная матрицу (3.1) распределения системы, можно найти ряды распределения составляющих. Действительно, событие $A(X = x_k)$ (k — фиксировано) представимо в виде суммы m

несовместных событий $A_1(X = x_k, Y = y_1)$, $A_2(X = x_k, Y = y_2)$, ..., $A_m(X = x_k, Y = y_m)$, следовательно, $p_k = P(X = x_k) = p_{k1} + p_{k2} + \ldots + p_{km}$, т.е. вероятность p_k равна сумме элементов k-го столбца матрицы распределения.

Событие $A(X = x_i, Y = y_j)$ является произведением двух событий $B(X = x_i)$ и $C(Y = y_j)$. Следовательно, $P(A) = P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C/B) = P(C) \cdot P(B/C)$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j / X = x_i), \\ P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j) \cdot P(X = x_i / Y = y_j). \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

Условная вероятность $P(X = x_i / Y = y_j)$ означает вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, если известно, что величина Y приняла значение y_j.

Из соотношений (3.2) получаем

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}, \quad (3.3)$$

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}. \quad (3.4)$$

Если случайные величины X и Y независимы, то $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$, т.е. $p_{ij} = p_i \cdot p_j$.

Зная ряды распределения случайных величин X и Y, а также условные вероятности $P(Y = y_j / X = x_i)$ или $P(X = x_i / Y = y_j)$, можно найти матрицу распределения системы (X, Y).

Пример 1. Задана дискретная двумерная величина матрицей распределения

Y	X		
	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Найти: а) ряды распределения случайных величин X и Y; б) ряд распределения X, если известно, что случайная величина Y приняла значение 3 и ряд распределения Y, если известно, что случайная величина X приняла значение 14; в) математическое ожидание $M[X]$, $M[Y]$; г) математическое ожидание $M[X/Y = 3]$, $M[Y/X = 14]$ (условные математические ожидания).

Решение: а) суммируя по столбцам, а затем по строкам элементы матрицы распределения, находим искомые ряды распределения:

X	10	14	18
P	0,35	0,20	0,45

,

Y	3	6
P	0,72	0,28

. (а)

б) ряд распределения X при $Y = 3$ находим, используя формулу (3.4): $P(X = 10/Y = 3) = \dfrac{0{,}25}{0{,}72} = \dfrac{25}{72}$,
$P(X = 14/Y = 3) = \dfrac{0{,}15}{0{,}72} = \dfrac{5}{24}$,
$P(X = 18/Y = 3) = \dfrac{0{,}32}{0{,}72} = \dfrac{4}{9}$. Применяя формулу (3.3), получаем $P(Y = 3/X = 14) = \dfrac{0{,}15}{0{,}20} = \dfrac{3}{4}$;
$P(Y = 6/X = 14) = \dfrac{0{,}05}{0{,}20} = \dfrac{1}{4}$. Следовательно,

X/Y=3	10	14	18
P	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{4}{9}$

,

Y/X=14	3	6
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

; (б)

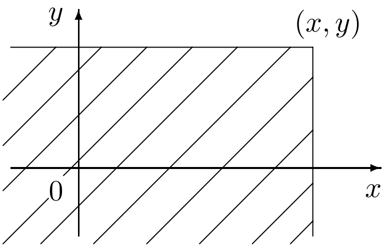
в) $M[X]$ и $M[Y]$ находим по формуле (2.12), используя ряды (а): $M[X] = 10 \cdot 0{,}35 + 14 \cdot 0{,}20 + 18 \cdot 0{,}45 = 3{,}50 + 2{,}80 + 8{,}10 = 14{,}40$, $M[Y] = 3 \cdot 0{,}72 + 6 \cdot 0{,}28 = 2{,}16 + 1{,}68 = 3{,}84$;

г) математические ожидания $M[X/Y = 3]$ и $M[Y/X = 14]$ находим, используя ряды (б):

$$M[X/Y = 3] = \frac{250}{72} + \frac{70}{24} + 8 = \frac{125}{36} + \frac{35}{12} + 8 = \frac{125 + 105 + 288}{36} = \frac{259}{18},\ M[Y/X = 14] = \frac{9}{4} + \frac{6}{4} = \frac{15}{4}.$$

3.2. Функция распределения многомерной случайной величины

Пусть дана система случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n)$ называется *функцией распределения системы случайных величин.*



Для двумерной случайной величины (X, Y) имеем $F(x, y) = p(X < x, Y < y)$, т.е. значение функции $F(x, y)$ равно вероятности того, что случайная точка попадёт в левый нижний прямой угол с вершиной в точке (x, y).

При изучении свойств функции распределения ограничимся двумерным случаем.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$. Справедливость свойства следует из определения $F(x, y)$.

2. Имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0, \qquad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty, y\to-\infty} F(x,y) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} F(x,y) = 1.$$

Первые три предела соответствуют вероятностям невозможных событий, а четвёртый — достоверного.

3. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y.

Действительно, $F(x, +\infty) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = P(X < x, Y < +\infty) = P(X < x) = F_1(x)$, так как событие $Y < +\infty$ достоверно.

4. Функция $F(x, y)$ является неубывающей функцией по каждому аргументу при фиксированном втором, т.е. $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $x_2 > x_1$, $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$, если $y_2 > y_1$. Доказательство этого свойства аналогично одномерному случаю.

5. Из определения функции распределения следует, что

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1). \qquad (3.5)$$

6. Если случайные величины X и Y независимы, то $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ и обратно, если $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

Доказательство. Если X и Y независимы, то события $B(X < x)$ и $C(Y < y)$ независимы. Так как

$$A(X < x, Y < y) = B(X < x) \cdot C(Y < y),$$

то по правилу умножения вероятностей независимых событий (см. формулу (1.8)) получаем

$P(A) = P(B) \cdot P(C)$, $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$, т.е. $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Обратно, если $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, то из определения функции распределения следует, что

$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$, т.е. $P(A) = P(B) \cdot P(C)$.

Следовательно, события B и C независимы, а потому независимы и X и Y.

7. Если события $B(X < x)$ и $C(Y < y)$ зависимы, то либо $P(A) = P(B) \cdot P(C/B)$, либо $P(A) = P(C) \cdot P(B/C)$. Обозначим $P(C/B) = P(Y < y/X < x) = F(y/x)$, $P(B/C) = P(X < x/Y < y) = F(x/y)$. Теперь можем записать

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y) = F_1(x) \cdot F(y/x), \\ F(x,y) = F_2(y) \cdot F(x/y). \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

Функции $F(y/x)$ и $F(x/y)$ называют условными функциями распределения. Например, $F(x/y)$ означает функцию распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла фиксированное значение, меньшее y. Формулы (3.6) дают правило умножения законов распределения.

Пример 1. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}, \; x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Найти $F_1(x)$ и $F_2(y)$, показать, что X и Y — независимые случайные величины.

Решение. По свойству 3 находим, что

$F_1(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} (1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}) = 1 - 5^{-x}$, если $x > 0$ и $F_1(x) = 0$, если $x < 0$;

$F_2(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}) = 1 - 5^{-y}$, если $y > 0$, $F_2(y) = 0$, если $y < 0$.

Так как $1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y} = (1 - 5^{-x})(1 - 5^{-y})$, т.е. $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, то по свойству 6 случайные величины X и Y независимы.

Пример 2. Система случайных величин (X, Y) задана функцией распределения

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}, y > \dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5[\sin x + \sin y - \\ - \sin(x + y)], \text{ если } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \ 0 < y \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5[\sin x - \cos x + 1], \quad \text{если } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad y > \dfrac{\pi}{2}; \\ 0{,}5[\sin y - \cos y + 1], \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}, 0 < y \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Выяснить, зависимы или нет случайные величины X и Y, найти $F(x/y)$ и $F(y/x)$.

Пример 3. Доказать, что функция

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ 1 - a^{-x} - b^{-x} + c^{-x-y}, \text{ если } x > 0 \text{ или } y > 0, \end{cases}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b$, не может быть функцией распределения некоторой системы случайных величин. Выяснить, какие из свойств функции распределения при этом не выполняются.

Примеры 2 и 3 предлагается решить самостоятельно.

3.3. Плотность распределения системы случайных величин

Пусть функция распределения $F(x, y)$ системы (X, Y) непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F''_{xy}. Найдём предел

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y},$$

считая, что он существует. Полагая $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $y_1 = y$, $y_2 = y + \Delta y$, из свойства 5 функции распределения, получаем

$$\rho(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x, y+\Delta y)-\right.$$
$$\left.-F(x+\Delta x, y)] - [F(x, y+\Delta y) - F(x,y)]\right\}.$$

Без доказательства примем, что

$$\rho(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x, y+\Delta y)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-F(x+\Delta x, y)] - [F(x, y+\Delta y) - F(x,y)]\right]\right\}.$$

Применив к каждой из разностей в числителе формулу Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\rho(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\Delta x, \xi_1) - \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \xi_2)\right]\Delta y}{\Delta x\Delta y}\right\},$$

где точки ξ_1 и ξ_2 находятся между точками y и $y+\Delta y$. Осуществив предельный переход при $\Delta y \to 0$, найдём

$$\rho(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\Delta x, y) - \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Итак, $\rho(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$. Функция $\rho(x,y)$ называется *плотностью распределения вероятностей системы* (X,Y).

Отметим свойства плотности $\rho(x,y)$ распределения системы, которые следуют из свойств функции $F(x,y)$ и определения $\rho(x,y)$.

1. $\rho(x,y) \geq 0$.

2. Если $\rho(x,y)$ непрерывна, то

$$P(x \leq X < x+\Delta x, y \leq Y < y+\Delta y) = \rho(\xi,\eta)\Delta x\Delta y,$$

где ξ, η — некоторая точка из окрестности точки (x,y).

3. Если $\rho(x,y)$ непрерывна, а потому и интегрируема в области D, то

$$P[(x,y)\in D] = \iint_{(D)}\rho(x,y)dxdy. \qquad (3.7)$$

4. Справедливо равенство

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho(x,y)dxdy. \qquad (3.8)$$

Соотношение (3.8) есть следствие равенства (3.7), если

$$D : \begin{cases} -\infty < X < x, \\ -\infty < Y < y. \end{cases}$$

5. Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dxdy = 1. \tag{3.9}$$

6.
$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy \right\} dx, \\ F_2(y) &= \int_{-\infty}^{y} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx \right\} dy. \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

7. $$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy; \quad \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx, \tag{3.11}$$

где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ — плотности распределения случайных величин X и Y. Соотношения (3.11) получаются дифференцированием интегралов (3.10) по верхнему пределу.

8. Если случайные величины X и Y независимы, то $\rho(x,y) = \rho_1(x)\cdot\rho_2(y)$, и обратно, если $\rho(x,y) = \rho_1(x)\cdot\rho_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

9. Для зависимых случайных величин X и Y вводят понятие условных плотностей распределения $\rho(x/y)$ и $\rho(y/x)$:

$$\rho(x/y) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}, \quad \rho(y/x) = \frac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)}, \tag{3.12}$$

тогда

$$\rho(x,y) = \rho_1(x)\cdot\rho(y/x), \;\; \rho(x,y) = \rho_2(y)\cdot\rho(x/y) \tag{3.13}$$

Соотношения (3.13) называют правилом умножения плотностей распределения.

Подчеркнём, что $\rho(y/x)$ означает плотность распределения случайной величины Y, если известно, что случайная величина X приняла значение x.

10. Зная плотность распределения $\rho(x,y)$ системы (X,Y) можно найти закон распределения случайной величины $Z = \varphi(X,Y)$, являющейся функцией случайных величин X и Y. Сначала находим функцию распределения $F(z)$, применяя следующий приём: $F(z) = P(Z < z) = P(\varphi(x,y) < z) = = \iint_D \rho(x,y)dxdy$, где область D состоит из тех точек плоско-

сти XOY, для которых справедливо неравенство $\varphi(x,y) < z$. Здесь использовалось свойство 3 плотности распределения $\rho(x,y)$. Найдя $F(z)$, легко найти и $\rho(z)$, так как $\rho(z) = F'(z)$.

Простейшим примером двумерной плотности распределения является равномерное распределение

$$\rho(x,y) = \begin{cases} c, & \text{если} \quad (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

По условию нормировки $\iint_{(D)} c\,dxdy = 1 = c \cdot S$, где S — площадь области D. Поэтому $c = \dfrac{1}{S}$.

Пример 1. Система случайных величин (X, Y) задана функцией распределения

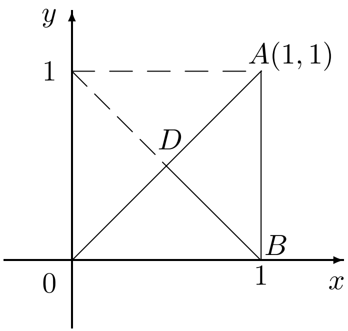
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 4^{-x} - 4^{-y} + 4^{-x-y}, \text{если } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти $\rho(x,y)$.

Решение. Так как $F(x,y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков, то $\rho(x,y) = F''_{x,y}$. Поэтому

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 4^{-x-y}\ln^2 4, \text{ если } x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Пример 2. Система случайных величин (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей



$$\rho(x,y) = \\ = \begin{cases} c(x+y) \text{ при } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти константу c и $P(X + Y < 1)$.

Решение. Из условия нормировки (3.9) находим: $c\iint_{(D)}(x+y)dxdy = 1$, где D — область, ограниченная сторонами треугольника OAB, следовательно,

$$c\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy = c\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{c}{2} = 1.$$

Отсюда $c = 2$. По формуле (3.7)

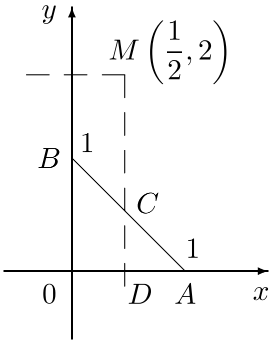
$$P(x + y < 1) = 2\iint_{(D_1)}(x+y)dxdy,$$

где D_1 — треугольник ODB. Поэтому $P(X+Y<1) =$
$$= 2\int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} (x+y)dx = 2\int_0^{1/2} (0{,}5 - 2y^2)dy = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{если точка } (x,y) \text{ принадлежит треугольнику} \\ & \text{с вершинами } O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1), \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: $F\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$, $\rho(x/y)$, $\rho(y/x)$.



Решение. $F\left(\frac{1}{2}, 2\right) =$

$$= P\left(X < \frac{1}{2}, Y < 2\right) = \iint_{(D)} 24xy\,dx\,dy,$$

где D — трапеция $OBCD$. Поэтому

$$F\left(\frac{1}{2}, 2\right) = 24\int_0^{0,5} x\,dx \int_0^{1-x} y\,dy =$$
$$= 12\int_0^{0,5} x(1-x)^2 dx =$$
$$= 12\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{0,5} =$$
$$= 12\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64}\right) = \frac{11}{16}.$$

Используя формулы (3.11) и вид функции $\rho(x,y)$, находим $\rho_1(x) = 0$, если либо $x < 0$, либо $x > 1$. Если же $0 < x < 1$, то $\rho_1(x) = 24\int_0^{1-x} xy\,dy = 12x(1-x)^2$, так как при фиксированном x из промежутка $(0,1)$ переменная y меняется от 0 до $(1-x)$. При других значениях y величина $\rho(x,y) = 0$. Аналогично можно найти, что $\rho_2(y) = 12y(1-y)^2$, если $0 < y < 1$; $\rho_2(y) = 0$ в других точках. По формулам (3.12) находим, что

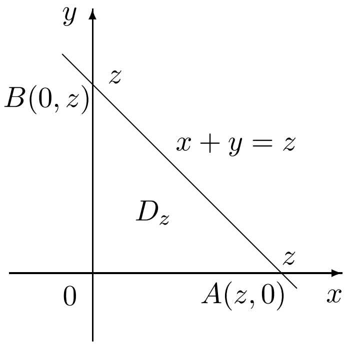
$$\rho(x/y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1-y)^2}, & \text{если } (x,y) \text{ внутри треугольника OAB,} \\ 0, & \text{в остальных точках;} \end{cases}$$

$$\rho(y/x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1-x)^2}, & \text{если } (x,y) \text{ внутри треугольника OAB,} \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Пример 4. Даны плотности распределения независимых случайных величин X и Y: $\rho_1(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$, $0 \le x < +\infty$, $\rho_2(y) = 0{,}2e^{-0{,}2y}$, $0 \le y < +\infty$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Так как случайные величины X и Y независимы, то плотность распределения системы $\rho(x, y) = \rho_1(x) \cdot \rho_2(y)$, по свойству 8. В нашем примере получаем, что $\rho(x, y) = 0{,}1e^{-0{,}5x-0{,}2y}$, если $x \ge 0$, $y \ge 0$. Для отыскания $\rho(z)$ воспользуемся приёмом, описанным в свойстве 10 плотности распределения. Сначала находим

$F(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) = \iint_{D_z} 0{,}1e^{-0{,}5x-0{,}2y}dxdy$,



где D_z — область, все точки которой лежат внутри треугольника OAB. Поэтому $F(z) = 0{,}1 \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-0{,}5x-0{,}2y}dy = \frac{2}{3} \cdot e^{-0{,}5z} - \frac{5}{3} \cdot e^{-0{,}2z} + 1$.

Дифференцируя по z последнее соотношение, находим искомую плотность распределения $\rho(z) = (e^{-0{,}2z} - e^{-0{,}5z}) \cdot \frac{1}{3}$, если $z \ge 0$, если же $z < 0$, то $\rho(z) = 0$.

3.4. Математическое ожидание от функции нескольких случайных аргументов

Пусть дана случайная величина $Z = \varphi(X, Y)$, являющаяся функцией двух случайных аргументов X и Y.

Если случайные величины X и Y дискретны и известна матрица распределения, т.е. заданы вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, то

$$M[Z] = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j)p_{ij}. \qquad (3.14)$$

Пусть система непрерывных величин (X, Y) распределена в области D плоскости (O, X, Y) с плотностью $\rho(x, y)$. Найдём математическое ожидание случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$, не находя плотности распределения $\rho(z)$. Предположим функции $\varphi(x, y)$ и $\rho(x, y)$ интегрируемыми по Риману. Разобьём область D на n частичных областей D_i площадью ΔS_i, в каждой из частичных областей выберем по точке (ξ_i, η_i) и построим дискретную случайную величину $\tilde{Z}$ с рядом распределения

$\tilde{Z}$	$\varphi(\xi_1, \eta_1)$	$\varphi(\xi_2, \eta_2)$	$\dots$	$\varphi(\xi_n, \eta_n)$
P	$\rho(\xi_1, \eta_1)\Delta S_1$	$\rho(\xi_2, \eta_2)\Delta S_2$	$\dots$	$\rho(\xi_n, \eta_n)\Delta S_n$

По формуле (3.14) находим

$$M[\tilde{Z}] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i)\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \tag{3.15}$$

Величину $M[\tilde{Z}]$ можно принять за приближённое значение $M[Z]$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, где λ — максимальный диаметр областей D_i, получаем

$$M[Z] = \iint_{(D)} \varphi(x, y)\rho(x, y)dxdy \tag{3.16}$$

Если система (X, Y) задана на всей плоскости, то

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\rho(x, y)dxdy \tag{3.17}$$

при условии сходимости этого интеграла.

Формулы (3.15) и (3.17) легко обобщаются на любое число аргументов. Так, если $U = \varphi(x, y, z)$, то

$$M[U] = \iiint_{(D)}\varphi(x, y, z)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

где D — область определения системы.

Пример 1. Дана матрица

	X	
Y	-2	3
1	0,32	0,18
4	0,13	0,37

распределения системы (X, Y) двух дискретных случайных величин. Найти $M[Z]$, если $Z = X^2 + Y^2$.

Решение. Применяя формулу (3.14), получаем

$$M[Z]=[(-2)^2+1]\cdot 0{,}32+(3^2+1)\cdot 0{,}18+[(-2)^2+4^2]\cdot 0{,}13+$$
$$+(3^2+4^2)\cdot 0{,}37=1{,}60+1{,}80+2{,}60+9{,}25=15{,}25.$$

Пример 2. Система непрерывных случайных величин (X,Y) задана в круге $x^2+y^2\le R^2$ плотностью распределения $\rho(x,y)=\dfrac{2}{\pi R^4}(x^2+y^2)$. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=X^2\cdot Y^2$.

Решение. Применим формулу (3.16):

$$M[Z]=\frac{2}{\pi R^4}\iint_{(D)}x^2y^2(x^2+y^2)dxdy,$$

где D — круг $x^2+y^2\le R^2$. Перейдём к полярной системе координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Получим

$$M[Z]=\frac{2}{\pi R^4}\int_0^R r^7dr\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi=$$
$$=\frac{R^4}{16\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi=\frac{R^4}{16\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=\frac{R^4}{16}.$$

3.5. Характеристики связи двух случайных величин

3.5.1. Кривые регрессии (условные математические ожидания)

Пусть даны две случайные величины X и Y. Наиболее полную характеристику их связи дают либо условные функции распределения $F(x/y)$, $F(y/x)$, либо условные плотности $\rho(x/y)$, $\rho(y/x)$. Иногда достаточны менее полные характеристики, но более просто определяемые. К таким и относятся условные математические ожидания или функции регрессии одной случайной величины на другую.

Для дискретных случайных величин X и Y условные математические ожидания мы определили в подразделе 3.1. Для непрерывных величин полагают:

$$M[X/Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho(x/y)dx, \quad (3.18)$$

$$M[Y/X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty}y\rho(y/x)dy. \quad (3.19)$$

Условное математическое ожидание $M[X/Y=y]$, как это следует из (3.18), есть некоторая функция $\psi(y)$ аргумента y. Её называют функцией регрессии случайной величины X на случайную величину Y. График функции $x=\psi(y)$ называют кривой регрессии случайной величины X на Y. Соотношение (3.19) определяет функцию $\varphi(x)$, называемую функцией регрессии Y на X, а её график называют кривой регрессии Y на X.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ дают представление о виде зависимости случайных величин X и Y. Графики этих функций получаются при экспериментальном исследовании вида зависимости двух случайных величин.

Если случайные величины X и Y независимы, то кривые регрессии являются прямыми, параллельными осям координат, пересекающимися в точке (m_x, m_y).

Для характеристики степени отклонения экспериментальных точек от кривой регрессии применяют условные дисперсии, определяемые для непрерывных величин соотношениями:

$$D[Y/X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-M[Y/X=x])^2\rho(y/x)dy,$$

$$D[X/Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X/Y=y])^2\rho(x/y)dx.$$

Для дискретных величин эти формулы принимают вид:

$$D[Y/X=x_i]=\sum_j(y_j-M[Y/X=x_i])^2P(y_j/x_i),$$

$$D[X/Y=y_j]=\sum_i(x_i-M[X/Y=y_j])^2P(x_i/y_j).$$

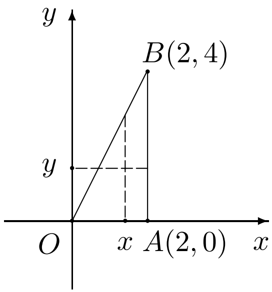
Пример. Система (X,Y) распределена равномерно в треугольнике с вершинами $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,4)$, т.е.

$$\rho(x,y)=\begin{cases} c, & \text{если } (x,y) \text{ лежит внутри треугольника } OAB, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти функции регрессии $y=\varphi(x)$ и $x=\psi(y)$. (Так как $c=\dfrac{1}{S}$, где S — площадь области D, то в нашем случае $c=\dfrac{1}{4}=0{,}25$.)

Решение. Зафиксируем каким-либо образом $X=x$ в промежутке (0,2). При этом значении x величина Y меняется равномерно в интервале $[0,2x)$. Поэтому $M[Y/X=x]=\dfrac{0+2x}{2}=x$

(см. подраздел 2.9). Следовательно, $\varphi(x) = x$. При фиксированном значении y величины Y из промежутка $(0{,}4)$ величина



X изменяется равномерно в промежутке $(0{,}5y; 4)$. Следовательно, $M[X/Y = y] = \dfrac{0{,}5y + 4}{2} =$ $= 0{,}25y + 2$. Поэтому $\psi(y) = 0{,}25y + 2$. Кривые регрессии являются прямыми линиями, не параллельными осям координат. Следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

Такой простой способ отыскания функций регрессии пригоден лишь для равномерных распределений. В общем случае необходимо использовать формулы (3.18) и (3.19).

Найдём функцию $\varphi(x)$ данного примера, применяя формулу (3.19). Получаем $\rho_1(x) = \int_0^{2x} 0{,}25dy = 0{,}5x$, $\rho(y/x) = \dfrac{0{,}25}{0{,}5x} =$ $= \dfrac{1}{2x}$. Теперь, из формулы (3.19) следует:

$$\varphi(x) = M[Y/X = x] = \int_0^{2x} \frac{y}{2x} dy = \frac{1}{2x} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} = x.$$

Мы пришли к тому же результату.

3.5.2. Коэффициент корреляции

Функции регрессии хорошо характеризуют зависимость одной случайной величины от другой, но их отыскание связано с громоздкими вычислениями. Применяют более простые, хотя и не столь полные характеристики. К таким и относится коэффициент корреляции.

Для числовой характеристики степени зависимости величин X и Y используют величину $M[(X - m_x)(Y - m_y)]$, называемую *ковариацией* случайных величин X и Y, которая обозначается $\operatorname{cov}(X, Y)$. Для непрерывных величин

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)\rho(x, y)dxdy, \qquad (3.20)$$

а для дискретных —

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}. \qquad (3.21)$$

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Доказательство проведём для непрерывных случайных величин. Если случайные величины X и Y независимы, то $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$, следовательно, по формуле (3.20)

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)\rho_1(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty}(y - m_y)\rho_2(y)dy =$$
$$= M[(X - m_x)] \cdot M[(Y - m_y)] = (m_x - m_x)(m_y - m_y) = 0.$$

Обратное утверждение неверно, т.е. из того, что $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, не следует независимость величин X и Y. Для зависимых величин $\operatorname{cov}(X,Y)$ может быть как равной нулю, так и отличной от нуля.

Величину $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ называют *коэффициентом корреляции*.

Случайные величины X и Y называются коррелированными, если $r_{xy} \neq 0$ и некоррелированными, если $r_{xy} = 0$. Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы. Зависимые случайные величины могут быть как некоррелированными, так и коррелированными.

Как мы покажем в следующем подразделе, коэффициент корреляции характеризует не любого вида зависимости случайных величин, а лишь только линейные. Величина r_{xy} — это мера линейной зависимости случайных величин.

Непосредственное применение формул (3.20) и (3.21) для вычисления ковариации не всегда удобно. Преобразуем эти формулы.

Пользуясь аддитивным свойством двойного интеграла, из (3.20) получаем

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x,y)dxdy -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} m_x y\rho(x,y)dxdy - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} m_y x\rho(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} m_x m_y\rho(x,y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x,y)dxdy - m_x\int_{-\infty}^{+\infty} ydy\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx -$$
$$- m_y\int_{-\infty}^{+\infty} xdx\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy + m_x m_y\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dxdy.$$

Воспользуемся далее свойствами 7 и 5 плотности распределения. Получим

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x,y)dxdy - m_x\int_{-\infty}^{+\infty} y\rho_2(y)dy-\\&-m_y\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho_1(x)dx + m_x m_y =\\&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x,y)dxdy - m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y.\end{aligned}$$

Мы получили

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x,y)dxdy - m_x m_y. \tag{3.22}$$

Аналогично соотношение (3.21) можно привести к виду

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij} - m_x m_y. \tag{3.23}$$

Формулы (3.22) и (3.23) можно объединить в одну

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[X\cdot Y] - m_x m_y. \tag{3.24}$$

Пример 1. Дана матрица

	X	
Y	1	2
3	0,20	0,30
4	0,40	0,10

распределения системы дискретных случайных величин. Найти $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Решение. Находим ряды распределения для X и Y:

X	1	2
p	0,6	0,4

Y	3	4
p	0,5	0,5

Следовательно, $m_x = 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}4$, $m_y = 1{,}5 + 2{,}0 = 3{,}5$. По формуле (3.23) получаем $\operatorname{cov}(X,Y) = 1\cdot 3\cdot 0{,}2 + 3\cdot 2\cdot 0{,}3+$ $+4\cdot 1\cdot 0{,}4 + 4\cdot 2\cdot 0{,}1 - 1{,}4\cdot 3{,}5 = 0{,}6 + 1{,}8 + 1{,}6 + 0{,}8 - 4{,}9 =$ $= 4{,}8 - 4{,}9 = -0{,}1$.

Пример 2. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения

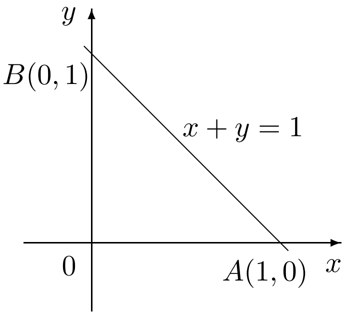
$$\rho(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{если } (x,y) \text{ лежит внутри треугольника,}\\ & \text{с вершинами } O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1),\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Найти $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Решение. В примере 3 из подраздела 3.3 мы нашли, что

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках;} \end{cases}$$

$$\rho_2(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & \text{если } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$



Поэтому

$m_y = m_x = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx =$
$= \int_0^1 12(x^2 - 2x^3 + x^4)dx =$
$= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) =$
$= 12 \cdot \frac{20 - 30 + 12}{60} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} =$
$= 0{,}4.$

По формуле (3.22) вычисляем:

$\operatorname{cov}(X,Y) =$
$= \iint_{(D)} 24x^2y^2 dxdy - (0{,}4)^2,$

где D — область, лежащая внутри треугольника OAB.

$\operatorname{cov}(X,Y) = 24\int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y^2 dy - 0{,}16 = 8\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx -$
$-0{,}16 = 8\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)dx - 0{,}16 =$
$= 8\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) - 0{,}16 = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = \frac{10 - 12}{75} = -\frac{2}{75}.$

3.6. Теоремы о свойствах числовых характеристик случайных величин

3.6.1. Свойства математического ожидания

В подразделе 2.4 мы уже показали, что

$$M[C] = C,\ M[CX] = CM[X],\ C = \text{const}.$$

Теорема 1. Если случайные величины X и Y имеют конечные математические ожидания, то $M[\alpha X + \beta Y] = \alpha M[X] + \beta M[Y]$, где α и β — константы.

Доказательство теоремы проведём для непрерывных случайных величин. Пусть $\rho(x,y)$ — плотность распределения системы (X,Y), тогда по формуле (3.16) находим

$M[\alpha x+\beta y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha x+\beta y)\rho(x,y)dxdy=$
$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho(x,y)dxdy+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\rho(x,y)dxdy=$
$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx=$
$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho_1(x)dx+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}y\rho_2(y)dy=\alpha M[X]+\beta M[Y].$
(При этом мы воспользовались формулами (3.11)).

Если $\alpha=\beta=1$, то $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$.

Теорему 1 легко обобщить на любое число слагаемых и получить $M[\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_nX_n]=\alpha_1M[X_1]+\alpha_2M[X_2]+$ $+\ldots+\alpha_nM[X_n]$.

Теорема 2. Если случайные величины X и Y имеют конечные математические ожидания, то

$$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]+\mathrm{cov}(X,Y). \qquad (3.25)$$

Соотношение (3.25) следует из формулы (3.24). В частности, если X и Y некоррелированы, то $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ и тогда $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$.

3.6.2. Свойства дисперсии

В подразделе 2.6 мы уже показали, что

$D[C]=0,\ \ D[CX]=C^2D[X]$, где C — константа.

Теорема 3. Для любых случайных величин, имеющих конечную дисперсию, справедливо соотношение

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2\mathrm{cov}(X,Y). \qquad (3.26)$$

Доказательство. $D[X+Y]=M[(X+Y-M[X+Y])^2]=$ $=M[\{(X-m_x)+(Y-m_y)\}^2]=M[(X-m_x)^2]+M[(Y-m_y)^2]+$ $+2M[(X-m_x)(Y-m_y)]=M[(X-m_x)^2]+M[(Y-m_y)^2]+$ $+2M[(X-m_x)(Y-m_y)]=D_x+D_y+2\mathrm{cov}(X,Y)$.

Для некоррелированных величин $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

Пользуясь свойством $D[CX]=C^2D[X]$ и формулой (3.26), легко показать, что

$$D[\alpha X+\beta Y]=\alpha^2D[X]+\beta^2D[Y]+2\alpha\beta\mathrm{cov}(X,Y). \qquad (3.27)$$

Формулу (3.27) легко обобщить на любое число слагаемых:

$$D\sum_{i=1}^{n}\alpha_iX_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2D[X_i]+2\sum_{i,j=1,i<j}^{n}\alpha_i\alpha_j\mathrm{cov}(X_i,X_j).$$

3.6.3. Свойства коэффициента корреляции. Понятие линейной среднеквадратичной регрессии

Теорема 4. Для любых случайных величин X и Y, имеющих конечные дисперсии, значение коэффициента корреляции r_{xy} не превышает по модулю единицы, т.е. $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Доказательство. Найдём математическое ожидание

$$M[Z_{1,2}] = M\left[\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right].$$

Из теоремы 1 следует:

$$M[Z_{1,2}] =$$
$$= M\left[\frac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \pm 2\frac{(X-m_x)(Y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right] =$$
$$= \frac{M[(X-m_x)^2]}{\sigma_x^2} + \frac{M[(Y-m_y)^2]}{\sigma_y^2} \pm$$
$$\pm 2\frac{M[(X-m_x)(Y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Так как $M[(X-m_x)^2] = D_x = \sigma_x^2$, $M[(Y-m_y)^2] = D_y = \sigma_y^2$, $\dfrac{M[(X-m_x)(Y-m_y)]}{\sigma_x\sigma_y} = r_{xy}$, то $M[Z_{1,2}] = 2(1 \pm r_{xy})$. Поскольку $Z_{1,2} \ge 0$, то и $M[Z_{1,2}] \ge 0$, а потому $1 \pm r_{xy} \ge 0$, т.е. $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Теорема 5. Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, где a и b константы, то

$$r_{xy} = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0, \\ -1, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Доказательство. По свойству математического ожидания $m_y = am_x + b$, поэтому $Y - m_y = aX + b - am_x - b = a(X - m_x)$. Следовательно,

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X-m_x)(Y-m_y)] = M[a(X-m_x)^2] = aD_x,$$

$$D[Y] = M[(Y-m_y)^2] = M[a^2(X-m_x)^2] = a^2D_x,$$

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}} = \frac{aD_x}{\sqrt{a^2D_xD_x}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1,$$

что и требовалось доказать.

Мы докажем справедливость обратного утверждения, т.е. что из равенства $|r_{xy}| = 1$ следует линейная зависимость X и Y, но для этого нам понадобится понятие линейной среднеквадратичной регрессии одной случайной величины на другую.

Пусть X и Y зависимые случайные величины. Представим приближённо Y как линейную функцию от X: $Y \cong aX + b$, где параметры a и b подлежат определению. Функцию $g(X) = aX + b$ называют наилучшим приближением Y в смысле метода наименьших квадратов, если величина $M[(Y - aX - b)^2]$ принимает наименьшее значение. Функцию $g(X) = aX + b$ при этих значениях параметров a и b называют *линейной среднеквадратичной регрессией* Y на X. Найдём эти значения a и b.

Рассмотрим функцию $F(a, b) = M[(Y - aX - b)^2]$ и выясним, при каких значениях a и b она принимает наименьшее значение. Можем записать $F(a, b) = M[\{(Y - m_y) - a(X - m_x) + (m_y - b - am_x)\}^2] = M[(Y - m_y)^2] + a^2 M[(X - m_x)^2] - 2aM[(Y - m_y)(X - m_x)] + (m_y - b - am_x)^2$, отсюда

$$F(a, b) = \sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2 - 2ar_{xy}\sigma_x\sigma_y + (m_y - b - am_x)^2.$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Находим:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2a\sigma_x^2 - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y - 2(m_y - b - am_x)m_x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2(m_y - b - am_x),\ \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2\sigma_x^2 + 2m_x^2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2,$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = 2m_x$. Из условий $\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ получаем $a = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy}$, $b = m_y - r_{xy} m_x \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2} > 0$, $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 4\sigma_x^2 > 0$, то при найденных значениях a и b функция принимает минимальное значение, а поскольку критическая точка единственна, то это значение будет наименьшим.

Мы получили, что функция линейной среднеквадратичной регрессии Y на X имеет вид $g(X) = m_y + r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$.

Прямая $y - m_y = r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$ называется *прямой среднеквадратичной регрессии* Y на X.

При найденных значениях a и b функция $F(a,b) = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2)$. Величину $\Delta = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2)$ называют *остаточной дисперсией* случайной величины Y относительно случайной величины X. Она определяет величину ошибки приближённого равенства $Y \approx aX + b$. Если окажется $r_{xy} = \pm 1$, то ошибки не возникает, но тогда X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Доказана следующая теорема.

Теорема 6. Если коэффициент корреляции r_{xy} случайных величин X и Y равен ± 1, то эти величины связаны линейной функциональной зависимостью.

Аналогично можно получить прямую средней квадратичной регрессии X на Y: $x - m_x = r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$ и остаточную дисперсию $\Delta = \sigma_x^2(1 - r_{xy}^2)$. При $r_{xy} = \pm 1$ обе прямые регрессии совпадают.

3.6.4. Двумерное нормальное распределение

Система (X, Y) называется двумерной нормальной случайной величиной, если плотность распределения имеет вид:

$$\rho(x,y) = \\ = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-r^2)}\left[\dfrac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \dfrac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \dfrac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}},$$

где $r \neq 1$.

Вычисляя интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dy = \rho_1(x)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y)dx = \rho_2(y)$, легко получить, что

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

$$\rho_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

Таким образом, величины X и Y, входящие в систему, распределены нормально с параметрами m_x, σ_x, m_y, σ_y.

Вычислив

$$M[(X-m_x)(Y-m_y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\rho(x,y)dxdy,$$

получим: $\mathrm{cov}(X,Y) = r\sigma_x\sigma_y$. Следовательно, величина r является коэффициентом корреляции случайных величин X и Y.

Если $r = 0$, то $\rho(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$, т.е. если случайные величины X и Y в нормальной системе некоррелированы, то они и независимы, что в общем случае, как мы видели ранее, неверно (см. подраздел 3.5.2).

Используя формулы $\rho(x/y) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_2(y)}$, $\rho(y/x) = \dfrac{\rho(x,y)}{\rho_1(x)}$, находим, что

$$\rho(x/y) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-r^2)\sigma_x^2}\left[x-m_x-r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\right]^2\right\}}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}},$$

$$\rho(y/x) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2}\left[y-m_y-r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(y-m_y)\right]^2\right\}}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}.$$

Видим, что функция $\rho(y/x)$ есть плотность нормального распределения с математическим ожиданием

$$M[Y/x] = m_y + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x-m_x)$$

и дисперсией $D[Y/x] = \sigma_y^2(1-r^2)$.

Кривая регрессии случайной величины Y на X является прямой линией

$$y = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x), \tag{3.28}$$

а X на Y —

$$x = m_x + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y). \tag{3.29}$$

Эти линии совпадают с прямыми среднеквадратичной регрессии. Прямые (3.28) и (3.29) пересекаются в точке (m_x, m_y) — в центре рассеивания случайных величин X и Y.

Вдоль кривой второго порядка

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = \lambda, \qquad (3.30)$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, плотность $\rho(x, y)$ постоянна. Так как дискриминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sigma_x^2} & -\dfrac{r}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\dfrac{r}{\sigma_x\sigma_y} & \dfrac{1}{\sigma_y^2} \end{vmatrix} = \frac{1-r^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} > 0,$$

то кривая (3.30) является эллипсом, называемым эллипсом рассеивания.

Приведём уравнение (3.30) эллипса к каноническому виду, поместив начало координат в точку (m_x, m_y) и выбрав за новые координатные оси главные направления этого эллипса. Если угол поворота старых осей координат обозначить через α, то новые координаты ξ и η можно выразить через старые x и y по формулам:

$$\xi = (x-m_x)\cos\alpha + (y-m_y)\sin\alpha,$$
$$\eta = -(x-m_x)\sin\alpha + (y-m_y)\cos\alpha.$$

Из последних соотношений легко получаем, что

$$\begin{aligned}(x-m_x) &= \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\\ (y-m_y) &= \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha.\end{aligned} \qquad (3.31)$$

Внеся (3.31) в (3.30), получим

$$\frac{(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)}{\sigma_x\sigma_y} +$$
$$+\frac{(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)^2}{\sigma_y^2} = \lambda.$$

Угол α подберём так, чтобы произведение $\xi\eta$ отсутствовало. Тогда

$$\frac{-2\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_x^2} - \frac{2r(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_y^2} = 0$$

$$\text{или} \quad \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\sin 2\alpha - 2r\frac{-\cos 2\alpha}{\sigma_x^2}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$. При таком выборе угла α уравнение эллипса в новых координатах примет вид:

$$(\sigma_y^2 \cos^2 \alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_x^2 \sin^2 \alpha)\xi^2 +$$
$$+(\sigma_y^2 \sin^2 \alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_x^2 \cos^2 \alpha)\eta^2 = \lambda\sigma_x^2\sigma_y^2.$$

Если обозначить

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha,$$
$$\sigma_\eta^2 = \sigma_y^2 \sin^2 \alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha,$$

то уравнение (3.30) можно записать в виде

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2} = \frac{\lambda\sigma_x^2\sigma_y^2}{2\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2}.$$

В результате двумерный нормальный закон преобразуется к виду

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right], \qquad (3.32)$$

называемому каноническим.

Как следует из (3.32), случайные величины ξ и η независимы. Таким образом, в случае двумерного нормального распределения от системы зависимых случайных величин можно перейти к системе независимых величин, также распределённой по нормальному закону, путём линейного преобразования вида (3.31).

4. Элементы математической статистики

Мы уже отмечали, что теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений, при этом сама математическая модель остаётся заданной, т.е. если изучается некоторое случайное событие A, то известно $P(A)$. Если речь идёт о случайной величине X, то известен закон распределения вероятностей в какой-либо форме. В практических задачах эти характеристики, как правило, неизвестны, но имеются некоторые экспериментальные данные о событии или случайной величине. Требуется на основании этих данных построить подходящую теоретико-вероятностную модель изучаемого явления. Это и является задачей математической статистики, обширного раздела современной математики.

4.1. Выборочный метод

4.1.1. Понятие выборки

Пусть требуется изучить случайную величину X, распределённую по некоторому неизвестному нам закону A. Множество всех значений случайной величины X называют *генеральной совокупностью* A.

Предположим, что имеется возможность над величиной X проводить любое число экспериментов (измерений) и получать некоторое множество её значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{4.1}$$

как результат n наблюдений. Заметим, что среди чисел (4.1) могут быть и равные.

Множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ отдельных значений случайной величины X, распределённой по закону A, называется *выборкой* объёма n из генеральной совокупности A.

Числа x_i называют *элементами выборки* или *вариантами*.

Итак, в результате n экспериментов получена выборка (4.1). Если предпринять другую серию n экспериментов, то, как правило, получим другую выборку $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Следовательно, множество всех выборок объёма n из данной генеральной совокупности можно рассматривать как систему

n случайных величин

$$X_1, X_2, \ldots, X_n. \tag{4.2}$$

Выборка (4.1) представляет собой одно из возможных значений n-мерной случайной величины (4.2). Обычно систему (4.2) и её конкретную реализацию (4.1) обозначают одинаково в виде (4.1).

Чтобы по выборке можно было достаточно полно судить о случайной величине X, проведение экспериментов должно быть организовано специальным образом. Будем считать, что все эксперименты независимы и не изменяют характера изучаемой случайной величины. Это означает, что случайные величины в системе (4.2) независимы и распределены по тому же закону A, что и изучаемая величина X.

Если случайная величина X принимает лишь небольшое число значений, то условию независимости и постоянства распределений удовлетворяют лишь выборки с возвращением, когда обследуемые объекты в предыдущем эксперименте возвращаются в изучаемую совокупность.

4.1.2. Простейшие способы обработки выборки

Выборка (4.1) является первичной формой записи экспериментального материала. Его можно обработать различным образом для удобства дальнейшего анализа. Если выборочные данные (4.1) расположить в порядке возрастания $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, $x'_1 \le x'_2 \le \ldots \le x'_n$, то полученная последовательность называется *вариационным рядом.* Разность $x'_n - x'_1$ между максимальным и минимальным элементами выборки называется *размахом* выборки.

Пусть в выборке объёма n одно и то же число x_i $(i = 1, 2, \ldots, m, m \le n)$ встречается n_i раз. Число n_i называется *абсолютной частотой* элемента x_i, а отношение $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ — его *относительной частотой.* Очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Мы получили две последовательности пар чисел (x_i, n_i) и (x_i, W_i). Первую из них называют *статистическим рядом абсолютных частот*, а вторую — *статистическим рядом относительных частот.* Статистические ряды обычно записывают в виде таблиц, в первой строке которых располагают различные элементы выборки в порядке возрастания, а во второй —

соответствующие абсолютные или относительные частоты этих элементов, т.е. в виде

x_i	x_1''	x_2''	$\ldots$	x_m''
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

(4.3)

x_i	x_1''	x_2''	$\ldots$	x_m''
W_i	W_1	W_2	$\ldots$	W_m

(4.4)

Здесь $x_1'' \leq x_2'' \leq \ldots \leq x_m''$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

При большом объёме выборки строят группированный статистический ряд. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, делят на k равных (иногда неравных) частичных интервалов, эти интервалы нумеруют и подсчитывают числа n_i^* элементов выборки, попавших в i-й интервал, при этом элемент, совпадающий с верхней границей частичного интервала, относят к последующему интервалу. Обозначая через x_i^* середину i-го интервала, получают две последовательности пар (x_i^*, n_i^*) и $\left(x_i^*, \dfrac{n_i^*}{n}\right)$, называемые *группированными рядами абсолютных или относительных частот*. Эти ряды обычно также записывают в виде таблиц

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\ldots$	x_k^*
n_i^*	n_1^*	n_2^*	$\ldots$	n_k^*

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\ldots$	x_k^*
$W_i = \dfrac{n_i^*}{n}$	$\dfrac{n_1^*}{n}$	$\dfrac{n_2^*}{n}$	$\ldots$	$\dfrac{n_k^*}{n}$

(4.5)

Для большей наглядности применяют различного рода графические построения, отражающие те или иные особенности выборки. Отметим некоторые из них.

1. Полигон абсолютных частот — ломаная с вершинами в точках $M_i(x_i, n_i)$.

2. Полигон относительных частот — ломаная с вершинами в точках $M_i\left(x_i, \dfrac{n_i}{n}\right)$.

Полигоны частот графически представляют ряды (4.3) и (4.4).

3. Гистограмма относительных частот — ступенчатая фигура, состоящая из k прямоугольников, опирающихся на частичные интервалы. Площадь i-го прямоугольника полагают равной $\dfrac{n_i^*}{n}$, где n_i^* — число элементов выборки, попавших в i-й частичный интервал. Гистограмма строится на основании ряда (4.5). Для непрерывной случайной величины гистограмма даёт некоторое представление о её плотности распределения.

4.1.3. Эмпирическая функция распределения. Выборочные параметры распределения

При построении вероятностных характеристик случайной величины X используется всё множество её значений. Такие характеристики называют *теоретическими*. Характеристики, построенные на основании выборочных данных, называют *эмпирическими* или *выборочными*.

Пусть имеем выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функция $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x — число элементов выборки меньших x, n — объём выборки, называется *эмпирической функцией распределения* или *функцией распределения выборки*.

Отличие теоретической функции распределения $F(x)$ от эмпирической $F^*(x)$ заключается в том, что $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события при проведении n экспериментов. Из теоремы Бернулли (см. подраздел 2.12.2) следует, что при увеличении n эмпирическая функция распределения выборки сходится по вероятности к теоретической.

Эмпирическая функция распределения совпадает с теоретической для дискретной случайной величины, заданной рядом распределения (4.4). Поэтому эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами теоретической.

Приведём некоторые выборочные числовые характеристики случайной величины X.

1. Выборочное математическое ожидание $m_{\text{В}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

2. Выборочная дисперсия $D_{\text{В}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_{\text{В}})^2}{n}$.

3. Выборочные начальные и центральные моменты

$$\nu_{\text{в}}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}, \quad \mu_{\text{в}}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_{\text{в}})^k}{n}.$$

Очевидно, что выборочные характеристики совпадают с теоретическими для случайной величины, заданной рядом (4.4), в котором следует положить $W_i = p_i$.

4.2. Основные понятия теории оценок параметров распределения

4.2.1. Понятие оценки. Требования к оценке

Пусть общий вид плотности распределения случайной величины X известен из каких-либо теоретических соображений, но не известны параметры, определяющие это распределение. Например, удалось установить, что величина X нормальна, но не известны параметры m_x и σ, полностью характеризующие распределение. Возникает задача приближённого вычисления этих параметров на основании выборочных данных.

Рассмотрим сначала случай, когда плотность распределения $\rho(x, \Theta)$ зависит от одного неизвестного параметра Θ. Требуется на основании выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить параметр Θ, т.е. найти некоторую функцию $\tilde{\Theta} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которая и даёт приближённое значение оцениваемого параметра.

Оценкой неизвестного параметра Θ распределения случайной величины X назовём функцию $\tilde{\Theta} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от выборочной величины X.

Основная задача теории оценок заключается в отыскании этих функций. Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайные величины, то и оценка также величина случайная, являющаяся функцией, заданной на множестве всех выборок объёма n. Если найдена оценка $\tilde{\Theta} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то для всякой фиксированной выборки получим число $\tilde{\Theta}$, каждое из которых можно принять в качестве приближённого значения параметра Θ.

Пример. Пусть измеряют некоторую величину X. В результате трёх независимых измерений получено $x_1 = 2{,}2$; $x_2 = 2{,}1$; $x_3 = 2{,}3$. Числа 2,2; 2,1; 2,3 представляют собой некоторую выборку. Величину $\tilde{m} = \dfrac{2{,}2 + 2{,}1 + 2{,}3}{3} = 2{,}2$ можно принять в качестве оценки математического ожидания X. В данном случае $\tilde{m} = T(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

Не любая функция $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ годится в качестве оценки. Для практического использования она должна удовлетворять ряду требований.

1. *Состоятельность оценки.* Оценка $\tilde{\Theta} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется состоятельной, если при неограниченном увеличении n величина $\tilde{\Theta}$ сходится по вероятности к оцениваемому параметру. Первое требование к оценке: оценка должна быть состоятельной.

2. *Несмещенность оценки.* Оценка не должна содержать систематических ошибок, т.е. математическое ожидание должно совпадать с оцениваемым параметром:

$$M[\tilde{\Theta}] = \Theta. \tag{4.6}$$

Если условие (4.6) выполнено, то оценка называется несмещённой. Разность $b_n(\Theta) = M[\tilde{\Theta}] - \Theta$ называется смещением оценки. Если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(\Theta) = 0$, то оценка называется асимптотически несмещённой.

Второе требование: оценка должна быть несмещённой или хотя бы асимптотически несмещённой.

3. *Эффективность оценки.* В качестве одной из характеристик точности оценки вводят понятие вариации V оценки:

$$V = M[(\tilde{\Theta} - \Theta)^2].$$

В частности, если оценка несмещённая, т.е. если $M[\tilde{\Theta}] = \Theta$, то вариация оценки совпадает с её дисперсией $V = D[\tilde{\Theta}]$. Идеальной была бы оценка $V = 0$, но, оказывается, этого добиться нельзя. Существует некоторое значение $V_{\min}$, которого можно достигнуть, но меньшего значения получить невозможно. Величину $V_{\min}$ называют *потенциальной точностью* или *потенциальной помехоустойчивостью* оценки. Приведём без доказательства формулу для отыскания $V_{\min}$ для несмещённой оценки. Если $\rho(x, \Theta)$ — плотность распределения величины X, а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборка, то в силу независимости случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ плотностью распределения выборки является функция

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = \rho(x_1, \Theta)\rho(x_2, \Theta) \cdot \ldots \cdot \rho(x_n, \Theta).$$

Введём в рассмотрение функцию
$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) = \ln \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta).$$
Величина $J = -M\left[\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right]$ называется количеством информации по Фишеру относительно $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta)$. Доказано, что $V \cdot J \geq 1$, т.е.
$$V \geq \frac{1}{J}. \tag{4.7}$$
Неравенство (4.7) называют неравенством Рао—Крамера. Из него следует, что
$$V_{\min} = \frac{1}{J}. \tag{4.8}$$
В случае смещённой оценки
$$V_{\min} = \frac{[\varphi'(\Theta)]^2}{J}, \tag{4.9}$$
где $\varphi(\Theta) =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.
Величину $e_n = \dfrac{V_{\min}}{V} = \dfrac{1}{VJ}$ называют *эффективностью оценки*. Если $e_n = 1$, то оценку называют эффективной. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$, то оценка называется асимптотически эффективной.

Третье требование к оценке: оценка должна быть эффективной или асимптотически эффективной.

Кратко рассмотрим случай, когда плотность распределения случайной величины X зависит от многих параметров $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$, т.е. имеет вид $\rho(x, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$. Пусть на основании выборки найдены оценки всех параметров $\tilde{\Theta}_i = T_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Через $V_i = M[(\tilde{\Theta}_i - \Theta_i)^2]$ обозначим вариацию оценки i-го параметра, а через $V_{i,\min}$ — её нижнюю границу. Можно доказать, что если оценка Θ_i не смещена, т.е. если $M[\tilde{\Theta}_i] = \Theta_i$, то $V_{i,\min} = \dfrac{1}{J_{ii}}$, где J_{ii} — элемент матрицы, обратной $||J_{ij}||$, в которой
$$J_{ij} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}\right].$$

Матрицу $||J_{ij}||$ называют *информационной матрицей Фишера.*

В случае, когда матрица Фишера диагональна, т.е. когда $J_{ij} = 0$ при $i \neq j$, можно пользоваться формулами (4.8) или (4.9).

4.2.2. Методы отыскания оценки неизвестных параметров

Мы рассмотрели основные требования, предъявляемые к оценкам неизвестных параметров. Эти оценки выражаются одним числом или одной точкой на числовой оси, поэтому их называют *точечными.* Существуют многие способы получения точечных оценок. Приведём два из них.

Нам дана плотность $\rho(x, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ с неизвестными параметрами $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$. Требуется на основании выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти оценки $\tilde{\Theta}_s = T_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $s = 1, 2, \ldots, k$ неизвестных параметров.

К. Пирсоном предложен метод моментов отыскания $\tilde{\Theta}_s$, заключающийся в приравнивании теоретических моментов выборочным $M[X^s] = \nu_{\text{в}}^s$ или $\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \rho(x, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k) dx = = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i^s}{n}$, $s = 1, 2, \ldots, k$. В результате получаем систему из k уравнений с k неизвестными $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$. Её решение и принимается в качестве оценок $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \ldots, \tilde{\Theta}_k$. Они являются некоторыми функциями от $\nu_{\text{в}}^{(1)}, \nu_{\text{в}}^{(2)}, \ldots, \nu_{\text{в}}^{(k)}$, а потому и от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример 1. Найти методом моментов оценку параметра λ показательного закона распределения по выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Решение. В данном случае $\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Параметр λ находим из условия $\lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, отсюда $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, следовательно, $\tilde{\lambda} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$.

Часто применяется другой метод, называемый методом *максимума правдоподобия.*

Рассматривая выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как систему независимых случайных величин, распределённых по тому же закону, что и случайная величина X, находим плотность распределения системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\mathcal{L} = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k).$$

Функцию $\mathcal{L}$ называют *функцией правдоподобия*, считая величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ фиксированными и рассматривая $\mathcal{L}$ как функцию от $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$. По методу максимума правдоподобия за оценки параметров $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$ принимаются те их значения, при которых функция правдоподобия принимает максимальное значение, т.е. те, при которых вероятность получения данной фиксированной выборки максимальна. Вместо функции $\mathcal{L}$ удобнее исследовать функцию $\ln \mathcal{L}$. Оценки являются решением системы $\dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \Theta_i} = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. В качестве оценок применяются те решения $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \ldots, \tilde{\Theta}_k$ этой системы, которые зависят только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и не зависят от оцениваемых параметров.

Оценки, полученные методом максимального правдоподобия для широкого класса функций $\mathcal{L}$, состоятельны, асимптотически эффективны и асимптотически нормальны, причём $\tilde{\Theta}_i = N\left(\Theta_i, \dfrac{1}{J_{ii}}\right)$. Величина J_{ii} вычислена в п. 4.2.1.

Пример 2. Найти оценку параметра λ методом максимума правдоподобия распределения Пуассона $P_t(m) = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

Решение. Находим $\mathcal{L}(\lambda) = \ln P_t(m) = m \ln \lambda t - \ln m! - \lambda t$, $\dfrac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \dfrac{m}{\lambda} - t$, $\dfrac{d^2\mathcal{L}}{d\lambda^2} = -\dfrac{m^2}{\lambda}$. Полагая $\dfrac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0$, находим оценку $\tilde{\lambda} = \dfrac{m}{t}$. Так как $\dfrac{d^2\mathcal{L}}{d\lambda^2} < 0$, то функция правдоподобия при $\lambda = \dfrac{m}{t}$ принимает наибольшее значение (поскольку точка экстремума единственная).

4.3. Оценка математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Предположим, что изучается нормальная случайная величина X, параметры которой $a = m_x$ и $\sigma^2 = D_x$ неизвестны. Требуется на основании выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оценить эти параметры.

4.3.1. Построение оценок

Найдём оценки $\tilde{a}$ и $\tilde{\sigma}$ методом максимального правдоподобия. В рассматриваемом случае

$$\rho(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

поэтому функцию правдоподобия можно записать в виде:

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, a, \sigma^2) = \\ = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, a, \sigma^2) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right],$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a, \sigma^2) = \ln \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n, a, \sigma^2) = \\ = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi}.$$

Находим:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a), \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{n}{2\sigma^2}. \tag{4.11}$$

Приравнивая к нулю эти частные производные и решая полученную систему уравнений относительно a и σ^2, получаем искомые оценки:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \tilde{m}_{\text{в}}, \tag{4.12}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{a})^2. \tag{4.13}$$

Как видим, оценки дисперсии и математического ожидания, полученные методом максимума правдоподобия, совпадают с выборочным математическим ожиданием и выборочной дисперсией, а потому состоятельны.

4.3.2. Проверка качества оценок математического ожидания и дисперсии

Проверим сначала качество оценки $\tilde{a}$. Так как

$$M[\tilde{a}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \frac{an}{n} = a,$$

то оценка $\tilde{a}$ несмещённая, поэтому

$$V[\tilde{a}] = D[\tilde{a}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

В дальнейшем нам понадобятся частные производные второго порядка от функции правдоподобия. Используя формулы (4.10) и (4.11), находим $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial a^2} = -\dfrac{n}{\sigma^2}$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)\partial a} = -\dfrac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{[\partial(\sigma^2)]^2} = -\dfrac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 + \dfrac{n}{2(\sigma^2)^2}$. Так как $M\left[\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)\partial a}\right] = 0$, то матрица Фишера диагональна, а потому для подсчёта $V_{\min}$ оценок $\tilde{a}$ и $\tilde{\sigma}^2$ можно пользоваться формулами (4.8) и (4.9). Поскольку $J = -M\left[\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial a^2}\right] = \dfrac{n}{\sigma^2}$, то $V_{\min} = \dfrac{1}{J} = \dfrac{\sigma^2}{n} = V(\tilde{a})$, следовательно, оценка $\tilde{a}$, найденная по формуле (4.12), эффективна.

Для проверки качества оценки дисперсии преобразуем выражение (4.13): $\tilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a - \tilde{a} + a)^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \dfrac{2(\tilde{a} - a)}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) + (\tilde{a} - a)^2$. Так как $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = n(\tilde{a} - a)$, то $\tilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\tilde{a} - a)^2$.

Проверим несмещённость оценки $\tilde{\sigma}^2$.

$$M[\tilde{\sigma}^2] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\tilde{a} - a)^2\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right] -$$

$$-M[(\tilde{a}-a)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] - D[\tilde{a}] = \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Мы получили $M[\tilde{\sigma}^2] = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$, следовательно, оценка $\tilde{\sigma}^2$ является смещённой, но асимптотически не смещённой. В данном случае смещение легко устранить, взяв в качестве оценки σ^2 величину $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{a})^2 = \dfrac{n}{n-1}\tilde{\sigma}^2$, называемую исправленной дисперсией. Находим $M[s^2] = \dfrac{n}{n-1}M[\tilde{\sigma}^2] = \dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$, т.е. оценка s^2 не смещена.

Для исследования s^2 на эффективность находим:

$$J(\sigma^2) = -M\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)^2}\right] = -M\left[\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right] =$$

$= \dfrac{n}{2\sigma^4}$. Выполнив вычисления, получим

$V(s^2) = D(s^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$. Так как $e = \dfrac{V_{\min}}{V} = \dfrac{1}{J(\sigma^2)V(s^2)} =$ $= 1 - \dfrac{1}{n}$, то оценка s^2 асимптотически эффективна.

4.3.3. Понятие о доверительном интервале. Построение доверительного интервала для оценки математического ожидания при известном σ нормальной случайной величины

Мы получили приближённые значения параметров распределения. Чтобы охарактеризовать погрешность этих значений, нужно указать границы a и b, за пределы которых не выходит оцениваемый параметр. Поскольку все расчёты производятся на основании случайных результатов опыта, то и границы a и b также случайные величины. Таким образом, речь идёт о построении интервала со случайными границами, который с заданной вероятностью γ содержал бы неизвестное значение параметра Θ.

Интервал со случайными границами, полностью определяемый результатами опытов и не зависящий от неизвестных характеристик, который с заданной вероятностью γ содержит неизвестный параметр Θ, называется *доверительным интервалом* для этого параметра.

Величина γ называется *доверительной вероятностью*. Число $\alpha = 1 - \gamma$ называют *уровнем значимости*, оно определяет вероятность того, что оцениваемый параметр не попадёт в доверительный интервал. При построении доверительных интервалов используется принцип невозможности маловероятных событий. Уровень значимости отделяет события практически невозможные от возможных. Если $P(A) \leq 1-\gamma$, то событие A считается практически невозможным. Выбор конкретного значения γ зависит от характера решаемой задачи и определяется степенью опасности тех последствий, которые может вызвать наступление событий, отнесённых этим выбором к практически невозможным. Обычно, $\gamma = 0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}999$.

Построим доверительный интервал для $a = m_x$ нормальной величины X при известном σ. Мы нашли, что $\tilde{a} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Случайная величина $\tilde{a}$ представляет собой линейную комбинацию нормально распределённых величин, а потому сама является нормальной, причём, как мы показали, $M[\tilde{a}] = a$, $\sigma^2[\tilde{a}] = \dfrac{\sigma^2[X]}{n}$. Выберем доверительную вероятность γ и потребуем, чтобы выполнялось условие $P(|\tilde{a} - a| < \delta) = \gamma$. Так как случайная величина $\tilde{a}$ нормальна, причём $\sigma^2[\tilde{a}] = \dfrac{\sigma^2}{n}$, то пользуясь формулой (2.38), получаем $P(|\tilde{a} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$, где $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, а $\Phi(t)$ — функция Лапласа. Для отыскания δ мы получили уравнение $2\Phi(t) = \gamma$. По таблице для функции Лапласа находим то значение t, для которого $\Phi(t) = \gamma/2$, а затем из условия $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$

находим $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Доверительный интервал $\left(\tilde{a} - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \tilde{a} + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ построен. С вероятностью γ выполняется неравенство

$$\tilde{a} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \tilde{a} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{4.14}$$

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью $\gamma = 0{,}99$ неизвестного математического ожидания a нормальной случайной величины X, если $\tilde{a} = 10{,}2$; $\sigma[X] = 4{,}4$; $n = 36$.

Решение. В нашем случае $\Phi(t) = \dfrac{0{,}99}{2} = 0{,}495$. По таблице для функции Лапласа (приложение C) находим $t = 2{,}58$. Следовательно, $\delta = \dfrac{2{,}58 \cdot 4{,}4}{6} = 1{,}89$. Теперь из (4.14) следует, что с вероятностью 0,99 справедливо неравенство $8{,}31 < a < 12{,}09$.

4.3.4. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины при неизвестном σ

Введём в рассмотрение случайную величину $T = \dfrac{\tilde{a} - a}{s}\sqrt{n}$, где s^2 — исправленная дисперсия. Оказывается, что величина T распределена по закону, не зависящему от параметров a и σ. Доказано, что плотность распределения $S(t, n)$ величины T имеет вид

$$S(t, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{4.15}$$

Распределение вероятностей по закону (4.15) называется *распределением Стьюдента* с $k = n - 1$ степенями свободы.

Функция $S(t, n)$ чётна относительно t, поэтому

$$P(|T| < t_\gamma) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t, n)dt = \gamma =$$
$$= P\left(\left|\frac{\tilde{a} - a}{s}\sqrt{n}\right| < t_\gamma\right),$$

где γ — заданное значение доверительной вероятности.

Имеются таблицы, позволяющие по заданным n и γ найти t_γ (приложение D). Найдя значение t_γ получаем, что $P\left(|\tilde{a}-a|<\dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$. Таким образом, мы построили доверительный интервал

$$\left(\tilde{a}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \tilde{a}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right), \tag{4.16}$$

содержащий параметр a с вероятностью γ.

Пример. По данным 16 независимых равноточных измерений, случайные ошибки которых распределены по нормальному закону, найдены $\tilde{a}=42{,}8$; $s=8$. Найти доверительный интервал измеряемой величины a с доверительной вероятностью $\gamma=0{,}99$.

Решение. По таблице (приложение D) находим, что при $n=16$, $\gamma=0{,}99$ величина $t_\gamma=2{,}95$. Вычисляем $\dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=$ $=\dfrac{2{,}95\cdot 8}{4}=5{,}9$. Используя (4.16), записываем доверительный интервал $(42{,}8-5{,}9; 42{,}8+5{,}9)$, т. е. с вероятностью $\gamma=0{,}99$ справедливо неравенство $36{,}7<a<48{,}7$.

4.3.5. Построение доверительного интервала для оценки σ нормального распределения

По данным n независимых наблюдений вычисляем исправленную дисперсию s^2 и принимаем её в качестве оценки σ^2. Зададим доверительную вероятность γ. Требуется найти такое δ, чтобы выполнялось условие $P(|\sigma-s|<\delta)=\gamma$ или $P(s-\delta<\sigma<s+\delta)=\gamma$. Неравенство $s-\delta<\sigma<s+\delta$ запишем в виде $s\left(1-\dfrac{\delta}{s}\right)<\sigma<s\left(1+\dfrac{\delta}{s}\right)$. Обозначим $\dfrac{\delta}{s}=q$. Тогда

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q). \tag{4.17}$$

Введём в рассмотрение случайную величину $\chi=\dfrac{s\sqrt{n-1}}{\sigma}$.

Доказано, что плотность распределения $\rho(\chi, n)$ не зависит ни от s, ни от σ, а зависит только от n. Неравенство (4.17) преобразуем так, чтобы свести его к величине χ.

1. Если $q < 1$, то $\dfrac{1}{s(1+q)} < \dfrac{1}{\sigma} < \dfrac{1}{s(1-q)}$

или $\dfrac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \dfrac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \dfrac{\sqrt{n-1}}{1-q}$, т.е. $\dfrac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \dfrac{\sqrt{n-1}}{1-q}$,

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}\right) = \gamma = \int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} \rho(\chi, n) d\chi.$$

Имеются таблицы, позволяющие по заданным n и γ найти q (приложение Е), после чего доверительный интервал (4.17) найден.

2. Если $q > 1$, то неравенство (4.17) принимает вид

$$0 < \sigma < s(1+q) \tag{4.18}$$

или $\dfrac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < +\infty$. Следовательно, значение q при $q > 1$ можно найти из условия $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\infty} \rho(\chi, n) d\chi = \gamma$. И в этом случае для отыскания q по известным n и γ пользуются таблицами (приложение Е). После чего доверительный интервал (4.18) построен.

Пример. По данным выборки объёма $n = 10$ из генеральной совокупности нормально распределённой случайной величины найдено исправленное среднее квадратичное отклонение $s = 5{,}1$. Найти доверительный интервал, содержащий с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ среднее квадратичное отклонение σ генеральной совокупности.

Решение. Задача сводится к отысканию величины q. По таблицам для значений q находим, что при $n = 10$, $\gamma = 0{,}95$ величина $q = 0{,}65$. Так как $q < 1$, то доверительный интервал ищем в виде (4.17). В данном случае получаем

$$5{,}1(1-0{,}65) < \sigma < 5{,}1(1+0{,}65) \quad \text{или} \quad 1{,}76 < \sigma < 8{,}42.$$

4.4. Понятия о статистической проверке гипотез и о критериях согласия

4.4.1. Понятие о статистических гипотезах

При исследовании различных случайных величин на определённом его этапе появляется возможность выдвинуть ту или иную гипотезу о свойствах изучаемой величины, например, сделать предположение о законе распределения её, или, если закон распределения известен, но неизвестны его параметры, то сделать предположение о их величине.

Статистической называют гипотезу о виде законов распределения или о параметрах известных распределений.

Одну из гипотез, которая исследователю кажется по каким-то соображениям наиболее правдоподобной, называют *нулевой* или *основной*. Её будем обозначать H_0. Наряду с основной рассматривают другие гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$, противоречащие основной. Их называют *конкурирующими* или *альтернативными*.

Выдвинутая нулевая гипотеза нуждается в дальнейшей проверке. При этом могут быть допущены ошибки двух типов:

1) ошибка первого рода — отвергнута правильная гипотеза;
2) ошибка второго рода — принята неправильная гипотеза.

Вероятность совершить ошибку первого рода обычно обозначают через α и называют *уровнем значимости*. Наиболее часто $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$.

4.4.2. Построение критических областей. Задача сравнения дисперсий двух нормально распределённых величин

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную одномерную случайную величину K, точное или приближённое распределение которой известно. Эту величину K называют *статистическим критерием*.

При проверке нулевой гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения величин, от которых зависит критерий и находят частные значения критерия K. Это значение K, вычисленное по данным выборки, называют *наблюдаемым значением критерия* и обозначают $K_{набл}$.

Множество всех возможных значений критерия K разбивают на два непересекающихся подмножества. Одно из них содержит те значения критерия, при которых основная гипотеза отвергается. Это множество называют *критической областью. Областью принятия гипотезы*, или *областью допустимых значений* называют совокупность значений критерия, при которых основную гипотезу принимают.

Так как K — одномерная случайная величина, то все её значения заполняют некоторый интервал. Критическая область и область принятия решений также интервалы, следовательно, существуют точки, разделяющие их. Эти точки называют *критическими* и обозначают $K_{кр}$.

Критическую область называют *правосторонней*, если она определяется неравенством $K > K_{кр}$, где $K_{кр} > 0$ — некоторое число, и *левосторонней*, если $K < K_{кр} < 0$, и *двусторонней*, если $K > K_{1кр}$, $K < K_{2кр}$, $K_{1кр} < K_{2кр}$.

Основной принцип проверки статистических гипотез заключается в следующем: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают. Гипотезу принимают, если наблюдаемое значение принадлежит области допустимых значений, опираясь при этом на принцип практической невозможности маловероятных событий.

Для отыскания критических точек задают достаточно малую вероятность α — уровень значимости, а затем ищут критические точки, исходя из требования, чтобы вероятность того, что критерий примет значения, лежащие в критической области, была равна принятому уровню значимости. В результате получаем:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha \tag{4.19}$$

в случае правосторонней критической области,

$$P(K < K_{кр}) = \alpha \tag{4.20}$$

в случае левосторонней критической области,

$$P(K < K_{1кр}) + P(K > K_{2кр}) = \alpha \tag{4.21}$$

в случае двусторонней критической области.

Для многих критериев K составлены таблицы, позволяющие по одному из условий (4.19), (4.20) или (4.21) найти точку $K_{кр}$ или точки $K_{1кр}$ и $K_{2кр}$. В зависимости от наблюдаемого значения критерия основная гипотеза будет принята или отвергнута.

В качестве примера проверки статистических гипотез рассмотрим следующую задачу. Пусть даны две случайные величины X и Y, распределённые по нормальному закону. По данным выборок объёмом n_1 и n_2 соответственно подсчитаны исправленные выборочные дисперсии $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_y$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что $D_x = D_y$. Такая задача возникает при сравнении точности двух приборов, при сравнении различных методов измерений. Обычно выборочные дисперсии оказываются различными. Возникает вопрос: существенно или нет они различаются? Если различие незначимо, то имеет место нулевая гипотеза, следовательно, приборы имеют одинаковую точность, а различие эмпирических дисперсий объясняется случайными причинами, в частности, случайным отбором объектов выборки.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $F = \dfrac{D_1}{D_2}$, где $D_1 = \max(\bar{D}_x, \bar{D}_y)$, $D_2 = \min(\bar{D}_x, \bar{D}_y)$. Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы распределена по известному закону Фишера—Снедекора со степенями свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$. Распределение Фишера—Снедекора зависит только от f_1 и f_2 и не зависит от других параметров.

Критическая область строится в зависимости от конкурирующей гипотезы.

Пусть нулевая гипотеза $D_x = D_y$, а конкурирующая — $D_x > D_y$. В этом случае строят правостороннюю критическую область $P[F > K_{кр}(\alpha, f_1, f_2)] = \alpha$. Критическую точку $K_{кр}(\alpha, f_1, f_2)$ находят по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора. Тогда критическая область определяется неравенством $F > K_{кр}$. По данным выборок вычисляем $F_{набл}$ как отношение большей дисперсии к меньшей. Если окажется $F_{набл} > K_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, если $F_{набл} < K_{кр}$, то нет оснований отвергнуть эту гипотезу.

Если конкурирующая гипотеза имеет вид $D_x \neq D_y$, то строят двустороннюю критическую область, исходя из требования $P(F > K_{1кр}) = \dfrac{\alpha}{2}$, $P(F < K_{2кр}) = \dfrac{\alpha}{2}$. Так как события $F < K_{2кр}$ и $F > K_{1кр}$ несовместны, то достаточно найти точку $K_{1кр}$ (в таблицах приведены только правосторонние критические точки). Если окажется, что $F_{набл} < K_{1кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, если же $F_{набл} > K_{1кр}$, то нулевую гипотезу отвергают.

4.4.3. Понятие о критериях согласия

Часто бывает неизвестен закон распределения случайной величины, но имеются основания предполагать, что он имеет определённый вид A. В этом случае выдвигается и проверяется нулевая гипотеза, заключающаяся в том, что исследуемая величина распределена по закону A. Проверку этой гипотезы также производят на основе специально подобранной случайной величины, называемой критерием согласия. Критерием согласия может быть:

а) сумма квадратов отклонений эмпирических частот от теоретических для каждого разряда — частичного интервала (критерий согласия Пирсона);

б) сумма абсолютных значений отклонений эмпирических и теоретических частот для каждого разряда;

в) максимальное значение разности между эмпирической и теоретической функциями распределения (критерий Колмогорова) и др.

Рассмотрим применение критерия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении исследуемой случайной величины X.

По результатам выборки подсчитывают: n_i^* — эмпирическую абсолютную частоту для каждого разряда; $\tilde{m}$ — оценку математического ожидания; $\tilde{\sigma}$ — несмещённую оценку среднего квадратического отклонения; числа $p_i = P(x_i < x < x_{i+1})$ в предположении нормальности случайной величины X с параметрами $a = \tilde{m}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$; числа $n_i = n \cdot p_i$ — теоретические частоты, где n — объём выборки.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $\chi^2 = \sum_i \dfrac{(n_i^* - n_i)^2}{n_i^*}$. Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения этой случайной величины, независимо от закона распределения изучаемой величины X, стремится к известному закону χ^2 с f степенями свободы. Число f находят из равенства $f = i - r - 1$, где i — число частичных интервалов, r — число параметров предполагаемого распределения. В случае нормального закона $r = 2$.

Построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область, в предположении справедливости нулевой гипотезы, была равна принятому уровню значимости α: $P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, f)] = \alpha$. Точка $\chi^2_{кр}$ по данным f и α находится по таблице критических точек распределения χ^2. На основании выборки вычисляем $\chi^2_{набл}$. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают, в противном случае её можно принять.

5. Задания для контрольных работ

5.1. О самоконтроле при выполнении контрольных работ

При наличии устройства СИМВОЛ или его компьютерного варианта работы можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля. В данных контрольных работах необходимо соблюдать следующие требования:

1) в контрольной работе № 11 в задачах 1—6 нецелые ответы, если нет дополнительных указаний, вводить в виде обыкновенной дроби, не выделяя целой части. В задаче 7 нецелые ответы вводить в виде десятичной дроби. Ряд распределения вводят так: сначала вводят все значения X в порядке возрастания, а затем — вероятности этих значений;

2) в контрольной работе № 12 в задачах 1 и 3 нецелые ответы вводить в виде десятичной дроби, а в задаче 2 — в виде обыкновенной дроби, не выделяя целой части.

5.2. Контрольная работа № 11

Вариант 1

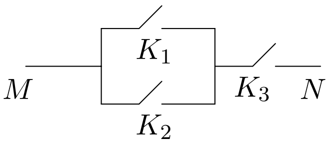
1(371). Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна пяти.

2(5Д1.РП). События A и B независимы. Вероятность наступления хотя бы одного из них равна 0,76, а ровно одного — 0,52. Найти $P(A)$ и $P(B)$, если $P(A) > P(B)$. В ответ записать сначала $P(A)$, а затем $P(B)$ в виде десятичной дроби.

3(663.Д7). Рабочий обслуживает три станка. Первый станок может требовать ремонта с вероятностью $p_1 = 0{,}2$; второй — $p_2 = 0{,}3$; а третий — $p_3 = 0{,}4$. Найти вероятность того, что не более двух станков потребует ремонта. Ответ ввести в виде десятичной дроби.

4. В бригаде 7 женщин и 8 мужчин. Случайно по табельным номерам отобрано 3 человека. Случайная величина X — число женщин среди отобранных. Найти: а) (181.РП) ряд распределения X; б) (851) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести $F(5/2)$; в) (П51) m_x; г) (3А1) D_x; д) (951) $P(3/2 < x < 5/2)$.

5(ОТ4). Ключи K_1, K_2, K_3 соединены по указанной схеме.



Вероятности того, что они замкнуты равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При включении в сеть цепь MN оказалась замкнутой. Найти вероятность того, что при этом ключи K_2 и K_3 были замкнуты, а ключ K_1 разомкнут.

6. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ Ax^2 + 3/2, 0 \le x \le 1, \\ 0, \ x > 0. \end{cases}$$

Найти (все ответы вводить в виде десятичной дроби): а) (Д6.Д7) константу A; функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести (22.Д7) $F(1/3)$; (32.Д7) $F(1/2)$; в) (7А.Д6) m_x; г) (46.Д6) D_x; д) (ПД.Д6) $P(1/3 < x < 1/2)$.

7(250). Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X её контролируемого размера от проектного не превышает 15 мм. Величина X нормальна и $m_x = 0$, $\sigma_x = 10$ мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат? Ответ округлить до целых.

Вариант 2

1(185). Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера, которые затем перемешали. Найти вероятность того, что случайно извлечённый кубик имеет две окрашенные грани.

2(426). На полке в случайном порядке стоит 10 книг, причём 4 из них по математике. Случайно взяли три книги. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна по математике.

3(067). В коробке 20 лампочек, причём 4 из них на 220 В, а 16 — на 127 В. Половина тех и других матовые. Случайно взято 2 лампы. Найти вероятность того, что они разного напряжения и обе матовые.

4(248.Д6). В спартакиаде участвуют 20 спортсменов: 12 лыжников и 8 конькобежцев. Вероятность выполнить норму лыжником равна $p_1 = 0{,}8$, а конькобежцем — $p_2 = 0{,}4$. Случайно вызвано два спортстмена. Найти вероятность того, что они оба выполнят норму. Ответ ввести в виде десятичной дроби, округлив до 0,001.

5. Два стрелка A и B независимо друг от друга стреляют поочерёдно по некоторой цели, имея по 2 патрона, каждый — до первого попадания одним из стрелков или до полного израсходования патронов. Вероятность попадания при одном выстреле стрелком A равна $p_1 = 0{,}2$, а стрелком B — $p_2 = 0{,}4$. Стрельбу начинает A. X — общее число промахов. Найти (все ответы вводить в виде десятичной дроби): а) (45.РЛ) ряд распределения X; б) (6Д) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести $F(3{,}5)$; в) (ДА) m_x; г) (80) D_x (округлить до 0,001); д) (5Р) $P(1{,}5 \leq x \leq 3{,}5)$.

6. Задана плотность распределения вероятностей

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при} \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{вне} \quad [0, 2]. \end{cases}$$

Найти: а) (281) константу a; б) (9А1.РП) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(1)$, $F(2)$; в) (971) m_x; г) (1Т1) D_x; д) (151) $P(1 \leq X \leq 2)$.

7(ДС0). Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $m_x = 0$, $\sigma_x = 0{,}2$ г. Норма веса заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,7 г. Ответ округлить до 0,001.

Вариант 3

1(199). Монета подброшена три раза. Найти вероятность того, что герб появится ровно два раза.

2(СС0). Из 10 радиоламп 4 неисправны. Случайно взято 4 лампы. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна неисправная.

3(381.Д7). Из урны, содержащей 4 белых, 6 красных и 5 чёрных шаров, случайно извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что два их них одного цвета. Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до 0,001.

4(722.ДЛ). В ящике 5 мячей, из которых 3 новые. Для игры взяли случайно два мяча, после игры вернув их в ящик. Для второй игры случайно взяли ещё два мяча. Найти вероятность того, что они оба новые. Ответ записать в виде десятичной дроби.

5. Пассажир может ждать лётной погоды трое суток, после чего едет поездом. По прогнозам метеорологов вероятность лётной погоды в первые сутки 0,5, во вторые — 0,6, в третьи — 0,8. X — число полных суток до отъезда пассажира. Найти (все нецелые ответы вводить в виде десятичной дроби): а) (ДТ.БЛ) ряд распределения X; б) (А6) функцию распределения $F(x)$, в ответе записать $F(2{,}5)$; в) (1С) m_x; г) (44) D_x, ответ округлить до 0,001; д) (С51) $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5)$.

6. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{a}, & \text{если} \quad 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) (8Д1) константу a; б) $\rho(x)$; в) (351) m_x; г) (АТ2) D_x; д) (ТП1) $P\left(\dfrac{1}{2} \leq X < 1\right)$.

7(1А.Д7). Изделие считается высшего сорта, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 3,45 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $m_x = 0$, $\sigma_x = 3$ мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие — высшего сорта. Ответ округлить до 0,01.

Вариант 4

1(0Т3). В коробке 4 одинаковых занумерованных кубика. По одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлечённых кубиков появятся в возрастающем порядке.

2(834.Д6). Выстрелив один раз, стрелок уступает очередь другому. У каждого стрелка по два патрона. Вероятность попадания каждым из них при одном выстреле равна 0,2. Приз получает стрелок, первым попавший в цель. Найти вероятность того, что приз получит стрелок, начавший стрелять первым. Ответ ввести в виде десятичной дроби.

3(9С6). Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,05 и не меняется от выстрела к выстрелу. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы с вероятностью 0,75 иметь хотя бы одно попадание.

4(325). Имеется две партии изделий, состоящих из 10 изделий каждая, по 6 — первого сорта и 4 — второго. Из первой партии извлекли изделие и переложили во вторую, после чего из второй партии берут одно изделие. Найти вероятность того, что оно второго сорта.

5. Вероятность того, что деталь первого сорта, равна 0,2. Отобрано 4 детали. X — число деталей первого сорта среди отобранных. Найти (все ответы вводить в виде десятичных дробей): а) (5П.БП) ряд распределения X; б) (9А) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значение $F(3)$; в) (1С1) m_x; г) (3Д1) D_x; д) (9С2) $P(1{,}5 \le X \le 3)$.

6. Дана плотность распределения вероятностей

$$\rho(x) = \begin{cases} a(1-|x|), & \text{если} \quad |x| \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

случайной величины X. Найти: а) (3С2) константу a; б) (45.Б7) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$; в) (П42) m_x; г) (РР3) D_x; д) (351) $P\left(-\dfrac{1}{2} \le X \le \dfrac{1}{2}\right)$.

7(771). Систематическая ошибка высотомера отсутствует, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь высотомер, чтобы с вероятностью 0,9 ошибка измерения высоты по модулю была меньше 100 м. Ответ округлить до целых.

Вариант 5

1(367). Найти вероятность того, что при подбрасывании трёх игральных костей ровно на одной из них выпадет шестёрка.

2(4Д8.Д6). Вероятность успешно выполнить упражнение для каждого из двух спортсменов равна 0,6. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, делая по две попытки. Выполнивший первым упражнение успешно получает приз. Найти вероятность того, что приз будет вручён.

3(ПТ9). Для перевозки 20 изделий, среди которых 5 — типа A, а остальные — типа B, использован грузовик. В пути повреждено два изделия. Найти вероятность того, что они одного типа.

4(5ТО.Д7). Имеется 10 урн с шарами. В двух из них — 8 белых и 2 чёрных, в трёх — 6 белых и 4 чёрных, в пяти — 5 белых и 5 чёрных. Из случайно взятой урны извлекли два шара. Они оказались белыми. Найти вероятность того, что они извлечены из первой группы урн. Ответ ввести в виде десятичной дроби, округлив до 0,01.

5. Изделие может оказаться дефектным с вероятностью $p = 0{,}3$ каждое. Из партии выбирают три изделия. X — число дефектных деталей среди отобранных. Найти (все ответы вводить в виде десятичных дробей): а) (2А.РЛ) ряд распределения X; б) (58.РП) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести $F(0{,}5)$, $F(2{,}5)$; в) (АА2) m_x; г) (302) D_x; д) (103) $P(0{,}5 \leq X \leq 2{,}5)$.

6. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X: $\rho(x) = \begin{cases} A\cos x, & \text{если} \quad |x| \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Найти (ответы вводить в виде десятичных дробей): а) (6Р2) константу A; б) (С52) функцию распределения $F(x)$, в ответ записать $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; в) (П83) m_x; г) (201) D_x, ответ округлить до сотых, приняв $\pi = 3{,}14$; д) (7Р3) $P\left(-\dfrac{\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{6}\right)$.

7(801). Стрельба ведётся из точки вдоль прямой. Средняя дальность полёта равна m. Предполагается, что дальность полёта X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 80$ м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 100 м до 140 м. Ответ округлить до целых.

Вариант 6

1(4П6). В ящике 10 шаров с номерами $1, 2, \ldots, 10$. Случайно извлекают два шара. Найти вероятность того, что среди них окажется шар с номером 1. Ответ записать десятичной дробью.

2(С36). События A и B независимы. Вероятность наступления ровно одного из них равна 0,56. Найти $P(B)$, если известно, что $P(A) = 0{,}8$. Ответ записать в виде десятичной дроби.

3(СС6). Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь — высшего сорта, равна 0,8. Для второго станка эта вероятность равна 0,5. На первом станке изготовлено две детали, на втором — три. Найти вероятность того, что среди этих пяти деталей хотя бы одна — не высшего сорта. Ответ записать в виде десятичной дроби.

4(1С4.Д7). Имеется две партии изделий. В первой партии 10 изделий, из них 8 — первого сорта, во второй партии 8 изделий, из них 6 — первого сорта. Из первой партии во вторую переложили два изделия, затем из второй партии взяли одно изделие. Найти вероятность того, что оно первого сорта. Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до 0,01.

5(96.РП). В урне 3 белых и 3 чёрных шара. Без возвращения из урны извлекают шары до тех пор, пока не появятся 2 белых шара. X число извлечённых шаров. Найти (все ответы вводить в виде несократимой обыкновенной дроби): а) (ПП5.РП) ряд распределения случайной величины X; б) (ТС5.РП) функцию распределения $F(x)$. В ответ ввести значения $F(2{,}8)$ и $F(4{,}5)$; в) (125) m_x; г) (775) D_x; д) (305) $P(2{,}8 \leq x \leq 4{,}5)$.

6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq -1, \\ Ax^3 + B, & \text{если} \quad -1 < x \leq +1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) (03.Р7) константы A и B; б) $\rho(x)$; в) (654) m_x; г) (С72) D_x; д) (114) $P\,(0 < X < 0{,}5)$.

7(87.Д8). Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика $d_0 = 5$ мм. Фактический диаметр — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $d_1 = 5$ мм и среднеквадратическим отклонением 0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0,1 мм. Определить процент брака. Округлить до 0,1%.

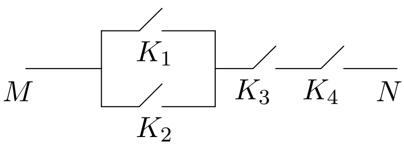
Вариант 7

1(125). В конверте 10 фотографий, среди которых две нужные. Извлечено 5 фотографий. Какова вероятность, что нужные две среди них?

2(806.Д7). Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности их отказа соответственно равны 0,2 и 0,3. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент. Ответ записать в виде десятичной дроби.

3(447.Д7). Нужная студенту книга с вероятностью 0,8 имеется в каждой из трёх библиотек A, B, C. Если в A книга не обнаружена, он идёт в B. Если в B книги нет, он идёт в C. Найти вероятность того, что студент книгу получит. Ответ записать в виде десятичной дроби.

4(2П8). Ключи K_1, K_2, K_3, K_4 соединены по указанной схеме. Вероятности, что эти ключи замкнуты соответственно равны 0,1; 0,2; 0,4; 0,5. При включении в сеть цепь MN оказалась замкнутой.



Найти вероятность того, что при этом ключ K_1 был замкнут, а ключ K_2 разомкнут.

5. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из неё извлекают 3 шара. X — число белых шаров среди извлечённых. Найти: а) (1А.БП) ряд распределения X; б) (65.БЛ) функцию распределения $F(x)$, в ответе записать значения $F(0{,}2)$, $F(2{,}5)$; в) (Р53) m_x; г) (ТР3) D_x; д) (5Р3) $P(0{,}2 < X < 2{,}5)$.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} \cdot x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{3} + Ax^2, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ B, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти а) (6С.БП) константы A и B; б) плотность распределения $\rho(x)$; в) (0П3) m_x; г) (233) D_x; д) (573) $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 2\right)$.

7(Д7.Д8). Случайная величина X нормальна, причём $m_x = 0$. Найти σ_x, если известно, что $P(-1 < X < 1) = 0{,}5$. Ответ округлить до 0,1.

Вариант 8

1(Р39). В ящике 10 деталей, среди которых 3 бракованных. Случайно извлекли 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованных.

2(790.Д6). ОТК проверяет изделие на стандартность. Вероятность стандартности изделия равна 0,85. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно. Ответ записать в виде десятичной дроби.

3(4Д1.Д6). Три стрелка A, B, C стреляют по некоторой цели, делая не более одного выстрела. Вероятности попадания их при одном выстреле соответственно равны 0,7, 0,8, 0,9. Стрельбу начинает A. Если он промахнётся, то стреляет B. Если и B промахнётся, то стреляет C. Найти вероятность (в виде десятичной дроби) того, что цель будет поражена.

4(СС2.Д7). При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить туберкулёз равна 0,9. Вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Доля больных туберкулёзом ко всему населению равна 0,001. Найти вероятность того, что человек здоров, хотя он признан больным при обследовании. Ответ округлить до 0,001.

5. Стрельба продолжается до первого попадания, но не более 4-х выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. X — число израсходованных патронов. Найти (ответы вводить в виде десятичной дроби): а) (8Д.Б7) ряд распределения X; б) (40.Р7) функцию распределения $F(x)$, в ответ записать $F(1{,}5)$, $F(3{,}5)$; в) (814) m_x; г) (684) D_x, ответ округлить до 0,01; д) (074) $P(1{,}5 < X < 3{,}5)$.

6. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ Ax, & \text{если} \quad 0 < x \leq 6, \\ 0, & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Найти: а) (394) константу A; б) (Д84) функцию распределения $F(x)$, в ответе записать $F(3)$; в) (4Р4) m_x; г) (С54) D_x; д) (024) $P(2 < X < 4)$.

7(А68). Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X её контролируемого размера от номинала не превышает 18 мм. Величина X распределена нормально, причём $\sigma_x = 9$ мм. Найти вероятность того, что деталь будет признана годной. Ответ округлить до 0,01.

Вариант 9

1(1А3). Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, помня лишь, что они отличны от нуля, набрал их случайно. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2(РД4.Д6). Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие — высшего сорта, равна 0,9. Найти вероятность того, что из трёх проверенных изделий только два окажутся высшего сорта. Ответ записать в виде десятичной дроби.

3(3С5.Д7). Стрелки A, B, C стреляют по некоторой цели, делая не более одного выстрела каждый. Вероятности их попадания равны соответственно 0,4; 0,6; 0,8. Первым стреляет A. В случае его промаха стреляет B. Если и B промахнётся, то стреляет C. Найти вероятность того, что не все стрелки выстрелят. Ответ записать в виде десятичной дроби.

4(470.Д7). Два из четырёх независимо работающих элементов отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и третий элементы, если вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,1. Ответ округлить до 0,001.

5. В партии из 10 изделий 4 стандартных. Отобрано 3 изделия. X — число стандартных изделий среди отобранных. Найти: а) (7Р.РП) ряд распределения X; б) (0Т.РП) функцию распределения $F(x)$, в ответе записать $F(0{,}2)$, $F(2{,}5)$; в) (ПД5) m_x; г) (СД5) D_x; д) (9Д5) $P(0{,}2 \le X \le 2{,}5)$.

6. Дана плотность распределения величины X:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ A(x^2 + 2x), & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) (385) константу A; б) (4А5) функцию $F(x)$, в ответ ввести значение $F\left(\frac{1}{2}\right)$; в) (СП5) m_x; г) (1А5) D_x ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до 0,001;
д) (СС0) $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$.

7(Д8.Д7). Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Систематическая ошибка отсутствует, среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле. Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до 0,01.

Вариант 10

1(СА7). Из группы, состоящей из трёх мужчин и четырёх женщин, отобрано 4 человека. Найти вероятность того, что среди отобранных окажется две женщины.

2(ДТ.Д8). События A и B независимы. Вероятность наступления хотя бы одного из них равна 0,94. Найти $P(A)$, если $P(B) = 0{,}7$. Ответ записать в виде десятичной дроби.

3(04.Д7). Стрелки A, B, C стреляют по цели, делая не более одного выстрела каждый. Вероятности их попадания соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6. Первым стреляет A, в случае его промаха стреляет B. Если и B промахнётся, то стреляет C. Найти вероятность того, что цель будет поражена стрелком B или C. Ответ записать в виде десятичной дроби.

4(Д8.ДЛ). Имеется две урны. В первой — 4 белых и 7 чёрных шаров, а во второй — 5 белых и 5 чёрных. Из первой урны во вторую переложили 2 шара. После этого из второй урны извлекли шар. Какова вероятность того, что он белый. Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до 0,001.

5. Производится контроль партии из 4-х изделий. Вероятность изделия быть неисправным равна 0,1. Контроль прекращается при обнаружении первого неисправного изделия. X — число обследованных приборов. Найти (все ответы вводить в виде десятичной дроби): а) (П31.РП) ряд распределения X; б) (181) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести $F(3{,}5)$;

в) (791) m_x; г) (1А1.Д8) D_x; д) (3Д1) $P(1{,}5 < X < 3{,}5)$.

6. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$\rho(x) = \begin{cases} A(1-x^2), & \text{если} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Найти (все ответы вводить в виде десятичных дробей): а) (946) константу A; б) (Т17) функцию распределения $F(x)$, в ответ записать $F(0)$; в) (058) m_x; г) (909) D_x; д) (Б74.Д7) $P(0 < X < 0{,}5)$.

7(2Т.Д8). Случайная величина X распределена по нормальному закону, причём $m_x = 40$, $D_x = 2000$. Найти $P(30 \leq X \leq 80)$. Ответ округлить до 0,1.

5.3. Контрольная работа № 12

Вариант 1

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	2	3	5
1	0,3400	0,1600	0,1000
2	0,1200	0,1800	0,1000

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (СД1.Д7) m_x; в) (141.Д8) m_y; г) (Р81.Д5) D_x; д) (Т11.Д7) D_y; е) (5С1.Д6) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (АТ1.Д7) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения X, если $Y = 1$; и) (301.Д7) $M[X/Y = 1]$.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y) $\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(2,0), B(0,1), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

Найти: а) (3Т0) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (4П0) m_x; г) (630) m_y; д) (А30) D_x; е) (ПП0) D_y; ж) (2С0) $\operatorname{cov}(X, Y)$; з) (270) r_{xy}; и) (610) $F\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$; к) (С90) $M\left[X/Y = \dfrac{1}{4}\right]$.

3(3С1.Д7). Среднее квадратичное отклонение нормальной случайной величины X равно 20. Объём выборки равен 16. Выборочное математическое ожидание $\tilde{a}$ равно 3. Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания a величины X с надёжностью $\gamma = 0{,}95$. В ответ ввести координату правого конца интервала.

Вариант 2

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	3
1	0,1700	0,1300	0,2500
2	0,1000	0,3000	0,0500

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (561.Д7) m_x; в) (560.Д7) m_y; г) (821.Д5) D_x; д) (ДТ1.Д5) D_y; е) (731.Д4) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (041.Д7) r_{xy}, округлить до 0,1; з) ряд распределения Y, если $X = 3$; и) (3П1.Д7) $M[Y/X = 3]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y) $\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(1,0), B(1,2), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

Найти: а) (221) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (971) m_x; г) (472) m_y; д) (131) D_x; е) (1Т1) D_y; ж) (П32) $\operatorname{cov}(X, Y)$; з) (ПР1) r_{xy}; и) (6Р2) $F\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$; к) (7Р3) $M\left[Y/X = \dfrac{1}{2}\right]$.

3(552.Д7). Среднее квадратичное отклонение нормальной случайной величины X равно 10 единицам. Для выборки объёма 100 построить доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, если выборочное математическое ожидание равно шести единицам. В ответ ввести координату правого конца интервала.

Вариант 3

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	3
1	0,1300	0,1600	0,2600
2	0,1000	0,2500	0,1000

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (АП3.Д7) m_x; в) (7С3.Д7) m_y; г) (993.Д5) D_x; д) (ДР3.Д5) D_y; е) (403.Д4) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (Д83.Д6) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения X, если $Y = 2$; и) (383.Д0) $M[X/Y = 2]$.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(1,0), B(0,-3), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) (573) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (7Т3) m_x; г) (863) m_y; д) (933) D_x; е) (7Р3) D_y; ж) (1П3) $\mathrm{cov}(X, Y)$; з) (0Д4) r_{xy}; и) (763) $F\left(\frac{1}{4}, 1\right)$; к) (РР3) $M[X/Y = -2]$.

3(203). Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины X равна 0,2, если известно, что среднее квадратичное отклонение σ_x величины X равно 1,5.

Вариант 4

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	3
1	0,1000	0,1900	0,2000
2	0,1600	0,2000	0,1500

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (РС1.Д7) m_x; в) (521.У7) m_y; г) (531.Д5) D_x; д) (ТТ1.Д5) D_y; е) (001.Д4) $\mathrm{cov}(X, Y)$; ж) (Д11.Д6) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения X, если $Y = 1$; и) (941.Д8) $M[X/Y = 1]$, округлить до 0,1.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы

$$(X, Y)\ \rho(x,y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(-3,0), B(-3, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) (804) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (860) m_x; г) (6Т2) m_y; д) (6Д6) D_x; е) (394) D_y; ж) (060) $\mathrm{cov}(X, Y)$; з) (8Т1) r_{xy}; и) (7Т3) $F\left(-2, \frac{1}{2}\right)$; к) (1Р1) $M[Y/X = -1]$.

3(Р84.Д7). Станок-автомат штампует валики. По выборке объёма $n = 100$ вычислено выборочное математическое ожидание $\tilde{a}$ (в сантиметрах) диаметра валика. Найти с надёжностью 0,99 точность δ, с которой выборочное математическое ожидание оценивает математическое ожидание диаметра валика, зная что их среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально.

Вариант 5

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	3
1	0,2500	0,1100	0,1600
2	0,1300	0,2000	0,1500

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (302.Д7) m_x; в) (7A2.Д7) m_y; г) (272.Д6) D_x; д) (572.Д5) D_y; е) (422.Д5) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (C72.Д7) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения Y, если $X = 1$; и) (812.Д7) $M[Y/X = 1]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(-3,0), B(0,2), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) (024) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (8A0) m_x; г) (905) m_y; д) (7Д7) D_x; е) (AT2) D_y; ж) (AP2) $\operatorname{cov}(X, Y)$; з) (018) r_{xy}; и) (3C0) $F(-1; 1)$; к) (0P0) $M\left[X/Y = \dfrac{1}{2}\right]$.

3(765.Д7). По данным 25 независимых измерений некоторой величины найдено среднее арифметическое результатов измерений $\tilde{a} = 35$ и исправленная дисперсия $s^2 = 64$. Построить доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины a с надёжностью $\gamma = 0{,}95$. В ответ ввести координату правого конца интервала.

Вариант 6

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	3
-1	0,1300	0,2500	0,1600
1	0,2000	0,1600	0,1000

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (320.Д7) m_x; в) (ТР2.Д6) m_y; г) (6Д2.Д5) D_x; д) (122.Д5) D_y; е) (Т32.Д4) $\mathrm{cov}(X, Y)$; ж) (СД2.Д6) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения X, если $Y = -1$; и) (542.Д7) $M[X/Y = -1]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(2,0), B(2,-3), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) (П25) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (С90) m_x; г) (061) m_y; д) (РТ3) D_x; е) (П19) D_y; ж) (870) $\mathrm{cov}(X, Y)$; з) (2Т2) r_{xy}; и) (СП0) $F\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$; к) (0Т0) $M[Y/X = 1]$.

3(А46.Д7). По данным 100 независимых измерений нормально распределённого количественного признака найдена исправленная дисперсия $s^2 = 4$ и среднее арифметическое результатов измерений $\tilde{a} = 24$ единицам. Найти доверительный интервал с надёжностью $\gamma = 0{,}99$ математического ожидания этого количественного признака. В ответ ввести координату правого конца найденного интервала.

Вариант 7

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X	
Y	1	2
-1	0,1600	0,1000
1	0,1900	0,2000
2	0,1500	0,2000

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (А62.Д8) m_x;

в) (С02.Д7) m_y; г) (532.Д7) D_x; д) (1Р2.Д5) D_y; е) (072.Д6) $\mathrm{cov}(X, Y)$; ж) (4Т2.Д7) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения Y, если $X = 2$; и) (3С2.Д0) $M[Y/X = 2]$.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y) $\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(1,0), B(0,4), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

Найти: а) (4310) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (626) m_x; г) (351) m_y; д) (195) D_x; е) (С10) D_y; ж) (8РП) $\mathrm{cov}(X, Y)$; з) (ДТ3) r_{xy}; и) (5С0) $F(2; 1)$; к) (410) $M\left[Y/X = \dfrac{1}{4}\right]$.

3(Б37.Д8). По данным выборки объёма $n = 25$ нормально распределённой случайной величины X найдена исправленная дисперсия $s^2 = 4$. Найти доверительный интервал, содержащий среднее квадратичное отклонение σ величины X с вероятностью $\gamma = 0{,}99$. В ответ ввести координату правого конца построенного интервала.

Вариант 8

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	-1	0	3
2	0,1100	0,2500	0,1400
3	0,1200	0,2000	0,1800

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (163.Д7) m_x; в) (ТС3.Д8) m_y; г) (483.Д5) D_x; д) (733.Д7) D_y; е) (0П3.Д6) $\mathrm{cov}(X, Y)$; ж) (703.Д7) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения Y, если $X = 0$; и) (0А3.Д7) $M[Y/X = 0]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y) $\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(4,0), B(4,1), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

Найти: а) (9Т11) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (П51) m_x; г) (727) m_y; д) (3Р1) D_x; е) (П96) D_y; ж) (371) $\mathrm{cov}(X, Y)$; з) (4Т12) r_{xy}; и) (151) $F(2; 10)$; к) (201) $M\left[X/Y = \dfrac{1}{2}\right]$.

3(Д28.Д8). По данным выборки объёма $n = 12$ нормально распределённой случайной величины X найдена исправленная дисперсия $s^2 = 26{,}01$. Найти доверительный интервал, содержащий среднее квадратичное отклонение σ величины X с вероятностью 0,99. В ответ ввести координату правого конца интервала.

Вариант 9

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	0	2	4
3	0,1200	0,1500	0,2000
4	0,2500	0,2000	0,0800

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (143.Д7) m_x; в) (103.Д7) m_y; г) (С03.Д5) D_x; д) (7Р3.Д5) D_y; е) (843.Д4) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (П23.Д6) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения X, если $Y = 3$; и) (713.Д7) $M[X/Y = 3]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} C & \text{в треугольнике } O(0,0), A(4,0), B(0,-3), \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найти: а) (РР3) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (С52) m_x; г) (8С2) m_y; д) (СР2) D_x; е) (5Т13) D_y; ж) (038) $\operatorname{cov}(X, Y)$; з) (8214) r_{xy}; и) (Т53) $F(2; 1)$; к) (271) $M[Y/X = 3]$.

3(7П9.Д7). Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная что $m_{\text{В}} = 75{,}20$, $n = 36$, $\sigma = 6$. В ответ ввести координату левого конца построенного интервала.

Вариант 10

1. Дана матрица распределения вероятностей системы (X, Y)

	X		
Y	1	2	5
2	0,1000	0,2500	0,3000
4	0,1500	0,1000	0,1000

Найти: а) ряды распределений X и Y; б) (422.Д7) m_x; в) (Т63.Д8) m_y; г) (6П4.Д5) D_x; д) (445.Д7) D_y; е) (5С6.Д5) $\operatorname{cov}(X, Y)$; ж) (087.Д6) r_{xy}, округлить до 0,01; з) ряд распределения Y, если $X = 2$; и) (229.Д7) $M[Y/X = 2]$, округлить до 0,01.

2. Дана плотность распределения вероятностей системы (X, Y) $\rho(x, y) = \begin{cases} C \text{ в треугольнике } O(0,0), A(-3,0), B(-3,4), \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$

Найти: а) (1Р1) константу C; б) $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$; в) (8А3) m_x; г) (284) m_y; д) (ПД5) D_x; е) (СД6) D_y; ж) (Д77) $\operatorname{cov}(X, Y)$; з) (078) r_{xy}; и) (319) $F(-1; 5)$; к) (080) $M[X/Y = 1]$.

3(П10.Д7). Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная, что $m_{\text{В}} = 60$, $n = 49$, $\sigma = 7$. В ответ ввести координату левого конца построенного доверительного интервала.

Приложения

А. Элементы комбинаторики

А1. Что изучает комбинаторика

Комбинаторика изучает множества, состоящие из конечного числа элементов (конечные множества), и их отображения в другие множества.

Основными задачами комбинаторики являются задачи выбора, когда из множества предметов нужно отобрать те или иные, расположить их в определенном порядке, среди всех расположений отобрать в каком-либо смысле наилучшие, часто требуется подсчитать число всех возможных решений.

В настоящее время комбинаторные задачи широко встречаются в генетике, химии, теории вероятностей, в теории кодирования и декодирования информации, в теории принятия решений, в теории графов и многих других науках.

А2. Выборки и их виды

В большинстве задач комбинаторики предполагается, что имеется некоторое исходное множество, называемое генеральным множеством, генеральной совокупностью, или универсальным множеством. Универсальное множество будем обозначать символом Ω. Например, если изучают множество всех целых неотрицательных чисел, меньших ста, то $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 99\}$.

Любое подмножество универсального множества называется выборкой из этого множества. Например, если $\Omega = \{a, b, c, d\}$, то выборками являются подмножества $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, $\{d, b, c\}$ и др. Число элементов выборки обычно называют её объёмом.

Выборка из генеральной совокупности называется упорядоченной, если учитывается не только состав выборки, но и порядок следования её элементов. Если выборки одинакового состава отождествляются, то выборка называется неупорядоченной.

Пусть, например, $\Omega = \{a, b, c\}$. Рассмотрим выборки по два элемента. Упорядоченные выборки: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a),

(b, c), (c, b) — всего шесть. Если рассматриваются неупорядоченные выборки, то выборки (a, b) и (b, a), (a, c) и (c, a), (b, c) и (c, b) считаются одинаковыми, имеем только три различные выборки.

Процесс получения выборки можно представить следующим образом: извлекается элемент из множества Ω, фиксируется каким-либо образом, затем извлекается следующий и т.д. В этой схеме различают выборки с возвращением, когда извлечённый элемент возвращается в универсальное множество, и без возвращения, когда извлечённый элемент не возвращается в Ω. Множеством всех упорядоченных выборок с возвращением по два элемента из множества $\Omega = \{a, b, c\}$ является (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b). Оно состоит из девяти элементов.

Итак, существует четыре вида выборок: упорядоченные без возвращения, неупорядоченные без возвращения, упорядоченные с возвращением и неупорядоченные с возвращением.

В комбинаторике широко используются операции над множествами: объединения, пересечения, разности, отрицания, дополнения, которые мы считаем известными читателю.

А3. Правила произведения и суммы

В основе многих комбинаторных задач лежат два правила: сложения и умножения.

Пусть дано конечное множество A. Число его элементов будем обозначать $|A|$ и называть объемом множества.

Даны два конечных непустых множества A и B и $a \in A$, $b \in B$ — произвольные их элементы. Множество всех упорядоченных пар (a, b) называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$. Заметим, что множества $A \times B$ и $B \times A$ не совпадают, так как пары (a, b) и (b, a) считаются различными. Аналогично, декартово произведение $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяется как множество всех упорядоченных конечных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Можно рассматривать декартовы произведения вида $(A \times A), (A \times A \times A), \ldots, (A \times A \times \cdots \times A)$.

Правило произведения. Даны конечные непустые множества $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда число элементов в декартовом произведении $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ равно $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$, т.е.

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|. \qquad (1)$$

Другими словами: выбрать один элемент из декартова произведения $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ можно $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots |A_n|$ способами. В частности, если $|A| = n$, то декартово произведение $(A \times A)$ содержит n^2 элементов. Это множество совпадает с множеством всех упорядоченных выборок с возвращением по два элемента из множества A. Если рассматривать выборки по два элемента из множества A без возвращения, то их число равно $n(n-1)$, так как первый элемент выборки(a, b) можно выбрать n способами, а второй, после выбора первого, лишь $(n-1)$ способами. Имеем декартово произведение множества A и множества B, получающегося из A исключением выбранного первого элемента a.

Пример 1. Даны цифры 1,2,3,4. Сколько различных двузначных чисел можно записать из этих цифр, сколько среди них чисел, в которых цифры не повторяются?

Решение. Имеем множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$ объема 4. Любое двузначное число, образованное этими цифрами, является элементом множества $(A \times A)$, которое по правилу произведения содержит $4 \cdot 4 = 16$ элементов, поэтому существует 16 различных двузначных чисел из цифр 1,2,3,4. Если цифры в числе не повторяются, то первую цифру можно выбрать $n = 4$ способами, а вторую — $(n-1) = 3$ способами. По правилу произведения получаем, что таких различных чисел всего $4 \times 3 = 12$.

Пример 2. Даны цифры 0,1,2,3,4. Сколько различных двузначных чисел можно получить, используя только эти цифры?

Решение. Так как двузначное число начинаться с нуля не может, то первую цифру можно выбрать $n = 4$ способами, а вторую — пятью способами. По правилу произведения двузначных различных чисел из цифр 0,1,2,3,4 всего $4 \cdot 5 = 20$. Подсчитайте самостоятельно, сколько среди них чисел, содержащих различные цифры?

Правило сложения. Если A и B конечные, не имеющие общих элементов множества, то $|A \cup B| = |A| + |B|$. В этом случае множество $A \cap B = \oslash$. Если же $A \cap B \neq \oslash$, то правило сложения имеет вид:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |(A \cap B)|. \qquad (2)$$

Правило сложения можно распространить на любое число конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если эти множества не имеют общих элементов, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|,$$

в противном случае, при $n = 3$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| -$$
$$- |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|; \qquad (3)$$

при $n = 4$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| -$$
$$- |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| +$$
$$+ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

и т.д. Если заметить закономерность в этих формулах, то записать их при любом значении n не представляет труда.

Напомним, что условие $x \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ означает, что x принадлежит хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что не исключает принадлежности x более, чем одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример 3. На полке стоят четыре книги по математике и три книги по физике. Сколько существует способов выбора одной книги?

Решение. Если A_1 — множество книг по математике, A_2 — по физике, то по формуле (2) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 4 + 3 = 7$.

Пример 4. Из 25 студентов имеют разряд по лыжам 10 человек, по легкой атлетике — 12, по конькам — 3, по лыжам и лёгкой атлетике — 8, по конькам и лёгкой атлетике — 1, по лыжам и конькам — 2, по всем трем видам спорта имеют разряд два человека. Сколько студентов не имеют спортивного разряда по этим видам спорта?

Решение. Обозначим: A_1 — множество студентов, имеющих разряд по лыжам, A_2 — имеющих разряд по легкой атлетике, A_3 — имеющих разряд по конькам. Тогда $|A_1| = 10$, $|A_2| = 12$, $|A_3| = 3$, $|A_1 \cap A_2| = 8$, $|A_1 \cap A_3| = 2$, $|A_2 \cap A_3| = 1$, $|A_1 \cap A_2| \cap A_3| = 2$.

По формуле (3): $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 10+12+3-8-2-1+2 = 16$, т.е. 16 студентов имеют хотя бы один разряд, следовательно, $25-16 = 9$ студентов спортивного разряда по этим видам спорта не имеют.

А4. Перестановки без повторения

Пусть дано множество $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, содержащее n элементов. Перестановкой называется любая упорядоченная выборка без возвращения объёма n из множества A; другими словами, перестановка — это любое упорядоченное множество, содержащее все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ без повторений. Число всех перестановок обозначают символом P_n (n — число различных элементов, участвующих в перестановках). Первый элемент перестановки можно выбрать из множества A n способами, второй элемент можно выбрать из множества B, содержащего $(n-1)$ элемент множества A, исключая выбранный элемент, и так далее до последнего элемента, выбрать который можно единственным способом. По правилу произведения получаем:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Пример 5. Даны цифры 1,2,3,4,5. Сколько различных пятизначных чисел можно получить, переставляя эти цифры?

Решение. В данном случае $n = 5$, количество пятизначных чисел равно $P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.

А5. Перестановки с повторением

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащее n элементов. Любая упорядоченная выборка с возвращением, в которую элемент a_1 входит m_1 раз, элемент a_2 — m_2 раз, элемент a_n — m_n раз, причём ни одно из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ не равно нулю, называется перестановкой с повторением элементов множества A. Если $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$, то число всех перестановок с повторениями обозначим $\tilde{P}_m$. Одну из выборок с возвращением при заданных числах $m_1, m_2, \ldots, m_n$ можно записать в виде

$$\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{m_1\ \textit{раз}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{m_2\ \textit{раз}}, \ldots, \underbrace{a_n, a_n, \ldots, a_n}_{m_n\ \textit{раз}}. \tag{4}$$

Все другие выборки с возвращением при этих же числах $m_1, m_2, \dots, m_n$ сводятся к перестановке элементов последовательности (4), но при этом $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!$ выборок, получающихся перестановкой только элементов a_1, только элементов a_2, ..., только элементов a_n, неразличимы, т.е. дают одну и ту же выборку. Поэтому

$$\tilde{P}_m = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!} \ , \tag{5}$$

где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Пример 6. На тарелке лежат 4 яблока, 2 персика и 5 слив. Сколько существует способов взять три плода?

Решение. В данном случае $m = 4 + 2 + 5 = 11$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 5$. Неизвестное число способов, очевидно, равно $\tilde{P}_{11}$. По формуле (5) получим:

$$\tilde{P}_{11} = \frac{11!}{4! \cdot 2! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6930.$$

А6. Размещение без повторения

Пусть дано конечное множество A объёма n, т.е. $|A| = n$, и $m \leq n$ — любое натуральное число. Размещением без повторения из n элементов по m называется любая упорядоченная выборка без возвращения объёма m из множества A объёма n. Число всех размещений из n элементов по m обозначают A_n^m. Пусть, например, множество A состоит из элементов $\{a, b, c\}$. Тогда различными размещениями по два элемента из трёх являются подмножества $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, a\}$, которые мы уже отмечали, т.е. $A_3^2 = 6$. Если множество A содержит n элементов, то любое упорядоченное множество из m элементов строим следующим образом. Первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент — $(n-1)$ способами из оставшихся и так далее, m-й элемент — $(n-m+1)$ способами. По правилу произведения всё множество можно выбрать $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ способами, т.е.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1). \tag{6}$$

Это формула числа размещений из n элементов по m без повторения.

Пример 7. На четыре различных должности претендует 9 кандидатов. Сколько существует вариантов занять эти должности?

Решение. Это число, очевидно, равно A_9^4. По формуле (6) при $n = 9$, $m = 4$ находим: $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 72 \cdot 42 = 3024$.

Пример 8. Из 10 изучаемых предметов для сдачи экзамена ученики должны выбрать три. Сколько вариантов расписания экзаменов можно предположить?

Решение. Число вариантов расписания экзаменов совпадает с числом $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

А7. Размещение с повторением

Пусть дано множество A объёма n. Размещением по m элементов из множества A с повторениями называется любая упорядоченная выборка с возвращением объёма m. Их число обозначим через $\tilde{A}_n^m$. Поскольку каждый отбираемый элемент возвращается в исходное множество, то любой элемент размещения может быть выбран n способами. По правилу произведения $\tilde{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m\ \text{раз}}$, следовательно,

$$\tilde{A}_n^m = n^m. \tag{7}$$

Пример 9. Три стрелка, первый, второй и третий, стреляют по шести различным целям, выбирая цель случайно, независимо друг от друга. Сколько существует вариантов обстрела этих целей?

Решение. Каждый стрелок может выбрать цель шестью способами. Поэтому множество вариантов обстрела состоит из $\tilde{A}_6^3$ элементов. По формуле (7) находим: $\tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Подсчитайте самостоятельно число способов обстрела, если будут выбраны три различных цели. Сколько существует способов обстрела, если по одной цели будут стрелять более одного стрелка?

А8. Сочетания без повторения

Пусть, как и прежде, дано конечное множество A объёма n. Сочетанием из n элементов по m элементов $(m \leq n)$ без повторения называется любая неупорядоченная без возвращения выборка объема m. Другими словами — это любое подмножество множества A объема m.

Напомним, что само множество и все его подмножества рассматриваются как неупорядоченные совокупности.

Число всех сочетаний без повторения из n элементов по m элементов обозначают C_n^m.

Возьмем конкретное сочетание Q, т.е. подмножество, содержащее m элементов. Из этого неупорядоченного подмножества можно получить $m!$ упорядоченных подмножеств объёма m путем всевозможных перестановок элементов множества Q. Получим $m!$ различных размещений из n элементов по m. Каждому сочетанию соответствует $m!$ размещений, следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot m!$, поэтому $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}$. Применяя формулу (6), получаем:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-m+1)}{m!}. \tag{8}$$

Если числитель и знаменатель в (8) умножить на $(n-m)!$, то формулу (8) можно записать в виде:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{9}$$

Из соотношения (8) следует, что $C_n^n = 1$. Для общности записи формул принято соглашение, что $0! = 1$. Тогда следует считать, что $C_n^0 = 1$, хотя понятие C_n^0 лишено смысла.

Легко доказать справедливость следующих соотношений:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
3) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Пример 10. Сколько различных стартовых шестёрок можно образовать из 10 волейболистов?

Решение. Число стартовых шестёрок, очевидно, равно C_{10}^6. По формуле (8) находим:

$$C_{10}^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6!} = 210.$$

Пример 11. На окружности расположены двенадцать точек. Каждая пара точек соединена прямой линией. Сколько точек пересечения этих прямых находится внутри круга, ограниченного этой окружностью?

Решение. Каждая четвёрка точек на окружности порождает одну точку пересечения внутри круга. Поэтому, число точек пересечения совпадает с числом различных четверок точек на окружности, но количество таких четверок равно:

$$C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = 495.$$

А9. Сочетание с повторениями

Пусть дано множество A, содержащее n элементов. Сочетанием с повторением из n элементов по m (m- любое натуральное число) называется любая неупорядоченная с возвращением выборка объёма m. Число всех сочетаний с повторением из n элементов по m обозначим $\tilde{C}_n^m$.

Множество A обозначим в виде $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Здесь все $a_1, a_2, \ldots a_n$ — различные элементы. Никакие два между собой не совпадают.

Пусть в неупорядоченной выборке с возвращением объёма m элемент a_1 встречается m_1 раз, $a_2 - m_2$ раз ,..., $a_n - m_n$ раз, так что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$. Этой выборке взаимно однозначно можно сопоставить двоичный код, состоящий из нулей и единиц:

$$\underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{m_1\ \textit{раз}}\ 0\ \underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{m_2\ \textit{раз}}\ 0\ \underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{m_3\ \textit{раз}}\ 0\ \ldots\ 0\ \underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{m_n\ \textit{раз}}. \qquad (10)$$

Здесь нули разделяют серию одних повторяющихся элементов от другой повторяющейся серии. Эти нули назовем разделительными. Их, очевидно, $n-1$. Поэтому длина кода (10) равна $(m+n-1)$. Число $\tilde{C}_n^m$ равно числу всех кодов вида (10), содержащих m единиц и $n-1$ нулей, т.е. из $m+n-1$ мест нужно выбрать $(n-1)$ мест и поставить в них $(n-1)$ разделительных нулей. Это можно сделать $C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m$ способами. Следовательно:

$$\tilde{C}_n^m = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m. \qquad (11)$$

Заметим, что код (10) может начинаться с нулей, заканчиваться нулями, несколько нулей подряд может находиться внутри кода. Определите, каким выборкам соответствуют подобные коды.

Пример 12. В мебельном магазине имеется 4 вида стульев. Требуется купить 8 стульев. Сколько различных наборов стульев можно сформировать для покупки?

Решение. Очевидно, что некоторые виды стульев в наборе будут повторяться и набор является неупорядоченной выборкой, т.е. некоторым сочетанием с повторением из четырёх элементов по восьми. Поэтому число всех наборов равно $\tilde{C}_4^8$. Пользуясь формулой (11) при $n = 4$, $m = 8$, находим $\tilde{C}_4^8 = C_{11}^8 = C_{11}^3$. Теперь применим формулу (8).

$$C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165.$$

В. Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{x^2}{2}\right]$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение приложения В

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

C. Таблица значений функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Продолжение приложения C

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

D. Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ 0,95	0,99	0,999	n	γ 0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

E. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ 0,95	0,99	0,999	n	γ 0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,46	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Литература

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. — М.: Наука, 1984. — 472 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. — 564с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988. — 448с.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1977. — 480с.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1979. — 400с.

7. Буколов Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / Под ред. А.В. Ефимова. — М.: Наука, 1984. — 606с.

8. Пугачёв В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979. — 496с.

9. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. — М.: Наука, 1970. — 256с.

10. Володин Б.Г., Ганин М.П., Динер И.Я. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. — М.: Наука, 1970. — 656с.

11. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982. — 256с.

12. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1972. — 230с.

13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.1. — М.: Мир, 1964. — 498с.

14. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1982. — 256с.

15. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. — Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1988. — 174с.