

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
Томский государственный университет систем  
управления и радиоэлектроники

Л. И. Магазинников

*Высшая математика III*

Функции комплексного переменного.  
Ряды. Интегральные преобразования

*Издание второе*

*Рекомендовано*

*Сибирским региональным учебно-методическим  
центром высшего профессионального образования  
в качестве учебного пособия для студентов  
и преподавателей вузов*

Томск 2012

Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. — 206 с.

Изучаются основные понятия комплексного анализа, числовые и функциональные ряды, интеграл Фурье, интегральные преобразования Фурье и Лапласа в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики. Теория рядов строится сразу в комплексной плоскости, рассматривая ряды для действительных переменных как частный случай. Теоретический курс дополнен многочисленными иллюстративными примерами и контрольными заданиями, которые можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля, применяя устройство СИМВОЛ или его компьютерный аналог.

Для студентов вузов электро- и радиотехнических специальностей.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Томского политехнического университета, заведующий кафедрой доктор физ.-мат. наук, профессор К.П. Арефьев,

кандидат физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики Томского государственного университета М.Р. Куваев

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	8
1. Основные понятия комплексного анализа .....	9
1.1. Комплексные числа и действия над ними .....	9
1.1.1. Понятие комплексного числа .....	9
1.1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Аргумент и главное значение аргумента ....	11
1.1.3. Извлечение корня из комплексного числа .....	13
1.2. Последовательности комплексных чисел. Понятие бесконечности. Операции $e^z$ и $\ln z$ .....	14
1.3. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность .....	19
1.3.1. Функции комплексного переменного .....	19
1.3.2. Линейные отображения .....	21
1.3.3. Уравнение образа кривой .....	21
1.3.4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного .....	22
1.4. Дифференцируемые функции комплексного переменного	23
1.4.1. Производная .....	23
1.4.2. Условия дифференцируемости функции комплексного переменного .....	24
1.4.3. Эквивалентность условий Коши-Римана и условия $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .....	26
1.5. Понятие аналитической функции. ....	27
1.5.1. Простейшие свойства аналитических функций ....	27
1.5.2. Восстановление аналитической функции по её мнимой или действительной части .....	28
1.5.3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной .....	30
2. Интегральное представление аналитических функций .....	32
2.1. Интеграл от функции комплексного переменного .....	32
2.2. Интеграл от аналитических функций .....	34
2.2.1. Теорема Коши для односвязной области. Независимость интеграла от пути интегрирования	34
2.2.2. Существование первообразной для аналитической функции. Формула Ньютона-Лейбница .....	35
2.2.3. Теорема Коши для многосвязной области .....	37

2.3. Интегральная формула Коши .....	38
2.4. Производные высших порядков от аналитической функции .....	40
3. Представление функций рядами .....	43
3.1. Числовые ряды .....	43
3.1.1. Основные понятия .....	43
3.1.2. Признаки сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов .....	45
3.1.3. Абсолютная и условная сходимость .....	48
3.1.4. Признак сравнения абсолютной сходимости в конечной форме .....	51
3.1.5. Предельный признак сравнения .....	53
3.1.6. Признак Даламбера в конечной форме .....	54
3.1.7. Признак Даламбера в предельной форме .....	55
3.1.8. Радикальный признак Коши в конечной форме ....	55
3.1.9. Радикальный признак Коши в предельной форме ..	56
3.1.10. Интегральный признак Коши .....	56
3.1.11. Признаки Лейбница и Дирихле .....	58
3.2. Функциональные ряды .....	61
3.2.1. Функциональный ряд, его сумма и область сходимости .....	61
3.2.2. Равномерная и неравномерная сходимость .....	63
3.2.3. Свойства равномерно сходящихся рядов .....	66
3.3. Степенные ряды. Ряды Тейлора .....	69
3.3.1. Строение области сходимости степенного ряда ....	69
3.3.2. Ряды Тейлора .....	72
3.4. Нули аналитической функции. Теорема единственности .	76
3.4.1. Порядок нуля функции .....	76
3.4.2. Единственность аналитической функции .....	76
3.5. Приложение степенных рядов .....	78
3.5.1. Оценка остатка ряда Тейлора .....	78
3.5.2. Приближённое вычисление значений функции ....	80
3.5.3. Приближённое вычисление определённых интегралов .....	82
3.5.4. Интегрирование дифференциальных уравнений ....	82
3.5.5. Применение рядов Тейлора к отысканию пределов и производных .....	84

3.6. Ряды Лорана .....	85
3.6.1. Строение области сходимости ряда Лорана	
Теорема о представимости функции рядом Лорана	85
3.6.2. Разложение функции в ряд Лорана	
в окрестности $\infty$ .....	88
4. Особые точки. Вычеты и их приложения .....	90
4.1. Изолированные особые точки .....	90
4.1.1. Классификация изолированных особых точек.	
Устранимые особые точки .....	90
4.1.2. Полюсы .....	91
4.1.3. Существенно особые точки .....	94
4.1.4. Характер точки $\infty$ .....	95
4.2. Вычеты .....	96
4.2.1. Вычет относительно конечной точки .....	96
4.2.2. Формулы вычисления вычетов относительно	
полюса .....	97
4.2.3. Вычет относительно $\infty$ .....	98
4.2.4. Основная теорема о вычетах .....	100
4.3. Приложение вычетов к вычислению интегралов .....	101
4.3.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру ..	101
4.3.2. Вычисление интегралов типа $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$	
где $R(u, v)$ — рациональная функция своих	
аргументов .....	102
4.3.3. Вычисление интегралов типа $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .....	102
4.3.4. Вычисление несобственных интегралов типа	
$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \alpha > 0$ .....	103
5. Интегралы, зависящие от параметра. $\Gamma$ - и $V$ - функции.	
Функции Бесселя .....	106
5.1. Свойства функций, заданных собственными	
интегралами, зависящими от параметра .....	106
5.1.1. Непрерывность и переход к пределу под знаком	
интеграла .....	106
5.1.2. Дифференцируемость. Формула Лейбница .....	108
5.1.3. Интегрируемость. Замена порядка интегрирования	111
5.2. Несобственные интегралы 1-го рода, зависящие от	
параметра .....	111

5.3.	Несобственные интегралы 2-го рода, зависящие от параметра .....	116
5.4.	$\Gamma$ - и $V$ - функции (эйлеровы интегралы) .....	118
5.4.1.	Область определения $\Gamma$ -функции. Непрерывность и дифференцируемость .....	118
5.4.2.	Первая рекуррентная формула. График $\Gamma$ -функции ...	
5.4.3.	$V$ -функция и её связь с $\Gamma$ -функцией. Вторая рекуррентная формула. ....	119
5.5.	Функции Бесселя .....	121
5.5.1.	Общее решение уравнения Бесселя .....	121
5.5.2.	Рекуррентные формулы .....	123
5.5.3.	Функции Бесселя с полуцелым индексом .....	124
5.5.4.	Асимптотический порядок цилиндрических функций .....	125
5.5.5.	Некоторые интегральные формулы .....	126
6.	Ряды Фурье .....	128
6.1.	Ортогональные системы функций .....	128
6.1.1.	Понятие базиса для множества функций .....	128
6.1.2.	Скалярное произведение функций. Нормы функций. Ортогональность .....	129
6.1.3.	Основная тригонометрическая система функций ..	130
6.2.	Ряды Фурье по произвольной системе ортогональных функций .....	131
6.2.1.	Понятие ряда Фурье .....	31
6.2.2.	Понятие сходимости в среднем .....	133
6.2.3.	Экстремальное свойство многочленов Фурье .....	134
6.2.4.	Замкнутость и полнота ортогональной системы ...	135
6.3.	Тригонометрический ряд Фурье .....	137
6.3.1.	Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье. Достаточные признаки представимости функции тригонометрическим рядом. Понятие о периодическом продолжении функции .....	137
6.3.2.	Ряд Фурье для чётных и нечётных функций. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на $(0, l)$ , $[a, a + 2l]$ .....	140
6.3.3.	Другая форма записи тригонометрического ряда Фурье .....	143
6.3.4.	Интегрирование и дифференцирование тригонометрических рядов Фурье .....	144

6.3.5. О равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье .....	146
6.3.6. Скорость сходимости тригонометрического ряда Фурье .....	148
6.3.7. Комплексная форма ряда Фурье .....	148
7. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье .....	152
7.1. Понятие интеграла Фурье. Комплексная форма записи интеграла Фурье. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье .....	152
7.2. Действительные формы записи интеграла Фурье. Интеграл Фурье для чётных и нечётных функций .....	154
7.3. Преобразование Фурье .....	157
7.4. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье .....	159
8. Преобразование Лапласа .....	163
8.1. Понятие оригинала и его изображения. Теоремы обращения .....	163
8.2. Свойства преобразования Лапласа .....	165
8.2.1. Свойство линейности, теорема подобия .....	165
8.2.2. Теоремы запаздывания и смещения .....	166
8.2.3. Дифференцирование оригинала .....	168
8.2.4. Дифференцирование изображения .....	168
8.2.5. Интегрирование оригинала и изображения .....	169
8.2.6. Умножение изображений. Интеграл Дюамеля .....	171
8.3. Теоремы разложения .....	172
8.4. Некоторые приложения операционного исчисления .....	175
8.4.1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .....	175
8.4.2. Решение интегральных уравнений типа свёртки ...	178
9. Контрольные работы .....	179
Контрольная работа № 8 .....	179
Контрольная работа № 9 .....	184
Контрольная работа № 10 .....	196
ЛИТЕРАТУРА .....	205

# ВВЕДЕНИЕ

В третью часть пособия по курсу высшей математики включён следующий материал.

В первом и втором разделах приводятся основные понятия комплексного анализа: комплексные числа и действия над ними, функции комплексного переменного, предел, непрерывность, дифференцирование и интегрирование, здесь же изучаются простейшие свойства аналитических функций.

В третьем разделе рассмотрены вопросы представления функций рядами. Ряды изучаются сразу для вещественных (действительных) и комплексных переменных. Довольно подробно рассмотрены ряды Тейлора и Лорана и их приложения, даны оценки остатка ряда Тейлора, исходя из интегральной формы.

В четвёртом разделе дана классификация изолированных особых точек аналитических функций, приведены теоремы о поведении ряда Лорана в окрестности особых точек, а также изложена теория вычетов и их приложений к вычислению некоторых интегралов.

Как обобщение функциональных рядов в пятом разделе изучаются собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. В качестве примера приложения степенных рядов к изучению решений дифференциальных уравнений приведены некоторые сведения из теории функций Бесселя.

Шестой и седьмой разделы посвящены рядам и интегралу Фурье и интегральному преобразованию Фурье. В последнем разделе приводятся некоторые сведения из теории интегрального преобразования Лапласа и примеры приложения этого преобразования к решению дифференциальных уравнений.

Вся учебная информация разбита на небольшие методические блоки, темы которых отражены в очень подробном оглавлении. Рассмотрены многочисленные примеры, иллюстрирующие основные теоретические положения.

В пособие включены три контрольных работы в десяти вариантах каждая, которые можно использовать либо в качестве индивидуальных заданий, либо как контрольные работы для студентов заочной или дистанционной форм обучения. Большинство задач можно выполнять в режиме автоматизированного самоконтроля при наличии устройства СИМВОЛ или его компьютерного аналога.

Автор с благодарностью примет все критические замечания и учтёт их в последующей работе.



# 1. Основные понятия комплексного анализа

## 1.1. Комплексные числа и действия над ними

Проблемы, связанные с решением алгебраических уравнений второй и более высоких степеней, привели к расширению понятия числа, к введению новых, так называемых комплексных чисел, частным случаем которых являются вещественные (действительные) числа. Впоследствии комплексные числа нашли применение во многих областях математики и её приложениях. Изучению множеств комплексных чисел и их отображений посвящён этот раздел.

### 1.1.1. Понятие комплексного числа

*Комплексным числом* называется выражение вида

$$z = a + bi \equiv a + ib,$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа, а  $i$  — специальный символ, если для любых комплексных чисел  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$  введены операции по следующим правилам:

1) равенство комплексных чисел:  $z_1 = z_2$  тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ , при этом полагают, что

$$a + 0 \cdot i = a, 0 + bi = bi, 1 \cdot i = i, (-1) \cdot i = -i;$$

2) сложение и вычитание комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i;$$

3) умножение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2)i.$$

Из правил 1) и 3) следует, что

$$(0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = i \cdot i = i^2 = (0 - 1) + (0 + 0)i = -1.$$

Введённые операции сложения и умножения обладают свойствами, аналогичными операциям над вещественными числами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

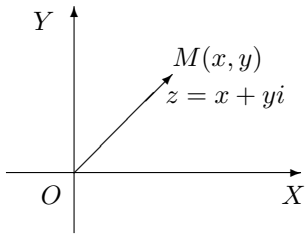
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Отмеченные свойства предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Из равенства  $a + 0 \cdot i = a$  следует, что множество всех действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.



Если на плоскости выбрать декартову систему координат  $OXY$ , то между всеми комплексными числами  $z = x + yi$  и всеми точками  $M(x, y)$  плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие

$$M(x, y) \leftrightarrow z = x + yi.$$

Таким образом, комплексные числа  $z = x + yi$  можно геометрически изображать

точками  $M(x, y)$  плоскости или векторами  $\mathbf{OM} = \{x, y\}$ . Действительные числа  $x + 0i = x$  при этом изображаются точками оси  $OX$ , поэтому ось  $OX$  называют действительной, числа  $yi$  называют мнимыми, они изображаются точками оси  $OY$ . Эту ось называют мнимой. Число  $x$  называют *вещественной (действительной) частью* комплексного числа  $z = x + yi$ , а число  $y$  — *мнимой* его частью. Пишут  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$ .

Число  $\bar{z} = x - iy$  называется *сопряжённым* комплексному числу  $z = x + yi$ . Сопряжённые числа  $z$  и  $\bar{z}$  изображаются точками, симметричными относительно вещественной оси. Из определения умножения комплексных чисел следует, что  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ . Действительное число  $|z| = |\mathbf{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем* комплексного числа. Как видим,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ .

Операцию деления комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$  вводят как обратную умножению: число  $z_3$  называется *частным* чисел  $z_1$  и  $z_2$  ( $z_2 \neq 0$ ) (пишут  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ ), если  $z_1 = z_3 \cdot z_2$ . Так как  $z_1 \cdot \bar{z}_2 = z_3 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_3 |z_2|^2$ , то  $z_3 = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ . По правилу умножения комплексных чисел отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Легко показать, что

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0.$$

*Пример 1.1.* Даны числа  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 4 + 3i$ . Найти  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$ .

Решение.  $z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(4 + 3i) = (4 - 6) + (8 + 3)i = -2 + 11i$ .  
Применяя формулу (1.7), получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{4 + 3i} = \frac{(1 + 2i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{4 + 6}{25} + \frac{8 - 3}{25}i = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

### 1.1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Аргумент и главное значение аргумента

Форму записи комплексного числа  $z$  в виде  $z = x + iy$  называют *алгебраической*. Иногда удобно представлять комплексные числа в полярных координатах. Полярную ось совместим с положительной полуосью  $OX$ , а полюс — с началом координат  $O$ . Тогда, если обозначить через  $r = |z|$  — расстояние от точки  $M(x, y)$  до начала координат, а через  $\varphi$  — полярный угол точки  $M(x, y)$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ), то можем записать

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.8)$$

Форма записи комплексного числа в виде (1.8) называется *тригонометрической*. Угол  $\varphi$  называют *аргументом* числа  $z$  и обозначают  $\text{Arg } z$ . Модуль комплексного числа определяется однозначно формулой  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , аргумент же определён с точностью до любого слагаемого, кратного  $2\pi$ . Символом  $\arg z$  будем обозначать и называть *главным значением аргумента* то единственное значение  $\text{Arg } z$ , которое заключено либо в промежутке  $[0, 2\pi)$ , либо в  $(-\pi, \pi]$ . Таким образом, либо  $0 \leq \arg z < 2\pi$ , либо  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . Значение  $\arg z = \arg(x + iy)$  легко выразить через  $\text{arctg} \frac{y}{x}$ . Учитывая, что  $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$ , в случае, если  $0 \leq \arg z < 2\pi$ , получаем

$$\arg z = \begin{cases} \text{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y \geq 0; \\ \pi - \text{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ \pi + \text{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ 2\pi - \text{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x > 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Если же  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y \geq 0; \\ \pi - \arctg \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \arctg \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ -\arctg \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x > 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать, что  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

*Пример 1.2.* Даны числа  $z_1 = -3+4i$ ,  $z_2 = 4-3i$ . Найдите главные значения аргументов этих чисел. Запишите эти числа в тригонометрической форме.

Решение.

Так как  $\operatorname{Re} z_1 = -3 < 0$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = 4 > 0$ , то  $\arg z_1 = \pi - \arctg \frac{4}{3}$ .  
 $\operatorname{Re} z_2 = 4 > 0$ ,  $\operatorname{Im} z_2 = -3 < 0$ , поэтому  $\arg z_2 = -\arctg \frac{3}{4}$ . Поскольку  $r = |z_1| = |z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , то

$$z_1 = 5 \left[ \cos \left( \pi - \arctg \frac{4}{3} \right) + i \sin \left( \pi - \arctg \frac{4}{3} \right) \right],$$

$$z_2 = 5 \left[ \cos \left( -\arctg \frac{3}{4} \right) + i \sin \left( -\arctg \frac{3}{4} \right) \right].$$

При умножении и делении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, можно применять следующую теорему.

*Теорема 1.1.* При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

*Доказательство.* Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда  $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ . Аналогично, легко

получить, что  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ,  $r_2 \neq 0$ .

Из доказанной теоремы следует правило возведения комплексного числа в целую положительную степень:

$$z^n = (x + iy)^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Полученные выражения для  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1/z_2$ ,  $z^n$  называют формулами Муавра.

*Замечание.* Разумеется, для возведения комплексного числа в целую положительную степень не обязательно записывать его в тригонометрической форме. Можно пользоваться правилом умножения комплексных чисел, например,  $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ,  $(x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$  и т.д.

Очевидно,  $i^{4m} = 1$ ,  $i^{4m+1} = i$ ,  $i^{4m+2} = -1$ ,  $i^{4m+3} = -i$ ,  $m \geq 0$  — любое целое число.

*Пример 1.3.* Число  $\frac{i^{82} + 3i^{37}}{i^{44} - 2i^{51}}$  записать в алгебраической форме.

Решение. Так как  $i^{82} = i^{4 \cdot 20 + 2} = -1$ ,  $i^{37} = i^{4 \cdot 9 + 1} = i$ ,  $i^{44} = i^{4 \cdot 11} = 1$ ,  $i^{51} = i^{4 \cdot 12 + 3} = -i$ , то  $z = \frac{-1 + 3i}{1 + 2i}$ , поэтому

$$z = \frac{(-1 + 3i)(1 - 2i)}{1 + 4} = \frac{(-1 + 6) + (3 + 2)i}{5} = 1 + i.$$

### 1.1.3. Извлечение корня из комплексного числа

Операция извлечения корня целой положительной степени из комплексного числа определяется как операция, обратная возведению в целую положительную степень.

Число  $w$  называется *корнем  $n$ -й степени* ( $n \geq 2$ ) из числа  $z$ , если  $w^n = z$ . Обозначают  $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$ .

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $r > 0$ ,  $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тогда по определению и теореме 1.1

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда  $\rho^n = r$ ,  $n\psi = \varphi + 2k\pi$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt[n]{r}$ ,  $\psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Здесь  $\rho = \sqrt[n]{r}$ ,  $\rho > 0$  — арифметическое значение корня из положительного вещественного числа.

Таким образом, корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z \neq 0$  имеет  $n$  различных значений. Все корни  $n$ -й степени из числа  $z = 0$  по определению полагаются равными нулю.

*Пример 1.4.* Найти все значения  $\sqrt[4]{-16}$ .

Решение. Так как  $\arg(-16) = \pi$ ,  $|-16| = 16$ , то  $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$ ,  $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$ ,  $\psi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Следовательно,

$$w_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i),$$

$$w_1 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(-1 + i),$$

$$w_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(-1 - i),$$

$$w_3 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 - i).$$

Так как  $\sqrt{-1} = 1 \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} \right)$ ,  $k = 0, 1$ , то  $\sqrt{-1}$  имеет два значения:  $i$  и  $-i$ . Таким образом, число  $i$  — одно из значений  $\sqrt{-1}$ .

*Замечание.* Из средней школы известно, что в случае, если дискриминант  $D$  квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  — действительные числа) отрицателен, то это уравнение не имеет действительных корней. При  $D < 0$  корни будут комплексными. Например, найдём корни уравнения  $x^2 - 2x + 17 = 0$ . По известной формуле получаем  $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i$ , т.е.  $x_1 = 1 + 4i$ ,  $x_2 = 1 - 4i$ .

Множество всех комплексных чисел будем обозначать через  $C$ . Отметим наиболее часто встречающиеся подмножества  $C$ :

$|z - z_0| = r$  — окружность с центром в точке  $z_0$  радиуса  $r$ ;

$|z - z_0| < \varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z_0$ , обозначать её будем  $Q_\varepsilon(z_0)$ ;

$0 < |z - z_0| < \varepsilon$  — проколотая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z_0$ , обозначают  $\dot{Q}_\varepsilon(z_0)$ ;

$\text{Im } z > 0$ , ( $\text{Im } z < 0$ ) — верхняя (нижняя) полуплоскость;

$\text{Re } z > 0$ , ( $\text{Re } z < 0$ ) — правая (левая) полуплоскость.

## 1.2. Последовательности комплексных чисел.

### Понятие бесконечности. Операции $e^z$ и $\ln z$

Функция  $z_n : N \rightarrow C$ , где  $N$  — множество натуральных чисел, а  $C$  — множество комплексных чисел, называется *последовательностью комплексных чисел*  $\{z_n\}$ .

Примеры последовательностей:

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2} \right\}, \quad \left\{ n + \frac{i}{n+1} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть задана последовательность  $\{z_n\} = x_n + iy_n$ . Число  $z = x + iy$  называется *пределом последовательности*  $\{z_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое вещественное число  $N(\varepsilon)$ , что для всех  $n > N$  выполняется условие  $|z - z_n| < \varepsilon$ . Пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy$ .

Задать последовательность комплексных чисел  $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$  означает задать векторную последовательность  $\{\vec{r}_n\} = \{x_n, y_n\}$ , изученную нами в первой части курса высшей математики [14, с.90,91]. Перефразировкой теоремы о векторных последовательностях является теорема 1.2.

*Теорема 1.2.* Последовательность  $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$  сходится к числу  $z = x + iy$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ .

*Теорема 1.3.* Из сходимости последовательности  $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\} = \{r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)\}$  к числу  $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  при соответствующем выборе аргументов  $\varphi$  и  $\varphi_n$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$  и обратно.

Справедливость утверждения следует из теоремы 1.2 и непрерывности функций  $f(x) = \sqrt{x}$  и  $\varphi(x) = \arctg x + 2\pi m$ , так как  $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ ,  $\text{Arg } z_n = \arctg \frac{y_n}{x_n} + 2\pi m$ .

Критерий Коши сходимости последовательности вещественных чисел легко обобщается и на последовательность комплексных чисел.

*Теорема 1.4.* (Критерий Коши). Для того, чтобы последовательность  $\{z_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало число  $N(\varepsilon)$  такое, что при любых  $n > N$  и любом  $p = 1, 2, \dots$  выполнялось неравенство  $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ .

Пусть дана последовательность  $\{z_n\}$ , удовлетворяющая условию: какое бы ни было число  $R$ , найдётся такое число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|z_n| > R$ . В обычном смысле последовательность  $\{z_n\}$  предела не имеет. Дополним множество всех комплексных чисел новым элементом, обозначим его символом  $\infty$  и будем считать, что рассмотренная последовательность имеет пределом  $\infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Элемент  $\infty$  называется *бесконечно удалённым*, а комплексную плоскость, дополненную этим элементом, называют *расширенной комплексной плоскостью*. Считают, что

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty \quad z \neq 0, \quad z + \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0.$$

Заметим, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \infty$ , то хотя бы одна из последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  бесконечно большая.

Рассмотрим последовательность  $\alpha_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ , где  $z = x + iy$  — любое конечное комплексное число. Чтобы доказать существование и найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ , рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg } \alpha_n$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( 1 + \frac{x + iy}{n} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{n/2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{n/2} = e^x; \text{ (при этом использован второй} \\ &\text{замечательный предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x \text{).} \end{aligned}$$

Так как при возведении в целую положительную степень комплексного числа его аргумент умножается на эту степень, то  $\text{Arg } \alpha_n = n \cdot \text{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n} + 2\pi m$ , где  $m$  — любое целое число.

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg } \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \text{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n} + 2\pi m \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{y/n}{1 + x/n} + 2\pi m \right) = y + 2\pi m \end{aligned}$$

(учтено, что  $\text{arctg } x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ). На основании теоремы 1.3 теперь можем утверждать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  существует, и при этом справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x + iy}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

По определению положим

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.9)$$

Из (1.9) при  $x = 0$  получаем, что  $e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$ . Отсюда следует, что любое комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , не равное нулю, можем записать в виде

$$z = r e^{i\varphi} = r \exp(i\varphi). \quad (1.10)$$

Форму записи комплексного числа в виде (1.10) называют *показательной*.

Заметим, что каждому комплексному числу  $z$  по формуле (1.3) соответствует единственное комплексное число  $w = e^z$ , но одному и тому же числу  $w$  соответствует бесконечно много чисел  $z$ , отличающихся друг от друга на целое кратное числа  $2\pi i$ .

*Пример 1.5.* Число  $z = \sqrt{2} + i$  записать в показательной форме.

Решение. Так как  $|z| = \sqrt{3}$ ,  $\arg z = \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ , то по формуле (1.10)

$$\text{можем записать } z = \sqrt{3} \exp \left( i \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Пусть дано комплексное число  $z$ ,  $z \neq 0$ ,  $z \neq \infty$ . Число  $w$  называется *натуральным логарифмом* числа  $z$ , если  $e^w = z$ .



Все значения логарифма  $z$  обозначим  $\mathcal{L}n z$ . Найдём эти значения. Если  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , а  $w = u + iv$ , то по определению логарифма  $e^{u+iv} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  или  $e^u(\cos v + i \sin v) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Отсюда следует, что  $e^u = r$ ,  $v = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Так как  $r = |z| > 0$ , то существует единственное действительное значение  $u = \ln r = \ln |z|$ . Поэтому  $u = \ln |z|$ ,  $v = \arg z + 2\pi m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таким образом, всякое комплексное число  $z \neq 0$ ,  $z \neq \infty$  имеет бесконечное множество значений натурального логарифма. Все они описываются формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}n z &= \ln |z| + i \text{Arg } z, \\ \mathcal{L}n z &= \ln |z| + i(\arg z + 2\pi m). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Однозначная функция  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$  называется *главным значением* логарифма.

*Пример 1.6.* Найти все значения  $\mathcal{L}n(1 + i)$ .

Решение. По формуле (1.11) находим

$$\mathcal{L}n(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi m \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Если  $a$  действительно и  $a > 0$ , то  $\mathcal{L}n a = \ln a + i2\pi m$ . Если  $a < 0$ , то  $\mathcal{L}n a = \ln |a| + i(\pi + 2\pi m)$ .

Среди всех значений логарифма действительного положительного числа, как мы уже отмечали, лишь одно действительно. Оно совпадает с главным значением логарифма. Легко проверяются равенства

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}n(z_1 \cdot z_2) &= \mathcal{L}n z_1 + \mathcal{L}n z_2, \\ \mathcal{L}n \left( \frac{z_1}{z_2} \right) &= \mathcal{L}n z_1 - \mathcal{L}n z_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Равенства (1.12) следует понимать, как равенства двух бесконечных множеств в том смысле, что правые и левые части равенств в (1.12) определяют одинаковые бесконечные множества комплексных чисел. Это не совпадает с обычной алгеброй. Например,  $\mathcal{L}n z - \mathcal{L}n z = i2\pi m$ ,  $m$  — любое целое число. Было бы ошибкой приравнивать эту разность тождественному нулю. Она равна нулю только тогда, когда рассматриваются одинаковые ветви значений логарифма  $z$ , получающиеся из (1.5) при фиксированном значении  $m$ .

*Пример 1.7.* Найти число  $z$ , если известно, что

$$\mathcal{L}n z = \ln \sqrt{20} + i(-\pi + \text{arctg } 2 + 2\pi m).$$

Решение. Из определения логарифма следует, что  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20}$ ,  $\text{Arg } z = -\pi + \text{arctg } 2 + 2\pi m$ , т.е. число  $z$  расположено в третьей четверти, поэтому  $x < 0$ ,  $y < 0$ . Из условия

$x^2 + y^2 = 20$ ,  $\frac{y}{x} = 2$ ,  $x < 0$ ,  $y < 0$  находим, что  $x = -2$ ,  $y = -4$ , следовательно,  $z = -2 - 4i$ .

Операция  $z_1^{z_2}$  ( $z_1 \neq 0$ ) определяется равенством  $z_1^{z_2} = e^{z_2 \mathcal{L}n z_1}$  и является также многозначной.

*Пример 1.8.* Число  $(1 + i\sqrt{3})^i$  записать в алгебраической форме.

Решение.

$$(1 + i\sqrt{3})^i = \exp[i\mathcal{L}n(1 + i\sqrt{3})] = \exp\{i[\ln 2 + i(\arctg\sqrt{3} + 2\pi m)]\} = \\ = \exp\left[-\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right) + i \ln 2\right] = \exp\left[-\left(\frac{\pi}{3} + 2m\pi\right)\right] (\cos \ln 2 + \\ + i \sin \ln 2),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Используя операцию  $e^z$ , вводят ряд других операций.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Операции  $\operatorname{Arcsin} z$ ,  $\operatorname{Arccos} z$ ,  $\operatorname{Arctg} z$ ,  $\operatorname{Arcctg} z$ ,  $\operatorname{Arcsh} z$ ,  $\operatorname{Arcch} z$ ,  $\operatorname{Arcth} z$ ,  $\operatorname{Arccth} z$  рассматривают как обратные соответствующим операциям. Позднее будет показано, что в случае, когда  $z$  действительно, введённые здесь операции совпадают с известными в математическом анализе:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{Arcsin} x$ ,  $\operatorname{Arccos} x$  и т.д.

*Пример 1.9.* Найти мнимую и действительную части числа  $z = \operatorname{Arccos} 2$  или, что то же самое, решить уравнение  $\cos z = 2$ .

Решение.  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$ . Поэтому  $e^{iz} + e^{-iz} = 4$ . Пусть  $t = e^{iz}$ . Тогда  $t + \frac{1}{t} = 4$  или  $t^2 - 4t + 1 = 0$ . Отсюда  $t = 2 \pm \sqrt{3}$ , т.е.  $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$ ,  $iz = \mathcal{L}n(2 \pm \sqrt{3}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2m\pi i$  ( $2 \pm \sqrt{3} > 0$ ). Следовательно,  $z = 2m\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ . Таким образом,

$$\operatorname{Arccos} 2 = 2m\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Уравнение  $\cos z = 2$  имеет бесконечно много решений, все они располагаются на прямых  $y = -\ln(2 + \sqrt{3})$  и  $y = -\ln(2 - \sqrt{3})$ .

Применяя приём из примера 1.9 к уравнениям  $\cos w = z$ ,  $\sin w = z$  и т.д., можно получить

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\mathcal{L}n(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{Arccos} z = -i\mathcal{L}n(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\mathcal{L}n \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i, \quad \operatorname{Arcsh} z = \mathcal{L}n(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{Arcch} z = \mathcal{L}n(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\mathcal{L}n \frac{1 + z}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Непосредственно из определения операций  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} z$  следуют формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos iz &= \operatorname{ch} z, \\ \sin iz &= i \operatorname{sh} z, \\ e^{iz} &= \cos z + i \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Соотношения (1.13) предлагается доказать в качестве упражнения.

### 1.3. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность

#### 1.3.1. Функции комплексного переменного

Пусть дано два множества комплексных чисел  $D$  и  $\Delta$ , и каждому числу  $z \in D$  поставлено в соответствие число  $w \in \Delta$ , которое обозначается через  $f(z)$ . В этом случае говорят, что на множестве  $D$  задана функция  $f$  со значениями в  $\Delta$ , и пишут  $f : D \rightarrow \Delta$ .

Если  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , то  $w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Таким образом, зависимость  $f(z)$  может быть описана двумя функциями:  $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  действительных переменных  $u$  и  $v$ . Функция  $u(x, y)$  называется действительной (вещественной), а  $v(x, y)$  — мнимой частью  $f(z)$ . Например,  $\operatorname{Re} e^z = \operatorname{Re} e^{x+iy} = e^x \cos y$ ,  $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$ .

Функцию  $f(z)$  характеризуют полностью четыре переменных:  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$ . Для геометрической иллюстрации требуется четырёхмерное пространство. Четырёхмерное пространство не допускает наглядной иллюстрации, поэтому договорились брать два экземпляра комплексных плоскостей  $XO_1Y$  и  $UO_2V$ . В первой из них строят точки  $z = x + iy$ . Её называют плоскостью ( $z$ ), а во второй строят точки  $w = u + iv$ . Вторую плоскость называют плоскостью ( $w$ ).

Множество всех чисел  $z$  будем обозначать  $C_z$ , а всех чисел  $w$  —  $C_w$ . В этих обозначениях можно записать:

$$f : D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w.$$

Будем говорить, что функция  $f$  отображает множество  $D$  в  $\Delta$ . Это отображение называется *однолиственным*, если оно взаимно однозначное.

Как видим, задание функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) : D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w$$

равносильно заданию отображения  $\varphi(x, y) : D \subset R_2 \rightarrow \Delta \subset R_2$  вида

$$\varphi(x, y) = \left[ \begin{array}{c} u(x, y) \\ v(x, y) \end{array} \right], \text{ которое мы уже изучали [14].}$$

Если  $w_0 = f(z_0)$ , то точка  $w_0$  называется образом точки  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ . Очевидно, что имеется обратное отображение множества  $\Delta$  в  $D$ , т.е. в  $\Delta$  задана некоторая функция  $z = \varphi(w)$ ,

называемая *обратной* функции  $w = f(z)$ . Если  $f(z)$  в  $D$  однолистка, то  $\varphi(w)$  также однолистка в  $\Delta$ .

Рассматривая операции над комплексными числами, мы уже определили следующие функции:  $w = az + b$  — линейная функция,

$w = \frac{az + b}{cz + d}$  — дробно-линейная функция,  $w = z^n$ ,  $w = e^z$ ,  $w = \mathcal{L}n z$ ,

$w = \sin z$ ,  $w = \cos z$ ,  $w = \operatorname{tg} z$ ,  $w = \operatorname{ctg} z$ ,  $w = \operatorname{ch} z$ ,  $w = \operatorname{sh} z$ ,

$w = \operatorname{th} z$ ,  $w = \operatorname{cth} z$ ,  $w = \operatorname{Arcsin} z$ ,  $w = \operatorname{Arccos} z$ ,  $w = \operatorname{Arctg} z$ ,

$w = \operatorname{Arcctg} z$ ,  $w = \operatorname{Arcsh} z$ ,  $w = \operatorname{Arch} z$ ,  $w = \operatorname{Arcth} z$ ,  $w = \operatorname{Arctch} z$ .

*Пример 1.10.* Найти мнимую и вещественную части функции  $w = \cos z$ .

Решение.  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} =$

$$= \frac{1}{2} [e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)] =$$

$$= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = \operatorname{ch} y \cos x - i \operatorname{sh} y \sin x,$$

$$\operatorname{Re} \cos z = u(x, y) = \operatorname{ch} y \cos x, \quad \operatorname{Im} \cos z = v(x, y) = -\operatorname{sh} y \sin x.$$

Все формулы для тригонометрических и гиперболических функций, известные для действительных значений аргумента, переносятся и на комплексный случай. Приведём некоторые из них:

$$\left. \begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1, \\ \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2, \\ \operatorname{sh}(z_1 + z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Докажем, например, первую из этих формул. По определению находим

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2} [e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}] = \frac{1}{2} (e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2}) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) + \frac{1}{2} (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - \\ &- i \sin z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (1.7) и (1.14), легко находим  $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ . Следовательно,  $\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$ ,  $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y$ .

Например,  $\sin(3 + 4i) = \sin 3 \operatorname{ch} 4 + i \cos 3 \operatorname{sh} 4$ , т.е.  $\operatorname{Re} \sin(3 + 4i) = \sin 3 \operatorname{ch} 4 \approx 3,854$ ,  $\operatorname{Im} \sin(3 + 4i) = \cos 3 \operatorname{sh} 4 \approx -27,017$ .

Тригонометрические функции комплексного аргумента обладают свойствами, отличными от вещественного случая. Так, например, функции  $w = \sin z$  и  $w = \cos z$  не ограничены.

### 1.3.2. Линейные отображения

Отображения вида  $w = az + b$ , где  $a \neq 0$  и  $b$  — некоторые комплексные константы, называются *линейными*. Функция  $w = az + b$  осуществляет взаимно однозначное отображение всей плоскости ( $z$ ) на всю плоскость ( $w$ ):

$$w = az + b : C_z \rightarrow C_w, a \neq 0, z = \frac{1}{a}(w - b) : C_w \rightarrow C_z.$$

Обозначим  $a = ke^{i\varphi}$ . Линейное отображение сводится к наложению следующих трёх преобразований:

- 1)  $w_1 = ze^{i\varphi}$  — поворот плоскости на угол  $\varphi = \arg a$ ;
- 2)  $w_2 = kw_1$  — преобразование с коэффициентом подобия  $k = |a|$ ;
- 3)  $w = w_2 + b$  — параллельный перенос плоскости на вектор, соответствующий точке  $b$ .

Так как при всех этих преобразованиях прямая отображается в прямую, а окружность — в окружность, то линейное отображение обладает свойством сохранения прямых и окружностей. При этом любые два направления, исходящие из любой точки  $z_0$  под углом  $\varphi$ , отображаются в направления, исходящие из точки  $w_0 = az_0 + b$ , также под углом  $\varphi$ .

### 1.3.3. Уравнение образа кривой

Пусть в плоскости ( $z$ ) задана некоторая кривая  $\Gamma$  уравнением  $y = \varphi(x)$ . Поставим задачу: найти уравнение образа этой кривой при отображении  $w = f(z)$ .

Находим действительную и мнимую части функции  $w = f(z)$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Зная координаты точки  $(x_0, y_0)$  в плоскости ( $z$ ), пользуясь формулами (1.15), легко найти координаты  $u_0, v_0$  точки  $w_0 = f(z_0)$  в плоскости ( $w$ ):  $u_0 = u(x_0, y_0)$ ,  $v_0 = v(x_0, y_0)$ . Точки, лежащие на кривой  $y = \varphi(x)$ , перейдут в точки с координатами

$$\left. \begin{aligned} u &= u[x, \varphi(x)], \\ v &= v[x, \varphi(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Соотношения (1.16) представляют собой параметрические уравнения образа кривой  $\Gamma$  при отображении  $w = f(z)$ . Роль параметра играет переменная  $x$ . Если из (1.16) исключить параметр  $x$ , то получим искомое уравнение в виде  $v = v(u)$ .

Если кривая  $\Gamma$  задана параметрически:  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta,$

то её образ определяется уравнениями:  $\begin{cases} u = u[x(t), y(t)], \\ v = v[x(t), y(t)], \end{cases} \quad \alpha < t < \beta.$

*Пример 1.11.* Найти образ прямой  $x = 1$  при отображении  $w = e^z$ .

Решение. Находим  $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$ . Прямая  $x = 1$  отобразится в кривую  $\begin{cases} u = e \cos y, \\ v = e \sin y. \end{cases}$  Или  $u^2 + v^2 = e^2$  — окружность с центром в начале координат радиуса  $e$ .

### 1.3.4. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Как и в случае функций действительной переменной, определение предела функции при  $z \rightarrow z_0$  можно дать двумя способами: на языке последовательностей и на языке окрестностей.

*Определение 1.* Число  $w_0 \in C_w$  называется пределом функции  $f: D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w$ , если:

1) во всякой проколотой окрестности  $\dot{Q}(z_0)$  есть точки из  $D$  (т.е.  $z_0$  является предельной точкой для множества  $D$ );

2) для всякой последовательности  $\{z_n\}$  точек из  $D$ ,  $z_n \neq z_0$ , из сходимости  $\{z_n\}$  к  $z_0$  следует сходимость последовательности  $\{f(z_n)\}$  к  $w_0$ .

Пишут  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ .

*Определение 2.* Число  $w_0 \in C_w$  называется пределом функции  $f: D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w$  при  $z$  стремящемся к  $z_0$ , где  $z_0$  — предельная точка множества  $D$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любой точки  $z \in D$ ,  $0 < |z - z_0| < \delta$ , выполнено соотношение  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

Используя логические символы, сформулированные условия можно записать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D (0 < |z - z_0| < \delta) \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Эквивалентность этих двух определений доказывается аналогично действительному случаю.

Аналогично вещественному случаю, можно определить пределы  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Непосредственным следствием определения предела функции на языке последовательностей и теорем 1.2 и 1.3 являются следующие теоремы.

**Теорема 1.5.** Число  $w_0 = u_0 + iv_0$  является пределом функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  при  $z = x + iy \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0$ .

Обозначим  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ,  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ,  $w = u(x, y) + iv(x, y) = \rho(r, \varphi)e^{i\theta(r, \varphi)}$ ,  $w_0 = u_0 + iv_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ .

**Теорема 1.6.** Если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ , то при соответствующем выборе аргументов  $\lim_{r \rightarrow r_0, \varphi \rightarrow \varphi_0} \rho(r, \varphi) = \rho_0$ ,  $\lim_{r \rightarrow r_0, \varphi \rightarrow \varphi_0} \theta(r, \varphi) = \theta_0$

Обратное утверждение верно без всяких ограничений.

Теоремы о пределах функций, выражаемые равенствами, известные для действительного переменного, переносятся и на комплексные переменные.

**Определение 3.** Пусть функция  $f : D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w$  определена в предельной точке  $z_0$  множества  $D$ . Функция  $f$  называется *непрерывной* в точке  $z_0$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Теорема 1.7.** Если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  непрерывна в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$  и обратно.

Теорема является следствием теоремы 1.5.

Теоремы о непрерывных функциях действительного переменного имеют место и для функций комплексного переменного. Напомним некоторые из них.

**Теорема 1.8.** Функция  $w = f(z) : \bar{D} \subset C_z \rightarrow C_w$ , непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве  $\bar{D} \subset C_w$ , ограничена на  $\bar{D}$ , т.е. существует константа  $M$  такая, что при любых  $z \in \bar{D}$  справедливо  $|f(z)| < M$ .

**Теорема 1.9.** Модуль функции  $w = f(z) : \bar{D} \rightarrow C_w$ , непрерывной на замкнутом и ограниченном множестве  $\bar{D}$ , имеет наибольшее и наименьшее значения в  $\bar{D}$ .

## 1.4. Дифференцируемые функции комплексного переменного

### 1.4.1. Производная

Пусть дана непрерывная в точке  $z_0$  функция  $w = f(z)$ . Дадим числу  $z_0$  приращение  $\Delta z = z - z_0$  и рассмотрим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}. \quad (1.17)$$

Если предел (1.17) существует и конечен, то этот предел называется *производной* функции  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}. \quad (1.18)$$

Функция  $f$  называется *дифференцируемой* в точке  $z_0$ , если её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (1.19)$$

где функция  $\alpha(\Delta z)$  — бесконечно малая относительно  $\Delta z$  порядка выше первого, т.е.  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ , а  $A = \text{const}$ .

Докажем, что для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная  $f'(z_0)$ .

Пусть  $f$  дифференцируема в  $z_0$ , тогда имеет место равенство (1.19). Деля в нём обе части на  $\Delta z$  и переходя к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$ , получим, что  $f'(z_0)$  существует и при этом  $f'(z_0) = A$ , т.е.

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z). \quad (1.20)$$

Пусть существует конечная производная  $f'(z_0)$ . Из равенства (1.12) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < |\Delta z| < \delta$  выполняется неравенство  $\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ , следовательно,  $\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) = \varphi(\Delta z)$ , где  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi(\Delta z) = 0$ , т.е.

$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varphi(\Delta z)\Delta z$ , и мы пришли к равенству вида (1.13), следовательно, функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ .

Величину  $f'(z_0)\Delta z$  обозначают  $df = f'(z_0)dz$  и называют *дифференциалом* функции  $f$  в точке  $z_0$ .

#### 1.4.2. Условия дифференцируемости функции комплексного переменного

*Теорема 1.10.* Для того, чтобы функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  была дифференцируемой в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ ;
- 2) в точке  $(x_0, y_0)$  выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.21)$$

*Доказательство. Необходимость.* Пусть функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ , т.е.  $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)$ . Положим



$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ ,  $f'(z_0) = A + Bi$ ,  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ,  $\alpha(\Delta z) = \beta_1(\Delta x, \Delta y) + i\beta_2(\Delta x, \Delta y)$ . Получим

$$\Delta u + i\Delta v = (A + Bi)(\Delta x + i\Delta y) + \beta_1(\Delta x, \Delta y) + i\beta_2(\Delta x, \Delta y).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + \beta_1(\Delta x, \Delta y), \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + \beta_2(\Delta x, \Delta y). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Из очевидных неравенств

$$|\beta_1(\Delta x, \Delta y)| \leq |\alpha(\Delta z)|, \quad |\beta_2(\Delta x, \Delta y)| \leq |\alpha(\Delta z)|$$

следует, что величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — бесконечно малые при

$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$  порядка выше первого относительно

$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Теперь дифференцируемость функций  $u$  и

$v$  в точке  $(x_0, y_0)$  следует из соотношений (1.22). Из них же следуют

равенства  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Необходимость условий теоремы доказана.

*Достаточность.* Пусть выполнены условия пп. 1 и 2 теоремы.

Тогда справедливы равенства (1.22), где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — бесконечно малые

порядка выше первого относительно  $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .

Используя (1.22), находим  $\Delta f = \Delta u + i\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \beta_1(\Delta x, \Delta y) + i\beta_2(\Delta x, \Delta y)$ , или

$$\Delta f = (A + Bi)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (1.23)$$

где  $\alpha(\Delta z)$  — бесконечно малая величина порядка выше первого относительно  $\Delta z$ .

Мы пришли к условию вида (1.13), необходимому и

достаточному для дифференцируемости функции  $f(z)$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Как видим, условие дифференцируемости функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  не совпадает с условием дифференцируемости функции  $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ .

Дифференцируемые функции  $f(z)$  определяют некоторое подмножество среди множества дифференцируемых функций  $\varphi(x, y)$ .

Из равенств (1.23) и (1.14) следует, что  $f'(z_0) = A + Bi$ , поэтому

$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Если  $z = x + iy$  — любая точка, в

которой функция  $f(z)$  дифференцируема, то

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y + iv'_x = u'_x - iv'_y = v'_y - iu'_y.$$

*Пример 1.12.* Доказать, что функция  $w = e^z$  дифференцируема

на всей комплексной плоскости и что  $(e^z)' = e^z$ .

*Решение.* По определению функции  $e^z$  находим  $e^z = e^{x+iy} =$

$= e^x(\cos y + i \sin y)$ , т.е.  $u = e^x \cos y$ ,  $v = e^x \sin y$ . Функции  $u$  и  $v$

дифференцируемы на всей плоскости. Остаётся проверить выполнимость условий Коши-Римана:  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y. \quad \text{Условия Коши-Римана выполнены.}$$

$$\text{Находим } (e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

### 1.4.3. Эквивалентность условий Коши-Римана

и условия  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Пусть дана функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Переменные  $x$  и  $y$  легко выразить через  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ :  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

Поэтому  $f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$ , т.е. функцию

$f(z)$  формально можно рассматривать как функцию двух переменных  $z$  и  $\bar{z}$ . Найдём  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ . По правилу дифференцирования сложной

функции двух переменных получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость теоремы 1.11.

*Теорема 1.11.* Условия Коши-Римана и  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  эквивалентны.

Если  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , то  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}$ , а поэтому производные для дифференцируемых функций получаются формальным дифференцированием по переменной  $z$ . По этой причине все правила дифференцирования, известные из действительного анализа, переносятся и на комплексный случай.

*Пример 1.13.* Функция  $f(z) = z^n$  дифференцируема, поскольку вещественная и мнимая части её являются многочленами относительно переменных  $x$  и  $y$ , а потому дифференцируемы, а так как  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , то условия Коши-Римана выполнены. Находим  $\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} = n z^{n-1}$ .

Аналогично можно показать, что  $(\sin z)' = \cos z$ ,  $(\cos z)' = -\sin z$ ,  
 $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$  и т.д.

*Пример 1.14.* Функции  $f(z) = \bar{z} + z^2$ ,  $f(z) = z + \operatorname{Re} z$ ,  
 $f(z) = z^2 + \operatorname{Im} z$  не дифференцируемы ни в одной точке, так как  
для них  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$ , а потому не выполнены условия Коши-Римана.

## 1.5. Понятие аналитической функции

### 1.5.1. Простейшие свойства аналитических функций

Напомним, что областью  $D$  называется любое открытое множество. Через  $\bar{D}$  обозначают область  $D$ , дополненную её границей.

Функция  $f(z)$  называется *аналитической* в точке  $z_0$ , если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки  $z_0$ . Функция, аналитическая во всех точках некоторой области  $D$ , называется аналитической в области  $D$ .

Позднее докажем, что мнимая и вещественная части аналитической в области  $D$  функции имеют непрерывные частные производные всех порядков (см. теорему 2.9 и её следствие).

*Пример 1.15.* Функции  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $z^n$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} z$  аналитичны на всей плоскости, так как они дифференцируемы при любом  $z$ .

*Пример 1.16.* Функция  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  не является аналитической ни в какой точке, так как  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ , а поэтому не существует никакой точки, в окрестности которой выполнялись бы условия Коши-Римана  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , т.е. функция  $f(z) = z\bar{z}$  дифференцируема только в точке  $z = 0$ , но не аналитична ни в одной точке.

Отметим без доказательства некоторые из свойств аналитических функций.

1. Если  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  аналитичны в  $D$ , то их сумма и произведение также аналитичны в  $D$ , а частное  $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$  аналитично всюду в области  $D$ , где  $f_2(z) \neq 0$ .

2. Если  $w = f(z)$  аналитическая в области  $D$ , а в области её значений определена аналитическая функция  $t = \varphi(w)$ , то функция  $t = \varphi[f(z)]$  является аналитической в области  $D$ .

3. Если в окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0$  определена аналитическая функция  $f(z)$  такая, что  $f'(z_0) \neq 0$ , то в окрестности точки

$w_0 = f(z_0)$  определена единственная обратная функция  $z = \varphi(w)$ , аналитическая в этой окрестности, и  $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .

Из условия  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $f : D \subset C_z \rightarrow \Delta \subset C_w$  не следует единственность обратной функции. Например,  $(e^z)' = e^z$  на всей плоскости, но обратная функция для  $e^z$  не единственна. Свойство 3 носит локальный характер.

4. Если  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и не постоянна в  $D$ , то её модуль не достигает в  $D$  наименьшего значения. Если  $f(z)$  в  $D$  обращается в нуль, то модуль  $f(z)$  не достигает в  $D$  наибольшего значения. Если при этом  $f(z)$  непрерывна на границе области  $D$ , то  $|f(z)|$  достигает наибольшего и наименьшего значения на границе (принцип максимума модуля).

5. Если  $w = f(z) : C_z \rightarrow C_w$  аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости  $C_z$  функция, то  $f(z) = \text{const}$  (теорема Лиувилля).

### 1.5.2. Восстановление аналитической функции по её мнимой или действительной части

Пусть дана произвольная функция  $u(x, y)$  двух действительных переменных, имеющая непрерывные частные производные всех порядков. Выясним, какие из функций такого класса могут быть мнимой или вещественной частью аналитической функции.

Если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в области  $D$ , то для неё выполнены условия Коши-Римана:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Дифференцируя первое из этих равенств по  $x$ , а второе по  $y$ , получа-

ем  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ . Складывая эти равенства и учи-

тывая, что  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$  в силу непрерывности этих производных, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.24)$$

Аналогично показывается, что  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ .

Уравнение вида (1.24) называется *уравнением Лапласа*, а непрерывная в области  $D$  функция  $u(x, y)$ , имеющая непрерывные частные производные второго порядка, являющаяся его решением, называется *гармонической* в области  $D$  функцией.

Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции принадлежат к классу гармонических функций.

Две гармонические функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряжёнными*.

Мы показали, что мнимая и вещественная части аналитической функции являются гармоническими сопряжёнными.

Из теоремы 1.10 следует, что верно и обратное, т.е., что если функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  гармонические сопряжённые в  $D$ , то функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналитична в  $D$ .

Пусть задана в односвязной области  $D$  гармоническая функция  $u(x, y)$ , тогда, используя условия Коши-Римана, можно однозначно восстановить полный дифференциал её сопряжённой гармонической функции  $v(x, y)$ :  $dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ , а затем с точностью до константы и саму функцию.

Как известно, [6, с.59] функцию  $v$  можно восстановить по формуле

$$v(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (1.25)$$

где интеграл берётся по любой кусочно-гладкой кривой от точки  $A(x_0, y_0)$  до точки  $B(x, y)$ , лежащей в  $D$ . В качестве точки  $A(x_0, y_0)$  можно взять любую, в которой функция  $u(x, y)$  и её частные производные  $u'_x$  и  $u'_y$  непрерывны. Если в качестве пути интегрирования выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, то формулу (1.25) можно привести к одному из следующих видов (в тех случаях, когда эти звенья принадлежат  $D$ ):

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) dy + c, \\ v(x, y) &= \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy, - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) dx + c. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Этим самым мы восстановили аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  с точностью до константы.

Заметим, что если область  $D$  многосвязна, то интеграл (1.19) может определять многозначную функцию  $v(x, y)$ .

*Пример 1.17.* Доказать, что функция

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0,$$

гармоническая. Считая, что  $u = \operatorname{Re} f(z)$ , найти аналитическую функцию  $f(z)$ .

Решение. Находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} &= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , т.е. функция

$u(x, y)$  гармоническая. Получаем  $dv = \frac{2xy dx}{(x^2 + y^2)^2} +$

$\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) dy$ . В качестве точки  $A$  мож-

но выбрать точку  $(0; 1)$ . По формуле (1.26) находим  $v =$

$$\int_0^x \frac{y d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \int_1^y \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy + c,$$

$$f(z) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) + c = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + c,$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + c.$$

### 1.5.3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть задана аналитическая в точке  $z_0$  функция  $f(z)$ , причём  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда, как мы отметили в пункте 1.4.1, её приращение можно представить в виде

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \quad (1.27)$$

где  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ , т.е. величина  $\alpha(\Delta z)$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  есть бесконечно малая порядка выше первого относительно  $\Delta z$ .

Преобразуем равенство (1.27), положив  $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ ,  $\Delta z = z - z_0$ . Получим  $f(z) = f'(z_0)z + f(z_0) - z_0 f'(z_0) + \alpha(\Delta z)$ . Обозначим  $f'(z_0) = a$ ,  $f(z_0) - z_0 f'(z_0) = b$ . Тогда

$$f(z) = az + b + \alpha(\Delta z). \quad (1.28)$$

Таким образом, если функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ , то она отличается от линейной функции  $w = az + b$  на бесконечно малую функцию  $\alpha(\Delta z)$  порядка выше первого относительно  $\Delta z$ . Следовательно, в достаточно малой окрестности точки  $z_0$  отображение, осуществляемое дифференцируемой функцией с неравной нулю производной с точностью до бесконечно малых порядков выше первого относительно  $\Delta z$ , обладает свойствами линейного отображения (см. п.1.3.2). Это линейное отображение зависит только от выбора точки  $z_0$ .

Отсюда следует, что отображение  $f(z)$  достаточно малой окрестности точки  $z_0$  сводится к повороту на угол  $\varphi$ , равный  $\arg f'(z_0)$ , и к преобразованию подобия с коэффициентом подобия  $k = |f'(z_0)|$ . В этом и заключается геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Если в плоскости  $(z)$  возьмём два направления  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , исходящие из точки  $z_0$  под углом  $\psi$ , то при отображении  $f(z)$  они перейдут в направления  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , исходящие из  $w_0 = f(z_0)$  также под углом  $\psi$ . Это свойство отображения называется *свойством сохранения углов*. Из (1.28) также следует, что любая дуга, проходящая через  $z_0$ , при отображении изменится по длине в  $|f'(z_0)|$  раз. Это свойство называется *свойством сохранения коэффициента растяжения*.

Подчеркнём, что в другой точке отображение  $f(z)$  будет связано с другим линейным отображением, т.е. угол поворота  $\varphi$  и коэффициент растяжения  $k$  зависят от выбора точки  $z_0$ . Отображение, обладающее свойством сохранения углов и свойством сохранения коэффициента растяжения, называется *конформным*.

Мы показали, что отображение, осуществляемое аналитической функцией, конформно.

## 2. Интегральное представление аналитических функций

### 2.1. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть в плоскости  $C_z$  задана гладкая или кусочно-гладкая кривая  $AB$  конечной длины. Если кривая замкнута, то  $A = B$ . Установим положительное направление на кривой, считая точку  $A$  первой, если кривая  $AB$  не замкнута. Если же кривая замкнута, то положительным направлением обхода будем считать движение против часовой стрелки.

Предположим, что на  $AB$  определена непрерывная ограниченная функция  $f(z)$ . Точками  $A = z_0, z_1, z_2, \dots, B = z_n$  кривую  $AB$  разобьём на  $n$  элементарных дуг  $z_{m-1}z_m$ . Нумерация точек производится в направлении от точки  $A$  к  $B$ . Обозначим  $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ , ( $m = 1, 2, \dots, n$ ). На каждой дуге  $z_{m-1}z_m$  выберем по одной точке  $t_m$  и образуем сумму

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^n f(t_m) \Delta z_m, \quad (2.1)$$

называемую *интегральной суммой* Римана для  $f(z)$  и кривой  $AB$ . Предел этой суммы, если он не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от способа выбора точек  $t_m$ , при условии, что  $\lambda \rightarrow 0$ , где  $\lambda = \max |\Delta z_m|$ , называется *интегралом* от функции  $f(z)$  по кривой  $AB$  и обозначается

$$\int_{AB} f(z) dz. \quad (2.2)$$

При этом функция  $f(z)$  называется *интегрируемой* по кривой  $AB$ . Для интегрируемых по кривой  $AB$  функций непосредственно из определения интеграла следуют нижеперечисленные свойства:

- 1)  $\int_{AB} [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_{AB} f_1(z) dz \pm \int_{AB} f_2(z) dz$ ;
- 2)  $\int_{AB} \alpha f(z) dz = \alpha \int_{AB} f(z) dz$ ,  $\alpha = const$ ;
- 3)  $\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz$ ;
- 4)  $\left| \int_{AB} \varphi(z) dz \right| \leq \int_{AB} |\varphi(z)| ds$ ,  $ds$  — дифференциал длины дуги;
- 5)  $\int_{AB} f(z) dz = \int_{AA_1} f(z) dz + \int_{A_1A_2} f(z) dz + \dots + \int_{A_{n-1}B} f(z) dz$ ;



6) если во всех точках дуги  $AB$  выполняется  $|f(z)| < M$  ( $M = \text{const}$ ), то  $\left| \int_{AB} f(z) dz \right| \leq Ml$ , где  $l$  — длина кривой  $AB$ . Легко показать, что для интеграла (2.2) справедлива формула:

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{AB} v(x, y) dx + u(x, y) dy, \quad (2.3)$$

где  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ .

Мы свели вычисление интеграла  $\int_{AB} f(z) dz$  к вычислению криволинейных интегралов второго рода от действительных функций.

Интеграл  $\int_{AB} f(z) dz$  существует тогда и только тогда, когда существуют в соотношении (2.3) все интегралы справа, для чего достаточно непрерывности функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  и кусочной гладкости кривой  $AB$  (это доказано в теории криволинейных интегралов).

*Пример 2.1.* Вычислить интеграл  $I = \int_{AB} z \cdot \operatorname{Re} z dz$ , где  $AB$  — часть параболы  $y = 2x^2$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 2)$ .

Решение. Используя формулу (2.3), находим, что

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} x^2 dx - xy dy + i \int_{AB} x^2 dy + xy dx = \int_0^1 x^2 dx - 8 \int_0^1 x^4 dx + \\ &+ i \int_0^1 4x^3 dx + i \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{3} - \frac{8}{5} + i \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{19}{15} + \frac{3}{2} i. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались правилами вычисления криволинейных интегралов второго рода от действительных функций.

Если кривая  $AB$  задана параметрически:  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 < t < t_2$ , то в комплексной форме эту кривую можно записать в виде  $z(t) = x(t) + iy(t) : [t_1, t_2] \rightarrow C_z$ . Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  предполагаются дифференцируемыми. Из формулы (2.3) легко получить, что

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)] z'(t) dt. \quad (2.4)$$

*Пример 2.2.* Вычислить  $I = \oint_C \frac{dz}{z-a}$ , где  $C$  — окружность  $|z-a| = R$ , пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. Данную окружность параметрически можно задать в виде  $z(t) = a + Re^{it}$ ,  $0 < t < 2\pi$ . По формуле (2.4) находим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

*Пример 2.3.* Вычислить  $I = \oint_C (z - a)^n dz$ , где  $n$  — целое,  $n \neq -1$ ,

$C: |z - a| = R$  или  $z(t) = a + Re^{it}$ ,  $0 < t < 2\pi$ .

Решение.

$$\begin{aligned} I &= i \int_0^{2\pi} R^n e^{int} Re^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = iR^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{(n+1)i} \right|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi i(n+1)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

## 2.2. Интеграл от аналитических функций

### 2.2.1. Теорема Коши для односвязной области.

#### Независимость интеграла от пути интегрирования

В общем случае интеграл  $\int_{AB} f(z) dz$  зависит от формы пути, а не только от начальной и конечной точки. Выясним условия, при которых интеграл от формы пути не зависит. Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

*Теорема 2.1.* Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то интеграл от этой функции вдоль всякого замкнутого кусочно-гладкого контура  $C$ , целиком лежащего в  $D$ , равен нулю.

*Доказательство.* Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — аналитическая в области  $D$  функция. Напомним, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  имеют в этой области непрерывные частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial v}{\partial y}$ . Через  $C$  обозначим любой замкнутый контур, целиком лежащий в  $D$ . Имеем

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy. \quad (2.5)$$

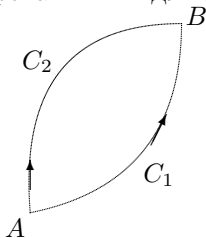
Из условий Коши-Римана следует  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Этими усло-

вий и непрерывности функций  $u, v, u'_x, v'_x, u'_y, v'_y$  достаточно для обращения интегралов в соотношении (2.5) в нуль [6, с.57-64].

*Замечание.* Справедливо утверждение, в некотором смысле обратное теореме 2.1, а именно, если  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $D$  и для всякого кусочно-гладкого контура  $\Gamma$ , лежащего в  $D$ , выполняется условие  $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$ , то  $f(z)$  аналитична в  $D$  (теорема Морера).

Морера).

*Теорема 2.2.* Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то интеграл  $I = \int_{AB} f(z)dz$  не зависит от формы пути интегрирования  $AB$  для любых точек  $A$  и  $B$  из  $D$ .



Действительно, если дуги  $C_1$  и  $C_2$  имеют общую начальную точку  $A$  и общую конечную точку  $B$ , то

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

по теореме 2.1. Отсюда

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Если интеграл не зависит от формы пути  $AB$ , то используют обозначение  $\int_{AB} f(z)dz = \int_A^B f(z)dz$ .

Подчеркнём, что интегралом  $\int_A^B f(z)dz$  обозначают интеграл по любой кривой с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$  от функции  $f(z)$ .

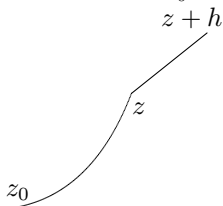
### 2.2.2. Существование первообразной для аналитической функции. Формула Ньютона-Лейбница

В этом пункте мы покажем, что формула Ньютона-Лейбница для вычисления определённых интегралов от действительных функций может быть при некоторых предположениях применена и в случае функций комплексного переменного. Предварительно докажем существование первообразной функции  $F(z)$  для аналитической функции.

*Теорема 2.3.* Всякая аналитическая в односвязной области  $D$  функция  $f(z)$  имеет в этой области первообразную функцию  $F(z)$ :  $F'(z) = f(z)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ . Тогда по теореме 2.2 интеграл не зависит от формы пути, а зависит только от начальной и конечной точки в этой области. Поэтому интеграл по кривой, соединяющей фиксированную точку  $z_0$  с переменной точкой  $z$ , зависит только от  $z$ , т.е. является функцией от  $z$ .

Обозначают  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$ . Покажем, что  $F'(z) = f(z)$ .



Дадим точке  $z$  приращение  $h$ . В качестве пути, соединяющего точки  $z$  и  $z+h$ , выберем прямолинейный отрезок. Можем

записать  $f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi$ , так как

$$\int_z^{z+h} d\xi = h, \text{ что следует из}$$

определения интеграла. Находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z)d\xi \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\xi) - f(z)]d\xi \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)|ds, \end{aligned}$$

где  $ds$  — дифференциал длины дуги.

Поскольку функция  $f(z)$  непрерывна, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что при  $|\xi - z| < \delta$  будет выполняться  $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ . Теперь будем иметь при  $|h| < \delta$  (тогда и по-давно  $|\xi - z| < \delta$ )  $\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon|h| = \varepsilon$ , т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \text{ Следовательно, } F'(z) = f(z).$$

Следующие две простые теоремы предлагается доказать самостоятельно.

*Теорема 2.4.* Если  $f(z)$  аналитична и  $f'(z) = 0$  в некоторой области  $D$ , то в этой области  $f(z) = const$ .

*Теорема 2.5.* Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

*Неопределённым интегралом* от аналитической функции  $f(z)$  называется совокупность всех первообразных от неё. Обозначают  $\int f(z)dz$ . Из теорем 2.3 и 2.5 следует, что  $\int f(z)dz = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + c$ .

**Теорема 2.6.** Если  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$  и  $z_1$  и  $z_2$  — любые две точки из  $D$ , то справедлива формула Ньютона-Лейбница  $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$ , где  $F(z)$  — любая первообразная для  $f(z)$ , а слева стоит интеграл от  $f(z)$  по любой кривой, соединяющей точки  $z_1$  и  $z_2$ .

*Доказательство.* Функция  $F(z) = \int_{z_1}^z f(\xi)d\xi + c$  является первообразной для  $f(z)$ . Находим  $F(z_1) = c$ ,  $F(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi + c = \int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi + F(z_1)$ . Отсюда  $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$ .

**Пример 2.4.** Вычислить интеграл  $I = \int_{AB} \sin z dz$  по любой кривой, соединяющей точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = i$ .

*Решение.* Так как  $\sin z$  аналитическая в односвязной области функция, то применима формула Ньютона-Лейбница  $I = \int_1^i \sin z dz = -\cos z \Big|_1^i = -\cos i + \cos 1 = \cos 1 - \operatorname{ch} 1$ .

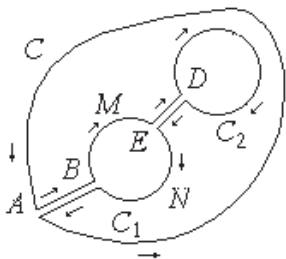
### 2.2.3. Теорема Коши для многосвязной области

В этом пункте рассмотрим случай интеграла по замкнутому контуру в многосвязной области.

**Теорема 2.7.** Пусть  $C$  — простой замкнутый кусочно-гладкий контур и  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — контуры, лежащие внутри  $C$  и вне друг друга. Если  $f(z)$  аналитична в области, заключённой между контуром  $C$  и контурами  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , и на всех этих контурах, то  $\oint_C f(z)dz = \sum_{m=1}^n \oint_{C_m} f(z)dz$ . (Здесь и далее обход замкнутых контуров происходит против часовой стрелки.)

*Доказательство.* Ограничимся случаем  $n = 2$ . Проведём разрезы  $AB$  и  $ED$ . В результате область станет односвязной. По теореме 2.1

$$\begin{aligned} & \text{имеем } \oint_C f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{BME} f(z)dz + \int_{ED} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz + \\ & + \int_{DE} f(z)dz + \int_{ENB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0. \end{aligned}$$



Так как

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0,$$

$$\int_{ED} f(z)dz + \int_{DE} f(z)dz = 0,$$

$$\begin{aligned} & \text{а } \int_{BME} f(z)dz + \int_{ENB} f(z)dz = \\ & = - \oint_{C_1} f(z)dz, \end{aligned}$$

то

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Отсюда  $\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$ . Теорема доказана.

### 2.3. Интегральная формула Коши

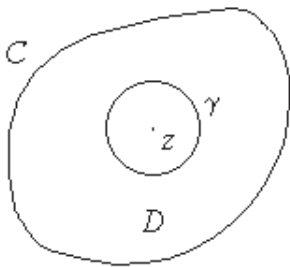
В этом разделе будет установлена формула, показывающая, что значение аналитической функции в области  $D$  полностью определяется её значениями на границе области.

*Теорема 2.8.* Пусть область  $D$  ограничена кусочно-гладким контуром  $C$ . Если функция  $f(z)$  аналитична в  $D$  и на контуре  $C$ , то имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad (2.6)$$

где  $z$  — любая точка внутри области  $D$ . Формулу (2.6) называют *интегральной формулой Коши*.

*Доказательство.* Вычислим интеграл  $I = \oint_C \frac{dt}{t-z}$ . Если точка  $z$  лежит вне контура  $C$ , то  $I = 0$ , так как функция  $f(t) = \frac{1}{t-z}$  в этом случае аналитична в области, ограниченной контуром  $C$ . Пусть



$z \in D$ . Рассмотрим окружность  $\gamma : |\xi - z| = \rho$  с центром в точке  $z$ , которая вместе с ограниченным ею кругом включена в  $D$ . По теореме Коши для двухсвязной области находим  $\oint_C \frac{dt}{t-z} = \oint_\gamma \frac{dt}{t-z}$ , но как нами показано ранее (см. пример 2.3)  $\oint_\gamma \frac{dt}{t-z} = 2\pi i$ , поэто-

му  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dt}{t-z} = 1$ . Следовательно,

$$f(z) = f(z) \cdot 1 = f(z) \cdot \left[ \oint_C \frac{dt}{t-z} \right] \frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dt}{t-z},$$

если  $z$  лежит внутри  $C$ .

Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t-z}$ , аналитичную внутри контура  $C$  и на нём, за исключением точки  $z$ . Но при  $t \rightarrow z$  функция  $\varphi(t)$  стремится к  $f'(z)$ . Доопределим  $\varphi(t)$  в точке  $z$  равенством  $\varphi(z) = f'(z)$ . Теперь функция  $\varphi(t)$  непрерывна в  $\bar{D}$ , а потому ограничена, т.е.  $|\varphi(t)| < M < \infty$ .

Если  $\gamma$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $z$ , целиком лежащая внутри  $C$ , то функция  $\varphi(t)$  аналитична в двухсвязной области между контурами  $C$  и  $\gamma$ . По теореме Коши для многосвязной области  $\oint_C \varphi(t)dt = \oint_\gamma \varphi(t)dt$ , причём  $\left| \oint_\gamma \varphi(t)dt \right| < 2\pi\rho M$ .

Величина интеграла  $I = \oint_\gamma \varphi(t)dt$  не зависит от величины  $\rho$ , так как она равна  $\oint_C \varphi(t)dt$ , но при  $\rho \rightarrow 0$  и  $I \rightarrow 0$ . Это возможно лишь в случае, когда  $I = \oint_\gamma \varphi(t)dt = 0$ . Следовательно,  $\oint_C \varphi(t)dt = 0$ , т.е.

$\oint_C \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt = 0$ . Так как интеграл  $\oint_C \frac{f(z)dt}{t-z} = 2\pi i f(z)$  существует, то существует и интеграл  $\oint_C \frac{f(t)dt}{t-z}$ , и при этом имеет место

равенство этих интегралов, т.е.  $\oint_C \frac{f(t)dt}{t-z} = 2\pi i f(z)$ . Формула (2.6)

доказана.

Интегральная формула Коши находит применение во многих теоретических вопросах. Её можно применять для вычисления некоторых интегралов по замкнутому контуру.

*Пример 2.5.* Вычислить  $I = \oint_C \frac{t^3 dt}{t-2i}$ , где  $C$  — любой контур,

содержащий внутри точку  $2i$ .

Решение. По формуле (2.6) получаем  $\oint_C \frac{t^3 dt}{t-2i} = z^3 2\pi i \Big|_{z=2i} = 16\pi$ .

*Пример 2.6.* Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2,5} \frac{e^z dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ .

Решение. Так как  $1 < 2,5$ ,  $2 < 2,5$ ,  $3 > 2,5$ , то точки  $z = 1$  и  $z = 2$  лежат внутри окружности  $|z| = 2,5$ , а точка  $z = 3$  не лежит. Проведём две окружности  $C_1$  и  $C_2$  с центрами в точках  $z = 1$  и  $z = 2$  соответственно, не имеющих общих точек и не содержащих внутри себя точки  $z = 3$ , лежащие внутри окружности  $|z| = 2,5$ .

По теореме Коши для многосвязной области и по формуле Коши

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{e^z dz}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{e^z dz}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \oint_{C_1} \left[ \frac{e^z}{(z-2)(z-3)} / (z-1) \right] dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left[ \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} / (z-2) \right] dz =$$

$$= \frac{e^z}{(z-2)(z-3)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} \Big|_{z=2} = 0,5e - e^2.$$

## 2.4. Производные высших порядков от аналитической функции

Пусть дана некоторая кусочно-гладкая спрямляемая кривая  $C$  и на ней задана непрерывная функция  $f(z)$ . Интеграл вида  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{t-z}$ , где  $z$  — любая точка вне кривой  $C$ , называется интегралом типа Коши.

*Теорема 2.9.* Функция  $F(z)$ , определённая интегралом типа Ко-



ши, аналитична в любой конечной точке  $z$ , не лежащей на кривой  $C$ . Она обладает производными всех порядков, причём

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}. \quad (2.7)$$

*Доказательство.* Ограничимся случаем  $n = 1$ , т.е. докажем, что  $F(z)$  — аналитическая функция и  $F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$ . Для этого

$$\text{оценим разность } \Delta = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2} - \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2} - \frac{1}{h} \int_C \frac{f(t)dt}{t-z-h} + \frac{1}{h} \int_C \frac{f(t)dt}{t-z} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{h(t-z-h)} + \frac{1}{h(t-z)} \right| |f(t)||dt| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|h||f(t)|ds}{|t-z-h||t-z|^2}, \quad ds - \text{дифференциал длины дуги кривой.}$$

Обозначим через  $2d$  минимум расстояния между  $z$  и точками  $t$  кривой  $C$  и будем считать  $|h| < d$ . Тогда для всех точек кривой  $C$  имеем  $|t-z| \geq 2d$ ,  $|t-z-h| \geq |t-z| - |h| > 2d - d = d > 0$ .

Теперь, так как  $|f(t)| < M < \infty$  в силу непрерывности  $f(t)$ , имеем

$$\Delta < \frac{M\mathcal{L}}{8\pi d^3} \cdot |h|, \quad \mathcal{L} - \text{длина кривой } C. \text{ Отсюда следует, что } \Delta \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$h \rightarrow 0, \text{ т.е. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}.$$

Применяя метод математической индукции, можно доказать справедливость формулы (2.7) при любом  $n$ .

*Следствие.* Любая аналитическая в замкнутой области  $\bar{D}$  функция  $f(z)$  обладает внутри этой области производными всех порядков, причём эти производные можно представить формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad (2.8)$$

где  $C$  — граница области  $D$ .

Действительно, в формуле Коши  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{t-z}$  стоит частный случай интеграла типа Коши, а потому существование всех

производных и справедливость формулы (2.8) следуют из теоремы 2.9.

*Пример 2.7.* Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=4} \frac{\sin 3t dt}{(t-2)^2}$ .

Решение. По формуле (2.8) при  $n = 1$ ,  $z = 2$  находим

$$I = (\sin 3z)' \Big|_{z=2} = 3 \cos 6.$$

*Пример 2.8.* Вычислить интеграл  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{t^5 dt}{(t+2)^4}$ , где  $C$  — любой контур, содержащий внутри точку  $z = -2$ .

Решение.  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{t^5 dt}{(t+2)^4} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dz^3} \cdot z^5 \Big|_{z=-2} = 40.$

*Пример 2.9.* Вычислить интеграл  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=6} \frac{\sin z dz}{(z-2)(z-4)^2}$ .

Решение. Точки  $z = 2$  и  $z = 4$  лежат внутри окружности  $|z - 1| = 6$ . По теореме Коши для многосвязной области можем записать  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[ \frac{\sin z}{(z-4)^2} / (z-2) \right] dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left[ \frac{\sin z}{z-2} / (z-4)^2 \right] dz,$

где  $C_1$  и  $C_2$  — контуры, лежащие внутри окружности  $|z - 1| = 6$ , и содержащие внутри себя точки  $z = 2$  и  $z = 4$  соответственно. В области, ограниченной контуром  $C_1$ , аналитична функция  $f_1(z) = \frac{\sin z}{(z-4)^2}$ , а контуром  $C_2$  — функция  $f_2(z) = \frac{\sin z}{z-2}$ . По формулам (2.6) и (2.8) получаем, что

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin z}{(z-4)^2} \Big|_{z=2} + \left( \frac{\sin z}{z-2} \right)' \Big|_{z=4} = \frac{\sin 2}{4} + \\ &= \frac{(z-2) \cos z - \sin z}{(z-2)^2} \Big|_{z=4} = \\ &= \frac{\sin 2 + 2 \cos 4 - \sin 4}{4}. \end{aligned}$$

### 3. Представление функций рядами

В этом разделе мы познакомимся с важнейшими понятиями математического анализа — числовыми и функциональными рядами, обобщающими понятие суммы на бесконечное число слагаемых. Ряды дают новый, широко используемый в теоретических и прикладных исследованиях способ описания функциональных зависимостей.

#### 3.1. Числовые ряды

##### 3.1.1. Основные понятия

Пусть дана последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (3.1)$$

комплексных или вещественных чисел.

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.2)$$

называется *числовым рядом*. Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  называют *членами ряда*. Функциональную зависимость члена ряда от его номера называют *общим членом ряда*. Например, для ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{i}{n^2+11} \right)$  общий член  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{i}{n^2+11}$ . Зная об-

щий член, легко найти значение любого члена ряда, например, для данного ряда  $a_{10} = \frac{1}{11} + \frac{i}{111}$ .

По заданной последовательности (3.1) построим другую последовательность:  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ ,  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ , ...,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , ... Число  $S_n$  называется *n-й частичной суммой* ряда (3.2), а последовательность

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (3.3)$$

называется последовательностью частичных сумм этого ряда.

Говорят, что ряд сходится и его сумма равна  $S$ , если существует конечный предел последовательности его частичных сумм (3.3), равный  $S$ , т.е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (3.4)$$

Если же предел (3.4) не существует или равен  $\infty$ , то говорят, что ряд (3.2) расходится.

*Пример 3.1.* Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots \quad (a)$$

Решение. Заметим, что члены ряда (а) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q$ . Если  $q = 1$ , то  $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , и ряд (а) при  $q = 1$  расходится. Если же  $q \neq 1$ , то получаем

$$\begin{aligned} S_n(1 - q) &= (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})(1 - q) = \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - q - q^2 - \dots - q^{n-1} - q^n = 1 - q^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$ . Отыскание  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

сводится к отысканию  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ . Положим  $q = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $q^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ , где  $r = |q|$ . Видим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  при  $r = |q| < 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  не существует или равен  $\infty$  при  $r = |q| \geq 1$ .

Таким образом, ряд (а) сходится при  $|q| < 1$  к числу  $S = \frac{1}{1 - q}$  и расходится, если  $|q| \geq 1$ .

*Пример 3.2.* Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .

Решение. Можем записать  $a_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ . Отсюда получаем  $S_1 = \ln 2$ ,  $S_2 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$ ,  $S_3 = \ln 4$ ,  $\dots$ ,  $S_n = \ln(n+1)$ ,  $\dots$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ , то данный ряд расходится.

*Пример 3.3.* Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + (4/3)n - 5/9}$ , исходя из определения.

Решение. Разлагая на элементарные дроби, получаем

$$\frac{2}{n^2 + (4/3)n - 5/9} = \frac{1}{n - 1/3} - \frac{1}{n + 5/3}.$$

Следовательно,  $S_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{8}$ ,  $S_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} + \frac{3}{5} - \frac{3}{11}$ ,  $S_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} + \frac{3}{5} - \frac{3}{11} + \frac{3}{8} - \frac{3}{14} = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{11} - \frac{3}{14}$ ,  $S_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{14} - \frac{3}{17}$ ,  $\dots$ ,  $S_n = \frac{21}{10} - \frac{3}{3n+2} - \frac{3}{3n+5}$ ,  $n = 3, 4, \dots$ ,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{21}{10} - \frac{3}{3n+2} - \frac{3}{3n+5} \right) = \frac{21}{10}.$$

### 3.1.2. Признаки сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов

В приближённых вычислениях часто сумму ряда заменяют его частичной суммой. Но при этом за счёт увеличения числа членов можно обеспечить достаточную точность лишь для сходящихся рядов. Поэтому важной является задача о сходимости или расходимости ряда.

Пусть дан ряд (3.2):  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Положим  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ . По определению будем считать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ . Таким образом, задание ряда с комплексными членами равносильно заданию двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \quad (3.5)$$

с вещественными членами.

*Теорема 3.1.* Для того, чтобы ряд (3.2) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды (3.5).

Действительно, частичную сумму  $S_n$  ряда (3.2) можно представить в виде  $S_n = \sigma_n + i\tau_n$ , где  $\sigma_n, \tau_n$  — частичные суммы рядов (3.5). Но последовательность  $\{S_n\}$  сходится к числу  $\alpha + i\beta$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \beta$ , т.е. когда сходятся ряды (3.5).

Как видим, изучение рядов с комплексными членами сводится к исследованию рядов с вещественными членами.

Наиболее общий критерий сходимости ряда следует из критерия Коши сходимости числовых последовательностей (см. теорему 1.4).

*Теорема 3.2* (критерий Коши). Для того, чтобы числовой ряд (3.2) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовал номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что неравенство  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$  имело бы место при любых  $n > N$  и любом  $p \geq 1$ .

Действительно, чтобы последовательность  $\{S_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы  $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ .

*Пример 3.4.* Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  расходится (этот ряд называют гармоническим).

Решение. Для гармонического ряда находим  $|S_{2n} - S_n| =$   
 $= \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{m} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}$ , следовательно, для

этого ряда не выполнен критерий Коши при  $p = n$ , т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$   
 расходится.

*Теорема 3.3* (необходимый признак сходимости). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   
 сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3.6)$$

Условие (3.6) следует из критерия Коши при  $p = 1$ .

Заметим, что условие (3.6) лишь необходимо, но недоста-  
 точно для сходимости ряда. Так, например, общий член ряда  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  стремится к нулю, но, как показано в примере 3.2,  
 этот ряд расходится. То же самое можно сказать и о гармоническом  
 ряде. Условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad (3.7)$$

является достаточным для расходимости ряда, т.е. если выполнено  
 условие (3.7), то ряд расходится. Например, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  расходится,  
 так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  не существует.

Отметим некоторые свойства сходящихся рядов, вытекающие из  
 определения сходимости и свойств числовых последовательностей.

Ряд  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ , полученный из данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  отбрасыванием  
 первых  $m$  его членов, называется  *$m$ -м остатком* данного ряда.

*Свойство 1.* Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится  
 любой из его остатков, т.е. отбрасывание конечного числа членов  
 ряда не влияет на его сходимость.

*Доказательство.* Пусть  $\{S_n\}$  — последовательность частичных  
 сумм данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;  $\{\sigma_n\}$  — последовательность частичных  
 сумм его  $m$ -го остатка;  $A_m$  — сумма отброшенных членов. Тогда  
 $S_{n+m} = \sigma_n + A_m$ . Отсюда следует, что последовательности  $\{S_{n+m}\}$  и  
 $\{\sigma_n\}$ , а потому ряд и его остаток сходятся или расходятся одновре-  
 менно.

*Свойство 2.* Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся к числам  $S$  и  $\sigma$  соответственно, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  также сходится, и его сумма равна  $\alpha S + \beta \sigma$  (здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные константы).

*Доказательство.* Если  $S_n$  и  $\sigma_n$   $n$ -е частичные суммы рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  соответственно, то  $\alpha S_n + \beta \sigma_n$  будет  $n$ -й частичной суммой ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha S_n + \beta \sigma_n) = \alpha S + \beta \sigma$ , что следует из теоремы о пределе линейной комбинации последовательностей. Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  сходится и его сумма равна  $\alpha S + \beta \sigma$ .

Если в доказанном свойстве положить  $\beta = 0$ , то придём к выводу, что все члены сходящегося ряда можно умножить на некоторое число, при этом сходимость не нарушится, а сумма ряда умножится на это число.

*Свойство 3* (сочетательное свойство сходящихся рядов). Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то члены этого ряда можно, не переставляя, объединять в одно слагаемое произвольным образом, причём сумма полученного ряда также будет равна  $S$ .

*Доказательство.* Объединяя некоторые члены ряда в группы, получим новый ряд

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots \quad (3.8)$$

Последовательность частичных сумм  $S'_n$  ряда (3.8) будет некоторой подпоследовательностью последовательности частичных сумм  $S_n$  исходного ряда. Но, если последовательность сходится, то и любая её подпоследовательность тоже сходится, и к тому же числу. Следовательно, ряд (3.8) сходится к  $S$ .

Свойство конечных сумм — от перемены мест слагаемых сумма не изменится — для рядов, т.е. для бесконечного числа слагаемых, в общем случае не выполняется. Покажем это на примере.

*Пример 3.5.* Доказать, что перестановка бесконечного числа членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  меняет его сумму.

Решение. В п. 3.1.11 мы докажем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  сходится.

В п. 3.3.2 показано, что сумма этого ряда равна  $\ln 2$ , т.е.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots \quad (a)$$

Переставим члены ряда (а) так, чтобы за каждым положительным членом следовало два отрицательных. В результате получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \quad (б)$$

Если бы ряд (б) оказался расходящимся, то невозможность перестановки членов ряда была бы доказана, так как ряд (а) сходится. Предположим, что ряд (б) сходится. Объединим его члены следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}\right) - \frac{1}{4k} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots\right) = \frac{1}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

т.е. перестановка членов ряда изменила его сумму.

### 3.1.3. Абсолютная и условная сходимость

Как следует из только что рассмотренного примера, сходящиеся ряды не обладают свойствами конечных сумм. Возникает вопрос о выяснении условий, при выполнении которых с рядами можно обращаться как с конечными суммами. Таким условием является абсолютная сходимость.

*Определение.* Ряд (3.2):  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (3.9)$$

Говорят, что ряд (3.2) сходится *условно*, или *неабсолютно*, если ряд (3.2) сходится, а ряд (3.9) расходится.



Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  сходится условно, так как этот ряд сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , составленный из модулей его членов, расходится.

*Теорема 3.4.* Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда.

*Доказательство.* Так как ряд (3.9) сходится, то для него выполнен критерий Коши, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N$  и любом  $p$  выполняется неравенство  $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ , но  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|$ . Поэтому критерий Коши выполнен и для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , следовательно, он

сходится. Мы показали, что если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ , то

сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)$  и притом абсолютно.

*Теорема 3.5.* Если ряд (3.2) сходится абсолютно и его сумма равна  $S$ , то при любой перестановке его членов вновь полученный ряд сходится и к той же сумме  $S$ .

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится, то по критерию Коши для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N$  и любом  $p$  выполняется

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Найденное  $N$  зафиксируем. Переставляя произвольным образом члены данного ряда, получим новый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n. \quad (3.11)$$

Члены  $a'_n$  ряда (3.11) входят и в исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , но только с другими номерами. Пусть  $a'_1 = a_{k_1}$ ,  $a'_2 = a_{k_2}$ ,  $\dots$ ,  $a'_n = a_{k_n}$ . Здесь

$k_1, k_2, \dots, k_n$  — номера членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , поставленных на первые  $n$  мест в ряде (3.11). Частичные суммы ряда (3.2) будем обозначать  $S_n$ , а ряда (3.11) —  $S'_n$ . Выберем число  $n$  настолько большим, чтобы множество  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  содержало все числа  $1, 2, \dots, N$ . Обозначим  $m = \max(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Тогда частичная сумма  $S'_n$  отличается от  $S_n$  на некоторое число слагаемых (быть может не всех), номера которых больше  $N$  и не превышают  $m$ , следовательно,

$$|S_n - S'_n| \leq \sum_{k=N+1}^m |a_k| < \varepsilon, \quad (3.12)$$

как это следует из (3.10). Но (3.12) означает, что  $S_n$  и  $S'_n$  имеют общий предел. Теорема доказана.

Как мы видели (см. пример 3.5), условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают. Более того, Риманом доказано (для рядов с вещественными членами), что если ряд сходится условно, то какое бы ни взять вещественное число  $\mathcal{L}$ , конечное или нет, можно так переставить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел сумму, равную  $\mathcal{L}$ .

Ранее мы показали, что сходящиеся ряды можно, как и конечные суммы, складывать почленно. Несколько сложнее дело обстоит с произведением рядов.

Пусть даны два ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Из всевозможных произведений  $a_i b_k$  можно составить бесконечную матрицу

$$\begin{array}{cccccc} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \cdots & a_n b_1 & \cdots \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & \cdots & a_n b_2 & \cdots \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \cdots & a_n b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 b_m & a_2 b_m & a_3 b_m & \cdots & a_n b_m & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \quad (3.13)$$

Из этих произведений можно многими способами образовать ряды. Например, суммируя по "квадратам" получим

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1 + \cdots \quad (3.14)$$

*Теорема 3.6.* Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся абсолютно, то ряд (3.14), составленный из произведений (3.13), расположенных в

любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм этих рядов.

Ряд типа (3.14) называется *произведением* рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Теорему примем без доказательства.

В практических приложениях наиболее часто встречаются абсолютно сходящиеся ряды. В подразделах 3.1.4 — 3.1.10 приведены некоторые достаточные признаки абсолютной сходимости.

### 3.1.4. Признак сравнения абсолютной сходимости в конечной форме

Рассмотрим ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ . Будем их обозначать соответственно символами  $(A)$ ,  $(|A|)$ ,  $(B)$ ,  $(|B|)$ .

*Теорема 3.7.* Если для всех  $n > n_0 \geq 1$  выполняется неравенство  $|a_n| \leq |b_n|$ , (3.15) то из сходимости ряда  $(|B|)$  следует сходимость ряда  $(|A|)$ , т.е. из абсолютной сходимости ряда  $(B)$  следует абсолютная сходимость ряда  $(A)$ , а из расходимости ряда  $(|A|)$  следует расходимость ряда  $(|B|)$ .

*Доказательство.* Справедливость теоремы 3.7 непосредственно следует из критерия Коши (см. теорему 3.2). Действительно, если ряд  $(|B|)$  сходится, то для него выполнен критерий Коши, но тогда в силу неравенства (3.15) он и по-прежнему выполнен и для ряда  $(|A|)$ , т.е. и ряд  $(A)$  также сходится абсолютно. Если же ряд  $(|A|)$  расходится, то для него не выполнен критерий Коши, но тогда он не выполнен и для ряда  $(|B|)$ , т.е. ряд  $(|B|)$  расходится.

*Замечание 1.* Если ряд  $(|A|)$  расходится, то из теоремы 3.7 следует, что ряд  $(B)$  либо расходится, либо сходится условно. Нужны дополнительные исследования. Если же ряды  $(A)$  и  $(B)$  содержат лишь вещественные положительные члены и  $0 < a_n \leq b_n$ , то из расходимости  $(A)$  следует расходимость ряда  $(B)$ . Для таких рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

*Пример 3.6.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  исследовать на сходимость (этот ряд называется обобщённым гармоническим).

*Решение.* При  $s \leq 1$  данный ряд расходится на основании теоремы 3.7, так как в этом случае  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится (см. пример 3.4). Пусть  $s > 1$  и  $s = 1 + \sigma$ , где  $\sigma > 0$ . Ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right\}$  сходится, так как  $S_n = 1 - \frac{1}{n^{\sigma}}$ ,  $\sigma > 0$ , и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^{\sigma}} \right) = 1$ . К функции  $f(x) = \frac{1}{x^{\sigma}}$  на промежутке  $[n-1, n]$  применим формулу Лагранжа:  $\frac{1}{n^{\sigma}} - \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} = -\frac{\sigma}{(n-\Theta)^{1+\sigma}}$ ,  $0 < \Theta < 1$ , значит,  $\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right] > \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ . Отсюда, из теоремы 3.7 и сходимости ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}} \right\}$  следу-

ет, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$  сходится. Таким образом, обобщённый гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  сходится при  $s > 1$  и расходится при  $s \leq 1$ .

Ранее мы показали, что изучение ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)$  с комплексными членами можно свести к изучению рядов с вещественными членами. Имеет место следующее утверждение.

*Теорема 3.8.* Чтобы ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)$  сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  сходились абсолютно.

*Доказательство.* Справедливость теоремы 3.8 следует из очевидных неравенств  $|\alpha_n| \leq |a_n|$ ,  $|\beta_n| \leq |a_n|$ ,  $|a_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$  и теоремы 3.7.

*Пример 3.7.* Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{i}{n^5} \right)$ .

Решение. Так как  $0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$  сходится абсолютно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$  также сходится абсолютно как обобщённый гармонический при  $s > 1$ . Поэтому на основании теоремы 3.8 данный

ряд сходится абсолютно.

### 3.1.5. Предельный признак сравнения

*Теорема 3.9.* Пусть существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = q. \quad (3.16)$$

Если  $q \in [0, +\infty)$  и ряд  $(|B|)$  сходится, то сходится и ряд  $(|A|)$ . Если  $q > 0$  и ряд  $(|B|)$  расходится, то расходится и ряд  $(|A|)$ .

*Доказательство.* Пусть  $0 \leq q < \infty$  и ряд  $(|B|)$  сходится. Из (3.16) следует:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что при  $n > N$  справедливо  $\frac{|a_n|}{|b_n|} < q + \varepsilon$ ,

$|a_n| < (q + \varepsilon)|b_n|$ . Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (q + \varepsilon)|b_n|$  сходится, то по теореме 3.7 сходится и ряд  $(|A|)$ .

Если  $q > 0$  и ряд  $(|B|)$  расходится, то в этом случае существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|a_n|}$ . Ряд  $(|A|)$  должен расходиться, так как в противном случае по доказанному выше сошёлся бы и ряд  $(|B|)$ .

*Замечание 2.* Если в (3.16)  $q = \infty$ , то тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = 0$ , и по теореме 3.9 из абсолютной сходимости ряда  $(A)$  следует абсолютная сходимость ряда  $(B)$ .

*Замечание 3.* Если в (3.16)  $q \neq 0$ ,  $q \neq \infty$ , то ряды  $(|A|)$  и  $(|B|)$  либо оба сходятся, либо оба расходятся. Для рядов  $(A)$  и  $(B)$  нужны дополнительные исследования. Каждый из них, независимо от другого, может либо сходиться условно, либо расходиться. Если же члены этих рядов вещественны и положительны, то при  $q \neq 0$ ,  $q \neq \infty$  ряды  $(A)$  и  $(B)$  либо оба сходятся, либо оба расходятся.

*Пример 3.8.* Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^5 + 3}}$ .

*Решение.* В качестве ряда  $(B)$  возьмём сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  (обобщённый гармонический ряд,  $s = 3/2 > 1$ ). Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/\sqrt{4n^5 + 3}}{1/n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/2}}{\sqrt{4n^5 + 3}} = \frac{1}{2}$ , то отсюда, теоремы 3.9 и

из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  следует сходимость данного ряда.

Как мы видели, для сходимости ряда (A) необходимо, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , т.е. чтобы величина  $|a_n|$  была бесконечно малой при  $n \rightarrow \infty$ . Как следует из предельного признака сравнения и сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  при  $s > 1$ , для абсолютной сходимости ряда (A) необходимо и достаточно, чтобы порядок малости величины  $|a_n|$  был выше первого относительно величины  $\frac{1}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha |a_n|$  был конечен при  $\alpha > 1$ . Если же этот предел конечен при  $\alpha \leq 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  в этом случае нужны дополнительные исследования.

Таким образом, исследование ряда на абсолютную сходимость сводится к определению порядка малости модуля его общего члена.

В признаках сравнения для исследования данного ряда нужно привлекать другой ряд. Существуют признаки сходимости, основанные на исследовании только данного ряда. К таковым относятся признаки Даламбера и Коши. В них происходит сравнение членов ряда с геометрической прогрессией.

### 3.1.6. Признак Даламбера в конечной форме

*Теорема 3.10.* Если, начиная с некоторого номера  $n$ , справедливо неравенство

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1, \quad (3.17)$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно. Если же  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ , то этот ряд расходится.

*Доказательство.* Пусть неравенство (3.17) выполняется для всех номеров. Тогда  $|a_2| \leq q|a_1|$ ,  $|a_3| \leq q^2|a_1|$ , ...,  $|a_n| \leq q^{n-1}|a_1|$ , .... Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$  сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $0 < q < 1$ , то по признаку сравнения ряд (A) сходится абсолютно.

Если же  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ , то  $|a_{n+1}| \geq |a_n|$  при любом  $n$ , и общий член  $a_n$  не может стремиться к нулю, т.е. не выполнен необходимый признак

сходимости, следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

### 3.1.7. Признак Даламбера в предельной форме

*Теорема 3.11.* Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q, \quad (3.18)$$

то ряд (A) сходится абсолютно при  $q < 1$ , при  $q > 1$  — расходится. (При  $q = 1$  никакого вывода о сходимости ряда (A) сделать нельзя. Нужны дополнительные исследования.)

*Доказательство.* Если  $q < 1$ , то найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $q = 1 - 2\varepsilon$ , т.е.  $q + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ . По определению предела из (3.18) для выбранного  $\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N$  имеет место  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \varepsilon = 1 - \varepsilon < 1$ . Отсюда и из теоремы 3.10 следует абсолютная сходимость ряда (A).

Если же  $q > 1$ , то найдётся  $\varepsilon > 0$  такое, что  $q = 1 + 2\varepsilon$ , т.е.  $q - \varepsilon = 1 + \varepsilon$ . Из (3.18) следует, что  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q - \varepsilon = 1 + \varepsilon > 1$ . По

теореме 3.10 ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится. Теорема доказана.

*Пример 3.9.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{5^n}$  исследовать на абсолютную сходимость.

*Решение.* Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\cos i(n+1)|5^n}{5^{n+1}|\cos in|} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)} + e^{n+1}}{e^{-n} + e^n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}(1 + 1/e^{2(n+1)})}{e^n(1 + 1/e^{2n})} = \frac{e}{5} < 1$ .

По признаку Даламбера в предельной форме данный ряд сходится абсолютно.

### 3.1.8. Радикальный признак Коши в конечной форме

*Теорема 3.12.* Если, начиная с некоторого номера  $n$ , справедливо

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1, \quad (3.19)$$

то ряд (A) сходится абсолютно, если же  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ , то ряд расходится.

*Доказательство.* Пусть (3.19) выполняется для всех номеров. Тогда  $|a_1| \leq q$ ,  $|a_2| \leq q^2$ , ...,  $|a_n| \leq q^n$ , ... Отсюда, из признаков

сравнения и сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  при  $|q| < 1$  следует абсолютная сходимость ряда (A). Если же  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  при любом  $n$ , то не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, данный ряд расходится.

### 3.1.9. Радикальный признак Коши в предельной форме

*Теорема 3.13.* Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ , то при  $q < 1$  ряд (A) сходится абсолютно, при  $q > 1$  этот ряд расходится. (При  $q = 1$  ряд может как сходиться, так и расходиться. Нужны дополнительные исследования.)

*Доказательство* теоремы 3.13 сводится к теореме 3.12 аналогично тому, как теорема 3.11 сведена к теореме 3.10 (вместо отношения  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  нужно писать  $\sqrt[n]{|a_n|}$ ). Доказательство рекомендуем провести самостоятельно.

*Пример 3.10.* Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{(1+i)n}}$ .

*Решение.* Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|e^{(1+i)n}|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{|e^{(1+i)}|} = \frac{1}{e} < 1$ . По признаку Коши в предельной форме данный ряд сходится абсолютно.

### 3.1.10. Интегральный признак Коши

В некоторых случаях исследование ряда на абсолютную сходимость можно свести к исследованию несобственного интеграла. Основанием для этого является следующая теорема.

*Теорема 3.14.* Пусть неотрицательная на луче  $[1, \infty)$  функция  $f(x)$  монотонно убывает при  $x \rightarrow +\infty$  и такова, что при целых  $n = 1, 2, \dots$  имеет место

$$f(n) = |a_n|. \quad (3.20)$$

Тогда ряд (A) сходится абсолютно, если сходится интеграл



$I = \int_1^{\infty} f(x)dx$ , ряд  $(|A|)$  расходится, если расходится указанный интеграл.

*Доказательство.* Пусть  $x$  любое из сегмента  $[n-1, n]$ , т.е.  $n-1 \leq x \leq n$ . Очевидно,  $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ , так как  $f(x)$  монотонно убывает, или в силу (3.20)

$$|a_n| \leq f(x) \leq |a_{n-1}|. \quad (3.21)$$

Проинтегрируем (3.21) в пределах от  $n-1$  до  $n$ . Получим

$$|a_n| \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq |a_{n-1}|. \text{ Запишем последнее неравенство для}$$

$$\text{всех номеров: } |a_2| \leq \int_1^2 f(x)dx \leq |a_1|, \quad |a_3| \leq \int_2^3 f(x)dx \leq |a_2|, \dots,$$

$|a_n| \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq |a_{n-1}|$ . Складывая эти неравенства почленно, получаем

$$S_n - |a_1| \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}, \quad (3.22)$$

где  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Заметим, что в нашем

случае последовательности  $S_n$  и  $I_n = \int_1^n f(x)dx$  монотонно возрастающие.

Из неравенств (3.22) и теоремы о существовании предела монотонной ограниченной последовательности следует, что последовательность  $\{S_n\}$  и интеграл  $I = \int_1^{\infty} f(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно. Теорема доказана.

*Пример 3.11.* Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$ .

Решение. Согласно интегральному признаку Коши, исследование этого ряда на сходимость можно заменить исследованием интеграла  $I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ . Но  $I = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\ln^3 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Big|_2^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2 \ln^2 A} + \frac{1}{2 \ln^2 2} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2}$ , т.е. интеграл  $I$  сходится, а потому сходится и данный ряд.

Заметим, что при исследовании рядов на сходимость иногда полезно сочетать признаки сравнения с признаками Даламбера и Коши.

*Пример 3.12.* Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 - 1) \ln 2n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$  исследовать на сходимость.

Решение. Сравним данный ряд с рядом  $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$ . Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln 2n}{(n^2 - 1) \ln 2n} = 1$ . По признаку сравнения в предельной форме ряды  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$  сходятся или расходятся одновременно. Применяя интегральный признак Коши к исследованию ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$ , получаем, что он расходится, так как интеграл  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln 2x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln 2x}{\ln 2x}$  расходится. Следовательно, данный ряд расходится.

### 3.1.11. Признаки Лейбница и Дирихле

Пусть дан ряд с вещественными членами, знаки которых чередуются. Такой ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{m+1} a_m + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n. \quad (3.23)$$

Здесь величины  $a_n$  вещественны и  $a_n > 0$ .

*Теорема 3.15* (признак Лейбница). Если члены знакопеременующегося ряда (3.23) монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.

$$a_{n+1} < a_n, \quad (3.24)$$

и стремятся к нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд (3.23) сходится, его остаток по модулю не превышает первого члена остатка, а по знаку совпадает со знаком этого члена.

*Доказательство.* Частичные суммы  $S_{2m}$  чётного порядка ряда (3.23) можно записать в виде

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

В силу (3.24) все скобки здесь положительны. Поэтому при любом  $m$  величина  $S_{2m} > 0$  и последовательность  $\{S_{2m}\}$  монотонно возрастает. С другой стороны,

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Отсюда следует, что  $S_{2m} < a_1$ . Мы получили  $0 < S_{2m} < a_1$ . Таким образом, последовательность  $\{S_{2m}\}$  монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Обозначим его  $S$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S \neq \infty$ . Для частичных сумм  $S_{2m-1}$  нечётного порядка можем записать  $S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m}$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m} = 0$  по условию теоремы, то  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ . Сходимость ряда (3.23) доказана, оценим его остаток. Пусть  $\alpha_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} + a_{2m+3} - a_{2m+4} + \dots = (a_{2m+1} - a_{2m+2}) + (a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \dots$ . Отсюда следует, что  $\alpha_{2m} > 0$ . Но, с другой стороны,  $\alpha_{2m} = a_{2m+1} - (a_{2m+2} - a_{2m+3}) - \dots$ , т.е.  $\alpha_{2m} < a_{2m+1}$ , следовательно,

$$0 < \alpha_{2m} < a_{2m+1}. \quad (3.25)$$

Для остатка  $\alpha_{2m-1}$  находим  $\alpha_{2m-1} = -a_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} + a_{2m+3} - \dots = (-a_{2m} + a_{2m+1}) + (-a_{2m+2} + a_{2m+3}) - \dots$ . Каждая из скобок здесь отрицательна, поэтому  $\alpha_{2m-1} < 0$ . С другой стороны,  $\alpha_{2m-1} = -a_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) + (a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \dots$ . Следовательно,  $\alpha_{2m-1} > -a_{2m}$ , т.е.

$$-a_{2m} < \alpha_{2m-1} < 0. \quad (3.26)$$

Из неравенств (3.25) и (3.26) следует справедливость второй части теоремы. Теорема доказана.

*Замечание 4.* Расстановка скобок в рядах  $\alpha_{2m}$  и  $\alpha_{2m-1}$  правомерна, так как каждый из рядов сходится, а сходящийся ряд обладает сочетательным свойством.

*Замечание 5.* Из (3.25) и (3.26) следует, что при замене суммы знакочередующегося ряда его частичной суммой погрешность по модулю не превышает первого отброшенного члена, а по знаку совпадает с ним.

*Пример 3.13.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Решение. Поскольку знаки членов ряда чередуются, а их модули монотонно убывают, стремятся к нулю, то данный ряд сходится. Так как  $\left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, то данный ряд сходится условно.

Приведём без доказательства достаточный признак сходимости часто встречающихся рядов типа  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ .

*Теорема 3.16* (признак Дирихле). Если последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ограничена, а последовательность  $\{b_n\}$  монотонная и бесконечно малая, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

*Пример 3.14.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad (\text{a})$$

где числа  $a_n$  образуют монотонную сходящуюся к нулю последовательность.

Решение. Оценим частичные суммы  $S_m = \sum_{n=1}^m \sin nx$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ . Если  $x = 2k\pi$  ( $k$  — целое), то ряд (а) сходится, так как все его члены в этом случае состоят из нулей. Пусть  $x \neq 2k\pi$ . Тогда  $2S_m \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^m 2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^m \left[ \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) x \right] = \cos \frac{x}{2} - \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) x$ , следовательно,

$$S_m(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Отсюда следует, что при любом  $x \neq 2k\pi$   $|S_m(x)| < \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ , т.е. частичные суммы  $S_m(x)$  ограничены в совокупности. По признаку Дирихле ряд (а) сходится.

При исследовании рядов с комплексными членами иногда полезна следующая теорема.

*Теорема 3.17.* Для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \quad (3.27)$$

сходился условно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

и  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  сходились, причём хотя бы один из них условно.

Действительно, ни один из этих рядов расходиться не может, тогда бы ряд (3.27) расходился (см. теорему 3.1), если бы они оба сходились абсолютно, то ряд (3.27) сходился бы также абсолютно (см. теорему 3.8). Остаётся единственная возможность: хотя бы один из этих рядов сходится условно.

## 3.2. Функциональные ряды

В этом подразделе мы распространим понятие суммы конечного числа функций на бесконечное число слагаемых.

### 3.2.1. Функциональный ряд, его сумма и область сходимости

Пусть в области  $\Delta$  комплексных или вещественных чисел задана последовательность функций  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ . Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (3.28)$$

называется *функциональным рядом*.

Выберем любую точку  $z_0$ . В результате получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0). \quad (3.29)$$

Если ряд (3.29) сходится и его сумма равна  $S(z_0)$ , то говорят, что функциональный ряд (3.28) сходится в точке  $z_0$ . Множество  $D \subset \Delta$  всех точек, в которых сходится ряд (3.28), называется *областью сходимости* этого ряда. Функция  $S(z) : D \rightarrow C_w$  такая, что для любой точки  $\tilde{z} \in D$  число  $S(\tilde{z})$  является суммой числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tilde{z})$ , называется *суммой функционального ряда* (3.28).

*Пример 3.15.* Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  ( $x$  — вещественно).

Решение. Для отыскания области сходимости применим признак Даламбера. Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x|$ . Отсюда следует, что при  $|x| < 1$  данный ряд сходится и притом абсолютно, а при  $|x| > 1$  расходится. Остался не рассмотренным случай  $|x| = 1$ . При  $x = 1$  получаем расходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , а при  $x = -1$  получаем условно сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ . Таким образом, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый промежуток  $[-1, 1)$ .

*Пример 3.16.* Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}$ .

Решение. Члены этого ряда представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = \frac{2}{z}$ . Нами ранее показано (см. пример 3.1), что такой ряд сходится только при  $|q| < 1$ , т.е. при  $\left| \frac{2}{z} \right| < 1$  или  $|z| > 2$ .

Как следует из приведённых примеров, для отыскания области сходимости функциональных рядов можно применять признаки сходимости числовых рядов, рассматривая переменную  $z$  (или  $x$ ) как параметр. Область сходимости  $D$  состоит из тех значений  $z$ , для которых выполнено необходимое и достаточное условие сходимости.

К понятию суммы функционального ряда можно подойти и по-другому, аналогично тому, как это сделано для числового ряда. Рассмотрим суммы  $S_1(z) = f_1(z)$ ,  $S_2(z) = f_1(z) + f_2(z)$ ,  $\dots$ ,  $S_m(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_m(z)$ ,  $\dots$ . Функция  $S_m(z)$  называется  $m$ -й частичной суммой ряда (3.28). Мы получили последовательность  $\{S_m(z)\}$  частичных сумм. Множество точек  $z$ , в которых существует конечный предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(z) = S(z)$ , называется областью сходимости ряда (3.28), а функция  $S(z)$  — его суммой. Ряд называется расходящимся для тех точек, в которых указанный предел не существует или бесконечен.

*Пример 3.17.* Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n-1)+z} - \frac{1}{n+z} \right]$ .

Решение. Имеем  $S_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}$ ,  $S_2(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2+z}$ ,  $\dots$ ,  $S_n(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{n+z}$ . Следовательно,  $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{n+z} \right) = \frac{1}{z}$ .

### 3.2.2. Равномерная и неравномерная сходимость

Функциональный ряд является обобщением понятия суммы функций на бесконечное число слагаемых. При этом обобщении в некоторых случаях свойства конечных сумм сохраняются, а в некоторых нет. Нам нужно научиться различать эти случаи, чтобы знать, в каких из них с рядами можно обращаться как с конечными суммами, а в каких нет. Например, в случае конечных сумм сумма непрерывных функций есть функция непрерывная, в случае же рядов, т.е. бесконечных сумм, это свойство может не выполняться.

*Пример 3.18.* Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{(1+|z|)^n}$ .

Решение. Данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем  $q = \frac{1}{1+|z|} < 1$ , при  $z \neq 0$ . При  $z = 0$ , очевидно,  $S(0) = 0$ . Если  $z \neq 0$ , то  $S(z) = \frac{|z|/(1+|z|)}{1 - \frac{1}{1+|z|}} = 1$ , следовательно,

$S(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$  Как видим, сумма ряда при  $z = 0$  терпит разрыв, хотя все члены ряда в точке  $z = 0$  непрерывны.

Ниже мы покажем, что условием, при котором ряды обладают свойствами конечных сумм, является равномерная сходимость. К изучению этого нового понятия мы и переходим.

Суммой ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  в области  $D$  мы назвали функцию  $S(z)$ , определяемую условием  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ . По определению предела это означает, что для каждого  $z$  из области  $D$  по любому  $\varepsilon > 0$

найдётся номер  $N$  такой, что при  $n > N$  и данном  $z$  выполняется условие

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon. \quad (3.30)$$

В общем случае номер  $N$  зависит от  $\varepsilon$  и  $z$ , т.е.  $N = N(\varepsilon, z)$ . Найденный номер  $N$  для одной точки  $z$  может не удовлетворять для другой. Если существует номер  $N$  такой, что неравенство (3.30) выполняется при  $n > N$  сразу для всех точек  $z$  в области  $D$ , то говорят, что ряд сходится в  $D$  *равномерно*, если же такого номера  $N$  не существует, то говорят, что ряд сходится *неравномерно*. Сформулируем

определение равномерной сходимости. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  сходится в области  $D$  к функции  $S(z)$  и  $H \subseteq D$  — некоторое множество.

*Определение.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  называется *равномерно сходящимся* на множестве  $H$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$  такое, что при  $n > N$  сразу для всех  $z \in H$  выполняется неравенство

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon. \quad (3.31)$$

Так как  $S(z) - S_n(z) = r_n(z)$ , где  $r_n(z)$  —  $n$ -й остаток ряда, то (3.31) можно переписать в виде  $|r_n(z)| < \varepsilon$ . Другими словами, ряд называется *равномерно сходящимся* в  $H$ , если его остаток  $r_n(z)$  за счёт увеличения номера  $n$  сразу для всех точек из множества  $H$  можно сделать меньше любого наперёд заданного числа.

*Пример 3.19.* Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + |z|}$  сходится равномерно на всей комплексной плоскости.

*Решение.* По теореме 3.15 справедливо неравенство  $|r_n(z)| < \frac{1}{n + 1 + |z|} < \frac{1}{n + 1}$  при любом  $z$ . Как бы мало  $\varepsilon > 0$  ни было, можно выбрать номер  $N$  настолько большим, что при  $n > N$  будет выполняться  $\frac{1}{n + 1} < \varepsilon$ , но тогда  $|r_n(z)| < \varepsilon$  при  $n > N$  и любых  $z$ . По определению данный ряд сходится равномерно на всей плоскости.

*Пример 3.20.* Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{(1 + |z|)^n}$  сходится на всей плоскости, но неравномерно.

*Решение.* Сходимость этого ряда на всей плоскости мы доказали в примере 3.18. Докажем, что сходимость при этом неравномерная.



Находим остаток этого ряда:  $r_n(z) = \frac{|z|/(1+|z|)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+|z|}} = \frac{1}{(1+|z|)^n}$ .

Видим, что при  $z \rightarrow 0$  величина  $r_n(z) \rightarrow 1$ . Следовательно, неравенство  $|r_n(z)| < \varepsilon$  сразу для всех  $z$  выполняться не может, т.е. данный ряд сходится на всей плоскости, но неравномерно.

*Теорема 3.18* (достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). Если при любом  $z$  из области  $D$  выполняется неравенство

$$|f_n(z)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.32)$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (3.33)$$

сходится, то ряд (3.28) в области  $D$  сходится равномерно.

*Доказательство.* Так как ряд (3.33) сходится, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N$  выполняется неравенство  $r_n^* < \varepsilon$ , где  $r_n^*$  —  $n$ -й остаток ряда (3.33). В силу неравенств (3.32) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ , а потому и ряд (3.28) сходятся при любом  $z$  из области

$D$ . Так как  $|r_n(z)| \leq r_n^* < \varepsilon, \forall z \in D$ , где  $r_n(z)$  — сумма остатка ряда (3.28), то этот ряд сходится равномерно.

Если выполнены неравенства (3.32), то говорят, что ряд (3.33) *мажорирует* ряд (3.28). Ряд (3.28) в этом случае называют *мажорируемым*, а ряд (3.33) — *мажорантным* рядом.

*Пример 3.21.* Доказать равномерную сходимость ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^z}{n^2 + z^2}$

в круге  $|z| < 1$ .

*Решение.* Так как  $|n^2 + z^2| \geq n^2 - |z|^2 \geq n^2 - 1, |e^z| = e^x < e, |x| \leq |z| < 1$ , то  $\left| \frac{e^z}{n^2 + z^2} \right| < \frac{e}{n^2 - 1}$ . Поскольку ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e}{n^2 - 1}$  сходится, то данный ряд в круге  $|z| < 1$  сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса).

*Теорема 3.19.* Если ряд (3.28):  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  в области  $D$  сходится

равномерно, то и ряд 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) f_n(z), \quad (3.34)$$

где  $\varphi(z)$  — любая ограниченная в области  $D$  функция, также сходится в области  $D$  равномерно.

*Доказательство.* В силу ограниченности  $\varphi(z)$  в области  $D$  выполняется неравенство  $|\varphi(z)| \leq M$ ,  $M \neq \infty$ ,  $M \neq 0$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Так как ряд (3.28) сходится равномерно, то по числу  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $N$  такой, что при  $n > N$  выполняется неравенство  $|r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M}$ ,  $\forall z \in D$ . Но тогда для остатка

$$r_n^* \text{ ряда (3.34) при } n > N \text{ справедливо } |r_n^*(z)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \varphi(z) f_m(z) \right| = \\ = |\varphi(z)| \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(z) \right| \leq M|r_n(z)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ сразу для всех } z \text{ из}$$

области  $D$ . Теорема доказана.

### 3.2.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

*Теорема 3.20* (о переходе к пределу под знаком суммы). Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  сходится равномерно в области  $D$  к функции  $S(z)$ , и точка  $z_0$  — предельная для области  $D$ , причём существуют конечные пределы  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_m(z) = c_m$ ,  $z \in D$ . Тогда: 1) числовой

ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$  сходится; 2) существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} S(z)$ ,

равный сумме ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ . Другими словами,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z), \quad z \in D. \quad (3.35)$$

Теорему примем без доказательства. Если имеет место (3.35), то говорят, что возможен предельный переход под знаком суммы.

*Теорема 3.21.* Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  непрерывны на множестве  $D$  и ряд в  $D$  сходится равномерно, то его сумма  $S(z)$  непрерывна в  $D$ .

*Доказательство.* Пусть точки  $z$  и  $z+h$  принадлежат  $D$ . Имеем  $S(z) = S_n(z) + r_n(z)$ , где  $S_n(z)$  — частичная сумма данного ряда,  $r_n(z)$  — его остаток. Тогда  $S(z+h) = S_n(z+h) + r_n(z+h)$ . Поэтому  $S(z+h) - S(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + r_n(z+h) - r_n(z)$ . Отсюда по свойству модуля суммы получаем

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |r_n(z+h)| + |r_n(z)|. \quad (3.36)$$

Так как данный ряд сходится равномерно, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $N$  такое, что сразу для всех точек  $z$  из  $D$  при  $n > N$  будут выполняться неравенства

$$|r_n(z+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.37)$$

В неравенствах (3.37)  $n$  зафиксируем. Функция  $S_n(z)$  как сумма конечного числа непрерывных функций непрерывна, а потому для числа  $\frac{\varepsilon}{3}$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что при  $|h| < \delta$  будет выполняться неравенство

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.38)$$

Внося (3.37) и (3.38) в (3.36), получаем  $|S(z+h) - S(z)| < \varepsilon$  при  $|h| < \delta$ . Это и означает непрерывность функции  $S(z)$ .

*Теорема 3.22* (о почленном интегрировании ряда). Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  непрерывны на некоторой дуге  $\mathcal{L}$  и ряд на  $\mathcal{L}$  сходится равномерно к  $S(z)$ , то ряд можно почленно интегрировать вдоль этой дуги, т.е.

$$\int_{\mathcal{L}} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{L}} f_n(z) dz. \quad (3.39)$$

*Доказательство.* Из теоремы 3.21 следует, что функция  $S(z)$  непрерывна. Этим обеспечивается существование интеграла  $\int_{\mathcal{L}} S(z) dz$ . Через  $\sigma_n$  обозначим частичную сумму ряда (3.39). Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{L}} S(z) dz - \sigma_n \right| &= \left| \int_{\mathcal{L}} S(z) dz - \sum_{m=1}^n \int_{\mathcal{L}} f_m(z) dz \right| = \\ &= \left| \int_{\mathcal{L}} [S(z) - S_n(z)] dz \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |r_n(z)| ds, \end{aligned}$$

где  $ds$  — дифференциал длины дуги,  $r_n(z)$  — остаток данного ряда.

Так как данный ряд на  $\mathcal{L}$  сходится равномерно, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $N$  столь большим, что при любом  $z \in \mathcal{L}$  и  $n > N$  выполняется  $|r_n(z)| < \varepsilon$ . Следовательно,

$$\left| \int_{\mathcal{L}} S(z) dz - \sigma_n \right| < \int_{\mathcal{L}} |r_n(z)| ds < \varepsilon l,$$

где  $l$  — длина кривой  $\mathcal{L}$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_{\mathcal{L}} S(z) dz$ . Теорема доказана.

*Теорема 3.23* (об аналитичности суммы ряда). Если члены ряда

(3.28):  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  являются аналитическими в области  $D$  функциями

и ряд в этой области сходится равномерно, то его сумма  $S(z)$  в  $D$  является функцией аналитической.

*Доказательство.* Пусть  $z$  — любая точка области  $D$ . Построим круг  $|t - z| \leq \rho$  столь малого радиуса  $\rho$ , чтобы он целиком лежал в  $D$ . Через  $\gamma$  обозначим границу этого круга. Тогда

$$\frac{S(t)}{t - z} = \frac{f_1(t)}{t - z} + \frac{f_2(t)}{t - z} + \dots + \frac{f_n(t)}{t - z} + \dots, \quad (3.40)$$

где  $t$  — любая точка на  $\gamma$ .

Так как ряд (3.28) сходится равномерно в  $D$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$  равномерно сходится на  $\gamma$ , а поскольку  $|t - z| = \rho$ , то по теореме 3.19 равномерно сходится на  $\gamma$  и ряд (3.40). На основании теоремы 3.22 возможно его почленное интегрирование по  $\gamma$ , т.е.  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{S(t)dt}{t - z} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_n(t)dt}{t - z}.$$

Пользуясь интегральной формулой Коши, получаем  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{S(t)dt}{t - z}$ , и мы приходим к равенству

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{S(t)dt}{t - z}.$$

Непрерывность  $S(z)$  следует из равномерной сходимости ряда (3.28). Следовательно, функция  $S(z)$  представлена интегралом типа Коши, а потому является аналитической (см. теорему 2.9). Теорема доказана.

*Теорема 3.24* (о почленном дифференцировании ряда). Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  являются аналитическими в области  $D$  функциями

и ряд в  $D$  сходится равномерно к  $S(z)$ , то этот ряд в  $D$  можно дифференцировать почленно любое число раз, т.е.

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(z).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.23, только вместо ряда (3.40) следует рассмотреть ряд

$$\frac{S(t)}{(t-z)^{(m+1)}} = \frac{f_1(t)}{(t-z)^{(m+1)}} + \frac{f_2(t)}{(t-z)^{(m+1)}} + \dots, \text{ затем почленно}$$

его проинтегрировать и применить формулу  $\frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{(m+1)}} =$

$= f^{(m)}(z)$ . Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Для рядов с вещественными членами теорема о почленном дифференцировании имеет существенные отличия от аналогичной теоремы для рядов, члены которых являются аналитическими функциями. Приведём формулировку этой теоремы.

*Теорема 3.25.* Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , причём функции  $u_n(x)$  определены на  $[a, b]$  и имеют там непрерывные производные. Если на  $[a, b]$  данный ряд сходится к функции  $S(x)$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то функция  $S(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$  и при этом  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ .

Доказательство опускаем. Предлагается доказать самостоятельно после изучения теоремы 5.8.

### 3.3. Степенные ряды. Ряды Тейлора

#### 3.3.1. Строение области сходимости степенного ряда

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{3.41}$$

где  $a_n$  — комплексные числа, не зависящие от  $z$ ;  $z_0$  — фиксированное комплексное число, называется *степенным*.

В частности, при  $z_0 = 0$  получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3.42}$$

От (3.41) к (3.42) можно перейти путём переноса начала координат. Поэтому, не умаляя общности, можно изучать ряды (3.42).

*Теорема 3.26*(Абеля) (о строении области сходимости степенного ряда). 1. Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится в точке  $z_0 \neq 0$ , то он сходится при любом  $z$ , если  $|z| < |z_0|$  и притом абсолютно; при этом он сходится равномерно в любом круге  $|z| \leq \rho < |z_0|$ . 2. Если ряд в точке  $z_0$  расходится, то он расходится во всех точках  $z$ , для которых  $|z| > |z_0|$ .

*Доказательство.* 1. Из сходимости ряда (3.42) в точке  $z_0$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$ , поэтому  $|a_n z_0^n| < M$  для всех  $n$ .

Пусть  $z$  — любое, удовлетворяющее условию  $|z| < |z_0|$ . Тогда  $|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left( \frac{z}{z_0} \right)^n \right| < M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = M q^n$ , где  $0 < q < 1$ , так как  $|z| < |z_0|$ . Из последнего неравенства и признака сравнения следует, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  сходится, т.е. что ряд (3.42) в точке  $z$  сходится абсолютно. В круге  $|z| \leq \rho$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  мажорируется рядом

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ , который сходится, так как  $\rho < |z_0|$ . По признаку Вейер-

штрасса ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится равномерно в круге  $|z| \leq \rho$ .

2. Если бы ряд в точке  $z$  сходиллся, то он сходиллся бы и в  $z_0$  согласно первой части теоремы, что противоречит условию.

*Теорема 3.27.* Для всякого степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  существует неотрицательное число  $R$  такое, что при  $|z| < R$  (если  $R > 0$ ) ряд сходится и притом абсолютно, а при  $|z| > R$  (если  $R \neq \infty$ ) ряд расходится.

Теорему примем без доказательства.

Число  $R$  называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а круг  $|z| < R$  — его *кругом сходимости*. Найти  $R$  можно по формулам

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  или  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$  (если эти пределы существуют). Их легко получить, применяя признак Даламбера или Коши к ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

Все свойства равномерно сходящихся рядов, отмеченные в

п. 3.2.3, переносятся и на степенные ряды. В частности, справедливы следующие утверждения.

*Теорема 3.28.* Сумма степенного ряда является функцией аналитической в его круге сходимости. Степенной ряд можно дифференцировать почленно любое число раз. Получающиеся при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

*Теорема 3.29.* Степенной ряд можно интегрировать почленно по любой кривой  $\mathcal{L}$ , расположенной в его круге сходимости.

*Пример 3.22.* Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$  и его сумму  $S(x)$ .

Решение. Применяя к данному ряду признак Даламбера, находим, что  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(n-1)} = 1$ . В точках  $x = \pm 1$  данный ряд сходится по признаку сравнения и притом абсолютно  $\left(\frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}\right)$ .

Поэтому область сходимости данного ряда — сегмент  $[-1, 1]$ . Дифференцируя дважды ряд  $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ , что справедливо по теореме 3.28, получаем  $S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ ,  $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}$ .

Интегрируя, находим  $S'(x) = \int \frac{dx}{1-x} + c$ ,  $S'(x) = -\ln(1-x) + c$ . Так как  $S'(0) = 0$ , то  $c = 0$ . Поскольку

$S(x) = -\int \ln(1-x) dx = (1-x) \ln(1-x) + x + \tilde{c}$   
и  $\tilde{c} = 0$ , так как  $S(0) = 0$ , то  $S(x) = (1-x) \ln(1-x) + x$ .

*Пример 3.23.* Найти радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$  и его сумму.

Решение. Как и в примере 3.22 легко находим, что  $R = 1$ . В точках  $x = \pm 1$  данный ряд расходится, следовательно, областью сходимости является промежуток  $(-1, 1)$ . По теореме 3.29 можем записать

$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$ . Отсюда

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

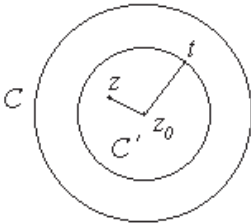
### 3.3.2. Ряды Тейлора

Мы установили, что сумма степенного ряда аналитична в круге сходимости. В этом параграфе будем решать обратную задачу. Мы покажем, что всякая аналитическая в круге функция может быть в этом круге представлена в виде суммы степенного ряда.

*Теорема 3.30.* Если функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z - z_0| < R$ , то в этом круге функция  $f(z)$  представима в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (0! = 1), \quad f^{(0)}(z_0) = f(z_0). \quad (3.43)$$

Ряд (3.43) называется *рядом Тейлора* для функции  $f(z)$ .



*Доказательство.* Обозначим через  $C$  окружность  $|z - z_0| = R$ . Пусть  $z$  — любая точка круга  $|z - z_0| < R$ . Проведём внутри этого круга окружность  $C'$  с центром в точке  $z_0$  так, чтобы точка  $z$  оказалась внутри неё. Тогда по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t) dt}{(t - z)}. \quad (3.44)$$

Можем записать  $\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{t - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}}$ .

Так как  $q = \left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| < 1$ , то  $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{t - z_0} \right)^n$

как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{z - z_0}{t - z_0}$ , по модулю меньшим единицы. Этот ряд мажорирует-

ся прогрессией  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ,  $0 < |q| \leq r < 1$ , а потому на  $C'$  сходится равномерно. Итак, имеем

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}, \quad (3.45)$$

причём последний ряд на  $C'$  сходится равномерно, а потому возмож-



но его почленное интегрирование. Внося (3.45) в (3.44), находим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \left\{ f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \right\} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{n+1}} \right\} (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Обозначим  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{n+1}} = a_n$ . Тогда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ,

где  $a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t) dt}{t-z_0} = f(z_0)$ ;  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ,

$n = 1, 2, \dots$ . Теорема доказана.

Заметим, что круг  $|z-z_0| < R$ , где имеет место разложение (3.43), можно расширять до тех пор, пока на его границу не попадёт точка, в которой функция  $f(z)$  теряет свойство аналитичности.

*Теорема 3.31* (теорема единственности ряда Тейлора). Любой сходящийся в круге  $|z-z_0| < R$  к функции  $f(z)$  степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (3.46)$$

является рядом Тейлора для своей суммы.

*Доказательство.* Пусть имеет место (3.46). Тогда  $a_0 = f(z_0)$ . По теореме 3.28 возможно почленное дифференцирование ряда (3.46). Выполняя это дифференцирование и полагая после этого  $z = z_0$ , получим  $a_1 = f'(z_0)$ ,  $a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$ ,  $\dots$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ,  $\dots$ , т.е. ряд (3.46) есть ряд Тейлора для функции  $f(z)$ .

*Пример 3.24.* Найти радиус круга, в котором функция  $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$  может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0 = 0$ .

*Решение.* Функция  $f(z)$  теряет свойство аналитичности в точках  $z$ , удовлетворяющих условию  $e^z = -1$ , т.е.  $z = \mathcal{L}n(-1) = i(\pi + 2k\pi)$ .

Ближайшей к  $z_0 = 0$  является точка  $z_1 = i\pi$ , которая удалена от  $z_0 = 0$  на расстояние  $R = \pi$ . Поэтому функция  $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$  может быть разложена в ряд Тейлора по степеням  $z$  в круге  $|z| < \pi$ . По этой причине функция вещественного переменного  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$  может быть разложена по степеням  $x$  в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

*Пример 3.25.* Функцию  $f(z) = \frac{z}{(z-3)(z-4)}$  разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0 = 1$ .

Решение. Можем записать  $\frac{z}{(z-3)(z-4)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-4} = \frac{3}{3-z} - \frac{4}{4-z}$ . Каждую из дробей разлагаем в ряд Тейлора.  $\frac{3}{3-z} = \frac{3}{2-(z-1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$ . Этот ряд сходится в круге  $|z-1| < 2$ .  $\frac{4}{4-z} = \frac{4}{3-(z-1)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{3}} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$ . Последнее разложение имеет место в круге  $|z-1| < 3$ .

Таким образом,  $\frac{z}{(z-3)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{4}{3^{n+1}} \right) (z-1)^n$  в круге  $|z-1| < 2$ .

Легко получить следующие разложения:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad 0! = 1;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

Эти разложения имеют место на всей плоскости.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}; \quad (3.47)$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)z^n}{n!} \quad (3.48)$$

( $\alpha$  — любое вещественное или комплексное число). В последних четырёх разложениях  $|z| < 1$ . Выражением  $(1+z)^\alpha$  обозначена однозначная ветвь  $\varphi(z) = e^{\alpha \ln(1+z)}$  многозначной функции  $\psi(z) = e^{\alpha \mathcal{L}n(1+z)}$ , выделяемая условием  $\psi(0) = 1$ . Ряд (3.48) называется биномиальным.

На основании теоремы 3.20 в (3.47) можно перейти к пределу под знаком суммы. В результате получим

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Из разложения для  $\operatorname{arctg} z$  при  $z \rightarrow 1$  получаем интересную сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

При практическом разложении функции в ряд часто используется приём подстановки "ряда в ряд". Пусть дано две функции  $F(w)$  и  $w = f(z)$ , причём  $f(z)$  аналитична в окрестности точки  $z_0$ , а  $F(w)$  в соответствующей точке  $w_0 = f(z_0)$ . Если разложения  $F(w)$  и  $f(z)$  по степеням  $w$  и  $z$  соответственно известны, то ряд Тейлора для функции  $F(f(z))$  можно получить, подставив ряд для  $f(z)$  в ряд для  $F(w)$  вместо  $w$  и выполнив необходимые действия. Обоснование этой операции опустим [16, с.252].

$$\begin{aligned} \text{Например, так как } e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} + \dots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots, \text{ то } e^{\sin z} = 1 + \left( z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right)^2 + \frac{1}{6} \left( z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right)^3 + \frac{1}{24} \left( z - \frac{z^3}{6} + \right. \\ &+ \left. \frac{z^5}{120} - \dots \right)^4 + \frac{1}{120} \left( z - \frac{z^3}{6} + \dots \right)^5 + \frac{1}{720} \left( z - \frac{z^3}{6} + \dots \right)^6 + \dots = \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{8} \cdot z^4 - \frac{1}{15} \cdot z^5 - \frac{1}{240} \cdot z^6 + \dots \end{aligned}$$

### 3.4. Нули аналитической функции. Теорема единственности

#### 3.4.1. Порядок нуля функции

Точка  $z_0$  называется нулём функции  $f(z)$ , если  $f(z_0) = 0$ .

Точка  $z_0$  называется нулём кратности  $m$  аналитической в  $z_0$  функции  $f(z)$ , если имеет место

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad (3.49)$$

где  $\varphi(z)$  — аналитическая в точке  $z_0$  функция, причём  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

*Теорема 3.32.* Если точка  $z_0$  есть нуль функции  $f(z)$  кратности  $m$ , то ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$  для неё имеет вид

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad a_m \neq 0, \quad (3.50)$$

и обратно, если имеет место (3.50), то  $z_0$  — нуль кратности  $m$  для  $f(z)$ .

Действительно, если имеет место (3.49), то

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) = m! \varphi(z_0) \neq 0. \quad (3.51)$$

Поэтому  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ ,  $a_m \neq 0$ , и мы приходим к (3.50).

Если имеет место (3.50), то

$$f(z) = (z - z_0)^m \{a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots\}. \quad (3.52)$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n$  сходится в той же области, что и ряд (3.50).

Обозначим  $a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots = \varphi(z)$ , причём  $\varphi(z_0) = a_m \neq 0$ . Теперь из (3.52) получаем  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ , и точка  $z_0$  является нулём кратности  $m$ .

*Замечание.* Соотношения (3.51) можно использовать для практического определения порядка нуля функции. Именно, если  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ ,  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ , то точка  $z_0$  является для  $f(z)$  нулём кратности  $m$ .

#### 3.4.2. Единственность аналитической функции

*Теорема 3.33* (об изолированности нулей). Если точка  $z_0$  является нулём аналитической функции  $f(z)$  кратности  $m$ , то существует окрестность точки  $z_0$ , в которой функция  $f(z)$  не имеет других нулей.

*Доказательство.* Так как  $z_0$  нуль кратности  $m$  функции  $f(z)$ , то  $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \varphi(z)$ ,  $a_m = \varphi(z_0) \neq 0$ . Первый множитель в нуль обратиться не может, следовательно, функция  $f(z)$

могла бы обратиться в нуль только за счёт множителя  $\varphi(z)$ . Имеем  $\varphi(z_0) = a_m \neq 0$ . Функция  $\varphi(z)$  аналитична, а потому непрерывна в  $z_0$ , поэтому  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) = a_m \neq 0$ , следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что при  $|z - z_0| < \delta$  будет  $|\varphi(z) - a_m| < \varepsilon$ . Примем  $\varepsilon = \frac{|a_m|}{2}$ . Тогда  $|\varphi(z) - a_m| < \frac{|a_m|}{2}$ . Если хотя бы в одной точке  $z_1$  из  $\delta$  — окрестности точки  $z_0$  было  $\varphi(z_1) = 0$ , то мы получили бы  $|a_m| < \frac{1}{2}|a_m|$ , что при  $|a_m| \neq 0$  невозможно. Теорема доказана.

*Теорема 3.34.* Если  $f(z)$  1) аналитична в точке  $z_0$ ; 2) существует последовательность  $\{z_n\}$  нулей, сходящаяся к  $z_0$ , то  $f(z) \equiv 0$  в некоторой окрестности точки  $z_0$ .

*Доказательство.* В силу непрерывности функции  $f(z)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = f(z_0) = 0$ , следовательно, точка  $z_0$  является нулём функции  $f(z)$ . Предположим, что  $f(z) \not\equiv 0$  в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Тогда  $f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots$ , где  $m \geq 1$ ,  $a_m \neq 0$ . Отсюда следует, что точка  $z_0$  является  $m$ -кратным нулём функции  $f(z)$  (см. теорему 3.32). По теореме 3.33 существует окрестность точки  $z_0$ , в которой  $f(z)$  не имеет других нулей, кроме  $z_0$ . Но это противоречит второму условию теоремы.

*Теорема 3.35* (единственности аналитической функции). Если  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  аналитичны в  $D$  и их значения совпадают на некоторой последовательности точек  $\{z_n\}$ , сходящейся к внутренней точке  $z_0$  в области  $D$ , то функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  тождественно равны в области  $D$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $F(z) = f_1(z) - f_2(z)$ . По теореме 3.34 эта функция в окрестности точки  $z_0$  тождественно равна нулю, т.е. функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  совпадают. Доказательство совпадения их во всей области  $D$  опустим.

Из этой теоремы следует, что ввести аналитические функции  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  и другие, совпадающие на оси  $OX$  или хотя бы на её части с соответствующими функциями действительной переменной, можно только единственным образом. Все они совпадают между собой независимо от способа их построения. Говорят, что эти функции получены аналитическим продолжением на всю комплексную плоскость с вещественной оси.

### 3.5. Приложение степенных рядов

В этом подразделе будем рассматривать степенные ряды в области вещественных чисел. Из теоремы Абеля следует, что все полученные разложения в п. 3.3.2 справедливы и для вещественных значений  $z$  на соответствующем участке оси  $OX$ .

#### 3.5.1. Оценка остатка ряда Тейлора

Пусть задана вещественнозначная функция вещественной переменной  $f(x) : D \rightarrow R$ , имеющая непрерывные производные в точке  $x_0$  до  $(n + 1)$  порядка включительно. Тогда можем записать

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + r_n(x). \quad (3.53)$$

Соотношение (3.53) называют формулой Тейлора, а функцию  $r_n(x)$  — её остаточным членом. Если функция  $f(x)$  представима в окрестности точки  $x_0$  в виде суммы ряда Тейлора, то остаточный член  $r_n(x)$  совпадает с остатком ряда Тейлора. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

называется *многочленом Тейлора*.

Во многих задачах, связанных с приближёнными вычислениями, требуется оценка величины остатка  $r_n(x)$  ряда Тейлора. Для этой цели получим несколько аналитических выражений для  $r_n(x)$ .

Можем записать  $\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$ . Отсюда  $f(x) = f(x_0) +$

$+\int_{x_0}^x f'(t)dt$ . Следовательно,  $r_0(x) = \int_{x_0}^x f'(t)dt$ . Величину  $x$  зафикси-

руем. Последний интеграл возьмём по частям, приняв  $f'(t) = u$ ,  $du = f''(t)dt$ ,  $dv = -d(x - t)$ ,  $v = -(x - t)$ . Тогда  $\int_{x_0}^x f'(t)dt =$

$= -f'(t)(x - t)|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt = f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt$ .

Следовательно,  $f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt$ . Мы по-

лучили  $r_1(x) = \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt$ . Этот интеграл также возьмём по

частям, положив  $du = f''(t)dt$ ,  $dv = (x - t)dt$ ,  $v = -\frac{1}{2}(x - t)^2$ .

$$\text{Получим } r_1(x) = \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt, \text{ т.е. } f(x) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt. \text{ По-}$$

этому  $r_2(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt$ . Взяв по частям и этот интеграл,

аналогично найдём  $r_3(x) = \frac{1}{3!} \int_{x_0}^x (x-t)^3 f^{IV}(t) dt$ . Продолжая этот процесс, на  $n$ -м шаге получаем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (3.54)$$

Соотношение (3.54) легко обосновать методом математической индукции. Форма записи остатка  $r_n(x)$  в виде (3.54) называется *интегральной*.

Применив к интегралу (3.54) обобщённую теорему о среднем, можем записать  $r_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt$ , где точка  $c$  расположена между  $x_0$  и  $x$ . Следовательно,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} - \quad (3.55)$$

*остаточный член в форме Лагранжа.*

Так как функция  $f^{(n+1)}(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\lim_{c \rightarrow x_0} f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(x_0)$ . Поэтому  $f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(x_0) + q(x)$ , где  $q(x)$  — величина бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ . Соотношение (3.55) можно переписать в виде

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} q(x)(x-x_0)^{n+1}.$$

Обозначим  $\frac{1}{(n+1)!} q(x)(x-x_0)^{n+1} = \alpha(x)$ . Величина  $\alpha(x)$  есть

бесконечно малая порядка выше  $(n + 1)$  относительно  $(x - x_0)$ , т.е.  $\alpha(x) = o((x - x_0)^{n+1})$ . Следовательно,

$$r_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1}) -$$

*форма Пеано остаточного члена.*

Если к интегралу (3.54) применить теорему о среднем, то получим  $r_n(x) = \frac{1}{n!}(x - c)^n f^{(n+1)}(c)(x - x_0)$ . Так как точка  $c$  лежит между  $x_0$  и  $x$ , то  $(x - c)^n = [(x - x_0) - \Theta(x - x_0)]^n = (x - x_0)^n(1 - \Theta)^n$ , где  $0 \leq \Theta \leq 1$ . Поэтому

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}(1 - \Theta)^n}{n!} -$$

*форма Коши остаточного члена.*

### 3.5.2. Приближённое вычисление значений функции

Для этой цели используются разложения в ряд Тейлора функции  $f(x)$ . Чтобы получать при этом более быстро сходящиеся ряды, используют различные приёмы. Проиллюстрируем это примерами.

*Пример 3.26.* Вычислить  $\ln 3$  с точностью до 0,001.

Решение. Использовать разложение

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (3.56)$$

непосредственно невозможно, так как ряд (3.56) в точке  $x = 2$  расходится.

Очевидно,  $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$ . Следовательно,  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . Этот ряд и используется для вычисления значений  $\ln x$  при  $|x| > 1$ .

Полагая  $\frac{1+x}{1-x} = 3$ , находим  $x = \frac{1}{2}$ . Следовательно,

$$\ln 3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}. \quad (3.57)$$

Если отбросить члены этого ряда, начиная с шестого, то  $r_5 = \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{12}} + \dots < \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3 \cdot 11 \cdot 2^{10}} = \frac{1}{33 \cdot 2^8} < 0,001$ . Для вычисления  $\ln 3$  до-



статочно взять пять слагаемых ряда (3.57):  $\ln 3 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{7 \cdot 64} + \frac{1}{9 \cdot 256} = 1 + 0,0833 + 0,0125 + 0,0022 + 0,0004 = 1,098$ .

*Пример 3.27.* Вычислить  $\sqrt{3}$  с точностью до 0,001.

Решение. Для вычисления корней используется биномиальный ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)x^n}{n!} + \dots$$

Этот ряд при всех значениях  $\alpha$  сходится в  $(-1, 1)$ . Если  $-1 < \alpha < 0$ , то ряд сходится в  $(-1, 1]$ , а если  $\alpha > 0$ , то ряд сходится в  $[-1, 1]$ .

Скорость сходимости биномиального ряда уменьшается с приближением значений  $|x|$  к единице. Поэтому для приближённых вычислений корней следует  $x$  подобрать таким, чтобы он был по модулю много меньше единицы. В данном примере можем записать  $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3 \cdot 49 \cdot 16}{49 \cdot 16}} = \frac{7}{4} \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{7}{4} \left(1 + \frac{1}{48}\right)^{-1/2}$ . Теперь, используя биномиальный ряд при  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{48}$ , получаем

$$\sqrt{3} = 1,75 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 48} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{48^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{48^3} + \dots\right).$$

Мы получили знакопеременный ряд, в котором уже третье слагаемое меньше 0,001. Поэтому с точностью до 0,001

$$\sqrt{3} = 1,75(1 - 0,0104) = 1,75 \cdot 0,9896 \approx 1,732.$$

*Пример 3.28.* Вычислить  $\sqrt{e}$  с точностью до 0,001.

Решение. Применяем ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.58)$$

при  $x = \frac{1}{2}$ . Получаем  $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2^3 6} + \frac{1}{2^4 24} + \frac{1}{2^5 120} + \dots$ . Для оценки  $r_n(x)$  — остатка ряда (3.58) запишем  $r_n(x)$  в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ где } 0 < c < \frac{1}{2}. \text{ При } x = \frac{1}{2} \text{ получаем}$$

$r_n(x) \leq \frac{3}{(n+1)!2^{n+1}}$ , так как  $e^c < 3$  при  $0 < c < \frac{1}{2}$ . При  $n = 4$  величина  $r_4 < 0,001$ . Поэтому

$$\sqrt{e} = 1 + 0,5 + 0,125 + 0,0208 + 0,0026 = 1,648.$$

### 3.5.3. Приближённое вычисление определённых интегралов

Если подынтегральная функция в интеграле  $\int_a^b f(x)dx$  разлагается в ряд Тейлора, то такой интеграл можно вычислить приближённо с любой степенью точности путём интегрирования степенных функций.

*Пример 3.29.* Вычислить  $I = \int_0^1 \cos x^2 dx$  с точностью  $\alpha = 0,001$ .

Решение. Разлагая функцию в ряд Тейлора по степеням  $x$ , получаем ряд  $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots$ , сходящийся на всей оси. Интегрируя почленно этот ряд в пределах от 0 до 1, находим  $\int_0^1 \cos x^2 dx = 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{13 \cdot 6!} + \dots$ . Мы получили знакочередующийся ряд, четвёртое слагаемое его  $\frac{1}{13 \cdot 720} < 0,001$ . Поэтому  $\int_0^1 \cos x^2 dx = 1 - 0,1 + 0,00463 \approx 0,905$ .

### 3.5.4. Интегрирование дифференциальных уравнений

Требуется найти решение  $y = y(x)$  дифференциального уравнения

$$y'' = F(x, y, y'), \quad (3.59)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1$ . Будем считать, что в окрестности начальных данных уравнение (3.59) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, а также, что решение  $y = y(x)$  представимо в виде суммы ряда Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots \quad (3.60)$$

Чтобы найти ряд (3.60) нужно вычислить его коэффициенты  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0), \dots$ , причём первые два определены начальными условиями  $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1$ . Укажем два метода отыскания этих коэффициентов. Значения всех производных функции  $y(x)$  в точке  $x_0$  можно найти последовательным дифференцированием по  $x$  функции  $F(x, y(x), y'(x))$ :

$$y'''(x_0) = \frac{dF(x_0, a_0, a_1)}{dx}, \dots, y^{(n)}(x_0) = \frac{d^{n-2}F(x_0, a_0, a_1)}{dx^{n-2}}, \dots$$

*Пример 3.30.* Найти пять членов разложением в ряд Тейлора решения  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y'' = xy'y'$ , удовлетворяющего условию  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

Решение. Имеем  $y'' = xy'y', y''(0) = 0; y''' = yy' + x(y')^2 + xy'y'', y'''(0) = 1; y^{(IV)} = 2(y')^2 + 2yy'' + 3xy'y'' + xy'y''', y^{(IV)}(0) = 2; y^{(V)} = 9y'y'' + 3yy''' + 3x(y'')^2 + 4xy'y''' + xy'y^{(IV)}, y^{(V)}(0) = 3$ . Следовательно,  $y(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots$ .

Метод неопределённых коэффициентов заключается в следующем. Ищем решение  $y(x)$  в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (3.61)$$

с неопределёнными коэффициентами  $a_n$ , которые требуется найти. Дифференцируя дважды ряд (3.61) почленно, получаем

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}. \quad (3.62)$$

Затем разлагаем в ряд Тейлора функцию  $F(x, y, y')$ , используя при этом ряды (3.62). Пусть

$$F(x, y, y') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n. \quad (3.63)$$

Вносим (3.62) и (3.63) в исходное уравнение. Получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $(x - x_0)$ , мы и получим необходимые соотношения для определения неизвестных коэффициентов  $a_n$ , причём коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  находим из начальных условий. Если эти коэффициенты оставить произвольными, то мы получим общее решение.

*Пример 3.31.* Найти общее решение уравнения  $y'' = y$  методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Ищем решение в виде ряда  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , тогда

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}, \quad \text{следовательно,} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad \text{Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях } x,$$

получаем  $n(n-1)a_n = a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$ . Отсюда находим

$$a_2 = \frac{a_0}{1 \cdot 2}, a_3 = \frac{a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, a_4 = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, a_5 = \frac{a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots,$$

$$a_{2n} = \frac{a_0}{(2n)!}, a_{2n-1} = \frac{a_1}{(2n-1)!}.$$

Таким образом, решение можно записать в виде  $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = a_0 \operatorname{ch} x + a_1 \operatorname{sh} x$ ,

что можно было получить и непосредственно, интегрируя данное линейное уравнение.

### 3.5.5. Применение рядов Тейлора к отысканию пределов и производных

Используя известные разложения в ряд Тейлора, можно находить некоторые пределы и производные.

*Пример 3.32.* Найти  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cos x - \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{1 - \cos x}$ .

Решение. Разложим в ряд Тейлора числитель и знаменатель данной дроби:

$$x \cos x - \sqrt{x} \sin \sqrt{x} = \left( x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots \right) - \left( x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \dots \right);$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

Поэтому  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cos x - \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{1 - \cos x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x^2}{3!} - \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} \right) x^3 + \dots}{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{6} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5!} \right) x + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots} = \frac{1}{3}.$$

*Пример 3.33.* Найти  $f^{(V)}(0)$ , если  $f(x) = e^{2x} \sin 3x$ .

Решение. Ряд Тейлора для  $f(x)$  можно получить как произведение рядов для функций  $e^{2x}$  и  $\sin 3x$ :

$$f(x) = \left( 1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \dots \right) \left( 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \dots \right).$$

Коэффициент  $a_5$  при  $x^5$  равен  $\frac{3^5}{5!} - \frac{2^2 \cdot 3^3}{3! \cdot 2!} + \frac{2^4 \cdot 3}{4!} = \frac{81}{40} - 9 + 2 = -\frac{199}{40}$ .

Следовательно,  $\frac{f^{(V)}(0)}{5!} = -\frac{199}{40}$ , т.е.  $f^{(V)}(0) = \frac{-199 \cdot 120}{40} = -597$ .

### 3.6. Ряды Лорана

Если в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  неаналитична, то для изучения поведения функции в окрестности этой точки ряды Тейлора не применимы. В этом подразделе мы рассмотрим обобщения степенных рядов, когда допускаются не только целые положительные степени, но и целые отрицательные. Такие ряды применяются для изучения функций в окрестности её точек неаналитичности.

#### 3.6.1. Строение области сходимости ряда Лорана. Теорема о представимости функции рядом Лорана

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (3.64)$$

называется *рядом Лорана*.

По определению будем считать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  называют *правильной частью* ряда Лорана. Его областью сходимости является круг  $|z - z_0| < R$  (включая случаи  $R = 0$ ,  $R = \infty$ ).

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$  или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \quad (3.65)$$

называемый *главной частью* ряда Лорана. Если обозначить  $z - z_0 = \frac{1}{t}$ , то (3.65) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}t^n. \quad (3.66)$$

Ряд (3.66) относительно  $t$  сходится в некотором круге  $|t| < r'$ . Тогда ряд (3.65) сходится в области  $|z - z_0| > \frac{1}{r'}$ . Пусть  $\frac{1}{r'} = r$ . Если  $r > R$ , то ряд (3.64) является расходящимся всюду, если же  $r < R$ , то областью сходимости является кольцо  $r < |z - z_0| < R$  с центром в точке  $z_0$ . Случаи  $r = 0$  и  $R = \infty$  не исключаются.

Из теоремы об аналитичности суммы функционального ряда (см. теорему 3.23) и теоремы Абеля (теорема 3.26) следует справедливость утверждения: “Сумма ряда (3.64) аналитична в кольце  $r < |z - z_0| < R$  его сходимости”.

Далее будем решать задачу, в некотором смысле обратную этому утверждению. Если функция аналитична в кольце, то возникает вопрос о возможности представимости её в виде суммы ряда Лорана.

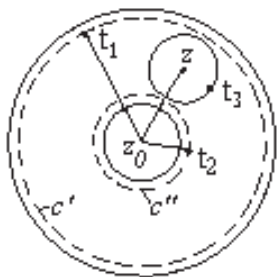
*Теорема 3.36.* Всякая функция, аналитическая в кольце

$$r < |z - z_0| < R, \quad (3.67)$$

может быть представлена в этом кольце в виде суммы  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , где  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}$ ;  $C_\rho$  — любая окружность с центром в точке  $z_0$ , лежащая в кольце (3.67).

*Доказательство.* Пусть  $z$  — любая точка, лежащая в кольце

(3.67). Точку  $z$  зафиксируем. Проведём окружности  $C'$  и  $C''$  с центром в точке  $z_0$  в кольце (3.67) так, чтобы точка  $z$  оказалась между ними. Символом  $\gamma$  обозначим окружность с центром в точке  $z$ , целиком лежащую в кольце  $C' - C''$ . К функции  $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t - z}$ , аналитичной в трёхсвязной области, ограниченной контурами  $C'$ ,  $C''$ ,  $\gamma$ , применим интегральную теорему Коши для многосвязной области:



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t_1)dt_1}{t_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} \frac{f(t_2)dt_2}{t_2 - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t_3)dt_3}{t_3 - z}. \quad (3.68)$$

Функция  $f(z)$  аналитична внутри контура  $\gamma$ , поэтому по интегральной формуле Коши  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t_3)dt_3}{t_3 - z} = f(z)$ . Из (3.68) получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t_1)dt_1}{t_1 - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} \frac{f(t_2)dt_2}{t_2 - z}. \quad (3.69)$$

Дробь  $\frac{1}{t_1 - z} = \frac{1}{(t_1 - z_0) - (z - z_0)}$  разложим по степеням  $(z - z_0)$ .

На  $C'$  справедливо соотношение  $\left| \frac{z - c_0}{t_1 - z_0} \right| = q_1 < r_1 < 1$ , поэтому

$$\frac{1}{t_1 - z} = \frac{1}{t_1 - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t_1 - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t_1 - z_0)^{n+1}}. \quad (3.70)$$

На  $C''$  справедливо соотношение  $\left| \frac{t_2 - z_0}{z - z_0} \right| = q_2 < r_2 < 1$ , следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - z} &= \frac{1}{(t_2 - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{t_2 - z_0}{z - z_0}} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_2 - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ряды (3.70) и (3.71) равномерно сходятся на соответствующих окружностях, так как они мажорантируются рядами  $\sum_{n=1}^{\infty} r_1^n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} r_2^n$ . Поэтому возможно их почленное интегрирование.

Внесём (3.70) и (3.71) в (3.69) и выполним почленное интегрирование.

$$\begin{aligned} \text{Получим } f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(t_1) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t_1 - z_0)^{n+1}} \right] dt_1 + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(t_2) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_2 - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \right] dt_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \oint_{C'} \frac{f(t_1) dt_1}{(t_1 - z_0)^{n+1}} \right] \times \\ &\times (z - z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \oint_{C''} f(t_2) (t_2 - z_0)^{n-1} dt_2 \right] \frac{1}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t_1) dt_1}{(t_1 - z_0)^{n+1}} = a_n, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(t_2) (t_2 - z_0)^{n-1} dt_2 = a_{-n}. \quad (3.72)$$

По теореме Коши для многосвязной области вместо окружностей  $C'$  и  $C''$  в (3.72) можно взять любую окружность  $\Gamma$  с центром в точке  $z_0$ , лежащую между  $C'$  и  $C''$ . Формулы (3.72) можно объединить в одну и записать  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Теперь

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \text{ Теорема доказана.}$$

*Теорема 3.37* (единственности). Если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (3.73)$$

сходится к функции  $f(z)$  в кольце

$$r < |z - z_0| < R, \quad (3.74)$$

то  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}$ , где  $\Gamma$  - любая окружность с центром  $z_0$ , лежащая в этом кольце.

*Доказательство.* Ряд (3.73) сходится равномерно в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу (3.74), следовательно, функция  $f(z)$  аналитическая. Пусть  $\Gamma$  окружность  $|z - z_0| = \rho$ ,

$r < \rho < R$ . Тогда ряд  $\frac{f(t)}{(t - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t - z_0)^{n-m-1}$  сходится

равномерно на  $\Gamma$ , а потому его можно интегрировать почленно:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\Gamma} (t - z_0)^{n-m-1} dt. \quad (3.75)$$

Ранее нами показано (см. примеры 2.2 и 2.3), что

$$\oint_{|t-z_0|=\rho} (t - z_0)^{n-m-1} dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n - m - 1 \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n - m - 1 = -1. \end{cases}$$

Учитывая это замечание, из (3.75) получаем  $a_m =$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{m+1}}. \text{ Отсюда и из теоремы (3.36) следует, что}$$

$f(z)$  разлагается в ряд Лорана единственным образом. Теорема доказана.

### 3.6.2. Разложение функций в ряд Лорана в окрестности $\infty$

Мы будем говорить, что функция  $f(z)$  аналитична в окрестности  $\infty$ , если она аналитична в области  $|z| > R$ .

Если функция  $f(z)$  разложена в ряд Лорана по степеням  $z$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (3.76)$$

сходящийся к ней в кольце  $R < |z| < \infty$ , то мы будем говорить, что функция разложена в ряд Лорана в окрестности  $\infty$ .



Ряд  $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$  называют *правильной частью* ряда (3.76). При  $z \rightarrow \infty$  члены его стремятся к нулю.

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  называется *главной частью* ряда Лорана в окрестности  $\infty$

*Пример 3.34.* Дана функция  $f(z) = \frac{1}{(2-z)(z+3)}$ . Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в областях: а)  $D_1 : |z| < 2$ ; б)  $D_2 : 2 < |z| < 3$ ; в)  $D_3 : |z| > 3$ .

Решение. а) Находим  $\frac{1}{(2-z)(z+3)} = \frac{1}{5(2-z)} + \frac{1}{5(z+3)}$ . В области  $D_1$ :

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \quad (a)$$

При  $|z| < 3$  получаем

$$\frac{1}{3+z} = \frac{1}{3[1-(-z/3)]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (-1)^n}{3^{n+1}}. \quad (б)$$

Таким образом, в  $D_1$  имеет место

$$\frac{1}{(2-z)(3+z)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \right] z^n.$$

В  $D_1$  функция  $f(z)$  представлена в виде суммы ряда Тейлора.

б) В области  $D_2$  разложение (а) не имеет места, разложение (б) сохраняется. В  $D_2$  можем записать

$$\frac{1}{2-z} = \frac{-1}{z(1-2/z)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}. \quad (в)$$

В  $D_2$  имеем разложение

$$\frac{1}{(2-z)(3+z)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

в) В области  $D_3$  не сохраняется разложение (б), так как в ней  $|z| > 3$ . В этой области  $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z[1-(-3/z)]} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{z^n}$ . Разложение (в) сохраняется. В  $D_3$

$$\frac{1}{(2-z)(3+z)} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}.$$

В последнем случае имеем разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности  $\infty$ .

## 4. Особые точки. Вычеты и их приложения

### 4.1. Изолированные особые точки

#### 4.1.1. Классификация изолированных особых точек. Устранимые особые точки

Точка  $z_0$  называется *особой* для функции  $f(z)$ , если функция в этой точке не является аналитической.

Точка  $z_0$  называется *изолированной* особой, если существует некоторая окрестность точки  $z_0$ , в которой нет других особых точек, кроме  $z_0$ .

В основу классификации изолированных особых точек положим поведение предела функции при  $z \rightarrow z_0$ .

Изолированная особая точка  $z_0$  называется:

- 1) *устранимой* особой, если конечен  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ;
- 2) *полюсом*, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ;
- 3) *существенно* особой точкой, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует.

Точки, в которых функция аналитична, будем называть *правильными*.

*Пример 4.1.* Пусть  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ . Функция аналитична везде, кроме точки  $z_0 = 0$ . Эта точка является изолированной особой. Найдём  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$ . Следовательно, точка  $z_0 = 0$  является устранимой особой.

*Пример 4.2.* Точка  $z_0 = 1$  является для функции  $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$  изолированной особой. Выбрав две последовательности:  $z_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$  и  $z'_n = 1 + \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ , видим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = 1$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = 1$ , т.е.  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$  не существует, следовательно, точка  $z_0 = 1$  для функции  $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$  является существенно особой. Если точка  $z_0$  изолированная особая для  $f(z)$ , то ряд Лорана  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  сходится к  $f(z)$  в кольце вида  $0 < |z-z_0| < R$ , т.е. во всём круге  $|z-z_0| < R$ , кроме точки  $z_0$ .

При изучении изолированных особых точек мы будем исследовать характер поведения ряда Лорана в окрестности этих точек.

*Теорема 4.1.* Для того, чтобы  $z_0$  была устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана в окрестности  $z_0$  функции  $f(z)$  не содержал главной части, т.е. имело место

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $z_0$  — устранимая особая точка. В окрестности точки  $z_0$  функция  $f(z)$  ограничена, как имеющая конечный предел при  $z \rightarrow z_0$ , т.е.  $|f(z)| < M < \infty$ .

Оценим коэффициенты  $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t)(t - z_0)^{n-1} dt$ , где  $\Gamma$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $z_0$ , ряда Лорана для  $f(z)$ .

Находим  $|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} |f(t)||t - z_0|^{n-1} ds \leq \frac{M}{2\pi} \rho^{n-1} 2\pi\rho = M\rho^n$ . Поскольку  $\rho$  можно выбрать сколько угодно малым, то отсюда следует, что  $a_{-n} = 0$ , и ряд Лорана для  $f(z)$  в окрестности  $z_0$  имеет вид (4.1).

Обратно, если имеет место разложение (4.1), то  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$  и точка  $z_0$  устранимая особая. Мы попутно доказали, что изолированная особая точка является устранимой особой тогда и только тогда, когда  $f(z)$  ограничена в окрестности этой точки.

*Замечание.* Особую устранимую точку можно "устранить" доопределив или переопределив функцию  $f(z)$  в точке  $z_0$ , положив  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ . Новая функция особенности в точке  $z_0$  иметь не будет, т.е. будет аналитической.

### 4.1.2. Полюсы

Изучение полюсов функции можно свести к изучению нулей другой функции, указанной в следующей теореме.

*Теорема 4.2.* Функция  $f(z)$ , аналитическая в некоторой окрестности точки  $z_0$ :  $0 < |z - z_0| < R$ , имеет в точке  $z_0$  полюс тогда и только

тогда, когда функция  $g(z) \neq 0$ ,  $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{если } z \neq z_0, \\ 0, & \text{если } z = z_0 \end{cases}$  аналитическая в точке  $z_0$  и имеет в этой точке нуль.

*Доказательство.* Пусть точка  $z_0$  — полюс для  $f(z)$ . Из определения полюса следует, что в некоторой окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$

функция  $f(z)$  в нуль не обращается. Следовательно, в этой окрестности аналитична функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ,  $z \neq z_0$ .

Положив  $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ , получим, что функция  $g(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и имеет в ней нуль.

Обратно, если  $g(z) \neq 0$  аналитична в точке  $z_0$  и  $z_0$  её нуль, то в некоторой окрестности точки  $z_0$  функция  $g(z)$  не имеет других нулей (см. теорему 3.33). Следовательно, в окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$  аналитична функция  $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ , а так как  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \infty$ , то точка  $z_0$  для функции  $f(z)$  является полюсом. Теорема доказана.

*Определение.* Кратность нуля  $z = z_0$  функции  $g(z)$  называется *кратностью* или *порядком* полюса  $z_0$  функции  $f(z)$ .

*Теорема 4.3.* Точка  $z_0$  является  $m$ -кратным полюсом функции  $f(z)$  тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (4.2)$$

где  $\psi(z)$  — аналитическая в точке  $z_0$  функция и  $\psi(z_0) \neq 0$ .

*Доказательство.* Пусть точка  $z_0$  —  $m$ -кратный полюс функции  $f(z)$ . Тогда функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ,  $z \neq z_0$ ,  $g(z_0) = 0$  имеет в этой точке  $m$ -кратный нуль, т.е.  $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  — аналитическая в  $z_0$  функция и  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Поэтому  $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)}$ ,  $z \neq z_0$ . Так как  $\varphi(z) \neq 0$ , то функция  $\frac{1}{\varphi(z)} = \psi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\psi(z_0) \neq 0$ , следовательно,  $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}$ , и мы получили равенство (4.2).

Обратно, если имеет место равенство (4.2), то  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , и в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  имеет полюс. Покажем, что этот полюс является  $m$ -кратным. В нашем случае  $g(z) = \frac{(z - z_0)^m}{\psi(z)} = \frac{1}{f(z)}$ .

Функция  $\frac{1}{\psi(z)}$  аналитична в точке  $z_0$ , так как  $\psi(z_0) \neq 0$ . Обозначая  $\frac{1}{\psi(z)} = \varphi(z)$ , получаем  $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  — аналитическая в точке  $z_0$  функция, причём  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Отсюда следует, что

функция  $g(z)$  в точке  $z_0$  имеет  $m$ -кратный нуль. Следовательно, в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  имеет  $m$ -кратный полюс.

*Теорема 4.4.* Для того, чтобы изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности  $z_0$  функции  $f(z)$  содержала лишь конечное число членов, т.е. ряд Лорана имел вид

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \quad (4.3)$$

При этом старшая отрицательная степень  $(z-z_0)$ , входящая в (4.3), совпадает с порядком полюса.

*Доказательство.* Пусть  $z_0$  —  $m$ -кратный полюс функции  $f(z)$ .

Тогда  $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ , где  $\psi(z)$  — аналитическая в  $z_0$  функция, причём  $\psi(z_0) \neq 0$ . Имеет место

$$\psi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_m(z-z_0)^m + \dots, \quad a_0 = \psi(z_0) \neq 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_m(z-z_0)^m + \dots}{(z-z_0)^m} = \\ &= \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + a_m + \\ &+ a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ряд (4.4) лишь обозначениями отличается от ряда (4.3).

Пусть имеем ряд (4.3), причём  $a_{-m} \neq 0$ . Тогда

$$f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^m + \dots \quad (4.5)$$

Ряд (4.5) сходится в некоторой окрестности точки  $z_0$ , в той же, где и ряд (4.3), а также и в точке  $z_0$ . Обозначим сумму этого ряда через  $\psi(z)$ . Эта функция аналитична в точке  $z_0$  и  $\psi(z_0) = a_{-m} \neq 0$ .

Из (4.5) получаем  $f(z)(z-z_0)^m = \psi(z)$ . Отсюда  $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ .

Следовательно, в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  имеет  $m$ -кратный полюс.

*Пример 4.3.* Охарактеризовать точку  $z_0 = 3$  для функции

$$f(z) = \frac{e^{(z-3)^2} - 1}{\sin(z-3) - (z-3)}.$$

*Решение.* Рассмотрим функции  $f_1(z) = e^{(z-3)^2} - 1$  и  $f_2(z) = \sin(z-3) - (z-3)$ . Находим, что точка  $z_0 = 3$  для функции  $f_1(z)$  является нулём порядка 2, а для функции  $f_2(z)$  — нулём порядка 3, следовательно,  $f_1(z) = (z-3)^2\varphi_1(z)$ ,  $f_2(z) = (z-3)^3\varphi_2(z)$ ,

где функции  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  аналитичны в точке  $z_0 = 3$  и не обращаются в нуль в этой точке. Обозначим  $\psi(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$ , причём, так как  $\varphi_2(3) \neq 0$ , то функция  $\psi(z)$  также аналитична и  $\psi(3) \neq 0$ . Теперь можем записать  $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\psi(z)}{z-3}$ . По теореме 4.3 точка  $z_0 = 3$  для  $f(z)$  является полюсом кратности 1 или простым полюсом.

*Пример 4.4.* Охарактеризовать точку  $z_0 = 1$  для функции

$$f(z) = \frac{e^{z-1} - (z-1) - 1}{(z-1)^4}.$$

Решение. Ряд Лорана в окрестности  $z_0 = 1$  данной функции имеет вид  $f(z) = \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cdot (z-1) + \dots$ . По теореме 4.4 точка  $z_0 = 1$  для данной функции является полюсом второй кратности.

### 4.1.3. Существенно особые точки

*Теорема 4.5.* Для того, чтобы точка  $z_0$  была существенно особой для функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  содержала бесконечное число членов.

Действительно, в окрестности существенно особой точки главная часть ряда Лорана не может отсутствовать (тогда по теореме 4.1 точка  $z_0$  была бы устранимой) и не может содержать конечного числа членов (тогда точка  $z_0$  была бы полюсом).

*Теорема 4.6 (Сохоцкого).* Если точка  $z_0$  существенно особая функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $A$  (конечного или нет) можно найти такую последовательность  $\{z_n\}$ , сходящуюся к  $z_0$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

Теорему примем без доказательства.

*Пример 4.5.* Охарактеризовать точку  $z_0 = 4$  для функции

$$f(z) = (z-4)^2 \exp\left(\frac{1}{z-4}\right).$$

Решение. Ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0 = 4$  имеет вид  $f(z) = (z-4)^2 + (z-4) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!(z-4)} + \frac{1}{4!(z-4)^2} + \dots$  и содержит бесконечно много отрицательных степеней, следовательно, по теореме 4.5 точка  $z_0 = 4$  для  $f(z)$  является существенно особой.

#### 4.1.4. Характер точки $\infty$

Точку  $\infty$  можно классифицировать по тому же принципу, что и конечные точки.

Точка  $\infty$  называется изолированной особой для функции  $f(z)$ , если существует внешность некоторого круга  $|z| > R$  с центром в начале координат, в котором функция  $f(z)$  не имеет особых точек, при этом  $\infty$  называется:

- 1) *устранимой особой*, если конечен  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ;
- 2) *поллюсом*, если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ;
- 3) *существенно особой* точкой, если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  не существует.

Разлагая функцию  $f(z)$  в окрестности точки  $\infty$  в ряд Лорана, получим  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ .

Напомним, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  называется главной частью ряда Лорана функции  $f(z)$  в окрестности  $\infty$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$  — правильной.

Теоремы 4.1, 4.4, 4.5 переносятся и на рассматриваемый случай, что легко доказать, сделав предварительно замену  $z = \frac{1}{z'}$ . Тогда точка  $z = \infty$  отобразится в точку  $z' = 0$ , причём характер точки  $z' = 0$  для функции  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$  совпадает с характером точки  $\infty$  для функции  $f(z)$ .

Таким образом, изучение точки  $z = \infty$  можно свести к изучению точки  $z' = 0$  функции  $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ .

Например, точка  $\infty$  для функции

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (4.6)$$

является существенно особой, так как разложение функции  $e^z$  в ряд по степеням  $z$  содержит бесконечное число положительных степеней. Заметим, что разложение (4.6) можно считать рядом Лорана в окрестности  $\infty$  для функции  $e^z$ , так как этот ряд сходится на всей плоскости, в том числе и при каждом  $z$  из области  $|z| > R$ , при любом  $R$ .

Отсюда следует, что  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  не существует. Точка  $\infty$  является существенно особой и для функций  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ .

## 4.2. Вычеты

### 4.2.1. Вычет относительно конечной точки

Если в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  аналитична, то  $\oint_C f(z)dz = 0$ , где

$C$  — любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области  $D$  аналитичности  $f(z)$ . Пусть  $z_0$  — изолированная особая точка;  $C_1$  и  $C_2$  — два любых контура, содержащих внутри точку  $z_0$  и не содержащих других особых точек. По теореме Коши для многосвязной области  $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$ . (Напомним, что направление обхода замкнутых контуров принято против часовой стрелки.) Таким образом, значение интеграла от  $f(z)$  не зависит от выбора контура, а зависит только от характера точки  $z_0$ . Это даёт основание для следующего определения.

*Определение.* Вычетом функции  $f(z)$  относительно  $z_0$  называется интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz$ , если выполняются следующие условия:

1) точка  $z_0$  лежит внутри контура  $C$ ; 2) контур  $C$  не содержит внутри себя особых точек, отличных от  $z_0$ ; 3) на контуре  $C$  нет особых точек.

Обозначают  $\text{Res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz$ .

Если  $z_0$  — правильная точка, то, очевидно,  $\text{Res}[f(z); z = z_0] = 0$ .

*Теорема 4.7.* Вычет  $\text{Res}[f(z); z = z_0]$  равен коэффициенту  $a_{-1}$  разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в проколотой окрестности  $0 < |z - z_0| < R$  точки  $z_0$ .

Действительно, ранее получено, что если  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ,

то  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}$ , где  $C$  — любой контур в  $0 < |z - z_0| < R$ .

Видим, что

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(t)dt = \text{Res}[f(z); z = z_0]. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что вычет относительно устранимой конечной особой точки равен нулю.



*Пример 4.6.* Найти  $\text{Res} \left[ z \exp \left( \frac{1}{1-z} \right); z = 1 \right]$ .

Решение. Можем записать

$$\begin{aligned} z \exp \left( -\frac{1}{z-1} \right) &= (z-1) \exp \left( -\frac{1}{z-1} \right) + \exp \left( -\frac{1}{z-1} \right) = \\ &= (z-1) \left[ 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{6(z-1)^3} + \dots \right] + \\ &+ \left[ 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a_{-1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ , а потому и

$$\text{Res} \left[ z \exp \left( \frac{1}{1-z} \right); z = 1 \right] = -\frac{1}{2}.$$

*Пример 4.7.* Найти  $\text{Res} \left[ \frac{1+z^8}{z^6(2+z)}; z = 0 \right]$ .

Решение. Так как  $\frac{1+z^8}{z^6(2+z)} = \left( z^2 + \frac{1}{z^6} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} =$

$$= \left( z^2 + \frac{1}{z^6} \right) \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} - \frac{z^5}{32} + \dots \right)$$

в области  $0 < |z| < 2$ , то  $a_{-1} = \text{Res} \left[ \frac{1+z^8}{z^6(2+z)}; z = 0 \right] = -\frac{1}{64}$ .

#### 4.2.2. Формулы для вычисления вычетов относительно полюса

В случае полюсов, наряду с формулой (4.7), существуют для вычисления вычетов и другие формулы. Получим их.

Пусть точка  $z_0$  — простой полюс для  $f(z)$ . Тогда  $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ . Отсюда находим  $a_{-1} = \text{Res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$ . Таким образом, если  $z_0$  — простой полюс, то справедлива формула

$$\text{Res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z). \quad (4.8)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  — аналитические функции в  $z_0$ , причём  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ , т.е. для  $\psi(z)$  точка  $z_0$  является простым нулём,

а для  $f(z)$  — простым полюсом. Применяя формулу (4.8), находим

$$\operatorname{Res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

т.е.  $\operatorname{Res} \left[ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}; z = z_0 \right] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ , если  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Если  $z_0$  —  $m$ -кратный полюс для  $f(z)$ , то  $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$ ,  $(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots$ . Дифференцируя это соотношение  $(m - 1)$  раз и переходя к пределу при  $z \rightarrow z_0$ , получаем

$$\operatorname{Res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z). \quad (4.9)$$

*Пример 4.8.* Найти  $\operatorname{Res} \left[ \frac{\sin 2z}{(z - 3)^4}; z = 3 \right]$ .

Решение. Применяя формулу (4.9), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{\sin 2z}{(z - 3)^4}; z = 3 \right] &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d^3}{dz^3} \sin 2z = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 3} (-8 \cos 2z) = \\ &= -\frac{4}{3} \cos 6. \end{aligned}$$

### 4.2.3. Вычет относительно $\infty$

Пусть  $\infty$  — изолированная особая точка. Вычетом в  $\infty$  функции  $f(z)$  называется величина  $\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$ , где

$\Gamma$  — некоторый контур, во внешности которого нет конечных особых точек функции  $f(z)$ .

Если ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности  $\infty$  имеет вид  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ , то  $\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = -a_{-1}$ .

Если  $\infty$  — устранимая особая точка, то  $f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$ ,  $|z| > R$ . Дифференцируя этот ряд, получим  $f'(z) = -\frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{2a_{-2}}{z^3} - \dots$ ,  $|z| > R$ . Отсюда

$$\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z). \quad (4.10)$$

Видим, что в бесконечно удалённой точке вычет может не равняться нулю и в случае, когда эта точка — устранимая особая. В конечной же устранимой особой точке, как мы видели ранее, вычет всегда равен нулю.

Если  $\infty$  —  $m$ -кратный полюс, то в некоторой области  $|z| > R$  имеет место  $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$ .

Дифференцируя  $m + 1$  раз, получаем

$$f^{(m+1)}(z) = \frac{(-1)^{m+1}(m+1)!a_{-1}}{z^{m+2}} - \frac{(-1)^{m+1}(m+2)!a_{-2}}{z^{m+3}} + \dots,$$

где дальнейшие слагаемые имеют в знаменателях степени  $z$  выше  $(m + 3)$ . Следовательно,

$$\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = -a_{-1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)]. \quad (4.11)$$

Формулы (4.10) и (4.11) получены М.Р. Куваевым.

Вычисление вычета в  $\infty$  можно свести к вычислению вычета в нуле, если сделать замену  $z = \frac{1}{t}$ . В результате получим

$$\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = -\operatorname{Res} \left[ f \left( \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{t^2}; t = 0 \right].$$

*Пример 4.9.* Найти  $\operatorname{Res} \left[ \frac{z^2}{z+2}; z = \infty \right]$ .

Решение. Так как  $\frac{z^2}{z+2} = z \left( 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots \right)$ ,  $|z| > 2$ , то  $-a_{-1} = \operatorname{Res} \left[ \frac{z^2}{z+2}; z = \infty \right] = -4$ . По формуле (4.11) получаем  $\operatorname{Res} \left[ \frac{z^2}{z+2}; z = \infty \right] = -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left( \frac{z^2}{z+2} \right)'' = -4 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3}{(z+2)^3} = -4$ . (В данном случае  $\infty$  является простым полюсом, т.е.  $m = 1$ .)

*Пример 4.10.* Найти  $\operatorname{Res} \left[ \frac{z^2 e^{1/z}}{2z^2 + 3z + 1}; z = \infty \right]$ .

Решение. Так как  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 e^{1/z}}{2z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{2}$ , то точка  $z = \infty$  является устранимой особой. По формуле (4.10) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{z^2 e^{1/z}}{2z^2 + 3z + 1}; z = \infty \right] &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{d}{dz} \cdot \frac{z^2 e^{1/z}}{2z^2 + 3z + 1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{(z^2 - z - 1)e^{1/z}}{(2z^2 + 3z + 1)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*Пример 4.11.* Найти  $\operatorname{Res} \left[ \frac{1 + z^8}{(z + 2)z^6}; z = \infty \right]$ .

*Решение.* Так как

$$\frac{1 + z^8}{(z + 2)z^6} = \frac{1 + z^8}{z^7} \cdot \frac{1}{1 + 2/z} = \left( \frac{1}{z^7} + z \right) \left( 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots \right)$$

при  $|z| > 2$ , то  $-a_{-1} = \operatorname{Res} \left[ \frac{1 + z^8}{(z + 2)z^6}; z = \infty \right] = -4$ .

#### 4.2.4. Основная теорема о вычетах

*Теорема 4.8.* Если функция  $f(z)$  аналитична в ограниченной односвязной области  $D$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , а  $\gamma$  — любой замкнутый контур, лежащий в  $D$  и содержащий внутри себя точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{m=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z = z_m]. \quad (4.12)$$

*Доказательство.* Проведём окружности  $\gamma_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) достаточно малого радиуса с центром в точках  $z_m$ , ориентируя их против часовой стрелки. Тогда по интегральной теореме Коши для многосвязной области (см. теорему 2.7)  $\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{m=1}^n \oint_{\gamma_m} f(z) dz$ . Отсюда и следует равенство (4.12).

*Следствие.* Пусть функция  $f(z)$  аналитична во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции  $f(z)$ , включая вычет в точке  $\infty$ , равна нулю, т.е.

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{Res}[f(z); z = z_m] + \operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = 0. \quad (4.13)$$

Действительно, по определению  $\operatorname{Res}[f(z); z = \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ , где  $\gamma$  — любой контур, во внешности которого нет особых точек

функции  $f(z)$ , а потому все особые точки лежат внутри  $\gamma$ . Теперь (4.13) следует из (4.12).

Применяя основную теорему о вычетах, можно вычислить многие интегралы по замкнутому контуру.

### 4.3. Приложение вычетов к вычислению интегралов

#### 4.3.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Применяя основную теорему о вычетах, можно вычислять многие контурные интегралы.

*Пример 4.12.* Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)}$ .

Решение. По основной теореме о вычетах

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} = \operatorname{Res} \left[ \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)}; z=2 \right] + \\ + \operatorname{Res} \left[ \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)}; z=3 \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{\sin 4z}{(z-3)(z-6)} + \\ + \lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-6)} = \cos 8 + \frac{5}{16} \sin 8 - \frac{\sin 12}{3}.$$

В некоторых случаях вычисление интеграла удаётся упростить применением вычета в  $\infty$ .

*Пример 4.13.* Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{z^{15} dz}{z^8 + 2}$ .

Решение. Видим, что  $I = -\operatorname{Res} \left[ \frac{z^{15} dz}{z^8 + 2}; z = \infty \right]$ . Так как

$$\frac{z^{15}}{z^8 + 2} = z^7 \frac{1}{1 + 2/z^8} = z^7 \left( 1 - \frac{2}{z^8} + \frac{4}{z^{16}} - \dots \right)$$

при  $|z| > \sqrt[8]{2}$ , то  $I = -2$ .

Если в этом примере не использовать понятие вычета в  $\infty$ , то пришлось бы вычислять восемь вычетов в точках  $z_m = \sqrt[8]{2}$ .

**4.3.2. Вычисление интегралов типа**  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ ,

где  $R(u, v)$  — рациональная функция своих аргументов

Пусть  $z = e^{it}$ . Тогда  $\sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ ,  $\cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ ,  
 $dt = -i \frac{dz}{z}$ . Когда  $t$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , переменная  $z$  пробегает окружность  $|z| = 1$  в положительном направлении. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = -i \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{dz}{z} = \\ &= \oint_{|z|=1} R_1(z) dz. \end{aligned}$$

Через  $R_1(z)$  обозначена некоторая рациональная функция от  $z$ . По основной теореме о вычетах  $I = 2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}[R_1(z); z = z_m]$ , где  $z_m$  — полюсы функции  $R_1(z)$ , попавшие внутрь окружности  $|z| = 1$ .

*Пример 4.14.* Вычислить интеграл  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}$ .

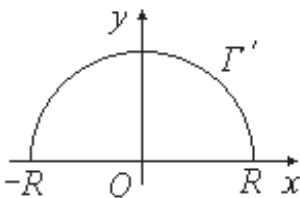
Решение.

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{[5 + (3/2)(z + 1/z)]z} = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{5z + (3/2)z^2 + 3/2} = \\ &= -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3} = -\frac{2i}{3} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z + 3)(z + 1/3)} = \\ &= 2\pi i \left( -\frac{2i}{3} \right) \text{Res} \left[ \frac{dz}{(z + 3)(z + 1/3)}; z = -\frac{1}{3} \right] = \frac{4\pi}{3(3 - 1/3)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**4.3.3. Вычисление интегралов типа**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

*Теорема 4.9.* Пусть функция  $f(z)$  аналитична всюду в верхней полуплоскости, кроме конечного числа особых точек, и аналитична на вещественной оси. Если при больших  $|z|$  и на вещественной оси выполняется неравенство  $|f(z)| < \frac{c}{|z|^{1+\delta}}$ ,  $\delta > 0$ ,  $c = \text{const}$ , то интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  сходится и  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_m \text{Res}[f(z); z = z_m]$ , где  $z_m$  — все особые точки  $f(z)$ , расположенные в верхней полуплоскости, т.е.  $\text{Im } z_m > 0$ .

*Доказательство.* Сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ , и притом аб-



солютная, следует из неравенства  $|f(x)| < \frac{c}{|x|^{1+\delta}}$  и сходимости  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|^{1+\delta}}$ . Возьмём окружность  $\Gamma$  столь большого радиуса  $R$ , чтобы все особые точки  $f(z)$  попали внутрь неё. Составим контур  $\mathcal{L}$  из верхней полуокружности  $\Gamma'$  и части вещественной оси  $(-R, R)$ . Тогда

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{m=1}^n \text{Res}[f(z); z = z_m] = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\Gamma'} f(z)dz. \quad (4.14)$$

Докажем, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ . Имеем

$$\left| \int_{\Gamma'} f(z)dz \right| < \int_{\Gamma'} |f(z)||dz| < \int_{\Gamma'} \frac{c ds}{|z|^{1+\delta}} = \frac{c\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi c}{R^\delta} \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow \infty$ , так как  $\delta > 0$ . Справедливость теоремы теперь следует из соотношения (4.14) при  $R \rightarrow \infty$ .

*Пример 4.15.* Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$ .

Решение. Ясно, что для функции  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}$  все условия предыдущей теоремы выполнены. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \{ \text{Res}[f(z); z = i] + \text{Res}[f(z); z = 3i] \} = \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{-1}{2i(-1+9)} - \frac{9}{(-9+1)6i} \right\} = 2\pi \left( -\frac{1}{16} + \frac{3}{16} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

#### 4.3.4. Вычисление несобственных интегралов

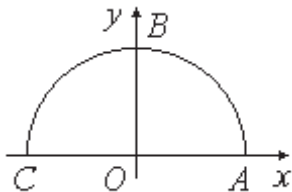
типа  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$ ,  $\alpha > 0$

Часто используется следующая лемма.

*Лемма (Жордана).* Пусть дано некоторое семейство дуг окружностей  $C_R : |z| = R$ ,  $\text{Im } z > -a$  ( $R \rightarrow \infty$ ,  $a > 0$  — фиксировано). Обозначим  $M(R) = \sup |f(z)|, z \in C_R$ . Если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0, \quad (4.15)$$

то  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0$ , где  $\alpha$  — действительно,  $\alpha > 0$ .



при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  справедливо неравенство  $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ . Теперь из (4.16)

получаем  $|e^{iaz}| \leq \exp\left(-\frac{2}{\pi} \alpha R \varphi\right)$ , следовательно,

$$\left| \int_{AB} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_{AB} |e^{iaz}| |f(z)| ds \leq RM(R) \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi} \alpha R \varphi\right) d\varphi = M(R) \cdot \frac{\pi}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha R}).$$

Отсюда и из условия (4.15) следует, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} e^{iaz} f(z) dz = 0$ .

Если на дуге  $CB$  отсчитывать полярный угол от отрицательной оси по часовой стрелке, то для интеграла  $\int_{CB} e^{iaz} f(z) dz$  получается такая же оценка, и утверждение леммы в случае  $a = 0$  доказано.

В операционном исчислении применяется лемма Жордана в несколько видоизменённой форме.

Пусть дано некоторое семейство дуг окружностей  $C_R : |p| = R, \operatorname{Re} p < a$ . Для любой функции  $F(p)$  такой, что величина  $M(R) = \sup |F(p)| \rightarrow 0, p \in C_R$  при  $R \rightarrow \infty$ , и любого вещественного положительного  $t$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (4.17)$$

Справедливость этого утверждения следует из доказанной леммы, если положить в ней  $iz = p$ .

**Теорема 4.10.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в верхней полуплоскости, кроме конечного числа особых точек  $z_m$ , аналитична на вещественной оси и удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда

интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \alpha > 0$  сходится и

$$I = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} [e^{i\alpha z} f(z); z = z_m], \operatorname{Im} z_m > 0.$$

**Доказательство.** Ограничимся случаем  $a = 0$ . Пусть  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ . Тогда на дуге  $C_R$

$$|e^{iaz}| = e^{-\alpha R \sin \varphi}. \quad (4.16)$$

Поскольку функция  $\sin \varphi$  выпукла, то её график лежит выше хорды, соединяющей точки  $(0, 0)$  и  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ , поэтому



*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{L}$  — замкнутый контур, образованный верхней частью  $C_R$  окружности  $|z| = R$  и интервалом  $(-R, R)$ . Величину  $R$  возьмём столь большой, чтобы все особые точки  $z_m$  попали внутрь  $\mathcal{L}$ . Тогда  $\int_{\mathcal{L}} e^{i\alpha z} f(z) dz = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} [e^{i\alpha z} f(z); z = z_m] = \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz + \int_{-R}^R e^{i\alpha x} f(x) dx$ ,  $\operatorname{Im} z_m > 0$ . Устремим  $R \rightarrow \infty$ . Первый интеграл по лемме Жордана стремится к нулю, а второй — к искомому интегралу. Теорема доказана.

*Замечание 1.* Если  $\alpha < 0$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = -2\pi i \sum_m \operatorname{Res} [e^{i\alpha z} f(z); z = z_m], \operatorname{Im} z_m < 0.$$

*Замечание 2.* Если значения функции  $f(z)$  при вещественных  $z$  вещественны, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} [e^{i\alpha z} f(z); z = z_m] \right], \quad (4.18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} [e^{i\alpha z} f(z); z = z_m] \right], \quad (4.19)$$

где  $\operatorname{Im} z_m > 0$ .

*Пример 4.16.* Вычислить  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 2x + 10}$ .

*Решение.* Сходимость данного интеграла следует из признака сравнения, поскольку  $\left| \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 10} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2 + 2x + 10} \right|$ , а интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$  сходится. Условия леммы Жордана для функции

$F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 10}$ , очевидно, выполнены. По формуле (4.18) нахо-

$$\begin{aligned} \text{дим } I &= \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{iz}}{(z+1+3i)(z+1-3i)}; z = -1+3i \right] \right\} = \\ &= \operatorname{Im} 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+3i} \frac{e^{iz}}{z+1+3i} = \frac{\pi e^{-3}}{3} \operatorname{Im} e^{-i} = -\frac{\pi e^{-3}}{3} \sin 1. \end{aligned}$$

## 5. Интегралы, зависящие от параметра. Г- и В- функции. Функции Бесселя

Слагаемые в сумме  $\sum_{n=1}^m f(n, y)$  представляют собой функции двух аргументов: аргумента  $n$ , принимающего целые положительные значения, по которому производится суммирование, и аргумента  $y$ , выступающего как параметр. В результате суммирования по  $n$  получаем некоторую функцию  $\psi(y)$  параметра  $y$ . В интегралах, зависящих от параметра, понятие суммы обобщается на случай, когда индекс суммирования меняется непрерывно в конечных или бесконечных пределах. Многие неэлементарные функции можно задать в виде подобных интегралов. Две из таких функций — Г- и В-функции, изучаются в этом разделе. Важный для приложений класс бесселевых функций, в выражение которых входит Г-функция, рассмотрен также в данном разделе.

### 5.1. Свойства функций, заданных собственными интегралами, зависящими от параметра

Пусть в прямоугольнике  $\Pi: \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  задана функция  $z = f(x, y)$ , интегрируемая по  $x$  на  $[a, b]$  при любом значении  $y$  из  $[c, d]$ . Тогда на  $[c, d]$  определена функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5.1)$$

Говорят, что функция  $I(y)$  задана *интегралом, зависящим от параметра*. В тех случаях, когда интеграл (5.1) удаётся вычислить, получим явно заданную функцию  $I(y)$ , и никаких новых задач не возникает. Мы будем изучать свойства функции  $I(y)$ , исходя из свойств подынтегральной функции  $f(x, y)$ , считая явный вид функции  $I(y)$  неизвестным. Заметим, что интеграл (5.1) представляет собой новый способ задания функциональных зависимостей, широко применяемый в различных областях математики и её приложениях.

#### 5.1.1. Непрерывность и переход к пределу под знаком интеграла

*Теорема 5.1.* Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi$ , то функция  $I(y)$  непрерывна на отрезке  $[c, d]$ .

*Доказательство.* Так как функция  $f(x, y)$  непрерывна в ограниченном замкнутом прямоугольнике  $\Pi$ , то она равномерно непрерывна в нём. Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , не зависящее от выбора точек  $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$  из  $\Pi$ , такое, что если  $|x_1 - x_2| < \delta$ ,  $|y_1 - y_2| < \delta$ , то

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (5.2)$$

Пусть  $x$  — любое из  $[a, b]$ , а  $y$  — любое из  $[c, d]$ . Дадим значению  $y$  приращение  $\Delta y$  такое, чтобы точка  $y + \Delta y$  не вышла из  $[c, d]$ . Положим в (5.2)  $x_1 = x_2 = x$ ,  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y + \Delta y$ . Тогда

$$|I(y_1) - I(y_2)| = |I(y) - I(y + \Delta y)| = \left| \int_a^b [f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y + \Delta y)| dx.$$

Так как  $|f(x, y) - f(x, y + \Delta y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  в силу (5.2), то  $|I(y) - I(y + \Delta y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$ , если  $|\Delta y| < \delta$ . Это и означает непрерывность функции  $I(y)$  на  $[c, d]$ . Теорема доказана.

*Следствие.* Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi$ , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx, \quad (5.3)$$

где  $y_0$  — любое из  $[c, d]$ .

Действительно, в силу доказанной в теореме непрерывности  $I(y)$   $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$ . Так как функция  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Pi$ , то  $f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , и формула (5.3) получена.

Если выполняется соотношение (5.3), то говорят, что возможен предельный переход под знаком интеграла.

*Пример 5.1.* Найти  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 x^2 e^{x^2 y^2} dx$ .

*Решение.* Функция  $f(x) = x^2 e^{x^2 y^2}$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi: \{0 \leq x \leq 1, c \leq y \leq d\}$ , где  $c < 0$ ,  $d > 0$ . Поэтому справедливо соотношение (5.3), т.е.  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 x^2 e^{x^2 y^2} dx = \int_0^1 \left[ \lim_{y \rightarrow 0} x^2 e^{x^2 y^2} \right] dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$ .

Заметим, что условие непрерывности функции  $I(y)$  в теореме 5.1, является достаточным, но не необходимым, т.е. функция  $I(y)$  может быть иногда непрерывной, хотя и не выполнены условия теоремы.

### 5.1.2. Дифференцируемость. Формула Лейбница

*Теорема 5.2* (о дифференцировании по параметру под знаком интеграла). Если функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны в прямоугольнике  $\Pi: \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то функция  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  дифференцируема на  $[c, d]$  и при этом справедлива формула Лейбница

$$\frac{dI}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad (5.4)$$

*Доказательство.* Надо показать, что

$$I'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Находим  $\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx$ . По формуле Лагранжа можно записать  $f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \Theta \Delta y) \Delta y$ , где  $0 \leq \Theta \leq 1$ . Следовательно,  $\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} =$

$= \int_a^b f'_y(x, y + \Theta \Delta y) dx$ , т.е.  $I'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b f'_y(x, y + \Theta \Delta y) dx$ . Так как функция  $f'_y(x, y + \Theta \Delta y)$  непрерывна в  $\Pi$ , то можно перейти к пределу под знаком интеграла согласно следствию из теоремы 5.1. Получаем  $I'(y) = \int_a^b \left\{ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y + \Theta \Delta y) \right\} dx$ , следовательно,

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \text{ Теорема доказана.}$$

Если имеет место формула (5.4), то говорят, что возможно дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Формула (5.4) позволяет упростить вычисление некоторых интегралов.

*Пример 5.2.* Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл  $I(m) = \int_0^1 x^m \ln^3 x dx$ ,  $m > 0$ .

Решение. Имеем  $I(m) = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ . Дифференцируя трижды этот интеграл по параметру  $m$ , на основании теоремы 5.2 по-

$$\begin{aligned} \text{лучаем } \int_0^1 x^m \ln x dx &= -\frac{1}{(m+1)^2}, \quad \int_0^1 x^m (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(m+1)^3}, \\ \int_0^1 x^m (\ln x)^3 dx &= -\frac{6}{(m+1)^4}. \end{aligned}$$

*Пример 5.3.* Найти  $I(y) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+y \cos x) dx}{\cos x}$ ,  $|y| < 1$ .

Решение. Подынтегральная функция  $f(x, y) = \frac{\ln(1+y \cos x)}{\cos x}$  имеет устранимый разрыв в точках  $\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ , так как

$\lim_{y \rightarrow y_0, x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(1+y \cos x)}{\cos x} = y_0$ . Этот разрыв можно устранить, по-

лагая  $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = y$ . Значение производной  $f'_y(x, y_0)$  в точке  $\left(\frac{\pi}{2}, y_0\right)$

определим из условия  $f'_y\left(\frac{\pi}{2}, y_0\right) = \lim_{y \rightarrow y_0, x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{1+y \cos x} = 1$ .

После такого доопределения функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  будут непрерывными в прямоугольнике  $\{0 \leq x \leq \pi, -1 + \varepsilon \leq y \leq 1 - \varepsilon\}$ ,

$0 < \varepsilon < 1$ . Применяя формулу (5.4), получим  $I'(y) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+y \cos x}$ .

Для вычисления интеграла  $I'(y)$  применим теорию вычетов (см. 4.3.2). Если  $y = 0$ , то  $I'(0) = \pi$ . Пусть  $y \neq 0$ . Положив  $z = e^{ix}$ ,

$$\text{получим } I'(y) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos x} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{-idz}{z \left[1+y \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} =$$

$$= 2\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{yz^2 + 2z + y}; z = -\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{2yz + 2} \Big|_{z = -\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Отсюда, интегрируя по  $y$ , находим  $I(y) = \pi \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + c = \pi \arcsin y + c$ . Так как  $I(0) = 0$ , то  $c = 0$ , следовательно,  $I(y) = \pi \arcsin y$ .

Рассмотрим случай, когда пределы интегрирования также зависят от параметра  $y$ . Пусть функция  $f(x, y)$  определена на замкну-

том множестве  $D : \{a(y) \leq x \leq b(y), c \leq y \leq d\}$ , причём кривые  $x = a(y)$  и  $x = b(y)$  не выходят за пределы прямоугольника  $\Pi: \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , и интегрируема по  $x$  на отрезке  $[a(y), b(y)]$  при любом фиксированном значении  $y$  из  $[c, d]$ . Тогда на сегменте

$[c, d]$  определена функция  $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ . Функция  $I(y)$  представлена интегралом, зависящим от параметра, пределы интегрирования которого также зависят от параметра  $y$ .

*Теорема 5.3.* Если функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны в прямоугольнике  $\Pi$ , а функции  $a(y)$  и  $b(y)$  дифференцируемы на  $[c, d]$  и удовлетворяют условию  $a \leq a(y) \leq b, a \leq b(y) \leq b$  при  $c \leq y \leq d$ , то

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \text{ дифференцируема на } [c, d] \text{ и при этом}$$

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx + f[b(y), y] \frac{db}{dy} - f[a(y), y] \frac{da}{dy}. \quad (5.5)$$

*Доказательство.* Функцию  $I(y)$  можно считать сложной функцией от  $y : I(y) = \Phi[y, a(y), b(y)]$ . Дифференцируя эту функцию по правилу дифференцирования сложной функции от нескольких аргументов, получаем

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \cdot \frac{db}{dy}. \quad (5.6)$$

По теореме 5.2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx. \quad (5.7)$$

По правилу дифференцирования интеграла по верхнему пределу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = -f[a(y), y], \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = f[b(y), y]. \quad (5.9)$$

Внося (5.7), (5.8), (5.9) в (5.6), получаем (5.5). Теорема доказана.

*Пример 5.4.* Найти  $I'(y)$ , если  $I(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{\sqrt{1-x^2}y} dx$ .

Решение. По формуле (5.5)

$$I'(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx - e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}} \sin y - e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}} \cos y.$$

### 5.1.3. Интегрируемость. Замена порядка интегрирования

*Теорема 5.4* (об интегрировании по параметру). Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $\Pi: \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то функция  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  интегрируема на  $[c, d]$  и при этом

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (5.10)$$

*Доказательство.* По теореме 5.1 функция  $I(y)$  непрерывна на  $[c, d]$ , а потому интегрируема. Справедливость формулы (5.10) следует из того, что в случае непрерывной функции  $f(x, y)$  каждый из повторных интегралов в (5.10) существует и равен двойному интегралу  $\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$ . Это доказано в теории двойных интегралов. Формула (5.10) иногда позволяет упростить вычисление некоторых интегралов.

*Пример 5.5.* Вычислить  $I(y) = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy$ ,  $b > a > 0$ , применяя

интегрирование по параметру интеграла  $\tilde{I}(y) = \int_a^b y^x dx$ .

Решение. Находим  $\tilde{I}(y) = \frac{y^x}{\ln y} \Big|_a^b = \frac{y^b - y^a}{\ln y}$ . На основании теоремы 5.4 можем записать  $\int_0^1 \tilde{I}(y) dy = \int_a^b \left[ \int_0^1 y^x dy \right] dx =$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{y^{x+1}}{x+1} \Big|_0^1 \right\} dx = \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

## 5.2. Несобственные интегралы 1-го рода, зависящие от параметра

Пусть функция  $f(x, y)$  определена в неограниченной полуполосе  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$  и пусть при каждом значении  $y$  на  $[c, d]$  сходится интеграл  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ . Тогда на  $[c, d]$  определена функция

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad (5.11)$$

называемая *несобственным интегралом первого рода*, зависящим от параметра. Изучение интегралов (5.11) можно свести к изучению функциональных рядов. Пусть дана неограниченная последовательность  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots$  точек луча  $[a, +\infty)$  ( $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = +\infty$ ). Определим функции  $I_m(y)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  равенствами

$$I_1(y) = \int_a^{x_1} f(x, y) dx, \quad I_2(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx, \dots, \quad I_m(y) = \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x, y) dx, \dots$$

Тогда  $I(y) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(y)$ . Мы получили функциональный ряд.

Как и в теории функциональных рядов, важным понятием для несобственных интегралов, зависящих от параметра, является равномерная сходимость.

Несобственный интеграл  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  называется равномерно сходящимся по параметру  $y$  (относительно параметра  $y$ ) к функции  $I(y)$  на сегменте  $[c, d]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $l = l(\varepsilon)$

такое, что при любом  $\mathcal{L} > l(\varepsilon)$  неравенство  $\left| I(y) - \int_a^{\mathcal{L}} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{\mathcal{L}}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$  выполняется одновременно для всех значений  $y$  из  $[c, d]$ .

*Пример 5.6.* Дан интеграл  $\int_0^{\infty} ye^{-yx} dx = I(y)$ . Найти область определения функции  $I(y)$  и исследовать интеграл на равномерную сходимость.

Решение. Зафиксируем  $y = y_0$ ,  $-\infty < y_0 < +\infty$ ,  $y(0) = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$ . Если  $y_0 > 0$ , то при  $x \rightarrow +\infty$  подынтегральная функция  $y_0 e^{-y_0 x} = f(x, y_0)$  является бесконечно малой, порядка выше первого, а потому интеграл  $\int_0^{+\infty} y_0 e^{-y_0 x} dx$  сходится. Если же  $y_0 < 0$ , то при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $f(x, y_0) = y_0 e^{-y_0 x} \rightarrow +\infty$ , а поэтому интеграл расходится. Следовательно, областью определения функции  $I(y)$  является луч  $[0, +\infty)$ . Исходя из определения, докажем равномерную сходимость интеграла на отрезке  $[c, d]$ ,  $c > 0$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Должно существовать число  $l = l(\varepsilon)$  такое, что при любом  $\mathcal{L} > l(\varepsilon)$  и всех  $y$  из  $[c, d]$  выполнялось бы  $\left| \int_{\mathcal{L}}^{\infty} ye^{-yx} dx \right| = |(-e^{-yx})|_{\mathcal{L}}^{\infty}| = e^{-\mathcal{L}y} < \varepsilon$ . В силу монотонного убывания функции  $e^{-\mathcal{L}y}$  на  $[c, d]$ ,  $c > 0$ , это



неравенство будет заведомо выполняться для всех  $y$  из  $[c, d]$ , если  $e^{-\mathcal{L}c} < \varepsilon$ , т.е. если  $\mathcal{L} > -\frac{\ln \varepsilon}{c}$ . Отсюда следует, что можно положить

$$l(\varepsilon) = -\frac{\ln \varepsilon}{c}.$$

Заметим, что на отрезке  $[0, d]$  интеграл сходится неравномерно, поскольку при  $y \rightarrow 0$  функция  $e^{-\mathcal{L}y} \rightarrow 1$ , поэтому неравенство  $e^{-\mathcal{L}y} < \varepsilon$  выполняться сразу для всех  $y$  из  $[0, d]$  не может.

*Теорема 5.5* (признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Если  $|f(x, y)| < g(x)$  в  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$ , причём интеграл  $\int_a^\infty g(x) dx$  сходится, то интегралы  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  и  $\int_a^\infty |f(x, y)| dx$  сходятся равномерно на  $[c, d]$ .

*Доказательство.* Из неравенств  $f(x, y) \leq |f(x, y)| < g(x)$ , признака сравнения сходимости несобственных интегралов и сходимости интеграла  $\int_a^\infty g(x) dx$  следует, что интегралы  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  и  $\int_a^\infty |f(x, y)| dx$  сходятся при всех значениях  $y$  из  $[c, d]$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Из сходимости интеграла  $\int_a^\infty g(x) dx$  следует, что найдётся такое  $l = l(\varepsilon)$ , что при  $\mathcal{L} > l(\varepsilon)$  будет выполняться неравенство  $\int_{\mathcal{L}}^\infty g(x) dx < \varepsilon$ . Но тогда в силу неравенств  $f(x, y) \leq |f(x, y)| < g(x)$  и свойств интегралов будут выполняться неравенства  $\left| \int_{\mathcal{L}}^\infty f(x, y) dx \right| \leq \int_{\mathcal{L}}^\infty |f(x, y)| dx < \varepsilon$  сразу для всех  $y$  из  $[c, d]$ . Это и означает, что интегралы  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  и  $\int_a^\infty |f(x, y)| dx$  сходятся равномерно на  $[c, d]$ .

*Пример 5.7.* Доказать, что интеграл  $I(y) = \int_0^\infty e^{-yx^2} dx$  сходится равномерно на  $[y_0, +\infty)$ , где  $y_0 > 0$ .

*Решение.* Так как  $0 < e^{-yx^2} \leq e^{-y_0x^2}$  при всех  $y \geq y_0$ , а интеграл  $\int_0^\infty e^{-y_0x^2} dx$  сходится при  $y_0 > 0$ , то по признаку Вейерштрасса данный интеграл на луче  $[y_0, +\infty)$  сходится равномерно. Можно доказать, что на  $(0, +\infty)$  этот интеграл сходится неравномерно.

Сформулируем несколько теорем, характеризующих свойства функций  $I(y)$ , заданных интегралом, зависящим от параметра.

*Теорема 5.6.* Если: 1) функция  $f(x, y)$  непрерывна в  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$ ; 2) интеграл  $I(y) = \int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится равномерно относительно  $y$  на  $[c, d]$ , то функция  $I(y)$  непрерывна на  $[c, d]$ .

Доказательство теоремы предлагается провести самостоятельно по аналогии с доказательством теоремы 3.21, заменяя остаток ряда  $r_n$  интегралом  $\int_c^{\infty} f(x, y) dy$ .

*Следствие.* Если выполнены все условия теоремы 5.6, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^{\infty} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] dx, \quad (5.12)$$

где  $y_0$  — любая точка из  $[c, d]$ . Если справедлива формула (5.12), то говорят, что возможен предельный переход под знаком интеграла.

*Теорема 5.7.* Если: 1) функция  $f(x, y)$  непрерывна в полуполосе  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$ ; 2) интеграл  $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$  сходится равномерно относительно  $y$  на  $[c, d]$ , то функция  $I(y)$  интегрируема на  $[c, d]$  и при этом справедлива формула

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left\{ \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^{\infty} \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 3.22. Предлагается доказать теорему самостоятельно.

*Пример 5.8.* Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\arctg sx - \arctg px}{x} dx$ ,  $s > p > 0$ .

Решение. Очевидно,  $\frac{\arctg sx - \arctg px}{x} = \int_p^s \frac{dy}{1 + (xy)^2}$ . Тогда

$I = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_p^s \frac{dy}{1 + (xy)^2} \right\} dx$ . Интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (xy)^2}$  сходится равномерно на отрезке  $p \leq y \leq s$ , так как  $\frac{1}{1 + (xy)^2} < \frac{1}{1 + (px)^2}$ , а

интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(px)^2}$  сходится. В полуполосе  $\Pi: \{0 \leq x \leq +\infty, p \leq y \leq s\}$  функция  $\frac{1}{1+(xy)^2}$  непрерывна, поэтому законна замена порядка интегрирования, следовательно,  $\int_p^s \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(xy)^2} \right\} dy = \int_p^s \left\{ \frac{\operatorname{arctg} xy}{y} \Big|_0^{+\infty} \right\} dy = \frac{\pi}{2} \int_p^s \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{s}{p} = I.$

*Теорема 5.8.* Если: 1) функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны в полуполосе  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$ ; 2) интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  сходится при всех  $y$  из  $[c, d]$ ; 3) интеграл  $\int_a^\infty f'_y(x, y) dx$  сходится равномерно по  $y$  на  $[c, d]$ , то функция  $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  дифференцируема на  $[c, d]$ , и имеет место формула Лейбница  $I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y) dx.$

*Доказательство.* Обозначим  $I^*(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y) dx.$  Требуется доказать, что  $I^*(y) = I'(y).$  По теореме 5.6 функция  $I^*(y)$  непрерывна на  $[c, d],$  а по теореме 5.7 можно проинтегрировать данный интеграл по параметру  $y$  под знаком интеграла от  $c$  до  $y,$  где  $y$  — любое из  $[c, d].$  Следовательно,  $\int_c^y I'(y) dy = \int_a^\infty \left\{ \int_c^y f'_y(x, y) dy \right\} dx.$  Но  $\int_c^y I^*(y) dy = \int_a^\infty [f(x, y) - f(x, c)] dx = \int_a^\infty f(x, y) dx - I(c).$  Мы получили

$$\int_c^y I^*(y) dy = \int_a^\infty f(x, y) dx - I(c). \quad (5.13)$$

Дифференцируя (5.13) по  $y,$  как по верхнему пределу, получаем  $I^*(y) = \frac{d}{dy} \left[ \int_a^\infty f(x, y) dx \right] = I'(y),$  т.е.  $I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y) dx$

Теорема доказана.

*Пример 5.9.* Найти  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^2}, y > 0$ .

Решение. Рассмотрим интеграл  $I(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{y+x^2}, y > 0$ . Пока-

жем, что для интеграла  $I(y)$  выполнены все условия теоремы 5.8:

1) функции  $f(x, y) = \frac{1}{y+x^2}$  и  $f'_y(x, y) = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$  непрерывны в полуполосе  $\Pi: \{0 \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}, c > 0$ ; 2) при любом  $y$  из  $[c, d]$  интеграл  $I(y)$  сходится,  $I(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$ ;

3) интеграл  $f'_y(x, y) = \int_0^{\infty} f'_y(x, y) dx = -\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^2}$  сходится равномерно по  $y$  на  $[c, d]$ , так как  $\frac{1}{(x^2+y)^2} < \frac{1}{(x^2+c)^2}$ , а инте-

грал  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+c}$  сходится. Используя формулу Лейбница, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^2} = -I'(y) = -\left(\frac{\pi}{2\sqrt{y}}\right)' = \frac{\pi}{4y\sqrt{y}}.$$

### 5.3. Несобственные интегралы 2-го рода, зависящие от параметра

Пусть функция  $f(x, y)$  определена в прямоугольнике  $\Pi: \{a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$ , не ограничена при  $x \rightarrow b-0$ , причём при каждом значении  $y$  из  $[c, d]$  сходится интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx =$

$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx$ . Тогда на  $[c, d]$  определена функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (5.14)$$

называемая *несобственным интегралом 2-го рода*.

Как и для несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра, для интегралов 2-го рода важным является понятие равномерной сходимости.

*Определение.* Интеграл (5.14) называется равномерно сходящимся к функции  $I(y)$  по параметру  $y$  (относительно параметра  $y$ ) на сегменте  $[c, d]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $l(\varepsilon)$  такое, что неравенство  $\left| I(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\lambda}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$  будет выполняться для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < \lambda < l(\varepsilon)$ , сразу для всех  $y$  из  $[c, d]$ .

Теоремы 5.5 — 5.8, сформулированные для несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра, можно соответствующим образом переформулировать и для интегралов 2-го рода.

Предлагаем читателю сформулировать и доказать эти теоремы самостоятельно в качестве упражнений. Заметим, что в этом случае вместо полуполосы  $\Pi: \{a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$  рассматривается прямоугольник  $\Pi: \{a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$ , а роль интеграла  $\int_{\mathcal{L}}^{\infty} f(x, y) dx$

играет остаток  $\int_{b-\lambda}^b f(x, y) dx$ .

Понятие интеграла, зависящего от параметра, можно распространить на криволинейные интегралы от функций вещественного аргумента, а также на интегралы от функций комплексного аргумента и получить следующие типы интегралов, зависящих от параметра  $\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} I_1(\eta) &= \int_{AB} u(x, y, \eta) dx + iv(x, y, \eta) dy, \\ I_2(\eta) &= \int_{AB} u(x, y, \eta) dl, \quad I_3(\eta) = \int_{AB} f(z, \eta) dz, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

где  $AB$  — некоторая кривая  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

В интеграле  $I_3(\eta)$  параметр  $\eta$  может принимать и комплексные значения.

Используя известные формулы, интегралы (5.15) можно свести к интегралам, зависящим от параметра, изученным нами в пп. 5.1, 5.2 и 5.3. Доказанные теоремы о свойствах функций, заданных интегралом, переносятся и на интегралы (5.15), если подынтегральные функции, получающиеся после преобразования этих интегралов в определённые, удовлетворяют условиям соответствующих теорем. С интегралами типа  $I_3(\eta) = \int_{AB} f(z, \eta) dz$  мы уже встречались при изучении интегральных формул Коши.

## 5.4. Г- и В-функции (эйлеровы интегралы)

Функцию вида

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (5.16)$$

называют *гамма-функцией* (Г-функция).

### 5.4.1. Область определения Г-функции. Непрерывность и дифференцируемость

Г-функция представляет собой интеграл, зависящий от параметра первого и второго рода одновременно. Можем записать  $\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ . Интеграл  $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$  при  $s \leq 0$  расходится, так как в этом случае функция  $x^{s-1} e^{-x}$  есть бесконечно большая при  $x \rightarrow 0$  порядка не ниже первого. При  $s > 0$  этот интеграл сходится, так как при  $0 < s < 1$  функция  $x^{s-1} e^{-x}$  является бесконечно большой порядка ниже первого. При  $s \geq 1$  функция  $x^{s-1} e^{-x}$  ограничена. Интеграл  $\int_1^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  сходится при любом  $s$ , так как подынтегральная функция  $x^{s-1} e^{-x}$  при  $x \rightarrow \infty$  является бесконечно малой порядка выше первого. Итак, Г-функция определена на множестве  $(0, +\infty)$ .

Легко доказать, что интеграл (5.16) равномерно сходится на  $[s_0, s]$ , где  $s_0 > 0$ ,  $s < \infty$ , а потому функция  $\Gamma(s)$  непрерывна на  $(0, +\infty)$ . При этом  $\lim_{s \rightarrow 0+0} \Gamma(s) = +\infty$ ,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s) = +\infty$ . Так как ин-

теграл  $\int_0^{+\infty} x^{s-1} (\ln x)^m e^{-x} dx$  сходится равномерно при  $m = 1, 2, \dots$  на

$[s_0, s]$ , где  $s_0 > 0$ ,  $s < \infty$ , то функция  $\Gamma(s)$  при  $0 < s < +\infty$  имеет производные всех порядков и при этом  $\Gamma^{(m)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} (\ln x)^m e^{-x} dx$ .

### 5.4.2. Первая рекуррентная формула.

#### График Г-функции

Интегрируя по частям, находим

$$s\Gamma(s) = s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx.$$

Мы получили

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (5.17)$$

Применяя формулу (5.17), можно вычисление  $\Gamma(s)$  при  $s > 1$  свести к значениям аргумента  $s < 1$ , так как  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \dots = s(s-1)\dots(s-k)\Gamma(s-k)$ , где  $0 < (s-k) < 1$ .

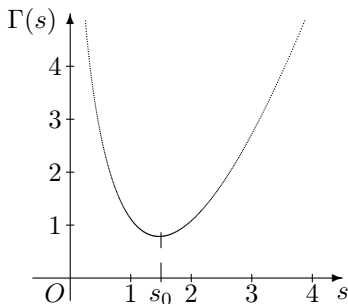
В частности, если  $s = n$  — натуральное, то

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots \Gamma(1).$$

Так как  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ , то

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5.18)$$

Таким образом,  $\Gamma$ -функция есть обобщение понятия факториала на любые положительные числа. Соотношение (5.18) доопределим при  $n = 0$  условием  $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$ . По определению положим  $0! = \Gamma(0+1) = 1$ .



Непосредственным вычислением получаем  $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$ , т.е.  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ , следовательно, по теореме Ролля в интервале  $1 < s < 2$  существует хотя бы одна точка  $s_0$ , в которой  $\Gamma'(s_0) = 0$ . Так как  $\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0$  при всех  $s > 0$ , то производная  $\Gamma'(s)$

монотонно возрастает при всех  $s > 0$  и не может иметь других корней, кроме  $s_0$ . В силу монотонного возрастания  $\Gamma'(s) < 0$  при  $s < s_0$  и  $\Gamma'(s) > 0$  при  $s > s_0$ . Следовательно, в точке  $s_0$  функция  $\Gamma(s)$  достигает минимума. Так как всюду  $\Gamma''(s) > 0$ , то график  $\Gamma(s)$  выпуклый вниз. Приближённо  $s_0 = 1,4616$ ,  $\Gamma(s_0) = 0,8856$ .

### 5.4.3. В-функция и её связь с $\Gamma$ -функцией.

#### Вторая рекуррентная формула

Функция двух аргументов вида

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx \quad (5.19)$$

называется *В-функцией* (бета-функцией). Интеграл (5.19) является несобственным 2-го рода. Точки  $x = 0$  (при  $s < 1$ ) и  $x = 1$  (при  $t < 1$ ) являются особыми. При некоторых соотношениях между  $s$  и  $t$  первообразная для  $x^{s-1}(1-x)^{t-1}$  выражается через элементарные функции. В общем случае  $B(s, t)$  является новой функцией, не сводимой к элементарным.

Легко показать, что В-функция определена при  $s > 0$ ,  $t > 0$ .

Примем без доказательства формулу, выражающую В-функцию через  $\Gamma$ -функцию:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}. \quad (5.20)$$

Из (5.20) следует, что  $B(s, t) = B(t, s)$ .

Если в интеграле (5.19) сделать замену  $x = \sin^2 \varphi$ , то  $B(s, t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1} \varphi \cos^{2t-1} \varphi d\varphi$ . При  $s = \frac{1}{2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$  получаем

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \text{ Но } B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \pi, \text{ следовательно,}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Если в интеграле  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  произ-

ведём замену  $x = z^2$ , то  $\Gamma(s) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{2s-1} dz$ , следовательно,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ . Мы получили  $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  — интеграл Пуассона.

Произведя в интеграле (5.19) замену  $x = \frac{y}{1+y}$ , получим

$$B(s, t) = \int_0^{\infty} \frac{y^{s-1} dy}{(1+y)^{s+t}}, \text{ следовательно, } B(s, 1-s) = \int_0^{\infty} \frac{y^{s-1} dy}{1+y}.$$

В [18, с.135—136] применением теории вычетов показано, что  $\int_0^{\infty} \frac{y^{s-1} dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin \pi s}$  ( $0 < s < 1$ ), т.е.  $B(s, 1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ , поэтому

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} -$$

вторая рекуррентная формула.

Первая и вторая рекуррентные формулы показывают, что таблицы значений  $\Gamma(s)$  достаточно составить для  $0 < s < \frac{1}{2}$ .

Применяя  $\Gamma$ - и В-функции, можно вычислить некоторые интегралы.

*Пример 5.10.* Вычислить интеграл  $I = \int_0^{\infty} x^m e^{-px^r} dx$  ( $m, p, r$  — положительные константы).



Решение. В интеграле  $I$  произведём замену  $px^r = y$ ,  $x = \left(\frac{y}{p}\right)^{1/r}$ ,

$dx = \frac{1}{rp^{1/r}} y^{(1-r)/r} dy$ . В результате получим

$$I = \frac{1}{rp^{(1+m)/r}} \int_0^{\infty} y^{(m+1-r)/r} e^{-y} dy = \frac{1}{rp^{(1+m)/r}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+1}{r}\right).$$

*Пример 5.11.* Вычислить интеграл  $I_2 = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} dx$ ,  $m > 0$ .

Решение. После замены  $x^m = y$ ,  $x = y^{1/m}$ ,  $dx = \frac{1}{m} y^{(1-m)/m} dy$

получаем  $I_2 = \frac{1}{m} \int_0^1 y^{(p-m)/m} (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$ .

$\Gamma$ -функцию можно определить на всей комплексной плоскости с помощью равенства  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ . Определённая таким образом функция  $\Gamma(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек  $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ , где она имеет простые полюсы.

## 5.5. Функции Бесселя

В подразделе 5.4 мы познакомились с  $\Gamma$ - и  $B$ -функциями, являющимися неэлементарными, определяемыми интегралами, зависящими от параметра. Многие важные для приложений классы неэлементарных (специальных) функций описываются дифференциальными уравнениями и выражаются в виде суммы степенного ряда. С одним из таких классов, классом цилиндрических функций, мы познакомимся в этом разделе, который можно рассматривать как приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений (см. п. 3.5.4).

### 5.5.1. Общее решение уравнения Бесселя

Уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (5.21)$$

где  $\nu$  — константа, называется *уравнением Бесселя порядка  $\nu$* , а любое его решение называется *цилиндрической функцией* или *функцией Бесселя*.

Будем искать решение уравнения (5.21) в виде обобщённого степенного ряда вида

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sigma+k}, \quad a_0 \neq 0, \quad (5.22)$$

где  $\sigma, a_k$  — константы, подлежащие определению. Находим

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma+k) a_k x^{\sigma+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma+k)(\sigma+k-1) a_k x^{\sigma+k-2}.$$

В результате подстановки значений  $y, y', y''$  в уравнение (5.21) получаем

$$\text{тождество } x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} \{[(\sigma+k)^2 - \nu^2] a_k x^k + a_k x^{k+2}\} \equiv 0. \text{ Для определения}$$

величин  $a_k$  и  $\sigma$  мы приходим к бесконечной системе  $(\sigma^2 - \nu^2)a_0 = 0, [(\sigma+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0, \dots, [(\sigma+k)^2 - \nu^2]a_k + a_{k-2} = 0, k = 2, 3, \dots,$  распадающейся на две подсистемы:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma^2 - \nu^2)a_0 = 0, \\ ((\sigma+2)^2 - \nu^2)a_2 + a_0 = 0, \\ ((\sigma+4)^2 - \nu^2)a_4 + a_2 = 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} ((\sigma+1)^2 - \nu^2)a_1 = 0, \\ ((\sigma+3)^2 - \nu^2)a_3 + a_1 = 0, \\ ((\sigma+5)^2 - \nu^2)a_5 + a_3 = 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Так как  $a_0 \neq 0$ , то  $\sigma^2 = \nu^2, \sigma = \pm\nu$ , и первая система при  $\sigma = \nu > 0$  принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 4(\nu+1)a_2 + a_0 = 0, \\ 8(\nu+2)a_4 + a_2 = 0, \\ \dots \\ 4m(\nu+m)a_{2m} + a_{2m-2} = 0, \end{array} \right. \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда находим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2(\nu+1)(\nu+2)},$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{2^6 3!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}, \dots,$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+m)}.$$

Величину  $a_0 \neq 0$  можно выбрать произвольно. Положим  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ . Тогда  $a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)}$ . Мы воспользовались формулой приведения

$$\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)(\nu+m-1) \dots (\nu+1)\Gamma(\nu+1).$$

Если  $\sigma^2 = \nu^2$ , то  $(\sigma+1)^2 \neq \nu^2$ , и из второй системы уравнений в (5.23) получаем  $a_1 = a_3 = \dots = a_{2m+1} = 0, m = 0, 1, 2, \dots$  Найденная в виде ряда (5.22) функция  $y(x)$  обозначается  $J_\nu$  и называется

функцией Бесселя первого рода положительного порядка. Имеем

$$J_\nu = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}. \quad (5.24)$$

Если  $\nu$  отрицательно, но не целое, то аналогично получим

$$J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}. \quad (5.25)$$

Функция  $J_{-\nu}$  называется *функцией Бесселя первого рода отрицательного порядка*. Ряды (5.24) и (5.25) сходятся на всей числовой оси, но если находиться только в области вещественных чисел, то следует считать  $x > 0$ , так как при некоторых значениях  $\nu$  величина  $x^\nu$  — мнимая, если  $x < 0$ . Функции  $J_\nu$  и  $J_{-\nu}$  при нецелых  $\nu$  линейно независимы, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0} J_{-\nu} = \infty$ . При

нецелых  $\nu$  общее решение уравнения (5.21) можно записать в виде  $y_\nu(x) = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}$ . Функции  $J_n$  и  $J_{-n}$  определим по непрерывности, переходя в (5.24) и (5.25) к пределу при  $\nu \rightarrow n$ . При этом из (5.24) сразу следует  $J_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)}$ . Если же

$\nu \rightarrow -n$ , то учитывая, что  $\frac{1}{\Gamma(s)} \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0, -1, \dots$ , получа-

ем  $J_{-n} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{-n+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n+m+1)}$ . Заменяем индекс суммирова-

ния, положив  $m = l + n$ . Тогда  $J_{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l} (x/2)^{n+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)}$ , т.е.

$J_{-n} = (-1)^n J_n$ . Функции  $J_n$  и  $J_{-n}$  являются решениями уравнения Бесселя, но линейно зависимыми. В этом случае, т.е. если  $\nu$  — натурально, вторым частным решением принимают *функцию Неймана*

$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}}{\sin \pi \nu}$ . Общее решение при  $\nu = n$  имеет

вид  $y_n(x) = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x)$ . Функции Бесселя можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость.

### 5.5.2. Рекуррентные формулы

Мы нашли, что  $J_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$ . Следовательно,

$$\frac{J_\nu}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}. \text{ Находим}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{J_\nu}{x^\nu} &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m-1}}{(m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} (x/2)^{2l+1}}{l! \Gamma(\nu+l+2)} = \\ &= -\frac{x}{2^{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (x/2)^{2l}}{l! \Gamma(\nu+l+2)} = -x \frac{J_{\nu+1}}{x^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Мы получили

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}}{x^{\nu+1}}. \quad (5.26)$$

Аналогично можно найти

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}. \quad (5.27)$$

С другой стороны, имеем  $\frac{d}{dx} \left( \frac{J_\nu}{x^\nu} \right) = \frac{x^\nu J'_\nu - \nu x^{\nu-1} J_\nu}{x^{2\nu}} = \frac{J'_\nu}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}}$ .

Применяя (5.26), получаем  $\frac{J'_\nu}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu}$ . Следовательно,

$$J'_\nu - \frac{\nu}{x} J_\nu = -J_{\nu+1}. \quad (5.28)$$

Из равенства  $\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu) = \nu x^{\nu-1} J_\nu + x^\nu J'_\nu$  получаем

$$J'_\nu + \frac{\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1}. \quad (5.29)$$

Из соотношений (5.28) и (5.29) находим

$$J'_\nu = \frac{1}{2} (J_{\nu-1} - J_{\nu+1}), \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}. \quad (5.30)$$

Заметим, что из (5.28) следует  $J'_0(x) = -J_1(x)$ . Пользуясь второй формулой в (5.30), можно все функции Бесселя целого порядка выразить через  $J_0$  и  $J_1$ . Если положим  $\nu = n - 1$ , то

$J_n = \frac{2n-2}{x} J_{n-1} - J_{n-2}$ . Отсюда

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0, \quad J_3 = \left( \frac{8}{x^2} - 1 \right) J_1 - \frac{4}{x} J_0 \text{ и т.д.}$$

### 5.5.3. Функции Бесселя с полуцелым индексом

Положим в (5.24)  $\nu = \frac{1}{2}$ :  $J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+1/2}}{m! \Gamma(m+3/2)}$ , но

$$\begin{aligned} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^{m+1}} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $m!2^m[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m + 1)] = (2m + 1)!$ , получаем

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m + 1)!}, \text{ т.е.}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (5.31)$$

Полагая в (5.25)  $\nu = -\frac{1}{2}$  и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (5.32)$$

Выражения для функций  $J_{n+1/2}$  и  $J_{-(n+1/2)}$  можно получить, применяя операции  $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$  по формулам (5.26) и (5.27) к (5.31) и (5.32).

Как видим, функции  $J_{n+1/2}$  и  $J_{-(n+1/2)}$  являются функциями элементарными.

#### 5.5.4. Асимптотический порядок цилиндрических функций

Из (5.31) и (5.32) следует, что  $J_{1/2}(x) \rightarrow 0$ ,  $J_{-1/2}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Это справедливо и для любой цилиндрической функции.

*Теорема 5.9.* Любая вещественная цилиндрическая функция представима в виде

$$y_{\nu}(x) = \gamma_{\infty} \cdot \frac{\sin(x + \delta_{\infty})}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (5.33)$$

где  $\gamma_{\infty} \neq 0$ ,  $\delta_{\infty}$  — константы, а  $o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$  означают члены, порядок малости которых при  $x \rightarrow \infty$  не ниже величины  $\frac{1}{x^{3/2}}$ .

Теорему примем без доказательства.

Первое слагаемое в (5.33) называется *главным членом* асимптотического разложения цилиндрической функции.

*Теорема 5.10.* Любая цилиндрическая функция однозначно определяется главным членом её асимптотического разложения.

*Доказательство.* Предположим, что имеется две различные цилиндрические функции  $\bar{y}_{\nu}$  и  $\hat{y}_{\nu}$ :  $\bar{y}_{\nu} = \bar{\gamma}_{\infty} \frac{\sin(x + \bar{\delta}_{\infty})}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ ,

$\hat{y}_\nu = \hat{\gamma}_\infty \frac{\sin(x + \hat{\delta}_\infty)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ , причём  $\bar{\gamma}_\infty = \hat{\gamma}_\infty$ ,  $\bar{\delta}_\infty = \hat{\delta}_\infty$ . Тогда их разность  $\bar{y}_\nu - \hat{y}_\nu$  — также цилиндрическая функция, причём  $\bar{y}_\nu - \hat{y}_\nu = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ , что невозможно.

Таким образом, по виду главного члена асимптотического разложения можно проводить классификацию цилиндрических функций. Без доказательства примем, что

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Цилиндрическую функцию, имеющую главный член асимптотического разложения вида  $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)$ , называют *функцией Неймана* и обозначают  $N_\nu$ . О ней мы упоминали в п. 5.5.1. Доказать, что  $N_\nu(x) = \frac{J_\nu \cos \pi\nu - J_{-\nu}}{\sin \pi\nu}$ , можно, используя равенство

$$N_\nu(x) = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}, \quad (5.34)$$

приводящее к подобному соотношению между главными членами асимптотического разложения, входящими в (5.34) цилиндрических функций, из которого легко определить константы  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{\cos \pi\nu}{\sin \pi\nu}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sin \pi\nu}.$$

### 5.5.5. Некоторые интегральные формулы

Соотношение (5.27) можно переписать в виде  $\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu] = x^\nu J_{\nu-1}$ . Отсюда следует, что  $\int x^\nu J_{\nu-1} dx = x^\nu J_\nu + c$ . Аналогично, пользуясь формулой (5.26), получаем  $\int x^{-\nu} J_{\nu+1} dx = x^{-\nu} J_\nu + c$ . Из первой формулы в (5.30) следует, что

$$2J'_{\nu+1} = J_\nu - J_{\nu+2}. \quad (5.35)$$

Будем считать, что  $\nu > -1$ . Тогда, интегрируя (5.35) в пределах от 0 до  $x$ , получаем

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = \int_0^x J_{\nu+2}(x) dx + 2J_{\nu+1}(x). \quad (5.36)$$

(Учтено, что  $J_{\nu+1}(0) = 0$  при  $\nu + 1 > 0$ .) Применим формулу (5.36)  $m$  раз последовательно. Найдём

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = 2(J_{\nu+1} + J_{\nu+3} + \dots + J_{\nu+2m-1}) + \int_0^x J_{\nu+2m}(x) dx.$$

Можно доказать, что при  $\nu \rightarrow \infty$   $J_\nu(x) \rightarrow 0$ , следовательно, имеет место разложение

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = 2(J_{\nu+1} + J_{\nu+3} + \dots),$$

причём ряд, стоящий справа, сходится очень быстро.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$y_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - \nu \varphi)} d\varphi \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = (x - \nu) \frac{\sin \nu \pi}{\pi}.$$

Отсюда следует, что функция  $y_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi$  удо-

влетворяет уравнению Бесселя при  $\nu = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , причём тем же начальным условиям, что и функция  $J_n(x)$ . По теореме существования и единственности заключаем, что  $y_n = J_n(x)$ , т.е.

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi, \text{ или}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi. \quad (5.37)$$

Формулой (5.37) функции Бесселя с целым индексом выражены интегралом, зависящим от параметра.

## 6. Ряды Фурье

В курсе линейной алгебры и аналитической геометрии мы видели, что решение многих задач значительно упрощается благодаря удачному выбору координатного базиса. Этот же приём используется и в бесконечномерных функциональных пространствах при разложении функций в ряд, когда в качестве базисной системы функций используется наиболее приспособленная для решения данного класса задач. В этом разделе вводится понятие ортогональной системы функций, обобщающее понятие ортогонального базиса  $n$ -мерного евклидова пространства на бесконечномерный случай и изучаются ряды по ортогональным системам.

### 6.1. Ортогональные системы функций

#### 6.1.1. Понятие базиса для множества функций

Пусть на  $(a, b)$  задана последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (6.1)$$

отличных от тождественного нуля, и некоторое множество  $M$  функций, определённых также на  $(a, b)$ . Будем говорить, что последовательность (6.1) образует базис во множестве  $M$ , если любая функция  $f(x) \in M$  может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (6.2)$$

где  $c_n$  — некоторые константы относительно  $x$ . Например, изучая ряды Тейлора, мы показали, что функции  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  образуют базис для некоторого подкласса бесконечно дифференцируемых функций на промежутке  $(-R, R)$ , причём в этом случае  $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

Если имеет место (6.2), то говорят, что функция  $f(x)$  разложена по базису (6.1). Числа  $c_n$  можно назвать координатами функции  $f(x)$  относительно базиса  $\{\varphi_n(x)\}$ . Здесь мы имеем почти полную аналогию с линейной алгеброй. В этом разделе некоторые понятия линейной алгебры мы распространим на бесконечномерные линейные пространства, каковыми являются многие классы функций, например, очень важный для приложений класс  $C'$  кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  функций.

Функция  $f(x)$  называется *кусочно-непрерывной* на  $[a, b]$ , если она непрерывна на этом отрезке, за исключением конечного числа точек, где может иметь разрывы первого рода. Класс  $C'$  содержит множество  $C$  непрерывных функций.



### 6.1.2. Скалярное произведение функций.

#### Норма функций. Ортогональность

Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — любые две функции из  $C'$ .

*Определение 1.* Скалярным произведением функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  из  $C'$  на промежутке  $[a, b]$  называется число, обозначаемое  $(f_1, f_2)$  и определяемое равенством

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx. \quad (6.3)$$

Очевидно, что скалярное произведение, введённое равенством (6.3), обладает свойствами:

- а)  $(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$ ;
- б)  $(\lambda f_1, f_2) = \lambda(f_1, f_2)$  для любого вещественного числа;
- в)  $(f_1, f_2 + f_3) = (f_1, f_2) + (f_1, f_3)$ ;
- г)  $(f_1, f_1) \geq 0$ . В классе непрерывных функций из условия  $(f_1, f_1) = 0$  следует, что  $f_1(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ .

Опираясь на понятие скалярного произведения, в пространстве функций  $C'$  можно ввести и другие геометрические понятия.

*Определение 2.* Две функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  из  $C'$  называются ортогональными на  $[a, b]$ , если  $(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$ .

Заметим, что ортогональность функций зависит от рассматриваемого промежутка, т.е. функции, ортогональные на одном промежутке, могут быть неортогональными на другом.

*Определение 3.* Нормой функции  $f(x)$  (обозначается  $\|f(x)\|$ ) называется число  $\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ .

*Определение 4.* Система функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  называется ортогональной на  $[a, b]$ , если  $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0, i \neq j$ , и  $(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) > 0$ , т.е. если они все попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, \quad i \neq j.$$

*Пример 6.1.* Доказать, что система функций  $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \dots$  ортогональна на  $(0,1)$ . Найти норму этих функций.

Решение. При  $n \neq m$  находим

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x] dx = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi x - \frac{1}{(n+m)\pi} \sin(n+m)\pi x \right] \Big|_0^1 = 0,$$

т.е. данная система ортогональна. Для отыскания нормы нужно

вычислить интеграл  $\int_0^1 \sin^2 m\pi x dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2m\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}$ , т.е.

на  $(0,1) \|\sin m\pi x\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Базис будем называть *ортогональным*, если он состоит из ортогональной системы функций, имеющих норму, отличную от нуля. От произвольного базиса можно перейти к ортогональному, применяя процесс ортогонализации, известный из линейной алгебры.

Базис называется *ортонормированным*, если он ортогональный, а нормы всех входящих в него функций равны единице.

При решении некоторых задач вводят скалярное произведение в более общем виде.

Пусть  $\rho(x) > 0$  — некоторая фиксированная функция из  $C'$  и  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — любые две функции из этого множества. Скалярным произведением с весом  $\rho(x)$  функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  называется число

$$(f_1, f_2) = \int_a^b \rho(x) f_1(x) f_2(x) dx. \quad (6.4)$$

Исходя из (6.4), можно определить понятие ортогональности двух функций и нормы функций с весом  $\rho(x)$ .

Класс функций  $C'$ , в котором введено понятие скалярного произведения по формулам (6.3) или (6.4), будем обозначать через  $\mathcal{L}'_2$  ( $\mathcal{L}'_2$  есть некоторый подкласс класса  $\mathcal{L}_2$  всех интегрируемых на  $[a, b]$  вместе со своим квадратом функций, причём интеграл понимается в смысле Лебега, более общем по сравнению с интегралом Римана).

### 6.1.3. Основная тригонометрическая система функций

Система функций

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{m\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l}, \dots \quad (6.5)$$

называется *основной тригонометрической системой*.

Все функции системы (6.5) — периодические с общим периодом  $2l$ . Легко получить, что

$$\int_{-l}^l \frac{1}{2} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \frac{1}{2} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Следовательно, основная тригонометрическая система функций ортогональна на  $(-l, l)$ .

Вычислим норму функций (6.5):

$$\left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \int_{-l}^l \frac{1}{4} dx = \frac{l}{2},$$

$$\left\| \cos \frac{m\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left( 1 + \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) dx = l,$$

$$\left\| \sin \frac{m\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right) dx = l.$$

Широко применяются и другие ортогональные системы: полиномы Лежандра, Чебышева, Эрмита, Лагерра, ортогональные системы Бесселевых функций, системы функций Уолша, Радемахера и др., с которыми можно познакомиться в [5].

## 6.2. Ряды Фурье по произвольной системе ортогональных функций

### 6.2.1. Понятие ряда Фурье

Пусть дана ортогональная с весом  $\rho(x) > 0$  система функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad a < x < b, \quad (6.6)$$

являющаяся базисом некоторого подмножества  $M \subset \mathcal{L}'_2$ . Возьмём любую функцию  $f(x)$  из  $M$ . По определению базиса существует последовательность констант  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  таких, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (6.7)$$

Предположим дополнительно, что ряд (6.7) сходится на  $(a, b)$  равномерно к  $f(x)$ . Умножим обе части в (6.7) скалярно на  $\varphi_m(x)$ , это равносильно умножению обеих частей на  $\rho(x)\varphi_m(x)$  и почленному

интегрированию в пределах от  $a$  до  $b$ , что законно в силу предполагаемой равномерной сходимости ряда. Получаем

$$(f, \varphi_m) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\varphi_n, \varphi_m). \quad (6.8)$$

Так как система (6.6) ортогональна, то

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \|\varphi_m\|^2, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Поэтому в (6.8) неравным нулю будет лишь одно слагаемое при  $n = m$ . Следовательно,  $(f, \varphi_m) = c_m \|\varphi_m\|^2$ , т.е.

$$c_m = \frac{(f, \varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2}. \quad (6.9)$$

Вспомяная определение скалярного произведения и нормы, можем записать

$$c_m = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) \varphi_m(x) dx}{\int_a^b \rho(x) \varphi_m^2(x) dx}. \quad (6.10)$$

Ряд (6.7), коэффициенты которого определяются по формулам (6.10), называется *рядом Фурье функции*  $f(x)$  по ортогональной системе (6.6). Числа  $c_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$ .

Любой интегрируемой функции  $f(x)$  формально можно сопоставить её ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (6.11)$$

найдя его коэффициенты по формулам (6.9). Но вопрос о сходимости ряда остаётся открытым. Ряд (6.11) может расходиться или сходиться, но не к функции  $f(x)$ . Ведь при отыскании коэффициентов  $c_n$  мы заранее предположили, что ряд (6.6) сходится к  $f(x)$  и этот ряд можно интегрировать почленно, что не всегда справедливо. Возникающая при этом задача может быть сформулирована двумя способами: 1) дана некоторая ортогональная система функций, описать множество тех функций, для которых она может быть базисом, т.е. тех, которые могут быть разложены в ряд Фурье по данной системе; 2) для данного класса функций построить ортогональный базис. Мы в основном будем заниматься задачей в первой формулировке. В математической физике часто встречаются задачи во второй формулировке, когда для заданного класса функций специальным образом строится ортогональная система.

### 6.2.2. Понятие сходимости в среднем

В приближённых вычислениях часто приходится заменять функцию  $f(x)$  в каком-то смысле близкой к ней функцией  $g(x)$ . Оценку точности приближения можно производить по-разному. В основу всех способов оценок берут разность  $r(x) = f(x) - g(x)$ . Если в качестве меры точности приближения берётся число  $\delta = \sup |f(x) - g(x)|$ ,  $a < x < b$ , то при малом значении  $\delta$  говорят, что функция  $g(x)$  равномерно на  $(a, b)$  близка к функции  $f(x)$ .

Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится к  $S(x)$  на  $[a, b]$ , то сумма  $S(x)$  равномерно близка его частичной сумме  $S_n(x)$  при достаточно больших  $n$ . При равномерном приближении функции  $f(x)$  и  $g(x)$  мало отличаются во всех точках промежутка  $(a, b)$ .

Во многих задачах требуется сравнивать не сами функции, а интегралы от них. В этих случаях в качестве меры точности приближения можно взять величину  $\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ . Функция  $g(x)$  считается близкой функции  $f(x)$ , если величина  $\delta'$  достаточно мала. Модули часто усложняют вычисления, так как они приводят к недифференцируемым функциям. Чтобы избежать этого, рассматривают величину

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}, \quad (6.12)$$

называемую средним квадратичным отклонением функции  $f(x)$  от функции  $g(x)$  на промежутке  $(a, b)$ .

Если изучаются функциональные пространства, в которых введено понятие скалярного произведения с весом  $\rho(x)$ , то вместо ве-

личины (6.12) вводят величину  $\delta''' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \rho(x) [f(x) - g(x)]^2 dx}$ .

Можно записать, что

$$(\delta''')^2 = \frac{1}{b-a} (f - g, f - g) = \frac{\|f - g\|^2}{b-a}.$$

Пусть дана последовательность функций  $\{S_n(x)\}$ . Говорят, что эта последовательность сходится на  $(a, b)$  в среднеквадратичном с весом  $\rho(x)$  (или просто в среднем), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся

число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b [S(x) - S_n(x)]^2 \rho(x) dx < \varepsilon.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  называется *сходящимся в среднеквадратичном с весом  $\rho(x)$  к функции  $S(x)$* , если последовательность его частичных сумм  $\{S_n(x)\}$  сходится в среднеквадратичном с весом  $\rho(x)$  к функции  $S(x)$ .

Заметим, что даже при очень малой величине  $\delta'$  или  $\delta''$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в отдельных точках промежутка  $(a, b)$  могут сильно отличаться, следовательно, из сходимости в среднеквадратичном не следует сходимости в обычном смысле.

### 6.2.3. Экстремальное свойство многочленов Фурье

Пусть дана ортогональная система функций (6.6). Выражение

$$P_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \quad (6.13)$$

называется *многочленом порядка  $n$  по ортогональной системе (6.6)*. Если в (6.13) вместо констант  $\alpha_i$  возьмём коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\{\varphi_i(x)\}$ , то получим многочлен  $Q_n(x) = S_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$ , совпадающий с  $n$ -й частичной суммой ряда Фурье для  $f(x)$ , называемый *многочленом Фурье*.

Поставим задачу: из всех многочленов вида (6.13) найти те, которые осуществляют наилучшее среднеквадратичное приближение заданной функции  $f(x)$ . Для этого нужно подобрать константы

$\alpha_i$  таким образом, чтобы величина  $\delta_n^2 = \frac{1}{b-a} (f - P_n, f - P_n) =$

$= \frac{1}{b-a} \int_a^b (f - P_n)^2 dx$  была минимальной. С этой целью оценим раз-

ность  $\Delta_n = (b-a)\delta_n^2$ :

$$\Delta_n = (b-a)\delta_n^2 = (f - P_n, f - P_n) = \left( f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i, f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i \right) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{i=0}^n (f, \varphi_i) \alpha_i + \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (\varphi_i, \varphi_i) + \sum_{i \neq m=1}^n \alpha_i \alpha_m (\varphi_i, \varphi_m). \text{ Так}$$

как  $(f, \varphi_i) = c_i \|\varphi_i\|^2$ , где  $c_i$  — коэффициенты Фурье для  $f(x)$ , а

$$(\varphi_i, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq m, \\ \|\varphi_i\|^2, & \text{если } i = m, \end{cases} \quad (f, f) = \|f\|^2, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \|f(x)\|^2 - 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i c_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \|\varphi_i\|^2 = \\ &= \|f(x)\|^2 + \sum_{i=0}^n (\alpha_i - c_i)^2 \|\varphi_i\|^2 - \sum_{i=0}^n c_i^2 \|\varphi_i\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величина  $\Delta_n$  будет наименьшей, если  $\alpha_i = c_i$ . Мы приходим к выводу: из всех многочленов вида (6.13) многочлен Фурье доставляет величине  $\Delta_n$  наименьшее значение:

$$\Delta_n = \|f(x)\|^2 - \sum_{i=0}^n c_i^2 \|\varphi_i\|^2. \quad (6.14)$$

Соотношение (6.14) называется *тождеством Бесселя*. По самому определению  $\Delta_n \geq 0$ , поэтому

$$\sum_{i=0}^n c_i^2 \|\varphi_i\|^2 \leq \|f(x)\|^2. \quad (6.15)$$

Так как (6.15) верно при любом  $n$ , то устремив  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \|\varphi_i\|^2 \leq \|f(x)\|^2 \quad (6.16)$$

неравенство Бесселя. Из соотношения (6.16) следует, что ряд

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \|\varphi_i\|^2$  сходится.

#### 6.2.4. Замкнутость и полнота ортогональной системы

Возникает вопрос — можно ли за счёт увеличения  $n$  добиться, чтобы величина  $\Delta_n$  в (6.14) стала сколь угодно малой, т.е. стремится ли  $\Delta_n$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , или, другими словами, сходится ли последовательность  $Q_n(x)$  к  $f(x)$  в среднем. Из (6.14) следует, что сходимость в среднеквадратичном ряду Фурье к  $f(x)$  равносильна наличию равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \|\varphi_i\|^2 = \|f(x)\|^2. \quad (6.17)$$

Равенство (6.17) называют уравнением замкнутости ортогональной системы  $\{\varphi_n(x)\}$  или равенством Парсеваля-Стеклова.

Если равенство (6.17) выполняется для каждой функции  $f(x)$  из некоторого класса функций, то ортогональную систему  $\{\varphi_n(x)\}$  называют *замкнутой* в этом классе функций. Доказано, что ортогональные системы, перечисленные в п. 6.1.3, замкнуты в классе  $\mathcal{L}'_2$ , т.е. всякая кусочно-непрерывная функция  $f(x)$  разложима в ряд Фурье  $c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$  по этим системам, сходящийся к  $f(x)$  в среднем.

Система ортогональных функций (с весом  $\rho(x)$ ) называется *полной* в классе  $\mathcal{L}'_2$ , если не существует отличной от нуля функции этого класса, ортогональной (с весом  $\rho(x)$ ) всем функциям этой системы. При этом функцию, равную нулю на  $[a, b]$  всюду, кроме конечного числа отдельных точек, мы отождествляем с нулём.

Легко доказать, что если система  $\{\varphi_n(x)\}$  замкнута в классе  $\mathcal{L}'_2$ , то она полна в этом классе.

Действительно, если допустить противное, т.е., что замкнутая ортогональная система не является полной, то существует кусочно-непрерывная функция  $\psi(x)$ , ортогональная (с весом  $\rho(x)$ ) всем функциям системы  $\{\varphi_n(x)\}$ . Но тогда для этой функции все коэффициенты Фурье  $c_i$  по системе  $\{\varphi_n(x)\}$  равны нулю. В этом случае условие замкнутости (6.17), записанное для  $\psi(x)$ , принимает вид

$\|\psi(x)\|^2 = 0$ , или  $\int_a^b \psi^2(x)\rho(x)dx = 0$ . Здесь под интегралом стоит неотрицательная функция. Поэтому при любом  $x$  из  $[a, b]$   $I(x) = \int_a^x \psi^2(x)\rho(x)dx = 0$ . Если функция  $\psi^2(x)\rho(x)$  непрерывна, то мож-

но продифференцировать  $I(x)$  по  $x$ , как по верхнему пределу интегрирования, и получить  $\psi^2(x)\rho(x) = 0$ . Поскольку  $\rho(x) > 0$ , то  $\psi^2(x) = 0$ , следовательно,  $\psi(x) = 0$ . Если функция  $\psi(x)\rho(x)$  кусочно-

непрерывна, то интеграл  $\int_a^b \psi^2(x)\rho(x)dx$  разбивается на конечное чис-

ло интервалов, на которых функция  $\psi^2(x)\rho(x)$  непрерывна. На каждом из них, по только что доказанному, функция  $\psi(x) = 0$ . В результате получаем, что  $\psi(x)$  равна нулю всюду, кроме конечного числа отдельных точек (границ частичных интервалов). Но такую функцию мы отождествили с нулём.

Таким образом, не существует функции, отличной от нуля, ортогональной всем функциям замкнутой ортогональной системы, т.е. замкнутая система является полной.

Если две кусочно-непрерывные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют одинаковые коэффициенты Фурье по полной ортогональной системе, то такие функции совпадают. Действительно, в этом случае функция  $\psi(x) = f(x) - g(x)$  ортогональна всем функциям ортогональной си-



стемы, а поэтому в силу доказанного  $f(x) - g(x) = 0$ , т.е.  $f(x) = g(x)$ . Отсюда следует, что кусочно-непрерывная функция разлагается в ряд по полной ортогональной системе единственным образом. Независимо от способа разложения полученный ряд будет обязательно рядом Фурье.

### 6.3. Тригонометрический ряд Фурье

В электротехнике и радиотехнике наиболее широко применяется тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (6.18)$$

и её подсистемы

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots, \quad (6.19)$$

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots. \quad (6.20)$$

Доказано, что система (6.18) замкнута в классе  $\mathcal{L}'_2$  кусочно-непрерывных функций на  $(-l, l)$ , а системы (6.19) и (6.20) — на  $(0, l)$ .

#### 6.3.1. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье. Достаточные признаки представимости функции тригонометрическим рядом. Понятие о периодическом продолжении функции

Как показано в п. 6.1.3, тригонометрическая система ортогональна на  $(-l, l)$  с весом  $\rho(x) = 1$ , причём  $\left\| \frac{1}{2} \right\|^2 = \frac{l}{2}$ ,  $\left\| \cos \frac{m\pi x}{l} \right\|^2 = l$ ,  $\left\| \sin \frac{m\pi x}{l} \right\|^2 = l$ . Пусть  $f(x)$  — любая интегрируемая на  $(-l, l)$  функция. По формулам (6.9) можем найти коэффициенты Фурье для  $f(x)$  по системе (6.18) и составить ряд Фурье, который запишем в виде

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (6.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

В случае  $l = \pi$  формулы (6.22) несколько упрощаются:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Ряд (6.21) называют *тригонометрическим рядом Фурье* функции  $f(x)$ . Этот ряд в силу замкнутости системы (6.18) в классе  $\mathcal{L}'_2$ , составленный для любой функции  $f(x)$  из этого класса, сходится к ней на  $[-l, l]$  в среднеквадратичном. Проблема точечной сходимости ряда (6.21) к  $f(x)$ , т.е. вопрос о том, когда в (6.21) вместо знака соответствия можно поставить знак равенства, оказалась очень сложной и нашла своё до некоторой степени полное решение лишь в 1966 году. То, что простой интегрируемости функции  $f(x)$  не достаточно, показал А.Н. Колмогоров, приведя пример интегрируемой функции, для которой ряд Фурье расходится во всех точках  $[-l, l]$ . В настоящее время показано, что для разложимости  $f(x)$  почти всюду на  $[-l, l]$  в тригонометрический ряд Фурье достаточно интегрируемость функции вместе с её  $p$ -й степенью ( $p > 1$ ). Необходимые и достаточные условия пока не найдены. Мы приведём два класса функций, представимых тригонометрическим рядом Фурье, достаточно широких для практических приложений, классы кусочно-монотонных и кусочно-гладких функций.

Функция  $f(x)$  называется *кусочно-монотонной* на интервале  $(a, b)$ , если этот интервал можно разбить на конечное число интервалов, внутри каждого из которых функция монотонна.

Заметим, что ограниченная кусочно-монотонная на  $(a, b)$  функция может иметь разрывы только первого рода.

*Теорема 6.1* (Дирихле). Тригонометрический ряд Фурье для всякой кусочно-монотонной ограниченной функции  $f(x)$  на  $[-l, l]$  сходится в каждой точке этого отрезка, причём сумма ряда

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \text{ если } x \in (-l, l), \\ S(-l) = S(+l) &= \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Доказательство опускаем.

Заметим, что в точках непрерывности функции  $f(x)$  сумма ряда  $S(x)$  совпадает с  $f(x)$ .

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$ . Под значениями  $f'(x)$  в точках  $x = a$  и  $x = b$  понимаются конечные пределы  $f'(a+0)$

и  $f'(b-0)$ . Функция  $f(x)$  называется *кусочно-дифференцируемой* на  $[a, b]$ , если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах имеет конечные односторонние производные.

Если при этом производная  $f'(x)$  кусочно-непрерывна, то функция называется *кусочно-гладкой* на  $[a, b]$ .

**Теорема 6.2.** Тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой на  $[-l, l]$  функции  $f(x)$  сходится в каждой точке этого отрезка. Его сумма  $S(x)$  определяется соотношениями (6.23).

Теорему 6.2 также примем без доказательства.

**Пример 6.2.** Функцию  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 \leq x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$  разложить в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-2, 2]$ .

**Решение.** Функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям и теоремы 6.1, и теоремы 6.2. Поэтому она представима в виде суммы ряда Фурье. В данном случае  $l = 2$ . По формулам (6.22) находим  $a_0 =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1. \text{ Применяя формулу интегрирования по частям, получаем } a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1],$$

$$n = 1, 2, \dots \text{ Видим, что } a_{2m} = 0, a_{2m-1} = -\frac{4}{(2m-1)^2 \pi^2},$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

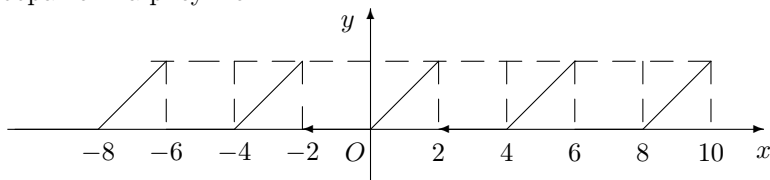
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{1}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}. \text{ Мы нашли, что}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right].$$

Согласно теореме 6.1 или 6.2 сумма  $S(x)$  данного ряда в точках  $x = \pm 2$  равна  $\frac{0+2}{2} = 1$ . Заметим, что функция  $S(x)$  определена на всей числовой оси. Эта функция периодическая с периодом, равным четырём. На  $(-2, 2)$   $S(x)$  совпадает с функцией  $f(x)$ . График  $S(x)$

изображён на рисунке.



Пусть заданная на  $[-l, l]$  функция  $f(x)$  представима в виде суммы тригонометрического ряда. Поскольку все функции основной тригонометрической системы имеют общий период  $2l$ , то и сумма этого ряда  $S(x)$  есть функция, определённая на всей числовой оси, являющаяся периодической с периодом  $2l$ . График  $S(x)$  в точках непрерывности  $f(x)$  на  $(-l, l)$  совпадает с графиком  $f(x)$ , а график на других участках  $(l, 3l)$ ,  $(3l, 5l)$  и т.д. получается последовательным параллельным переносом графика  $f(x)$  с участка  $(-l, l)$  на предыдущие и последующие участки длины  $2l$ . Функцию  $S(x)$  называют периодическим продолжением с периодом  $2l$  функции  $f(x)$  на всю числовую ось. Таким образом, если функция на  $(-l, l)$  разлагается в тригонометрический ряд Фурье, то этот ряд сходится к периодическому продолжению функции на всю числовую ось.

### 6.3.2. Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

**Разложение в ряд Фурье функций, заданных на  $[0, l]$ ,  $[a, a + 2l]$**

Пусть функция  $f(x)$  из класса  $C'$  на  $[-l, l]$  чётна. Тогда функция  $f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$  нечётна, поэтому  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$  при всех  $n$ , т.е. чётные функции разлагаются в тригонометрический ряд только по косинусам. Функция  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$  в этом случае чётна, поэтому

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.24)$$

Если же функция  $f(x)$  нечётна, то для неё  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$  в силу нечётности функции  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ , а

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (6.25)$$

Графики чётных и нечётных функций обладают симметрией либо относительно оси  $OY$ , либо относительно начала координат. Ча-

сто встречаются функции этого класса, обладающие дополнительной симметрией на  $(0, l)$  либо относительно прямой  $x = \frac{l}{2}$ , либо относительно точки  $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ . Такие функции называются функциями с двойной симметрией. Ряд Фурье функций с двойной симметрией несколько упрощается по сравнению с чётными или нечётными функциями. Предлагается в виде упражнения доказать следующие утверждения.

Если функция  $f(x)$  периода  $2l$  чётная и обладает дополнительной симметрией на  $(0, l)$  относительно прямой  $x = \frac{l}{2}$ , т.е. если  $f(l - x) = f(x)$ , то  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $a_{2n+1} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $a_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{l} dx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Если же чётная функция  $f(x)$  симметрична на  $(0, l)$  относительно точки  $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ , т.е. если  $f(l - x) = -f(x)$ , то  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $a_{2n} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l} dx$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Если функция  $f(x)$  нечётна на  $(-l, l)$  и симметрична на  $(0, l)$  относительно прямой  $x = \frac{l}{2}$ , то  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_{2n} = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $b_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} dx$ .

Для нечётной функции  $f(x)$ , симметричной на  $(0, l)$  относительно точки  $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ , имеем  $a_n = 0$ ,  $b_{2n+1} = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $b_{2n} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{l} dx$ ,  $n = 1, 2, \dots$

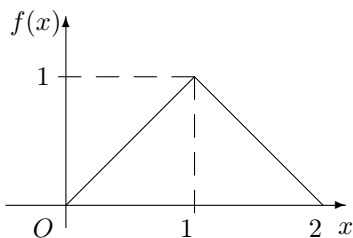
Мы рассмотрели разложение в тригонометрический ряд Фурье функции, заданной на промежутке  $[-l, l]$ , симметричном относительно начала координат. Если же функция задана на  $[0, l]$ , то её можно доопределить на участке  $[-l, 0]$ , а затем разложить в ряд Фурье по известным формулам. Это доопределение можно сделать многими способами. Наиболее часто доопределяют чётным образом, чтобы функция после продолжения была чётной, или нечётным, тогда полученная функция будет нечётной. Практически при этом никаких дополнительных операций совершать не нужно, а пользоваться

сразу либо формулами (6.24), либо (6.25). В обоих случаях найденный ряд будет сходиться в точках непрерывности функции  $f(x)$  на  $(0, l)$  к  $f(x)$ . В некоторых случаях доопределение чётным образом предпочтительнее, так как при нечётном продолжении, если  $f(0) \neq 0$ , добавляется точка разрыва в нуле, что ухудшает качество сходимости полученного ряда, как мы увидим позднее.

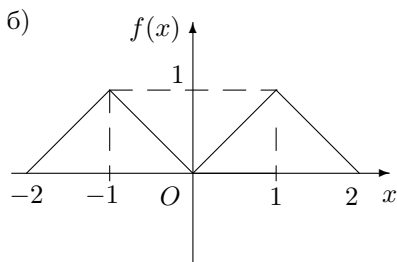
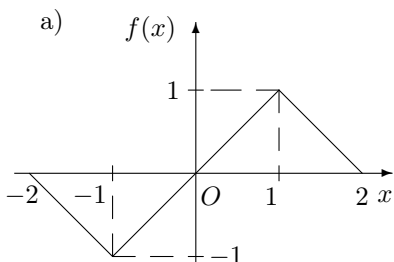
Для периодической функции  $f(x)$  с периодом  $2l$  очевидно соотношение  $\int_0^{2l} f(x) dx = \int_a^{a+2l} f(x) dx$  при любом  $a$ . Поэтому, если функцию  $f(x)$ , заданную на  $[a, a+2l]$ , разлагают в ряд Фурье, продолжив её на всю ось с периодом  $2l$ , то коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  можно вычислять по формулам  $a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ .

*Пример 6.3.* Функцию  $f(x)$ , график которой изображён на рисунке, разложить в ряд Фурье:

- а) по синусам,  
б) по косинусам.



Решение. В нашем случае  $l = 2$ . Доопределим функцию  $f(x)$  на  $[-2, 0)$ : а) нечётным образом; б) чётным образом. В результате получим функции, заданные на отрезке  $[-2, 2]$ , графики которых приведены на рисунках а) и б).



В случае а) функция  $f(x)$  нечётна, а график её на  $(0, 2)$  симметричен относительно прямой  $x = 1$ . Поэтому  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \text{ а } b_{2n+1} = \frac{4}{2} \int_0^1 x \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2} dx = \\
&= 2 \left[ \frac{-2x}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{(2n+1)\pi} \int_0^1 \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2} dx \right] = \\
&= \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) = \\
&= \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos n\pi = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2}. \text{ Таким образом, в случае а) име-} \\
\text{ем } f(x) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

В случае б) функция  $f(x)$  чётна и на  $(0, 2)$  её график симметричен относительно прямой  $x = 1$ . Поэтому  $b_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $a_{2n+1} = 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $a_0 = \frac{4}{2} \int_0^1 x dx = 1$ ,  $a_{2n} = \frac{4}{2} \int_0^1 x \cos n\pi x dx =$   
 $= 2 \left[ \frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 =$   
 $\frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2}$ . Видим, что  $a_{4m} = 0$ ,  $a_{4m+2} = \frac{-4}{(2m+1)^2 \pi^2}$   
( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Таким образом, в случае б) имеем

$$f(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\pi x.$$

Предлагается самостоятельно построить график суммы  $S(x)$  рядов для случая а) и б).

### 6.3.3. Другая форма записи тригонометрического ряда Фурье

Предположим, что функция  $f(x)$  на  $[-l, l]$  разлагается в ряд Фурье по тригонометрической системе, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (6.26)$$

где  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ . Введём в рассмотрение следующие величины:  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  и угол  $\varphi_n$  такой, что  $\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \frac{a_n}{A_n}$ ,  $\sin \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \frac{b_n}{A_n}$ . Тогда ряд

(6.26) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \cos \varphi_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sin \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \frac{n\pi x}{l} - \varphi_n \right). \quad (6.27)$$

Функцию  $A_n \cos \left( \frac{n\pi x}{l} - \varphi_n \right)$  называют *гармоническим колебанием* или *гармоникой*. Она описывает простейший периодический процесс.

Величина  $A_n$  означает амплитуду гармоника,  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$  — её угловую частоту,  $\varphi_n$  — начальную фазу гармоника.

Три величины:  $A_n$ ,  $\omega_n$ ,  $\varphi_n$  полностью определяют гармонику. Как следует из (6.27), функция  $f(x)$  представлена в виде суммы гармонических колебаний бесконечного числа слагаемых. По этой причине разложение функции в ряд Фурье называют её *гармоническим анализом*. Гармонический анализ сводится к отысканию величин  $A_n$ ,  $\omega_n$ ,  $\varphi_n$ . Множество  $\{A_n\}$  всех чисел  $A_n$  называют *амплитудным спектром* функции  $f(x)$ , множество  $\{\omega_n\}$  — её *частотным спектром*, а множество  $\{\varphi_n\}$  — её *фазовым спектром*. Разложение функции в ряд Фурье равносильно отысканию указанных спектров. Этот процесс называют также *спектральным анализом* функции. По заданной функции  $f(x)$  однозначно определяются её спектры и, наоборот, по заданным спектрам восстанавливается функция  $f(x)$  в виде ряда (6.27), если этот ряд сходится.

Заметим, что амплитудный, частотный и фазовый спектры функции  $f(x)$ , представимой в виде суммы тригонометрического ряда Фурье, дискретны. Все они являются счётными множествами.

Дополнительные сведения из спектрального анализа функции приведены в п. 6.3.7.

### 6.3.4. Интегрирование и дифференцирование тригонометрических рядов Фурье

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна или кусочно-непрерывна на  $[-l, l]$ . В силу замкнутости основной тригонометрической системы в классе кусочно-непрерывных функций выполняется уравнение замкнутости (6.17), которое для тригонометрической системы можно записать в виде

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx. \quad (6.28)$$



Из (6.28) следует, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ , где  $a_n$  и  $b_n$  — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье любой кусочно-непрерывной функции  $f(x)$ , сходятся. Из сходимости этих рядов следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

т.е. коэффициенты ряда Фурье кусочно-непрерывной функции при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

Запишем соотношение (6.28) для суммы  $f(x) + g(x)$  и разности  $f(x) - g(x)$  двух любых кусочно-непрерывных на  $[-l, l]$  функций. При этом заметим, что при сложении функций их соответствующие коэффициенты Фурье складываются, а при вычитании — вычитаются. Через  $a_n$  и  $b_n$ ,  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  обозначены коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , соответственно. Считая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  периодическими с периодом  $2l$  или периодически продолженными с участка  $[-l, l]$  на всю числовую ось, можно записать

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2] = \frac{1}{l} \int_0^{2l} [f(x) + g(x)]^2 dx,$$

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2] = \frac{1}{l} \int_0^{2l} [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

Вычитая эти равенства (и сокращая на 4), получаем

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) g(x) dx. \quad (6.29)$$

Последнее равенство называют *обобщённым уравнением замкнутой* тригонометрической системы в классе кусочно-непрерывных функций.

**Теорема 6.3.** Тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной функции  $f(x)$  можно интегрировать почленно независимо от характера его сходимости.

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $[-l, l]$ , периодически продолжена на всю ось и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (6.30)$$

Запишем обобщённое уравнение замкнутости (6.29) для функции  $f(x)$  и функции  $g(x)$ , заданной в виде  $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq x_0; \\ 0, & \text{если } x_0 < x < 2l. \end{cases}$

Очевидно,  $\alpha_0 = \frac{1}{l} \int_0^{x_0} dx = \frac{x_0}{l}$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{l} \int_0^{x_0} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $\beta_n = \frac{1}{l} \int_0^{x_0} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ .

После сокращения на  $\frac{1}{l}$  соотношение (6.29) приводится к виду

$$\int_0^{x_0} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^{x_0} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^{x_0} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \int_0^{x_0} f(x) dx. \quad (6.31)$$

Последнее и означает возможность почленного интегрирования ряда Фурье. Теорема доказана.

Подчеркнём, что даже если в (6.30) нет равенства (т.е. соответствующий ряд расходится или сходится не к  $f(x)$ ), всё равно равенство (6.31) справедливо. Для произвольных функциональных рядов, как мы видели в п. 3.2.3, это свойство не выполняется.

Для почленного дифференцирования имеет место более слабая теорема.

*Теорема 6.4.* Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на  $[-l, l]$ . Ряд для производной  $f'(x)$  может быть получен из ряда  $f(x) = \frac{a_0}{2} +$

$+\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$  его почленным дифференцированием:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \cdot b_n \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{n\pi}{l} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (6.32)$$

Теорему примем без доказательства.

Вопрос о сходимости ряда (6.32) остаётся открытым. Нужны дополнительные исследования.

### 6.3.5. О равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье

*Теорема 6.5.* Если непрерывная и кусочно-гладкая на  $[-l, l]$  функция  $f(x)$  имеет равные на концах отрезка значения, т.е.  $f(-l) = f(l)$ , то её тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке, причём  $S(x) = f(x)$  в каждой точке  $[-l, l]$ .

*Доказательство.* По теореме 6.2 имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (6.33)$$

Этот ряд мажорируется рядом  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ . Для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  сходится.

Обозначим через  $a'_n$  и  $b'_n$  коэффициенты Фурье функции  $f'(x)$  и установим их связь с коэффициентами  $a_n$  и  $b_n$ . Применяя интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = u \\ \cos \frac{n\pi x}{l} dx = dv \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{l} f(x) \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi} \cdot b'_n; \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \Big|_{-l}^l + \\ &+ \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \cdot a'_n. \end{aligned}$$

(Первое слагаемое обращается в нуль за счёт того, что  $f(-l) = f(l)$ .) Мы получили

$$|a_n| = \frac{l}{n\pi} \cdot |b'_n|, \quad |b_n| = \frac{l}{n\pi} \cdot |a'_n|. \quad (6.34)$$

Докажем, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n}$  сходятся. Используем элементарное неравенство  $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$  (оно следует из того, что  $(A - B)^2 \geq 0$ ). Положим в этом неравенстве  $A = |a'_n|$ ,  $B = \frac{1}{n}$ . Тогда

$\frac{|a'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left[ |a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right]$ . Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2$  сходится (см. п. 6.3.4) и сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , то из последнего неравенства и признака сравнения

(см. п. 3.1.4) следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n|}{n}$ . Аналогично

можно доказать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b'_n|}{n}$ . Теперь из (6.34) следует

сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ . Сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  доказана. По признаку Вейерштрасса ряд (6.33) сходится на  $[-l, l]$  равномерно. Теорема доказана.

Заметим, что если функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую теореме 6.5, продолжить на всю числовую ось с периодом  $2l$ , то получится непрерывная на всей оси функция. Если функция периодическая периода  $2l$  непрерывна на всей числовой оси, то, очевидно, для неё выполняется условие  $f(-l) = f(l)$ . Функцию назовём *кусочно-гладкой на всей числовой оси*, если она является кусочно-гладкой на каждой конечной её части. Теорему 6.5 можно несколько переформулировать.

Если периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $2l$  непрерывна и кусочно-гладкая на всей числовой оси, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой оси.

### 6.3.6. Скорость сходимости тригонометрического ряда Фурье

*Теорема 6.6.* Если периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $2l$  является непрерывной на всей числовой оси вместе со своими производными до  $m$ -го порядка включительно ( $m \geq 0$ ), а  $(m + 1)$ -я производная кусочно-непрерывна, то порядок малости относительно  $\frac{1}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$  коэффициентов Фурье  $a_n$  и  $b_n$  этой функции по тригонометрической системе не ниже  $m + 1$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{m+1} = 0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n n^{m+1} = 0$ , при этом ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu} (|a_n| + |b_n|)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, m$  сходятся. Отметим, что для  $m = 0$  теорема уже доказана в процессе доказательства теоремы 6.5. В общем случае доказательство опустим.

Как видим, скорость сходимости тригонометрического ряда Фурье зависит от степени гладкости функции.

Теперь мы можем ответить на вопрос о почленном дифференцировании тригонометрических рядов. В соответствии с теоремой 3.25 для почленного дифференцирования ряда достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы 6.6 при  $m = 1$ .

### 6.3.7. Комплексная форма ряда Фурье

Для интегрируемых комплексных функций одного вещественного аргумента вводят понятие скалярного произведения следующим образом. Пусть даны две функции:

$\varphi_1(x) = u_1(x) + iv_1(x)$ ,  $\varphi_2(x) = u_2(x) + iv_2(x)$ , интегрируемые на  $[a, b]$ . Скалярным произведением этих функций называется число, определяемое равенством  $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx$ , где  $\overline{\varphi_2(x)} = u_2(x) - iv_2(x)$  — функция, сопряжённая с  $\varphi_2(x)$ . Вместо функции  $\varphi_2(x)$  взята функция  $\overline{\varphi_2(x)}$  для того, чтобы норма функции

$$\|\varphi(x)\| = \left[ \int_a^b \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx \right]^{1/2} = \left[ \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

была числом вещественным. Функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  называются ортогональными на  $[a, b]$ , если  $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ .

Часто применяется система функций

$$\exp\left[-\frac{in\pi x}{l}\right], \exp\left[-\frac{i(n-1)\pi x}{l}\right], \dots, 1, \exp\left[\frac{i\pi x}{l}\right], \dots \quad (6.35)$$

бесконечная в "оба конца". Так как  $\left(\exp\left[\frac{in\pi x}{l}\right], \exp\left[\frac{ik\pi x}{l}\right]\right) = \int_{-l}^l \exp\left[\frac{i(n-k)\pi x}{l}\right] dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ 2l, & \text{если } n = k, \end{cases}$  то система (6.35)

ортогональна на  $(-l, l)$  и  $\left\|\exp\left[\frac{in\pi x}{l}\right]\right\|^2 = 2l$ . Предположим, что интегрируемая функция  $f(x)$  разлагается в равномерно сходящийся на  $(-l, l)$  ряд по системе (6.35), т.е.

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left[\frac{ik\pi x}{l}\right]. \quad (6.36)$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на  $\exp\left[\frac{in\pi x}{l}\right]$ . Полу-

чим  $\int_{-l}^l f(x) \exp\left[-\frac{in\pi x}{l}\right] dx = 2lc_n$ , поскольку система (6.35) орто-

гональна на  $(-l, l)$ , а квадрат нормы каждой её функции равен  $2l$ . Следовательно,

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp\left[-\frac{in\pi x}{l}\right] dx. \quad (6.37)$$

Покажем, что ряд (6.36), коэффициенты которого вычислены по формулам (6.37), есть ряд Фурье функции  $f(x)$  по основной

тригонометрической системе. Действительно, из (6.37) находим

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp \left[ -\frac{in\pi x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left[ \cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right] dx = \frac{a_n - ib_n}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично,  $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ . Можем записать

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp \left[ -\frac{in\pi x}{l} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} \exp \left[ -\frac{in\pi x}{l} \right] + \frac{a_n - ib_n}{2} \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] \right) = \frac{a_0}{2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left( \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] + \exp \left[ -\frac{in\pi x}{l} \right] \right) a_n + \frac{1}{2} \left( \exp \left[ -\frac{in\pi x}{l} \right] - \right. \right. \\ &\left. \left. - \exp \left[ \frac{in\pi x}{l} \right] \right) ib_n \right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \end{aligned}$$

Мы пришли к тригонометрическому ряду Фурье. Если совершить преобразования в обратном порядке, то мы от тригонометрического ряда Фурье перейдём к ряду (6.36). Следовательно, (6.36) есть другая эквивалентная форма записи тригонометрического ряда Фурье.

*Пример 6.4.* Представить рядом Фурье в комплексной форме функцию  $f(x)$ , если  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Решение. В данном случае  $l = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-in\pi x} dx = \frac{-1}{2in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2in\pi} (e^{in\pi} - 1) = \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{2n\pi} i = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \frac{-i}{\pi(2m+1)}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Функция  $f(x)$  раз-

ложена в ряд Фурье, следовательно,  $f(x) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\pi(2n+1)} e^{in\pi x}$ .

Если обозначить частоту  $n$ -й гармоники через  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ , то коэффициенты ряда Фурье можно считать функцией от частоты  $c_n = c(\omega_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx$ . *Спектральной функцией* или *спек-*

*тральной плотностью* функции  $f(x)$  (обозначается  $S(\omega_n)$ ) называется отношение коэффициента  $c(\omega_n)$  к приращению частоты

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}, \text{ т.е. } S(\omega_n) = \frac{l}{\pi} c(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Величины  $S(\omega_n)$  комплексны и для них можно найти модуль и аргумент.

Величина  $\rho(\omega_n) = |S(\omega_n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right|$  называется

*амплитудным спектром*, а  $\Phi(\omega_n) = -\arg S(\omega_n)$  — *фазовым спектром* функции  $f(x)$ .

Так как  $c(\omega_n) = \frac{\pi}{l} S(\omega_n)$ , то в точках непрерывности кусочно-гладкой функции  $f(x)$  имеет место разложение

$$f(x) = \frac{\pi}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\omega_n) e^{i\omega_n x},$$

т.е. функцию  $f(x)$  можно однозначно восстановить по её спектральной плотности. Функции  $\rho(\omega_n)$  и  $\Phi(\omega_n)$  определены только на частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , т.е. область их значений дискретна. Графически эти функции можно изобразить в виде вертикальных линий в точках  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  оси  $\omega$  высотой  $\rho(\omega_n)$  и  $\Phi(\omega_n)$ .

## 7. Интеграл Фурье.

### Преобразование Фурье

В подразделе 6.3 мы изучали представление функции  $f(x)$  тригонометрическим рядом Фурье, при этом  $f(x)$  была либо периодической, либо заданной на конечном промежутке оси  $OX$  и периодически продолженной на всю числовую ось. В данном разделе мы будем рассматривать непериодические функции, заданные на всей числовой оси.

#### 7.1. Понятие интеграла Фурье. Комплексная форма записи интеграла Фурье. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье

В п. 6.3.7 мы показали, что если функция  $f(x)$  задана на  $[-l, l]$  и является там кусочно-гладкой, то в точках непрерывности  $f(x)$  имеет место

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(\omega_n) e^{i\omega_n x}, \quad (7.1)$$

где  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ ;

$$c(\omega_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx, \quad (7.2)$$

т.е. если внести значение  $c(\omega_n)$  в (7.1), то

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^l f(u) e^{i\omega_n(x-u)} du. \quad (7.3)$$

Поскольку в (7.1) величина  $x$  является параметром, а в (7.2) — переменной интегрирования, то переменную интегрирования обозначили по-другому (буквой  $u$ ). Так как  $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$ , то выражение (7.3) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-l}^l f(u) e^{i\omega_n(x-u)} du \right\} \Delta\omega_n. \quad (7.4)$$

Пусть теперь функция  $f(x)$  задана на всей числовой оси  $(-\infty, +\infty)$  и является абсолютно интегрируемой, т.е. интеграл



$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ , понимаемый в смысле главного значения Коши

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{A \rightarrow \infty, A > 0} \int_{-A}^A |f(x)| dx \right),$$

сходится. Для такой функции соотношение (7.4) справедливо при любом  $l$ . Так как  $l$  может быть сколько угодно большим, то в (7.4) можно перейти к пределу при  $l \rightarrow \infty$ . Мы приходим к сумме вида

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega_n(x-u)} du \right\} \Delta\omega_n.$$

Последний ряд по своей структуре напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \quad (\text{но не является ею}).$$

Можно предположить, что пределом суммы (7.4) при  $l \rightarrow \infty$  является интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega. \quad (7.5)$$

Таким образом, если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ей можно поставить в соответствие интеграл (7.5):

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega. \quad (7.6)$$

Интеграл (7.6) называют *интегралом Фурье в комплексной форме* функции  $f(x)$ . Предыдущие рассуждения позволили нам получить форму интеграла (7.6), который можно поставить в соответствие любой абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции. Вопрос о том, когда в (7.6) имеет место равенство, остаётся открытым.

**Теорема 7.1.** Если функция  $f(x)$ : 1) абсолютно интегрируема на  $(-\infty, +\infty)$ ; 2) на каждом конечном промежутке  $[-l, l]$  кусочно-монотонна и ограничена или кусочно-гладкая, то для любой точки  $x$  справедливо равенство

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega. \quad (7.7)$$

В точках непрерывности  $f(x)$  в условиях теоремы справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega.$$

Теорему примем без доказательства.

*Пример 7.1.* Представить функцию  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$  интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение. По формуле (7.7) имеет место

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-1}^{+1} e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega. \text{ Так как } \int_{-1}^{+1} e^{i\omega(x-u)} du = \\
 &= e^{i\omega x} \int_{-1}^{+1} e^{-i\omega u} du = -\frac{e^{i\omega x}}{i\omega} \cdot e^{-i\omega u} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{e^{i\omega x} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{i\omega}, \text{ то} \\
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot e^{i\omega x} d\omega. \text{ Итак, } f(x) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot e^{i\omega x} d\omega. \text{ В частности, при } x = 0 \text{ получаем}
 \end{aligned}$$

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega, \text{ т.е. } \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

## 7.2. Действительные формы записи интеграла Фурье. Интеграл Фурье для чётных и нечётных функций

Применяя формулу Эйлера, можем записать

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) [\cos \omega(x-u) + i \sin \omega(x-u)] du \right\} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega(x-u) du \right\} d\omega + \\
 &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega(x-u) du \right\} d\omega.
 \end{aligned}$$

Функция  $\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega(x-u) du$  является нечётной, поэтому второй интеграл равен нулю. Функция  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega(x-u) du$  чётна

относительно  $\omega$ , поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega(x-u) du \right\} d\omega - \quad (7.8)$$

действительная форма записи интеграла Фурье. В подобном же виде мы записывали и ряд Фурье (см. п. 6.3.3), только интегрирование по  $\omega$  от 0 до  $\infty$  было заменено суммированием по  $n$  от 0 до  $\infty$ . Эту аналогию можно продолжить.

Преобразуем (7.8):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [f(u) \cos \omega x \cos \omega u + f(u) \sin \omega x \sin \omega u] du \right\} d\omega.$$

Обозначим  $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega u du$ ,  $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega u du$ .

Получим

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] d\omega. \quad (7.9)$$

Коэффициенты  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  в (7.9) играют роль коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  ряда Фурье.

Если функция  $f(x)$  чётна, то  $b(\omega) = 0$ , а  $a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u) \cos \omega u du$ . В этом случае

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} f(u) \cos \omega u du \right\} \cos \omega x d\omega. \quad (7.10)$$

Если функция  $f(x)$  нечётна, то  $a(\omega) = 0$ , а  $b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u) \sin \omega u du$ .

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} f(u) \sin \omega u du \right\} \sin \omega x d\omega. \quad (7.11)$$

Мы вводили понятие интеграла Фурье для функций, заданных на всей числовой оси. Если же функция задана только на  $(0, +\infty)$ , то её можно продолжить на всю числовую ось либо чётным образом, либо нечётным и представить в виде (7.10) либо в виде (7.11).

Выражение  $a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x$  можно преобразовать к виду  $A(\omega) \cos(\omega x - \varphi(\omega))$ , где  $A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$ ;  $\cos(\varphi(\omega)) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}$ . Мы получаем  $f(x) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega x - \varphi(\omega)) d\omega$ .

Функция  $f(x)$  представлена как сумма гармонических колебаний амплитудой  $A(\omega)$ , угловой частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi(\omega)$ , причём частоты меняются непрерывно от 0 до  $\infty$ , в случае же рядов Фурье, как мы видели, функция также была представлена в виде суммы гармонических колебаний, но частоты которых менялись дискретно. Интеграл Фурье применяется для спектрального анализа функций непериодических, заданных на всей числовой оси. При

этом функция  $S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u} du$  называется спектральной

функцией или спектральной плотностью функции  $f(x)$ . Функция  $\rho(\omega) = |S(\omega)|$  называется амплитудным спектром, а функция  $\Phi(\omega) = -\arg S(\omega)$  — фазовым спектром функции  $f(x)$ . Зная спектральную плотность  $S(\omega)$ , функцию  $f(x)$  можно восстановить по

формуле  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i\omega x} d\omega$ .

Если интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$  сходится, то можно показать, что для

$f(x)$  выполняется равенство, аналогичное равенству

Парсеваля-Стеклова (см. п. 6.2.4):  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$ . Стоя-

щий справа интеграл называют нормализованной энергией  $E$ , которая соответствует энергии, рассеиваемой током  $f(x)$ , протекающим через сопротивление в один ом. Функцию  $|S(\omega)|^2$  называют спектром плотности энергии. Функция  $|S(\omega)|^2$  показывает распределение энергии по частотным составляющим.

*Пример 7.2.* Функцию  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } |x| > 1, \\ 1 & \text{для } 0 < x < 1, \\ -1 & \text{для } -1 < x < 0 \end{cases}$  представить интегралом Фурье в вещественной форме.

Решение. Запишем искомый интеграл в виде (7.11). Так как функция  $f(x)$  нечётна, то  $a(\omega) = 0$ ,

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \omega u du = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\cos \omega u}{\omega} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi \omega} (1 - \cos \omega) = \frac{4}{\pi \omega} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Следовательно,  $f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin \omega x d\omega$ .

### 7.3. Преобразование Фурье

В математике и её приложениях широкое распространение получил метод замены изучаемой функции  $f(x)$  некоторым её преобразованием. Наиболее часто применяются интегральные преобразования.

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $(a, b)$  (в частности,  $a$  или  $b$  может быть  $+\infty$  или  $-\infty$ ). *Интегральным преобразованием* функции  $f(x)$  называется функция  $F(u)$ , определяемая равенством

$$F(u) = \int_a^b K(x, u) f(x) dx, \text{ где } K(x, u) \text{ — некоторая фиксированная}$$

функция для данного класса преобразований, называемая *ядром интегрального преобразования*. Как видим, интегральное преобразование представлено интегралом, зависящим от параметра, изученным в пп. 5.1, 5.2, 5.3.

Классификацию преобразований можно производить по виду ядра преобразования. Мы изучим два интегральных преобразования:

с ядром  $K(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x}$  — преобразование Фурье и  $K(x, p) = e^{-px}$ ,  $p = s + i\sigma$  — преобразование Лапласа. Интегральные преобразования Фурье и Лапласа различаются не только видом ядра, но и классами функций, для которых они применимы.

Было отмечено, что если функция  $f(x)$  кусочно-монотонна или кусочно-дифференцируема и абсолютно интегрируема на  $(-\infty, +\infty)$ , то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right\} d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right\} e^{i\omega x} d\omega.$$

Обозначим

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du. \quad (7.12)$$

Функция  $F(\omega)$  называется *преобразованием Фурье*, или образом Фурье функции  $f(x)$ . Иногда применяется обозначение  $F(\omega) = \Phi[f(x)]$ . Эту же функцию  $F(\omega)$  называют также *спектральной функцией*, или *спектральной плотностью* функции  $f(x)$ .

Теперь можно записать

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (7.13)$$

По формуле (7.12) можно найти образ Фурье известной функции, а по формуле (7.13) восстановить функцию  $f(x)$  по известному её образу Фурье.

Часто оказывается проще выполнять некоторые операции над образами, чем над исходными функциями. На этом основано применение интегральных преобразований.

*Пример 7.3.* Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. По формуле (7.12) находим

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u} e^{-i\omega u} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)u} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} = \\ &= \frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $F(\omega) = \Phi[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$ .

Отметим некоторые свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности: если  $\Phi[f_1(x)] = F_1(\omega)$ ,  $\Phi[f_2(x)] = F_2(\omega)$ , то  $\Phi[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные константы.

2. Свойство подобия: если  $\Phi[f(x)] = F(\omega)$ , то  $\Phi[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ , где  $\alpha = \text{const}$ .

3. Если  $\Phi[f(x)] = F(\omega)$ , то  $\Phi[f(x-a)] = e^{-i\omega a} F(\omega)$ , где  $a = \text{const}$ . Свойства 1 — 3 предлагается доказать самостоятельно.

4. Если функция  $f(x)$  дифференцируема на всей числовой оси, является бесконечно малой при  $x \rightarrow \pm\infty$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  и

$$F(\omega) = \Phi[f(x)], \text{ то } \Phi[f'(x)] = i\omega F(\omega).$$

Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \Phi[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = \left\{ \begin{array}{l} f'(x) dx = dv, \\ e^{-i\omega x} = u \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right\} = i\omega F(\omega), \end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое обращается в нуль как произведение бесконечно малой функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  на ограниченную функцию  $e^{-i\omega x}$ .

Часто приходится находить преобразование Фурье от функций, отличных от нуля только на конечном участке оси  $OX$  (финитные функции). Для таких функций свойство 4 следует уточнить.

Пусть  $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{в других точках,} \end{cases}$  причём функция  $\varphi(x)$

дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\Phi[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \varphi'(x) e^{-i\omega x} dx =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varphi(x) e^{-i\omega x} \Big|_a^b + i\omega \int_a^b \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\varphi(b-0) e^{-i\omega b} -$   
 $-\varphi(a+0) e^{-i\omega a}] + i\omega \Phi[f(x)].$

5. Если  $F(\omega) = \Phi[f(x)]$ , то а)  $\Phi[f(x) \cos \lambda x] = \frac{1}{2} [F(\omega - \lambda) +$   
 $+F(\omega + \lambda)]$ ; б)  $\Phi[f(x) \sin \lambda x] = \frac{1}{2i} [F(\omega - \lambda) - F(\omega + \lambda)]$ .

Докажем б):  $\Phi[f(x) \sin \lambda x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin(\lambda u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$   
 $\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \frac{1}{2i} [e^{i\lambda u} - e^{-i\lambda u}] e^{-i\omega u} du = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(\omega-\lambda)u} du -$   
 $-\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(\omega+\lambda)u} du = \frac{1}{2i} [F(\omega - \lambda) - F(\omega + \lambda)].$

6. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , а интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx$  сходится, то функция  $F(\omega) = \Phi[f(x)]$  дифференцируема и при этом  $F'(\omega) = \Phi[-ix f(x)]$ .

Действительно, в этом случае возможно дифференцирование по параметру под знаком интеграла (см. подраздел 5.2) выражения

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ . Выполняя это дифференцирование, по-

лучаем  $F'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-i\omega x} dx = \Phi[-ix f(x)]$ , т.е.

$F[x f(x)] = iF'(\omega)$ .

## 7.4. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье

Если функция  $f(x)$  задана на  $(0, +\infty)$ , то её можно продолжить на всю числовую ось чётным или нечётным образом. Если полученная функция представима интегралом Фурье, то справедливы со-

отношения (7.10) и (7.11):  $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(u) \cos \omega u du \right\} \cos \omega x d\omega$ ,

$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du \right\} \sin \omega x d\omega$ . Функция

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \omega u du = \Phi_c(f) \quad (7.14)$$

называется *косинус-преобразованием Фурье* функции  $f(x)$ , а функция

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du = \Phi_s(f) \quad (7.15)$$

её *синус-преобразованием Фурье*. Зная либо функцию  $F_c(\omega)$ , либо  $F_s(\omega)$ , можно восстановить функцию  $f(x)$  по формулам:  $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega$ . Легко показать, что преобразование Фурье  $F(\omega)$  чётной функции  $f(x)$  совпадает с её косинус-преобразованием, т.е.  $F(\omega) = F_c(\omega)$ , а для нечётной —  $F(\omega) = -iF_s(\omega)$ .

Действительно,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(u) \cos \omega u - i f(u) \sin \omega u] du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega u du - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega u du.$$

Если функция чётна, то второй интеграл равен нулю, и мы получаем  $F(\omega) = F_c(\omega)$ . Если же функция  $f(x)$  нечётна, то первый интеграл равен нулю и  $F(\omega) = -iF_s(\omega)$ . Умножая обе части на  $i$ , получаем  $F_s(\omega) = iF(\omega)$ . Любую функцию можно представить в виде суммы  $f(x) = g(x) + h(x)$  чётной функции  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  и нечётной  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

Поэтому преобразование Фурье любой функции можно представить в виде  $F(\omega) = \tilde{F}_c(\omega) - i\tilde{F}_s(\omega)$ , где  $\tilde{F}_c(\omega)$  — косинус-преобразование  $g(x)$ , а  $\tilde{F}_s(\omega)$  — синус-преобразование  $h(x)$ .

*Пример 7.4.* Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем  $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x) \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$   
 $\times \left( \frac{\sin \omega x}{\omega} - \frac{x \sin \omega x}{\omega} - \frac{\cos \omega x}{\omega^2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$



Так как преобразования Фурье (7.12), (7.14) и (7.15) являются несобственными интегралами, зависящими от параметра, то для их отыскания при выполнении определённых условий можно применять метод дифференцирования или интегрирования по параметру, а также теорию вычетов.

*Пример 7.5.* Найти синус-преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ ,  $(0 < x < +\infty)$ .

Решение. Имеем  $F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin \omega x dx$ . Легко проверить, что для данного интеграла выполнены условия теоремы 5.8 о дифференцировании по параметру. Находим

$$F'_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x} \sin \omega x \right)'_{\omega} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{e^{-x} \sin \omega x}{\omega} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x dx = \frac{-1}{\omega^2} e^{-x} \cos \omega x \Big|_0^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx, \text{ т.е. } \left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{1}{\omega^2}, \text{ следова-}$$

тельно,  $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x dx = \frac{1}{1 + \omega^2}$ . Поэтому  $F'_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2}$ . Ин-

тегрируя, находим  $F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \omega + c$ . Поскольку  $F_s(0) = 0$ , то

$$c = 0 \text{ и } F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \omega.$$

*Пример 7.6.* Найти косинус-преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$ .

Решение. Функция  $f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2}$ , полученная из  $f(x)$  аналитическим продолжением на верхнюю полуплоскость, удовлетворяет условиям леммы Жордана (см. п. 4.3.4). По формуле (4.19) находим

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \cos \omega x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \cos \omega x dx =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2}; z = i \right] 2\pi i \right\}$$

(учтена чётность подынтегральной функции). Вычисляя вычет, получаем  $F_c(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \cdot e^{-\omega}(1 + \omega)$ .

Отметим некоторые свойства синус- и косинус- преобразований Фурье. Если функция  $f(x)$  имеет синус- и косинус- преобразования Фурье  $F_c(\omega)$  и  $F_s(\omega)$ , то выполняются следующие свойства:

$$1) \Phi_s[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \Phi_s[f_1(x)] + \beta \Phi_s[f_2(x)], \Phi_c[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \Phi_c[f_1(x)] + \beta \Phi_c[f_2(x)] \quad (\alpha \text{ и } \beta - \text{константы});$$

$$2) \Phi_s[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F_s\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \Phi_c[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F_c\left(\frac{\omega}{\alpha}\right);$$

$$3) \Phi_s[f(x) \cos \alpha x] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x \sin \omega x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) [\sin(\omega + \alpha)x + \sin(\omega - \alpha)x] dx = \frac{1}{2} [F_s(\omega - \alpha) + F_s(\omega + \alpha)].$$

$$\text{Аналогично можно найти } \Phi_s[f(x) \sin \alpha x] = \frac{1}{2} [F_c(\omega - \alpha) - F_c(\omega + \alpha)];$$

$$\Phi_c[f(x) \cos \alpha x] = \frac{1}{2} [F_c(\omega - \alpha) + F_c(\omega + \alpha)]; \Phi_c[f(x) \sin \alpha x] =$$

$$= \frac{1}{2} [F_s(\omega + \alpha) - F_s(\omega - \alpha)];$$

$$4) \text{ пусть } \Phi_c[f(x)] = F_c(\omega). \text{ Тогда } \Phi_s[f'(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin \omega x dx.$$

$$\text{Последний интеграл возьмём по частям, приняв } f'(x) dx = dv, \\ v = f(x), \quad u = \sin \omega x, \quad du = \omega \cos \omega x dx. \text{ Получаем } \Phi_s[f'(x)] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x) \sin \omega x \Big|_0^{+\infty} - \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx = -\omega F_c(\omega), \text{ поскольку}$$

ку первое слагаемое обращается в нуль. Аналогично можно найти  $\Phi_c[f'(x)] = \omega F_s(\omega)$  при условии, что  $f(0) = 0$ . Предлагается получить самостоятельно соответствующие выражения для функций, отличных от нуля лишь на конечном участке  $[a, b]$ .

## 8. Преобразование Лапласа

В этом разделе мы познакомимся ещё с одним видом интегральных преобразований — преобразованием Лапласа, широко применяемым в радиотехнике, электротехнике и других дисциплинах, связанных с дифференциальными уравнениями и уравнениями математической физики.

### 8.1. Понятие оригинала и его изображения. Теоремы обращения

*Определение 1.* Комплекснозначная функция  $f(t)$  действительного аргумента  $t$  называется *оригиналом*, если:

1) функция  $f(t)$  определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме отдельных точек, где она может иметь разрывы первого рода;  $f(t)$  имеет производные достаточно высокого порядка, также непрерывные, кроме отдельных точек разрыва первого рода. На каждом интервале — таких точек конечное число;

$$2) f(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

3)  $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ ,  $M, s_0$  — константы,  $s_0 \geq 0$ . Число  $s_0$  называется *порядком роста*  $f(t)$ .

Например, единичная функция  $\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$  является оригиналом.

Если для функции  $\varphi(t)$  выполнены условия 1) и 3) определения, то функция  $f(t) = \eta(t)\varphi(t)$  является оригиналом. Впредь мы будем считать функции  $\sin t$ ,  $\cos t$  и подобные оригиналами, полагая что операция умножения на  $\eta(t)$  уже проведена.

*Определение 2.* Изображением функции  $f(t)$  или её преобразованием Лапласа называется функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p$ , определяемая соотношением  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ . Обозначают  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ ,  $F(p) \rightarrow f(t)$ .

$$\text{Пример 8.1. } \mathcal{L}[\eta(t)] = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

$$\text{Пример 8.2. } \mathcal{L}[e^{p_0 t}] = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = \frac{1}{p-p_0}, \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0).$$

Следующая теорема устанавливает область определения и аналитичности изображения  $F(p)$ .

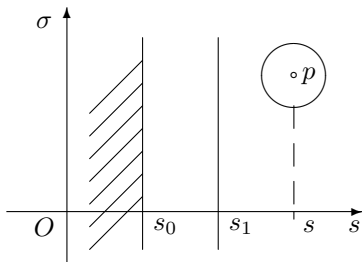
*Теорема 8.1.* Если  $f(t)$  — оригинал с показателем роста  $s_0$ , то его изображение  $F(p)$  определено и является аналитической функцией в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ .

*Доказательство.* Ограничимся случаем, когда функция  $f(t)$  непрерывна. При  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

сходится, так как он мажорируется интегралом

$$\int_0^{\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \quad (8.1)$$



поскольку

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)||e^{-(s+i\sigma)t}| \leq M e^{s_0 t} e^{-st} = M e^{-(s-s_0)t},$$

$$0 \leq t < +\infty. \quad (\text{Здесь и ниже мы полагаем } p = s + i\sigma.)$$

Пусть  $p$  таково, что  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ . Найдётся  $s_1$  такое, что выполняется неравенство  $s > s_1 > s_0$ . Для доказательства существования  $F'(p)$  по теореме о дифференцировании интеграла по параметру достаточно показать, что интеграл

$$I = \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \quad (8.2)$$

сходится равномерно в области  $\operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$ . Поскольку  $|f(t)t e^{-pt}| \leq M e^{s_0 t} t e^{-s_1 t} = M t e^{-(s_1-s_0)t}$ , то интеграл (8.2) мажорируется при  $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$  сходящимся, не зависящим от  $p$  интегралом  $\int_0^{\infty} M t e^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}$ , а потому он сходится равномерно. Следовательно,  $F'(p)$  существует в области  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  и  $F'(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt$ .

*Замечание.* Из (8.1) следует, что  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s + i\sigma) = 0$ , или, что то же самое,  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ , где  $p$  остаётся внутри угла

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \text{а } \delta \text{ сколько угодно мало.}$$

Приведём формулировку теоремы, содержащей правило восстановления оригинала по его изображению (теорема обращения).

*Теорема 8.2.* Если функция  $f(t)$  является оригиналом, а  $F(p)$  — его изображение, то в любой точке непрерывности  $f(t)$  имеет место

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \text{ где интеграл берётся вдоль любой}$$

прямой  $\operatorname{Re} p = a > s_0$  и понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} F(p)e^{pt} dp.$$

Из этой теоремы следует, что оригинал определяется своим изображением  $F(p)$  полностью с точностью до значений в точках разрыва.

В следующей теореме выясняются условия, при которых аналитическая функция может быть изображением некоторого оригинала.

*Теорема 8.3.* Если функция  $F(p)$ : 1) аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ ; 2)  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$  в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$

равномерно относительно  $\arg p$ ; 3) интеграл  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$  сходится абсолютно, то  $F(p)$  является изображением оригинала  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp$ .

## 8.2. Свойства преобразования Лапласа

Имеются довольно подробные таблицы оригиналов и их изображений. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, эти таблицы можно значительно расширить.

### 8.2.1. Свойство линейности, теорема подобия

Будем обозначать  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $x(t)$  и т.д. оригиналы, а соответствующими заглавными буквами — их изображения:  $F(p)$ ,  $G(p)$ ,  $X(p)$  и т.д. в соответствующих областях, которые мы не указываем.

Из линейности операции интегрирования следует, что если  $f(t)$  и  $g(t)$  — оригиналы, то при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $\alpha f(t) + \beta g(t)$  также оригинал и  $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$ .

*Пример 8.3.* Найти  $\mathcal{L}[\sin \omega t]$ .

Решение. По свойству линейности  $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right] =$   
 $= \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{i\omega t}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ . Ана-  
 логично,  $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ ;  $\mathcal{L}[\text{sh } \omega t] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$ ;  $\mathcal{L}[\text{ch } \omega t] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$ .

*Теорема подобия.*  $\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ ,  $\alpha > 0$ .

Действительно,  $\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \int_0^{\infty} f(\alpha t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) \exp\left(-\frac{p\tau}{\alpha}\right) d\tau =$   
 $= \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ .

### 8.2.2. Теоремы запаздывания и смещения

*Теорема запаздывания:*  $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau}\mathcal{L}[f(t)]$ . Включение ори-  
 гинала с запаздыванием на  $\tau$  приводит к умножению его изображе-  
 ния на  $e^{-p\tau}$ .

Действительно,  $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt$ , так как

$$f(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

В последнем интеграле сделаем замену  $t - \tau = t_1$ . Тогда  $\mathcal{L}[f(t - \tau)] =$   
 $= \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} F(p)$ .

Теорема запаздывания часто применяется тогда, когда оригинал  
 на различных участках задаётся различными выражениями.

*Пример 8.4.* Найти изображение  $F(p)$ , если

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{если } 0 < t \leq \pi; \\ 0, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

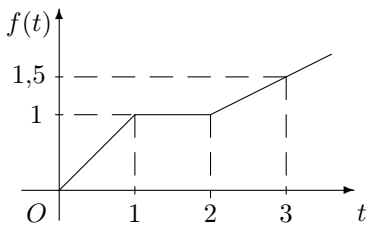
Решение. Имеем  $f(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t - \pi)\sin t = \eta(t)\sin t -$   
 $- \eta(t - \pi)\sin(t - \pi + \pi) = \eta(t)\sin t + \eta(t - \pi)\sin(t - \pi)$ ,  
 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 + p^2} + \frac{e^{-p\pi}}{1 + p^2} = \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 + p^2}$ .

Часто встречаются оригиналы, составленные из линейных функ-  
 ций, различных на разных участках. Аналитически такой оригинал  
 может быть задан в виде  $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ k_s t + b_s, & \text{если } \tau_s < t < \tau_{s+1}, \end{cases}$   
 где  $\tau_s$  — точки разрыва функции  $f(t)$  или её производной,

$s = 1, 2, \dots, n$ . Точка  $\tau_1 = 0$  входит в число точек разрыва, если  $f(0+0) \neq 0$  или  $f'(0+0) \neq 0$ . Легко показать, что изображение данного оригинала можно записать в виде суммы

$$F(p) = \sum_{s=1}^n e^{-p\tau_s} \left( \frac{A_s}{p^2} + \frac{B_s}{p} \right), \quad (8.3)$$

где константы  $A_s$  и  $B_s$  вычисляются по формулам:  $A_s = (k_s - k_{s-1})$  ( $k_0 = 0, b_0 = 0$ ).  $B_s = (k_s - k_{s-1})\tau_s + (b_s - b_{s-1})$ .



*Пример 8.5.* Найти изображение оригинала, заданного графически.

*Решение.* В данном случае  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 1$ ,  $\tau_3 = 2$ . Аналитически этот оригинал можно задать в виде

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } 1 < t < 2, \\ 0,5t, & \text{если } t > 2. \end{cases}$$

Видим, что  $k_0 = b_0 = 0, k_1 = 1, b_1 = 0, k_2 = 0, b_2 = 1, k_3 = 0,5, b_3 = 0$ . Вычисляя, находим  $A_1 = k_1 - k_0 = 1, B_1 = (k_1 - k_0)\tau_1 + (b_1 - b_0) = 0$ ,  $A_2 = k_2 - k_1 = -1, B_2 = (k_2 - k_1)\tau_2 + (b_2 - b_1) = 0, A_3 = k_3 - k_2 = \frac{1}{2}$ ,

$B_3 = \frac{1}{2} \cdot \tau_3 + (b_3 - b_2) = 1 - 1 = 0$ . По формуле (8.3) получаем

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{2p^2} = \frac{2 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{2p^2}.$$

*Теорема смещения:*  $\mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)] = F(p - p_0)$  (предлагается доказать самостоятельно).

*Пример 8.6.* Дано  $F(p) = \frac{p}{p^2 + 8p + 25} = \mathcal{L}[f(t)]$ . Найти  $f(t)$ .

*Решение.* Так как  $F(p) = \frac{p+4}{(p+4)^2 + 9} - \frac{4}{(p+4)^2 + 9}$ , то на основании теоремы смещения получаем  $f(t) = e^{-4t} \left( \cos 3t - \frac{4}{3} \sin 3t \right)$ .

*Пример 8.7.* Найти  $f(t)$ , если  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \frac{pe^{-2p}}{p^2 + 10p + 41}$ .

*Решение.* Преобразуем функцию  $F(p)$  следующим образом:  $F(p) = \frac{e^{-2p}[(p+5) - 5]}{(p+5)^2 + 16}$ . Из теорем смещения и запаздывания следует, что  $f(t) = \eta(t-2)e^{-5(t-2)} \left[ \cos 4(t-2) - \frac{5}{4} \sin 4(t-2) \right]$ .

### 8.2.3. Дифференцирование оригинала

Пусть  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(t)$  — оригиналы. Тогда  $\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt$ . Последний интеграл возьмём по частям, полагая  $f'(t)dt = dv$ ,  $v = f(t)$ ,  $u = e^{-pt}$ ,  $du = -pe^{-pt} dt$ . Получаем  $\mathcal{L}[f'(t)] = [e^{-pt}f(t)]_0^{+\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ . Так как  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt}f(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-pt}f(t) = f(+0)$ , то  $\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$ . Здесь и ниже пределы соответствующих функций при  $t \rightarrow 0+0$ . Далее, применяя последнюю формулу, легко находим  $\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}\{f'(t)\}' = p[\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0)] = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$ . Пропедев эту операцию  $n$  раз, получим  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{(n-1)}f(0) - p^{(n-2)}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ . В частности, если  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n-1)}(0) = 0$ , то  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p)$ , т.е. в этом случае при дифференцировании оригинала его изображение умножается на  $p$ .

*Пример 8.9.* Найти изображение  $X(p)$  решения  $x(t)$  дифференциального уравнения  $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \cos t$ , удовлетворяющего условию  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

Решение. Пользуясь свойством линейности и правилом дифференцирования оригинала, получаем  $p^2X(p) - 1 + 3pX(p) + 2X(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ . Отсюда  $X(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p^2 + 3p + 2)}$ .

Как видим, дифференциальное линейное уравнение с постоянными коэффициентами для неизвестного оригинала  $x(t)$  превращается в алгебраическое уравнение для его изображения  $X(p)$ .

### 8.2.4. Дифференцирование изображения

Ранее мы показали, что изображение  $F(p)$  в полуплоскости  $\text{Re } p = s > s_0$  является функцией аналитической, а потому имеет там производные всех порядков. Все их можно найти, дифференцируя по параметру  $p$  несобственный интеграл  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ .



Получим

$$\left. \begin{aligned} F'(p) &= - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}[t f(t)], \\ F''(p) &= \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}[t^2 f(t)], \\ \dots\dots\dots \\ F^{(n)}(p) &= (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Если  $f(t)$  — оригинал с показателем роста  $s_0$ , то все интегралы в (8.4) сходятся равномерно относительно  $p$  при  $\operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$ , а потому по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру все соотношения в (8.4) справедливы.

Таким образом, при дифференцировании изображения оригинал умножается на  $(-t)$ .

*Пример 8.10.* Найти  $\mathcal{L}[t^n]$ .

Решение. Изображение  $\mathcal{L}[t^n]$  можно получить  $n$ -кратным дифференцированием изображения  $\mathcal{L}[\eta(t)] = \frac{1}{p}$ , следовательно,  $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$ .

Приведём другой способ отыскания изображений кусочно-линейных или кусочно-степенных оригиналов, основанный на применении теоремы запаздывания и дифференцировании изображений.

*Пример 8.11.* Найти изображение оригинала, заданного в виде

$$f(t) = \begin{cases} 2, & \text{если } 0 < t < 1, \\ t + 1, & \text{если } 1 < t < 2, \\ 3, & \text{если } t > 2. \end{cases}$$

Решение. Данный оригинал можно записать следующим образом:  $f(t) = 2\eta(t) - 2\eta(t-1) + (t+1)\eta(t-1) - (t+1)\eta(t-2) + 3\eta(t-2) = 2\eta(t) - \eta(t-1) + t\eta(t-1) - t\eta(t-2) + 2\eta(t-2)$ . Так как  $\mathcal{L}[\eta(t-1)] = \frac{e^{-p}}{p}$ ,  $\mathcal{L}[\eta(t-2)] = \frac{e^{-2p}}{p}$ , то  $\mathcal{L}[t\eta(t-1)] = -\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)'$ ,  $\mathcal{L}[t\eta(t-2)] = -\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)'$  (по свойству о дифференцировании изображения). Таким образом,  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} - \left(\frac{e^{-p}}{p}\right)' + \left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)' + \frac{2e^{-2p}}{p} = \frac{2}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} = \frac{2p - e^{-p} - e^{-2p}}{p^2}$ .

### 8.2.5. Интегрирование оригинала и изображения

Пусть  $f(t)$  — оригинал. Ясно, что функция  $g(t) = \int_0^t f(t)dt$  также оригинал, а так как  $g'(t) = f(t)$ ,  $g(0) = 0$ , то  $\mathcal{L}[g'(t)] = pG(p) = F(p)$ . Следовательно,  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$ .

При интегрировании оригинала в пределах от 0 до  $t$  его изображение делится на  $p$ .

Пусть  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$  и интеграл  $\int_p^\infty F(p)dp$  абсолютно сходится.

Путь интегрирования предполагается целиком лежащим в области аналитичности  $F(p)$ . Имеем

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_p^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right\} dp. \quad (8.5)$$

Внутренний интеграл сходится равномерно по  $p$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = a > s_0$ . Если путь интегрирования по  $p$  целиком лежит в этой полуплоскости, то по теореме об интегрировании несобственных интегралов по параметру в (8.5) законна замена порядка интегрирования, т.е.  $\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty \left\{ \int_p^\infty e^{-pt} dp \right\} f(t)dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ . Мы приходим

к выводу: если интеграл  $\int_p^\infty F(p)dp$  сходится абсолютно, то  $\frac{f(t)}{t}$  является оригиналом и  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(p)dp$ .

*Пример 8.12.*  $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_p^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$

*Пример 8.13.*  $\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sin t dt}{t}\right] = \frac{\operatorname{arctg} p}{p} = \mathcal{L}[\operatorname{si} t].$

Если сходится интеграл  $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ , то легко показать, что

$$\int_0^\infty F(p)dp = \int_0^\infty \frac{f(t)dt}{t}, \quad (8.6)$$

где интеграл слева можно вычислять по положительной полуоси. Последняя формула бывает иногда удобной при вычислении несобственных интегралов.

*Пример 8.14.* Вычислить  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin at dt}{t}$ ,  $\alpha > 0$ .

Решение. Сходимость интеграла проверяется легко. Так как  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin at] = \frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2}$ , то по формуле (8.6)

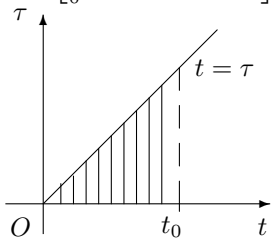
$$I = a \int_0^{+\infty} \frac{dp}{(p + \alpha)^2 + a^2} = \operatorname{arctg} \frac{p + \alpha}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a} = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{a}.$$

### 8.2.6. Умножение изображений. Интеграл Дюамеля

*Теорема 8.4.* Если  $f(t)$  и  $g(t)$  — оригиналы, то функция  $\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$  также оригинал и  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] = F(p)G(p)$ .

*Доказательство.* Пусть  $s_1$  — показатель роста  $f(t)$ , а  $s_2$  — показатель роста  $g(t)$ . Через  $s_0$  обозначим большее из чисел  $s_1$  и  $s_2$ . Тогда  $\left|\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right| < M \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau = M \int_0^t e^{s_0\tau} d\tau = Mte^{s_0t} < Me^{(s_0+\varepsilon)t}$ , где  $\varepsilon$  — некоторое фиксированное положительное число. Отсюда и следует, что  $\Phi(t)$  — оригинал. Найдём теперь изображение

$$\Phi(t): \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] = \int_0^\infty e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right\} dt.$$



Справа стоит повторный интеграл, равный двойному по углу, изображённому на рисунке. При фиксированном  $t$  интегрируем по  $\tau$  в пределах от 0 до  $t$ , а затем интегрируем по  $t$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Так как этот двойной интеграл абсолютно сходится, то в нём можно изменить порядок интегрирования. Получим

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right] = \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty g(t - \tau)e^{-pt} dt \right\} d\tau.$$

По теореме запаздывания внутренний интеграл равен  $e^{-p\tau}G(p)$ ,

поэтому,  $\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] = G(p) \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = F(p)G(p)$ .

Теорема доказана.

Интеграл  $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$  называется *свёрткой* функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и обозначается символом  $(f * g)$ . Очевидно, что  $(f * g) = (g * f)$ .

*Следствие.*  $\mathcal{L} \left[ f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] = pF(p)G(p)$  — формула Дюамеля.

*Доказательство.* Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа, правилом дифференцирования оригинала и теоремой умножения изображений, находим  $\mathcal{L} \left[ f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] = f(0)G(p) + [pF(p) - f(0)]G(p) = pF(p)G(p)$ .

### 8.3. Теоремы разложения

В этом разделе изучаются некоторые способы отыскания оригинала по известному изображению.

Мы знаем, что по известному изображению  $F(p)$ , удовлетворяющему определённым условиям, пользуясь теоремой обращения, можно найти соответствующий оригинал по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp. \quad (8.7)$$

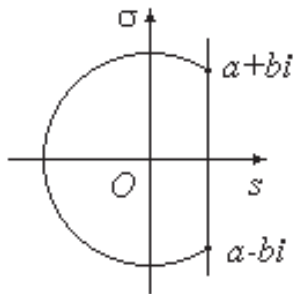
В некоторых случаях этот интеграл может быть вычислен с помощью вычетов.

*Теорема 8.5* (вторая теорема разложения). Если функция  $F(p)$ : 1) аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ , а в полуплоскости  $\operatorname{Re} p < s_0$  имеет только полюсы (конечное число); 2)  $M(R) = \max|F(p)| \rightarrow 0$ ,  $p \in C_R$  при  $R \rightarrow \infty$ , где  $C_R$  — дуги окружностей  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p \leq s_0$ ; 3) для любого  $a > s_0$  абсолютно сходится интеграл  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ , то оригиналом для  $F(p)$  служит умноженная на  $\eta(t)$  функция

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res} [F(p)e^{pt}; p = p_k], \quad (8.8)$$

где сумма вычетов берётся по всем особым точкам  $p_k$  функции  $F(p)$ .

*Доказательство.* При выполнении условий теоремы справедлива формула (8.7). Пусть  $a > s_0$ . Обозначим:  $C_R$  — часть окружности  $|p| = R$ , расположенная слева от прямой  $\operatorname{Re} p = a$ ;  $a \pm bi$  — точки пересечения этой прямой с окружностью  $|p| = R$ ;  $\Gamma$  — замкнутый контур, состоящий из дуги  $C_R$  и отрезка  $[a - bi, a + bi]$ , проходимый против часовой стрелки. Величину  $R$  возьмём столь большой, чтобы все особые точки функции  $F(p)$



попали внутрь  $\Gamma$ . По лемме Жордана  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp = 0$ . По-

скольку  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{pt} F(p) dp = \sum_k \operatorname{Res} [F(p)e^{pt}; p = p_k] =$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p) dp$ , то, переходя к пределу в этом равенстве при  $R \rightarrow \infty$ , получаем требуемое.

*Следствие.* Если функция  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  дробно-рациональна, причём степень многочлена  $B(p)$  выше степени многочлена  $A(p)$ , то её оригиналом служит умноженная на  $\eta(t)$  функция  $f(t) = \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \{(p - p_k)^{n_k} e^{pt} F(p)\}$ , где  $p_k$  — полюсы  $F(p)$ , а  $n_k$  — их кратности, и сумма берётся по всем полюсам.

В частности, если все полюсы  $p_k$  простые, то  $f(t) = \sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ .

Если  $F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}$  и знаменатель  $B(p)$  имеет лишь простые корни, отличные от нуля, а степень полинома  $A(p)$  не выше степени полинома  $B(p)$ , то  $f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_k \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}$ .

Справедливость следствия следует из правила вычисления вычетов относительно полюсов.

В случае рационального изображения оригинал иногда можно найти проще, если рациональную дробь представить в виде суммы элементарных слагаемых.

*Пример 8.15.* Найти оригинал  $f(t)$  по его изображению:

$$F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^3(p^2 + 2p + 2)}.$$

Решение. Так как  $F(p) = \frac{2}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{p^3}$ , то  $f(t) = 2e^{-t} \sin t + \frac{t^2}{2}$ .

*Пример 8.16.* Найти оригинал  $f(t)$  по его изображению:

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Решение. По формуле (8.8) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-3)}; p=1 \right] + \\ &+ \operatorname{Res} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-3)}; p=2 \right] + \operatorname{Res} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-3)}; p=3 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^t - 2e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда изображение дано в виде ряда, применяется следующая теорема.

*Теорема 8.6* (первая теорема разложения). Если функция  $F(p)$  аналитична в окрестности бесконечно удалённой точки и имеет разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки вида  $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$ ,

то оригиналом служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}. \quad (8.9)$$

Теорему примем без доказательства.

*Пример 8.17.* Найти оригинал по его изображению  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$ , где под корнем  $\psi(p) = \sqrt{p^2 + 1}$  понимается та ветвь, для которой  $\psi(0) = 1$ .

Решение. Представляя функцию  $F(p)$  в виде  $F(p) = \frac{1/p}{\sqrt{1 + 1/p^2}}$  и используя известное разложение функции  $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$  по степеням  $z$ , получим, что в окрестности  $\infty$  имеет место  $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}}$ . По формуле (8.9) получаем

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Справа стоит ряд для функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(t)$ , следовательно,  $\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ .

## 8.4. Некоторые приложения операционного исчисления

### 8.4.1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Ограничимся случаем уравнения второго порядка. Дано дифференциальное уравнение

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad (8.10)$$

где  $f(t)$  — оригинал. Найти его решение  $x(t)$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = \alpha$ ,  $x'(0) = \beta$ .

Пусть  $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$ ,  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ . Переходим от уравнения (8.10) с неизвестным оригиналом  $x(t)$  к уравнению с неизвестным изображением  $X(p)$ . Пользуясь свойством линейности и правилом дифференцирования оригинала, получаем  $(p^2 + ap + b)X(p) - (p\alpha + a\alpha + \beta) = F(p)$ . Следовательно,

$$X(p) = \frac{F(p) + p\alpha + a\alpha + \beta}{p^2 + ap + b}. \quad (8.11)$$

Теперь нужно каким-либо образом найти по известному изображению искомый оригинал  $x(t)$ .

*Пример 8.18.* Найти решение  $x(t)$  дифференциального уравнения  $x'' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 0$ .

Решение. По формуле (8.11) находим

$$X(p) = \left( \frac{p}{p^2 + 1} + 2p + 2 \right) \frac{1}{p^2 + p} = \frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p(p+1)(p^2 + 1)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби, получаем

$$X(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} \right),$$

следовательно,  $x(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)$ .

При решении задачи Коши для уравнения (8.10) с нулевыми начальными данными применяется формула Дюамеля, особенно часто

в тех случаях, когда изображение функции  $f(t)$  найти затруднительно.

Пусть дано уравнение

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \quad (8.12)$$

и поставлены нулевые начальные условия:  $x(0) = x'(0) = 0$ . С помощью формулы Дюамеля решение уравнения (8.12) с нулевыми начальными данными можно выразить через решение  $x_1(t)$  уравнения

$$x_1''(t) + ax_1'(t) + bx_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0. \quad (8.13)$$

Покажем, как это сделать. От уравнений (8.12) и (8.13) переходим к операторным уравнениям

$$\begin{cases} A(p) \cdot X(p) = F(p), \\ A(p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p}, \end{cases} \quad (8.14)$$

где  $A(p) = p^2 + ap + b$ ,  $X_1(p) = \mathcal{L}[x_1(t)]$ . Из системы (8.14) находим  $X(p) = pX_1(p)F(p)$ . Учитывая, что  $x_1(0) = 0$ , по формуле Дюамеля получаем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t - \tau)d\tau, \quad (8.15)$$

или  $x(t) = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau)f'(t - \tau)d\tau$ .

*Пример 8.19.* Найти решение  $x(t)$  уравнения  $x'' + x = \frac{1}{1 + \sin^2 t}$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

Решение. Решаем уравнение  $x_1'' + x_1 = 1$ ,  $x_1(0) = x_1'(0) = 0$  операционным способом:  $X_1(p) = \frac{1}{p(1 + p^2)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$ , следовательно,  $x_1(t) = 1 - \cos t$ . По формуле (8.15) находим

$x(t) = \int_0^t \frac{\sin(t - \tau)d\tau}{1 + \sin^2 \tau}$ . Вычисляя определённый интеграл, получаем

$$x(t) = \sin t \operatorname{arctg}(\sin t) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos t \left[ \ln \frac{\cos t + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \cos t} - \ln \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \right].$$

Заметим, что требование нулевых начальных данных не является существенным. Путём замены искомой функции можно перейти от произвольных начальных данных к нулевым, не нарушая линейности уравнения.

По такой же схеме можно решать задачу Коши и для систем дифференциальных уравнений.



*Пример 8.20.* Найти решение системы

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) - y(t) = e^t, \\ 2x'(t) + y'(t) + 2y(t) = \cos t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть  $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$ ,  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$ . Тогда

$$\begin{cases} pX(p) + pY(p) - Y(p) = \frac{1}{p-1}, \\ 2pX(p) + pY(p) + 2Y(p) = \frac{p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$X(p) = -\frac{4p^2 + 2}{p(p-4)(p-1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{p^2 + p + 2}{(p-4)(p-1)(p^2+1)}.$$

Функции  $X(p)$  и  $Y(p)$  разлагаем на элементарные дроби:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{11}{34(p-4)} - \frac{3p/17 - 5/17}{p^2+1} - \frac{1}{2p},$$

$$Y(p) = -\frac{2}{3(p-1)} + \frac{22}{51(p-4)} + \frac{4p/17 - 1/17}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$x(t) = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2},$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t.$$

*Пример 8.21.* Найти решение системы:  $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = 2\sin t, \end{cases}$  если  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = y(0) = y'(0) = 1$ .

Решение. Обозначим  $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$ ,  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$ . Применяя теорему о дифференцировании оригинала, находим:

$$\mathcal{L}[x''(t)] = p^2X(p) + p - 1, \quad \mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - 1, \quad \mathcal{L}[y''(t)] = p^2Y(p) - p - 1.$$

Получаем систему на неизвестные изображения  $X(p)$  и  $Y(p)$ :

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) = -1, \\ X(p) - p^2Y(p) = \frac{1-p-p^2-p^3}{1+p^2}, \end{cases}$$

решая которую находим:

$$X(p) = \frac{1}{1+p^2} - \frac{p}{1+p^2}, \quad Y(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2}.$$

Следовательно,  $x(t) = \sin t - \cos t$ ,  
 $y(t) = \sin t + \cos t$ .

### 8.4.2. Решение интегральных уравнений типа свёртки

Уравнение вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt, \quad (8.16)$$

где  $f(x)$  и  $k(x)$  — известные функции,  $\varphi(x)$  — неизвестная функция, называется *интегральным уравнением типа свёртки*. Будем предполагать, что функции  $f(x)$  и  $k(x)$  являются оригиналами. При этом предположении можно довольно просто найти решение  $\varphi(x)$  этого уравнения. Применим к обеим частям в (8.16) преобразование Лапласа и воспользуемся теоремой об умножении изображений. Обозначим  $\mathcal{L}[\varphi(x)] = \Phi(p)$ ,  $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[k(x)] = K(p)$ . Тогда  $\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p)$ . Отсюда находим изображение неизвестной функции  $\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}$ .

*Пример 8.22.* Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Решение. Переходим к операторному уравнению  $\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p)$ . Отсюда  $\Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 - 1} \right)$ , следовательно,  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \operatorname{sh} x)$ .

Операторным методом удаётся решать краевые задачи для некоторых уравнений в частных производных, сводя их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

## 9. Контрольные работы

Предлагаемые ниже контрольные работы могут быть использованы для студентов заочной формы обучения. Их нумерация продолжает нумерацию контрольных работ пособий ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА I и II.

Обратите внимание на выбор задач. Если номер вашего варианта  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ), то в контрольной работе №8 необходимо решить задачи 8.1. $k$ , 8.2. $k$ , 8.3. $k$ , ..., 8.10. $k$ . аналогично определяются номера задач в работах 9 и 10 (9.1. $k$ , 9.2. $k$ , 9.3. $k$ , ..., 9.11. $k$ ; 10.1. $k$ , 10.2. $k$ , 10.3. $k$ , ..., 10.12. $k$ ).

### Контрольная работа № 8

8.1.1—8.1.10. Найти  $|z|$ ,  $\arg z$ , записать число  $z$  в тригонометрической и показательной форме (см. пример 1.2). Для контроля ответа ввести сначала значения  $|z|$ , затем  $\arg z$ . Если число  $|z|$  иррациональное, то ответ вводить в виде  $\sqrt{a}$ , полагая  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , учесть, что  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ . Для других значений приближённое значение  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  не находить, записывая, например,  $\operatorname{arctg} 2$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$  и т.д.

8.1.1(8С.5П). $z = 4 - 4i$ ;	8.1.2(96.5Я). $z = -2 - 3i$ ;
8.1.3(88.ШП). $z = 2 + 4i$ ;	8.1.4(Т8.ШЛ). $z = -3 + 3i$ ;
8.1.5(В0.Ш7). $z = 4 - 2i$ ;	8.1.6(РД.57). $z = -2 - 4i$ ;
8.1.7(5С.БП). $z = -3 + 5i$ ;	8.1.8(76.5Я). $z = 1 - \sqrt{3}i$ ;
8.1.9(56.Ш7). $z = -\sqrt{3} - i$ ;	8.1.10(36.ШЛ). $z = -\sqrt{3} + i$ .

8.2.1—8.2.10. Данное число  $z$  записать в алгебраической форме (см. пример 1.3). В ответ ввести сначала  $\operatorname{Re} z$ , затем  $\operatorname{Im} z$  в виде обыкновенных несократимых дробей, не выделяя целой части.

8.2.1(ТС.РП). $z = \frac{2i^8 + 3i^{11}}{1 + 4i^{17}}$ ;	8.2.2(73.БП). $z = \frac{i^{36} + 3i^{45}}{i^{34} + 4i^9}$ ;
8.2.3(3П.РЛ). $z = \frac{4i^{12} + 2i^{15}}{-3 + 4i^{21}}$ ;	8.2.4(8Д.БП). $z = \frac{2i^{20} + 5i^{41}}{3 + 2i^3}$ ;
8.2.5(33.БЛ). $z = \frac{4i^{16} - 5i^{19}}{3 + 4i^5}$ ;	8.2.6(65.БП). $z = \frac{3i^{32} - i^7}{-2 - 5i^{33}}$ ;
8.2.7(Р4.Б7). $z = \frac{3i^8 + 2i^{25}}{7 - i^{13}}$ ;	8.2.8(Д9.Р7). $z = \frac{2i^{24} - 6i^{27}}{3 + 5i^7}$ ;

$$8.2.9(19.РП). z = \frac{4i^4 - 7i^{27}}{-5 + 3i^{29}}; \quad 8.2.10(ТА.РП). z = \frac{i^{60} - 2i^{51}}{2 - 5i^{37}}.$$

8.3.1—8.3.10. Найти все значения  $W$  корня из данного комплексного числа (см. пример 1.4). В ответ ввести сначала  $\rho = |W_k|$ , а затем все значения аргумента  $W_k$ , получающегося из формулы  $\psi = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . При вводе нецелых значений  $\rho$  использовать дробные показатели степени.

$$8.3.1(ТС.5П). \sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}; \quad 8.3.2(54.5П). \sqrt[3]{-4 + 4i};$$

$$8.3.3(74.ШП). \sqrt[3]{-27}; \quad 8.3.4(02.ШЛ). \sqrt[3]{27i};$$

$$8.3.5(0С.Ш7). \sqrt[3]{-8i}; \quad 8.3.6(0Д.57). \sqrt[3]{-27i}$$

$$8.3.7(7А.5П). \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}; \quad 8.3.8(90.5П). \sqrt[3]{-6 - 6i};$$

$$8.3.9(АС.ШП). \sqrt[4]{16}; \quad 8.3.10(Т6.ШЛ). \sqrt[3]{-64i}.$$

8.4.1—8.4.10. По заданному значению  $\mathcal{L}n z$  найдите  $z$  (см. пример 1.7). Запишите  $z$  в алгебраической форме в виде  $a + bi$ , опуская нулевые слагаемые, если они имеются.

$$8.4.1(2П6). \mathcal{L}n z = \ln \sqrt{52} + \left( \arctg \frac{2}{3} + 2m\pi \right) i;$$

$$8.4.2(547). \mathcal{L}n z = \frac{1}{2} \ln 5 + \left( \pi - \arctg \frac{1}{2} + 2m\pi \right) i;$$

$$8.4.3(БП8). \mathcal{L}n z = \ln \sqrt{13} + \left( -\arctg \frac{3}{2} + 2m\pi \right) i;$$

$$8.4.4(Д79). \mathcal{L}n z = \ln 8 + \left( \frac{\pi}{2} + 2m\pi \right) i;$$

$$8.4.5(ПД0). \mathcal{L}n z = \ln \sqrt{104} + (-\pi + \arctg 5 + 2m\pi) i;$$

$$8.4.6(С31). \mathcal{L}n z = \ln \sqrt{18} + \left( -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \right) i;$$

$$8.4.7(8С2). \mathcal{L}n z = \frac{1}{2} \ln 20 + (-\arctg 2 + 2m\pi) i;$$

$$8.4.8(1А3). \mathcal{L}n z = \ln \sqrt{40} + (\arctg 3 + 2m\pi) i;$$

$$8.4.9(А44). \mathcal{L}n z = \frac{1}{2} \ln 37 + (-\arctg 6 + 2m\pi) i;$$

$$8.4.10(6А5). \mathcal{L}n z = \ln 5 + \left( \pi - \arctg \frac{3}{4} + 2m\pi \right) i.$$

8.5.1—8.5.10. Найти функции  $\operatorname{Re} f(z)$  и  $\operatorname{Im} f(z)$  для заданных  $f(z)$  (см. пример 1.10). В ответ записать сначала  $\operatorname{Re} f(z)$ , а затем  $\operatorname{Im} f(z)$ . Общие множители за скобку не выносить.

- 8.5.1(7Д.5П).  $f(z) = \cos(1 + 2z)$ ;    8.5.2(12.5Я).  $f(z) = z^3$ ;  
 8.5.3(82.ШП).  $f(z) = z^2 + \bar{z}$ ;    8.5.4(3Д.ШЛ).  $f(z) = \sin iz^2$ ;  
 8.5.5(3А.Ш7).  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ;    8.5.6(1А.57).  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ ;  
 8.5.7(3С.5П).  $f(z) = e^{z^2}$ ;    8.5.8(12.ШЛ).  $f(z) = (\bar{z})^3$   
 8.5.9(БД.5П).  $f(z) = \sin(\bar{z} + 1)$ ;    8.5.10(82.ШП).  $f(z) = (\bar{z})^2 + z$ .

8.6.1—8.6.10. Проверить, что данная функция является аналитической. Найти значение её производной в заданной точке  $z_0$  (см. примеры 1.12, 1.13).

- 8.6.1(641.5П).  $f(z) = e^{z^2+1}$ ,  $z_0 = i$ ;  
 8.6.2(840).  $f(z) = \sin(z^3 + i)$ ,  $z_0 = i$ ;  
 8.6.3(842.5П).  $f(z) = \cos\left(z^2 + \frac{\pi}{2} + 1\right)$ ,  $z_0 = i$ ;  
 8.6.4(2С).  $f(z) = z^3 + 2z$ ,  $z_0 = i$ ;  
 8.6.5(0С1).  $f(z) = e^{z^3+i}$ ,  $z_0 = i$ ;  
 8.6.6(СС).  $f(z) = \frac{1}{4}[z - i + \cos(z - 1 - i)]^2$ ,  $z_0 = 1 + i$ ;  
 8.6.7(597).  $f(z) = (iz)^3$ ,  $z_0 = 1 + i$ ;  
 8.6.8(8Б8).  $f(z) = 2z^2 + 4iz$ ,  $z_0 = 1 - i$ ;  
 8.6.9(84.5П).  $f(z) = ze^{z+1}$ ,  $z_0 = -1 + i\pi$ ;  
 8.6.10(2П9).  $f(z) = z^4 - z^3 + 4iz$ ,  $z_0 = i$ .

8.7.1—8.7.10. Показать, что заданные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  гармонические. Найти по заданной функции  $u(x, y)$  или  $v(x, y)$  её сопряжённую (см. пример 1.17). При проверке ответа общие множители за скобку не выносить.

- 8.7.1(С6.5П).  $u(x, y) = 4x - 2xy$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.2(П4.5П).  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ ,  $v(0, 0) = 1$ ;  
 8.7.3(3Д.ШП).  $u(x, y) = 2xy + y$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.4(38.5Л).  $u(x, y) = e^{-y} \cos x + x$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.5(32.57).  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.6(РС.57).  $v(x, y) = e^{-y} \sin x$ ,  $u(0, 0) = 1$ ;  
 8.7.7(56.5П).  $v(x, y) = x^2 - y^2 - 2x$ ,  $u(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.8(86.5П).  $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - y$ ,  $u(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.9(78.5П).  $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ ,  $v(0, 0) = 0$ ;  
 8.7.10(90.5П).  $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$ ,  $u(0, 0) = 0$ .

8.8.1—8.8.10. Вычислить данный интеграл  $I = \int_{AB} f(z)dz$  (см. примеры 2.1, 2.2, 2.3). В ответе запишите сначала  $\operatorname{Re} I$ , а затем  $\operatorname{Im} I$ .

- 8.8.1(Д01.РП).  $\int_{AB} \bar{z}dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ ;

8.8.2(Д92.РП).  $\int_{AB} \operatorname{Re} z^2 dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 3)$ ;

8.8.3(793.РЛ).  $\int_{AB} \operatorname{Im} z^2 dz$ ,  $AB$  — часть кривой  $y = x^2$  от  $A(0, 0)$  до  $B(2, 4)$ ;

8.8.4(54.БП).  $\int_{AB} \operatorname{Re} z^3 dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ ;

8.8.5(834.БЛ).  $\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 1)$ ;

8.8.6(94.БП).  $\int_{AB} z \cdot \bar{z} dz$ ,  $AB$  — часть кривой  $y = x^2$  от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 1)$ ;

8.8.7(37.Б7).  $\int_{AB} z \operatorname{Re} z dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ ;

8.8.8(195.Р7).  $\int_{AB} z \operatorname{Im} z dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 3)$ ;

8.8.9(Б86.РП).  $\int_{AB} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ ;

8.8.10(93.РП).  $\int_{AB} (\bar{z}^2) dz$ ,  $AB$  — отрезок от  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ .

8.9.1—8.9.10. Из двух данных интегралов вычислите тот, к которому применима формула Ньютона-Лейбница (см. пример 2.4). В ответ запишите сначала  $\operatorname{Re} I$ , а затем  $\operatorname{Im} I$ , общие множители за скобку не выносить.

8.9.1(А06.5П).  $I_1 = 8 \int_{AB} \left( \cos \frac{2z}{3} \right)^2 dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} \bar{z}^3 dz$ ,  $AB$  — отрезок от точки  $A(0, 0)$  до  $B(1, 3)$ ;

8.9.2(287.5П).  $I_1 = \int_{AB} \operatorname{Re} z^2 dz$ ,  $I_2 = 2 \int_{AB} e^{(2/3)z} dz$ ,  $AB$  — часть кривой  $y = \sin x$  от точки  $A(0, 0)$  до  $B\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right)$ ;

8.9.3(288.5П).  $I_1 = \int_{AB} \cos \frac{4}{3} z dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} \bar{z} e^z dz$ ,  $AB$  — часть окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , расположенной в правой полуплоскости от точки  $A(0, -1)$  до  $B(0, 1)$ ;

8.9.4(1А9.ШЛ).  $I_1 = \int_{AB} z \sin z^2 dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} \cos(\operatorname{Re} z) dz$ ,  $AB$  — часть окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , расположенная в первом квадран-

те от точки  $A(1, 0)$  до  $B(0, 1)$ ;

8.9.5(661.ПП).  $I_1 = \int_{AB} \operatorname{Im} z \cos z dz$ ,  $I_2 = 2 \int_{AB} z e^{z^2} dz$ ,  $AB$  — часть параболы  $y = x^2$  от точки  $A(0, 0)$  до  $B(1, 1)$ ;

8.9.6(962.ПП).  $I_1 = 2 \int_{AB} z \cos z^2 dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} |z|^2 dz$ ,  $AB$  — отрезок от точки  $A(0, 0)$  до  $B(1, 1)$ ;

8.9.7(153.ПЛ).  $I_1 = \int_{AB} |z|^2 \operatorname{Re} z dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} \frac{dz}{z^2}$ ,  $AB$  — часть параболы  $y = x^2$  от точки  $A(1, 1)$  до  $B(2, 4)$ ;

8.9.8(7Р4.БП).  $I_1 = 4 \int_{AB} \sin^2 z dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} e^{z\bar{z}} dz$ ,  $AB$  — отрезок от точки  $A(1, 0)$  до  $B(0, 1)$ ;

8.9.9(Т05.БЛ).  $I_1 = \int_{AB} |z| dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} \frac{z dz}{(z^2 + 4)^2}$ ,  $AB$  — отрезок от точки  $A(0, 0)$  до  $B(1, 2)$ ;

8.9.10(ПА6.57).  $I_1 = \int_{AB} |z|^2 dz$ ,  $I_2 = \int_{AB} z e^z dz$ ,  $AB$  — отрезок от точки  $A(0, 0)$  до  $B(1, 1)$ .

8.10.1—8.10.10. Применяя интегральные формулы Коши, вычислить следующие интегралы по заданному замкнутому контуру  $\gamma$ , пробегаемому против часовой стрелки (см. примеры 2.5—2.9). Нецелые рациональные числа записывать в виде несократимой обыкновенной дроби, не выделяя целой части.

$$8.10.1(1Д2). I = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin 3tdt}{(t-4)^3}, \gamma : |t| = 5;$$

$$8.10.2(081). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)}, \gamma : |z-i| = 5;$$

$$8.10.3(6С3). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z+2)(z-2)^3}, \gamma : |z-1| = 2;$$

$$8.10.4(885). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^6 dz}{(z-1)^3}, \gamma : |z-3| = 4;$$

$$8.10.5(282). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^5 dz}{(z-2)(z-1)^3}, \gamma: |z| = 4;$$

$$8.10.6(84.ШЛ). I = \frac{2}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 3t dt}{(t-4)^2(t-6)}, \gamma: |t| = 7;$$

$$8.10.7(56.5П). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{2z} dz}{(z-2)^5}, \gamma: |z-1| = 3;$$

$$8.10.8(Б05). I = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 2t dt}{(t-4)(t-2)}, \gamma: |t| = 5;$$

$$8.10.9(Д21). I = \frac{4}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos 3(z-2) dz}{(z-4)(z-2)^3}, \gamma: |z-2| = 1,5;$$

$$8.10.10(058). I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}, \gamma: |z| = 3.$$

## Контрольная работа № 9

9.1.1—9.1.10. Исходя из определения, найти сумму следующих рядов (см. пример 3.3).

$$9.1.1(956). \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2 + n - 2};$$

$$9.1.2(507). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3/4};$$

$$9.1.3(919). \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 4n + 3};$$

$$9.1.4(8Я8). \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (7/5)n + 6/25};$$

$$9.1.5(5Д7). \sum_{n=6}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 8n + 15};$$

$$9.1.6(385). \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (3/2)n + 5/16};$$

$$9.1.7(818). \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 6n + 8};$$

$$9.1.8(258). \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 3/4};$$

$$9.1.9(561). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 6n + 8};$$

$$9.1.10(АБ2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (1/7)n - 12/49}.$$

9.2.1—9.2.10. Исследовать на сходимость следующие ряды (примеры 3.6—3.14). Ответы: 1) сходится абсолютно; 2) сходится условно; 3) расходится.



9.2.1(3Б7.РП).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{3^n(n+1)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{2n^2}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+5}{3n+1}\right)^{n^3}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(4n+2)}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{n(n+1)}$ .

9.2.2(058.РЯ).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n(n^2+1)}{(n+1)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{i/n}}{\sqrt{n+4}}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(3n+1)}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ; 6.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n \ln \ln n} + \frac{i}{n^2+3}\right]$ .

9.2.3(439.РЛ).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n n!}{(2n)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+4) \ln^2(2n+1)}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+4}}$ ; 6.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{i}{n^2 \ln n}\right]$ .

9.2.4(640.БП).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(4n+3)2^n}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{3}{2^n}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 \left(\frac{2n}{4n+5}\right)^n$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+5) \ln^2(n+7)}$ ; 5.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ ; 6.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{i}{\sqrt{n^3+4}}\right]$ .

9.2.5(6П1.БЛ).

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctg 5/n}{n!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n (n+1)^2$ ;
4.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln(2n-1)}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4+2n+1}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+4} + \frac{i}{n\sqrt{n+5}}\right]$ .

9.2.6(892.БЯ).

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{4^n n!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left( \frac{2n+5}{n+3} \right)^n$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{10n+3} \right)^{n^2}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln 2n}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n^3+1} + \frac{(-1)^n i}{\sqrt[3]{n+1}} \right]$ .

9.2.7(Д93.Б7).

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^n (n^2+1)}{n!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n!)^2}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{n+4} \right)^{n^2}$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(3n+5)}$ ; 5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+2}} + \frac{i}{n^3+4} \right]$ .

9.2.8(С34.Р7).

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+3)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin^n \frac{1}{n}$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{5n+1} \right)^{n^2}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln 2n}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n + \sqrt[4]{2n+3}} + \frac{i}{n^2+2} \right]$ .

9.2.9(315.ПП).

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n-1)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln 3n}$ ;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(5/2)^n}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{\sin n} + \frac{i}{n^2+1} \right]$ .

9.2.10(4Б6.РЯ).

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{5^n (n+2)!}$ ; 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^{n-1}}$ ; 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$ ;
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \ln n}$ ; 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$ ; 6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \sin \frac{1}{n} + \frac{i}{2n^2+3} \right]$ .

9.3.1–9.3.10. Найти область сходимости указанных рядов (см. примеры 3.15, 3.16). Ответ записать в виде промежутков (открытых, закрытых или полуоткрытых) и их объединений, например,  $\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup [2, 4) \cup (6, +\infty)$ . Отрицательные степени не использовать.

Если ряд расходится всюду, записывать знак  $\oslash$ . Если ряд сходится в отдельных точках, то ввести эти точки.

$$9.3.1 \text{ а) (321.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x^2 + n)^{2/3}}; \text{ б) (452.РЯ). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^{2n}}{n} \sin(x + \pi n).$$

$$9.3.2 \text{ а) (4А5.БЛ). } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left( \frac{x}{e} \right); \text{ б) (8С6.БП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

$$9.3.3 \text{ а) (Д97.Б7). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 4x + 2)^n}; \text{ б) (859.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

$$9.3.4 \text{ а) (880.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x^2 - 4x + 6)^n; \text{ б) (А82.БП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2 (5x + 9)^{2n-1}}.$$

$$9.3.5 \text{ а) (6П4.БП). } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^{3n} \sin(3x + n\pi); \text{ б) (Р25.Б7). } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}.$$

$$9.3.6 \text{ а) (Т46.Р7). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1} \cdot \frac{(-1)^n}{(27x^2 + 12x + 2)^n};$$

$$\text{б) (6Т7.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(36)^n}{n} \cdot x^{2n} \sin(5x + \pi n).$$

$$9.3.7 \text{ а) (1Т0.БЛ). } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(25)^n}{\sqrt[4]{3n}} \cdot x^{2n}; \text{ б) (С22.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n^2} \sin \frac{x^2 + 1}{n}.$$

$$9.3.8 \text{ а) (А91.БП). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 8x + 6)^n};$$

$$\text{б) (493.РЛ). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^{2n}}{\sqrt{2n+4}} \sin(5x - n\pi);$$

$$9.3.9 \text{ а) (С74.РП). } \sum_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \sin \frac{x}{n}; \text{ б) (Т23.РЛ). } \sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{x}{7^{nx}}.$$

$$9.3.10 \text{ а) (836.РЛ). } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 6x + 12)^n}{4^n (n^2 + 1)}; \text{ б) (Р97.БП). } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

9.4.1—9.4.10. Найти радиус сходимости данного степенного ряда и сумму этого ряда, применяя теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов (см. примеры 3.22 и 3.23). В ответ ввести сначала радиус сходимости, а затем — сумму ряда либо значение суммы в указанной точке.

$$9.4.1(231.РП). \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}, x_0 = \frac{1}{2};$$

$$9.4.2(762.РП). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}, x_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$9.4.3(2ПЗ.РЛ). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)x^n}{5^n}, x_0 = 2;$$

$$9.4.4(ПС4.БП). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1};$$

$$9.4.5(285.БЛ). \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{n(n+1)}, x_0 = \frac{1}{2};$$

$$9.4.6(П06.БП). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}, x_0 = 2;$$

$$9.4.7(2С0.5П). 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+2)};$$

$$9.4.8(6Т7.Б7). \sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-1}, x_0 = \frac{1}{2};$$

$$9.4.9(С41.5П). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n};$$

$$9.4.10(228.Р7). \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 2n)x^n, x_0 = \frac{1}{2}.$$

9.5.1—9.5.10. Найти три первых члена, отличных от нуля, разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$  данных функций. В ответ ввести третий член.

$$9.5.1(2Д0.5П). f(z) = \frac{1}{\sin z}, z_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$9.5.2(9Д1.5П). f(z) = \frac{1}{\cos z}, z_0 = 0;$$

$$9.5.3(3Д2.ШП). f(z) = \frac{1}{e^z + 1}, z_0 = 0;$$

$$9.5.4(1А1.РП). f(z) = \frac{2}{\sin z + 1}, z_0 = 0;$$

$$9.5.5(4С3.ШЛ). f(z) = \frac{1}{\cos z + 2}, z_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$9.5.6(424.Ш7). f(z) = \frac{1}{\sin 2z}, z_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$9.5.7(505.57). f(z) = \frac{1}{\cos 2z}, z_0 = 0;$$

$$9.5.8(5С6.5П). f(z) = -\frac{i}{z + i}, z_0 = i;$$

$$9.5.9(672.РЯ). f(z) = e^z \sin z, z_0 = 0;$$

$$9.5.10(343.РЛ). f(z) = \ln(4 + z), z_0 = 0.$$

9.6.1—9.6.10. Пользуясь разложением данной функции в ряд Тейлора, найти значения производных указанного порядка в указанной точке (см. пример 3.33).

$$9.6.1(С61). f(x) = e^{-x^2/2}, f^{(10)}(0);$$

$$9.6.2(ТР2). f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, f^{(5)}(0);$$

$$9.6.3(2Д3). f(x) = \cos x \operatorname{ch} x, f^{(8)}(0);$$

$$9.6.4(Р44). f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^3}}, f^{(6)}(0);$$

$$9.6.5(2Т5). f(x) = x^2 \sqrt[4]{1 + x}, f^{(4)}(0);$$

$$9.6.6(136). f(x) = x^4 \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right), f^{(8)}(0);$$

$$9.6.7(3Б7). f(x) = \frac{81(3x - 5)}{x^2 - 4x + 3}, f^{(4)}(0);$$

$$9.6.8(948). f(x) = 32x^2 \sqrt[3]{x + 8}, f^{(5)}(0);$$

$$9.6.9(С09). f(x) = \frac{x^6}{540} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}, f^{(11)}(0);$$

$$9.6.10(100). f(x) = \frac{x^3}{42} \ln(1 - x + x^2), f^{(7)}(0).$$

9.7.1—9.7.10. Вычислить приближённо с точностью  $\alpha = 0,001$  следующие интегралы (см. пример 3.29).

$$9.7.1(5Т1.ДЛ). \int_0^1 \sin x^2 dx; \quad 9.7.2(722.Д7). \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx;$$

$$9.7.3(523.УЛ). \int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx; \quad 9.7.4(С54.У7). \int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx;$$

$$9.7.5(А55.ДЛ). \int_0^1 \frac{\ln(1 + x/5)}{x} dx; \quad 9.7.6(У21.ДЛ). \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}};$$

$$9.7.7(022.Д7). \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27 + x^3}}; \quad 9.7.8(656.Д7). \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx;$$

$$9.7.9(Т81.ДЛ). \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx; \quad 9.7.10(822.Д7). \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

9.8.1—9.8.10. Следующие функции разложить в ряд Лорана в данной области (см. пример 3.34). В ответ ввести указанные коэффициенты полученного ряда.

$$9.8.1(Б71). f(z) = \frac{z - 2}{2z^3 + z^2 - z}, \quad 0 < |z| < \frac{1}{2}, \quad a_5;$$

$$9.8.2(Д40.РП). f(z) = \frac{z - 4}{z^4 + z^3 - 2z^2}, \quad 1 < |z| < 2, \quad a_4, \quad a_{-4};$$

$$9.8.3(Д21.РП). f(z) = \frac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}, \quad \frac{3}{2} < |z| < 3, \quad a_3, \quad a_{-3};$$

$$9.8.4(1Т2.РЛ). f(z) = \frac{5z - 50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}, \quad \frac{5}{2} < |z| < 5, \quad a_3, \quad a_{-3};$$

$$9.8.5(6Р3.БП). f(z) = \frac{7z - 98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}, \quad \frac{7}{2} < |z| < 7, \quad a_2, \quad a_{-2};$$

$$9.8.6(114.БЛ). f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad 2 < |z - 4| < 3, \quad a_3, \quad a_{-3};$$

$$9.8.7(452). f(z) = \frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}, \quad |z| > 9, \quad a_{-3};$$

$$9.8.8(С93). f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}, \quad |z + 1| > 4, \quad a_{-4};$$

$$9.8.9(374). f(z) = \frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}, |z| > 15, a_{-2};$$

$$9.8.10(245). f(z) = \frac{z}{z^2 + 5z + 6}, |z + 5| > 3, a_{-4}.$$

9.9.1—9.9.10. Охарактеризовать указанную точку  $z_0$  для данной функции (см. примеры 4.1—4.5). Ответы выбрать из следующего списка: 1) простой полюс; 2) полюс кратности два; 3) полюс кратности три; 4) полюс кратности четыре; 5) полюс кратности пять; 6) правильная; 7) устранимая особая; 8) существенно особая.

9.9.1(Я11.РП).

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(z - 2)}{(z - 2)^2}, & z \neq 2, \\ \frac{1}{2}, & z = 2, \end{cases} \quad z_0 = 2;$$

$$f_2(z) = \frac{z - 1}{\ln[1 + (z - 1)^2]}, \quad z_0 = 1;$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z - 4} - \frac{2}{(z - 4)^5} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - 4)^n, \quad z_0 = 4.$$

9.9.2(А12.РЛ).

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{e^{z-1} - 1}{z - 1}, & z \neq 1, \\ 2, & z = 1, \end{cases} \quad z_0 = 1;$$

$$f_2(z) = \frac{e^{z-1} - 1 - (z - 1)}{\sin(z - 1) - (z - 1)}, \quad z_0 = 1;$$

$$f_3(z) = \frac{1}{(z - 3)^2} + \frac{2}{(z - 3)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} n(z - 3)^n, \quad z_0 = 3.$$

9.9.3(4ТЗ.БП).

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{\ln[1 + (z - 2)^2]}{(z - 2)^2}, & z \neq 2, \\ 1, & z = 2, \end{cases} \quad z_0 = 2;$$

$$f_2(z) = \frac{\sin(z - 2) - (z - 2)}{(z - 2)^5}, \quad z_0 = 2;$$

$$f_3(z) = (z - 4) \sin \frac{1}{z - 4}, \quad z_0 = 4.$$

## 9.9.4(ДA4.ПП).

$$f_1(z) = \begin{cases} \sin \frac{1}{1-z}, & z \neq 1, \\ 2, & z = 1, \end{cases} \quad z_0 = 1; \quad f_2(z) = \frac{\ln(1+z)}{1-\cos z}, \quad z_0 = 0;$$

$$f_3(z) = \frac{1}{(z-2)^5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!}, \quad z_0 = 2.$$

## 9.9.5(570.Р7).

$$f_1(z) = \frac{\ln(1+2z)}{z}, \quad z_0 = 0; \quad f_2(z) = \frac{1}{(z-2)^3 e^z}, \quad z_0 = 2;$$

$$f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n}, \quad z_0 = 1.$$

## 9.9.6(Д65.РЛ).

$$f_1(z) = \begin{cases} \cos \frac{z}{z-4}, & z \neq 4, \\ 1, & z = 4, \end{cases} \quad z_0 = 4;$$

$$f_2(z) = \frac{\sin(z-1) - (z-1)}{(z-1)^6}, \quad z_0 = 1; \quad f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{z^n}, \quad z_0 = 5.$$

## 9.9.7(AC6.БП).

$$f_1(z) = \frac{\sin(z-3) - (z-3)}{(z-3)^3}, \quad z_0 = 3; \quad f_2(z) = \frac{z-4}{1-\cos(z-4)}, \quad z_0 = 4;$$

$$f_3(z) = \frac{4}{(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{4^n}, \quad z_0 = 1.$$

## 9.9.8(A87.БЛ).

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{e^{(z-1)^2} - 1}{z-1}, & z \neq 1, \\ 0, & z = 1, \end{cases} \quad z_0 = 1;$$

$$f_2(z) = \frac{z-2}{\sin(z-2) - (z-2)}, \quad z_0 = 2;$$

$$f_3(z) = \frac{16}{z-3} + \frac{4}{(z-3)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z-3)^n, \quad z_0 = 3.$$



9.9.9(408.БП).

$$f_1(z) = \frac{\ln(1+2z)}{\sin 2z}, z_0 = 0; f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^4 \cos(z-1)}, z_0 = 1;$$

$$f_3(z) = \exp\left(\frac{z}{z-4}\right), z_0 = 4.$$

9.9.10(8П9.Б7).

$$f_1(z) = \frac{e^{2(z-5)} - 1}{z-5}, z_0 = 5; f_2(z) = \frac{\cos(z-2) - 1}{\sin^2(z-2) - (z-2)^2}, z_0 = 2;$$

$$f_3(z) = z \sin \frac{1}{z-3}, z_0 = 3.$$

9.10.1—9.10.10. Вычислить указанные вычеты (см. примеры 4.6—4.11).

9.10.1. а) (061).  $\text{Res} \left[ \frac{z}{(z-i)(z-2i)}; z=i \right];$

б) (ПТ2).  $\text{Res} \left[ \frac{\sin 5z}{(z-4)^3}; z=4 \right];$  в) (303).  $\text{Res} \left[ \frac{z^3}{z^2+3}; z=\infty \right].$

9.10.2. а) (ПТ1).  $\text{Res} \left[ \frac{z}{(z-1)(z+2)}; z=1 \right];$

б) (652).  $\text{Res} \left[ \frac{\sin(z-1)}{(z-2)^2(z-1)}; z=2 \right];$  в) (7Б3).  $\text{Res} \left[ z \cos \frac{1}{z}; z=\infty \right].$

9.10.3. а) (С54).  $\text{Res} \left[ \frac{z}{(z-2i)(z-4i)}; z=4i \right];$

б) (695).  $\text{Res} \left[ \frac{\cos z}{(z-3)^2(z+1)}; z=0 \right];$

в) (856).  $\text{Res} \left[ (z-2)^3 \cos \frac{1}{z-2}; z=2 \right].$

9.10.4. а) (057).  $\text{Res} \left[ \frac{3 \sin z}{(z+2)(z+5)}; z=-2 \right];$

б) (2Т8).  $\text{Res} \left[ z \sin \frac{1}{z-1}; z=1 \right];$  в) (099).  $\text{Res} \left[ \frac{e^z}{(z+3)^2(z+4)}; z=-3 \right].$

9.10.5. а) (БС0).  $\text{Res} \left[ \frac{3z \cos^2 z}{(z+i)(z+4i)}; z=-i \right];$

б) (081).  $\text{Res} \left[ \frac{z^2}{(z-1)(z+2)^2}; z=2 \right];$  в) (Д22).  $\text{Res} \left[ \frac{e^z}{z^5}; z=\infty \right].$

$$9.10.6. \text{ a) (843). Res} \left[ \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}; z=1 \right];$$

$$\text{б) (8T4). Res} \left[ \frac{\cos 2z}{z^5}; z=\infty \right]; \text{ в) (495). Res} \left[ \frac{z^4}{(z-1)^3}; z=1 \right].$$

$$9.10.7. \text{ a) (776). Res} \left[ \frac{\sin 2z}{(z+2i)(z+3i)}; z=-3i \right];$$

$$\text{б) (BC1.5П). Res} \left[ \frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z-3)}; z=1 \right]; \text{ в) (T37). Res} \left[ \frac{z^{15}}{1+z^4}; z=\infty \right].$$

$$9.10.8. \text{ a) (0T8). Res} \left[ \frac{\sin 4z}{(z-3)(z-4)}; z=4 \right];$$

$$\text{б) (PA4). Res} \left[ \frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}; z=1 \right];$$

$$\text{в) (П19). Res} \left[ (3-z) \cos \frac{1}{z-3}; z=3 \right].$$

$$9.10.9. \text{ a) (CC1). Res} \left[ \frac{e^{3z}}{(z-3)(z-2)}; z=3 \right];$$

$$\text{б) (Д82). Res} \left[ \frac{z}{(z-1)(z+2)^3}; z=-2 \right];$$

$$\text{в) (P23). Res} \left[ (z+2)^4 \sin \frac{1}{z+2}; z=-2 \right].$$

$$9.10.10. \text{ a) (0C4). Res} \left[ \frac{z^4}{(z-2)(z-4)}; z=2 \right];$$

$$\text{б) (П85). Res} \left[ \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}; z=-1 \right];$$

$$\text{в) (CД6). Res} \left[ 10z^2 \exp \left( \frac{1}{z+1} \right); z=-1 \right].$$

9.11.1—9.11.10. Вычислить указанные интегралы (см. примеры 4.12—4.16).

$$9.11.1. \text{ а) (797). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+2|=4} \frac{dz}{(z^2-1)(z+2)};$$

$$\text{б) (Т97). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+\cos x}}; \text{ в) (746.57). } \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{4+x^2}.$$

$$9.11.2. \text{ а) (058). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1,2} \frac{z dz}{(z^2+1)\sin z};$$

$$\text{б) (567.5П). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10+\sin x}}; \text{ в) (2С8.5Я). } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2+4x+8}.$$

$$9.11.3. \text{ а) (РП9). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=0,5} \frac{\sin(4+z) dz}{(e^z-1)(z^2+1)};$$

$$\text{б) (490). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{17+\cos x}}; \text{ в) (СР2). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+20}.$$

$$9.11.4. \text{ а) (1Д3). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{z^2+5iz-6};$$

$$\text{б) (ЯС9.ШП). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{26+\cos x}}; \text{ в) (6Д0.ШЛ). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2+2x+17}.$$

$$9.11.5. \text{ а) (2Т4). } \frac{2}{\pi i} \oint_{|z-i|=1,5} \frac{z dz}{(z^2+1)(z+3i)};$$

$$\text{б) (951). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{17+\sin x}}; \text{ в) (А81.Ш7). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x dx}{x^2+4x+20}.$$

$$9.11.6. \text{ а) (099). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=6} \frac{z dz}{(z^2 + 16)(z - 3)};$$

$$\text{б) (472). } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{37} + \sin x}; \text{ в) (ТА2.57). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2 + 16}.$$

$$9.11.7. \text{ а) (9У3). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=0,1} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz;$$

$$\text{б) (ТР3). } \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2}; \text{ в) (Т53). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(x^2 - x + 2)}{(x^4 + 10x^2 + 9)^5} dx.$$

$$9.11.8. \text{ а) (081). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3 dz}{1 - \cos z};$$

$$\text{б) (274). } 15\sqrt{15} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \cos t)^2}; \text{ в) (1П5). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - 1) dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

$$9.11.9. \text{ а) (ДА6). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=0,3} \frac{1 - 2z + 3z^2 + 4z^3}{2z^2} dz;$$

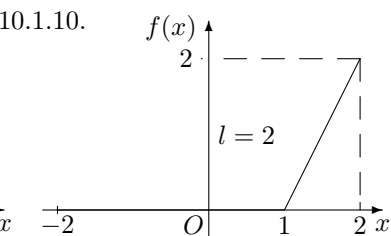
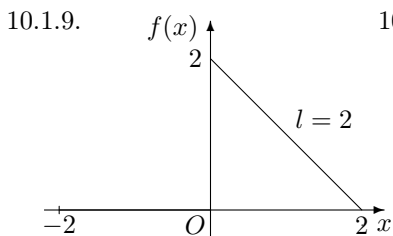
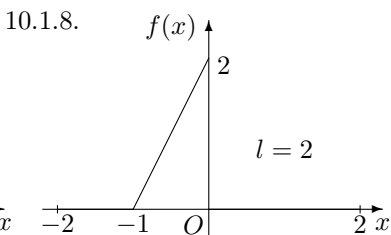
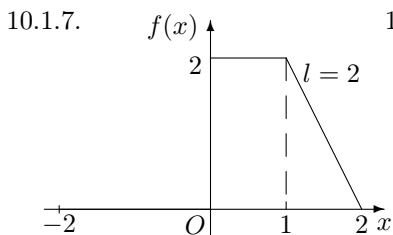
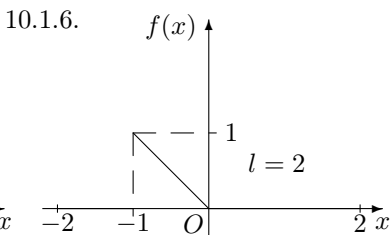
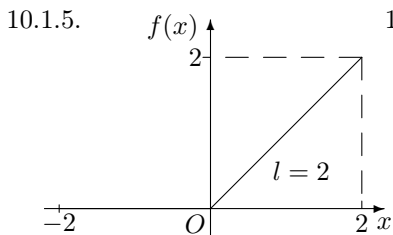
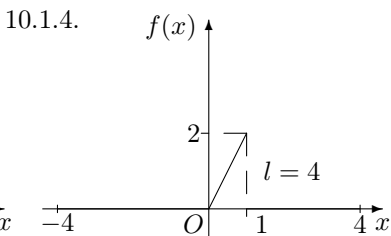
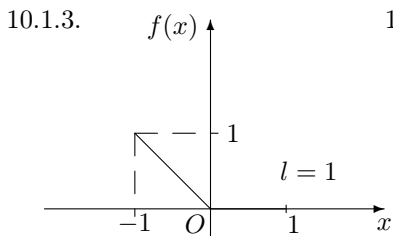
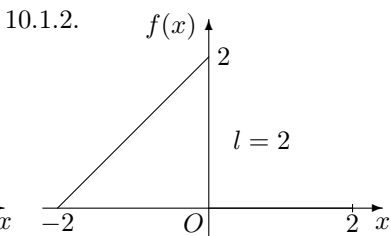
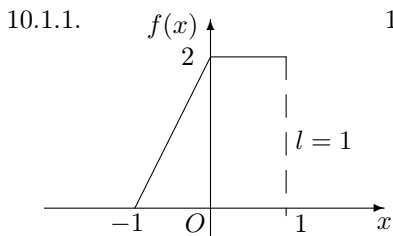
$$\text{б) (497). } \frac{1}{\sqrt{42}} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \cos t)^2}; \text{ в) (ТТ8). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 17x^2 + 16}.$$

$$9.11.10. \text{ а) (СТ4). } \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz;$$

$$\text{б) (6Т9). } 3\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2}; \text{ в) (5П0). } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1200 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}.$$

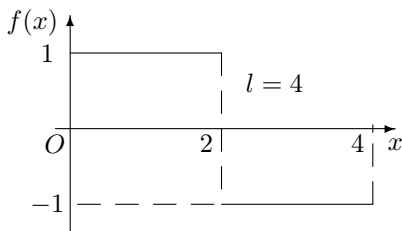
## Контрольная работа № 10

10.1.1–10.1.10. Для заданной графически функции: а) записать аналитическое выражение функции  $f(x)$ ; б) разложить в тригонометрический ряд Фурье эту функцию; в) построить график суммы  $S(x)$  полученного ряда; г) найти  $S(-l)$ ,  $S(+l)$ , а также значение  $S(x)$  в точках разрыва функции  $f(x)$ , если они есть (см. пример 6.2).

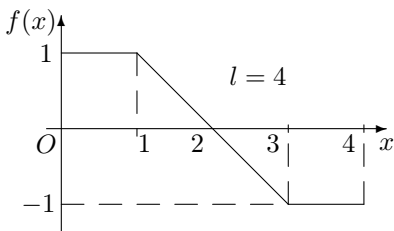


10.2.1—10.2.10. Заданную на  $(0, l)$  графически функцию  $f(x)$  продолжить на  $(-l, 0)$  чётным и нечётным образом. Полученные функции разложить в тригонометрический ряд Фурье и построить графики их суммы (см. пример 6.3). (Обратить внимание на особенности симметрии графика функции.)

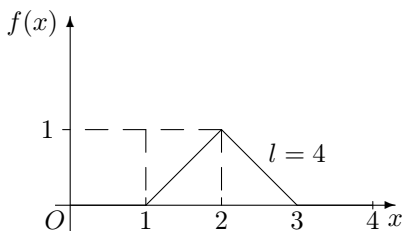
10.2.1.



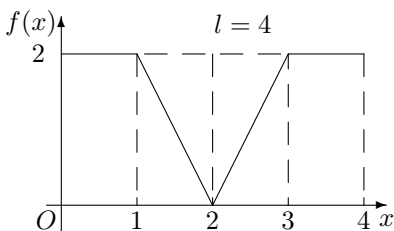
10.2.2.



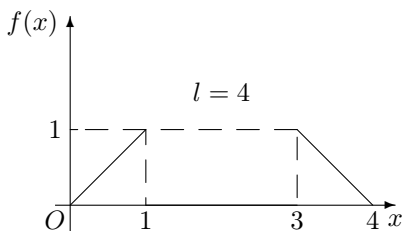
10.2.3.



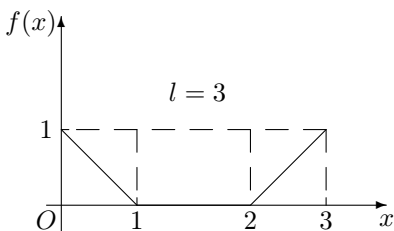
10.2.4.



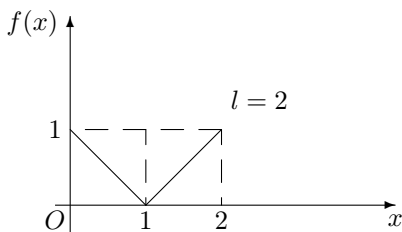
10.2.5.



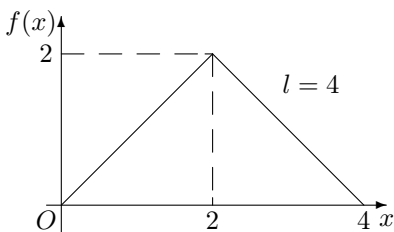
10.2.6.



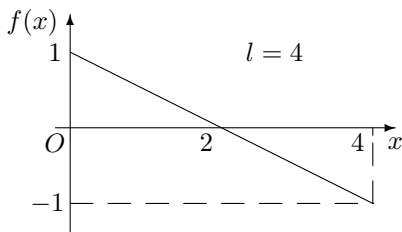
10.2.7.



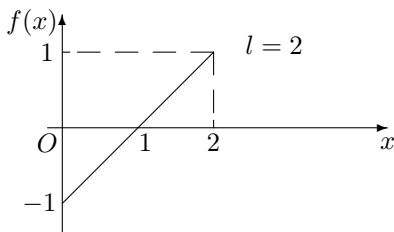
10.2.8.



10.2.9.



10.2.10.



10.3.1—10.3.10. Данные функции представить рядом Фурье в комплексной форме (см. пример 6.4). Записать спектральную функцию, амплитудный и фазовый спектры.

$$10.3.1 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 10.3.2 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2 - x^2}{4}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq |x| < \pi. \end{cases}$$

$$10.3.3 \quad f(x) = e^x, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad 10.3.4 \quad f(x) = 2x + 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

$$10.3.5 \quad f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi. \quad 10.3.6 \quad f(x) = -x + 4, \quad -3 < x < 3.$$

$$10.3.7 \quad f(x) = \pi^2 - x^2, \quad |x| \leq \pi. \quad 10.3.8 \quad f(x) = -2x + 3, \quad -5 < x < 5.$$

$$10.3.9 \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0. \end{cases} \quad 10.3.10 \quad f(x) = 3x + 2, \quad -1 < x < 1.$$

10.4.1—10.4.10. Представить данную функцию интегралом Фурье в одной из форм, которую вы считаете более удобной (см. примеры 7.1 и 7.2).

$$10.4.1 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad 10.4.2 \quad f(x) = \begin{cases} -x - 2, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ -x + 2, & 1 < x < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$10.4.3 \quad f(x) = e^{-|x|}. \quad 10.4.4 \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ при } x > 0.$$

$$10.4.5 \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}. \quad 10.4.6 \quad f(x) = e^{-|x|} \cos x.$$

$$10.4.7 \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad 10.4.8 \quad f(x) = e^{-x^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \right)$$

$$10.4.9 \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \quad 10.4.10 \quad f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \sin 3x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

10.5.1—10.5.10. Найти преобразование Фурье данной функции (см. пример 7.3).

$$10.5.1 \quad f(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad 10.5.2 \quad f(x) = (2-x) \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right).$$

$$10.5.3 \quad f(x) = xe^{-|x|}. \quad 10.5.4 \quad f(x) = e^{-|x|} \cos x.$$

$$10.5.5 \quad f(x) = e^{-|x|} \sin x. \quad 10.5.6 \quad f(x) = (2x+1)e^{-|x|}.$$

$$10.5.7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{вне } [-1, 1]. \end{cases}$$

$$10.5.8. \quad f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$10.5.9. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < |x| < 2, \\ 0, & \text{в других точках.} \end{cases}$$

$$10.5.10. \quad f(x) = \begin{cases} x \cos 3x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

10.6.1—10.6.10. Для заданных на  $(0, +\infty)$  функций найти синус-преобразование Фурье или косинус-преобразование Фурье (см. примеры 7.4—7.6).

$$10.6.1. \quad f(x) = \frac{1}{4+x^2}, F_c(\omega). \quad 10.6.2. \quad f(x) = \frac{x}{9+x^2}, F_s(\omega).$$

$$10.6.3. \quad f(x) = \frac{x}{(x^2+25)^2}, F_s(\omega). \quad 10.6.4. \quad f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}, F_c(\omega).$$

$$10.6.5. \quad f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x}, F_c(\omega). \quad 10.6.6. \quad f(x) = \frac{1}{1+x^4}, F_c(\omega).$$

$$10.6.7. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a, \end{cases} F_s(\omega).$$

$$10.6.8. \quad f(x) = \begin{cases} 4x-1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{4}, \end{cases} F_s(\omega).$$

$$10.6.9. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi, \end{cases} F_c(\omega).$$

$$10.6.10. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi, \end{cases} F_c(\omega).$$

10.7.1—10.7.10. В задачах а) и б) найти изображение данного оригинала, или оригинала, удовлетворяющего заданному уравнению (см. примеры 8.1—8.4, 8.8—8.13). При проверке ответа множитель  $\eta(t-t_0)$  опускать. Рациональное изображение вводить в виде отношения полиномов относительно  $p$ , сократив при этом общие



множители числителя и знаменателя, если они имеются. В задаче в) найти оригинал по заданному изображению, применяя теоремы запаздывания и смещения (см. примеры 8.6, 8.7). Ответ записать в форме  $e^{\alpha(t-t_0)}(\gamma \cos \beta(t-t_0) + \sigma \sin \beta(t-t_0))$  или  $e^{\alpha(t-t_0)} \times (\gamma \operatorname{ch} \beta(t-t_0) + \sigma \operatorname{sh} \beta(t-t_0))$ .

10.7.1. а) (9Д.5П).  $f(t) = t \cos 4t$ ; б) (92.5П).  $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 1, & t > 1; \end{cases}$

в) (8С.ШП).  $F(p) = \frac{e^{-3p}(p+2)}{p^2 + 4p - 12}$ .

10.7.2. а) (84.ШЛ).  $f''(t) + 4f(t) = \eta(t)$ ,  $f(0) = f'(0) = 0$ ;

б) (Т2.Ш7).  $f(t) = \int_0^t e^{4\tau} \cos \tau d\tau$ ; в) (72.57).  $F(p) = \frac{(p+3)e^{-2p}}{p^2 + 6p + 25}$ .

10.7.3. а) (Р6.5П).  $f'(t) + 3f(t) = \eta(t)$ ,  $f(0) = 1$ ;

б) (П4.5П).  $f(t) = e^{3t} \sin 5t$ ; в) (10.ШП).  $F(p) = \frac{(p-2)e^{-4p}}{p^2 + 4p - 5}$ .

10.7.4. а) (7А.ШЛ).  $f(t) = te^t$ ; б) (С4.Ш7).  $f(t) = \cos^2 t$ ;

в) (76.57).  $F(p) = \frac{(p+7)e^{-2p}}{p^2 + 10p + 29}$ .

10.7.5. а) (С2.5П).  $f(t) = 2 \sin^2 t$ ; б) (РД.5Я).  $f(t) = \int_0^t e^{3\tau} \sin \tau d\tau$ ;

в) (Р8.ШП).  $F(p) = \frac{(p+6)e^{-p}}{p^2 + 8p + 25}$ .

10.7.6. а) (У4.ШЛ).  $f''(t) + 2f'(t) + 3f(t) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ;

б) (ЯД.Ш7).  $f(t) = e^{-2t} \sin 4t$ ; в) (60.57).  $F(p) = \frac{(p+3)e^{-2p}}{p^2 + 2p + 10}$ .

10.7.7. а) (5А.5П).  $f(t) = \eta(t-b) \cos 3(t-b)$ ;

б) (82.5П).  $f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t}$ ; в) (А2.ШП).  $F(p) = \frac{(p+5)e^{-5p}}{p^2 + 6p + 58}$ .

10.7.8. а) (64.ШЛ).  $f(t) = \frac{1 - e^{-3t}}{t}$ ;

б) (СС.Ш7).  $f(t) = \frac{1}{2}(t+1) \sin 2t$ ; в) (3А.57).  $F(p) = \frac{2e^{-4p}}{p^2 + 8p - 9}$ .

10.7.9. а) (08.5П).  $f(t) = \int_0^t \tau e^{3\tau} d\tau$ ; б) (ПА.5П).  $f(t) = \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{t}$ ;

в) (26.ШП).  $F(p) = \frac{2e^{-7p}}{p^2 + 12p + 40}$ .

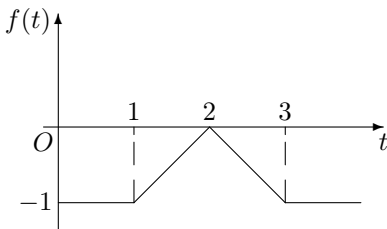
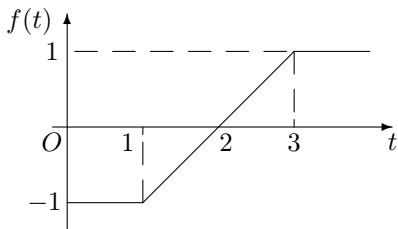
10.7.10. а) (Т2.ШЛ).  $f(t) = \frac{2 \sin^2 t}{t}$ ; б) (П6.Ш7).  $f(t) = \int_0^t \cos^2 3\tau d\tau$ ; в) (АА.57).  $F(p) = \frac{(p+3)e^{-8p}}{p^2 - 12p + 61}$ .

10.8.1–10.8.10. Найти изображение кусочно-линейной функции, заданной графически (см. пример 8.5 и 8.11). Ответ записать в виде

$F(p) = \sum_{s=1}^n e^{-p\tau_s} \left( \frac{A_s}{p^2} + \frac{B_s}{p} \right)$ . При проверке ответа ввести последовательность пар чисел  $\{A_s, B_s\}$ , включая и нулевые значения.

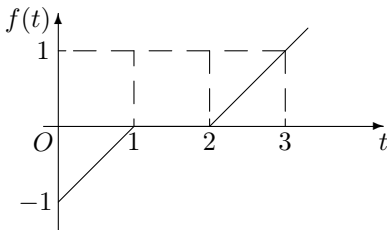
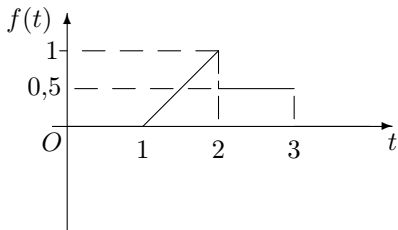
10.8.1(РТ.РП).

10.8.2(ПА.РП).



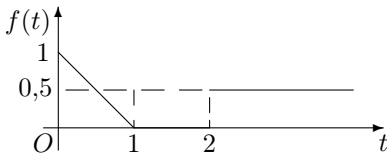
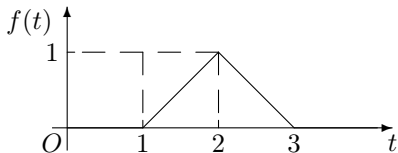
10.8.3(ПД.РЛ).

10.8.4(АА.БП).

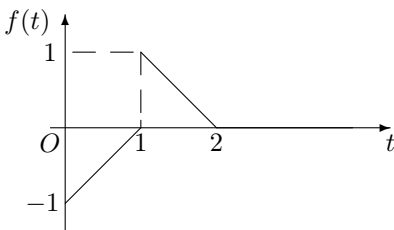


10.8.5(5А.БЛ).

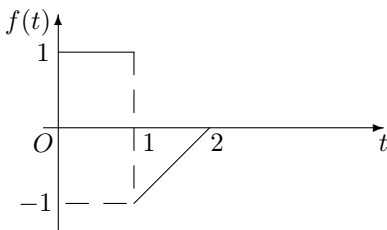
10.8.6(9С.БП).



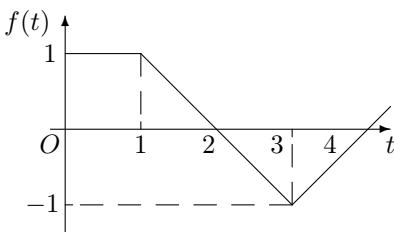
10.8.7(36.Б7).



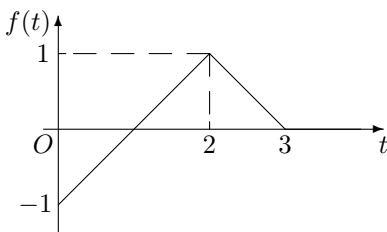
10.8.8(73.Р7).



10.8.9(С3.РП).



10.8.10(1А.РП).



10.9.1—10.9.10. Найти оригинал по заданному изображению (см. примеры 8.15, 8.16). Оригиналы записать в вещественной форме. (Гиперболические функции не использовать. Общие множители за скобку не выносить.)

$$10.9.1(461.5\Pi). F(p) = \frac{2p^2 - 11p + 24}{(p-2)(p^2 - 6p + 18)}.$$

$$10.9.2(С\text{А}2.5\text{Я}). F(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{(p-1)(p^2 - 4p + 5)}.$$

$$10.9.3(\text{P}43.\text{ШЛ}). F(p) = \frac{p^3 - 3p^2 + 5p + 1}{(p^2 + 1)(p^2 - 4p + 5)}.$$

$$10.9.4(\text{Д}\text{А}4.\text{ШЛ}). F(p) = \frac{p^2 - p + 4}{(p+2)(p^2 - 2p + 2)}.$$

$$10.9.5(\text{A}45.\text{Ш}7). F(p) = \frac{2p^2 - p + 2}{p^3 + 8}.$$

$$10.9.6(\text{T}46.57). F(p) = \frac{p^2 + 3}{1 - p^4}.$$

$$10.9.7(\text{C}67.5\Pi). F(p) = \frac{3p^3 + 2p^2 - 4p + 20}{p^3(p^2 - 2p + 10)}.$$

$$10.9.8(408.5Я). F(p) = \frac{p^3 - p^2 - 4p + 5}{p^4 - 4p^3 + 5p^2}.$$

$$10.9.9(У69.ШП). F(p) = \frac{p^4 + 6p^2 + 24p + 30}{p^6 + 4p^5 + 5p^4}.$$

$$10.9.10(441.ШЛ). F(p) = \frac{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 8p + 26}{p^5 + 4p^4 + 13p^3}.$$

10.10.1—10.10.10. Операторным методом найти решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям (см. пример 8.18).

$$10.10.1(8П7). x'' + x = 3 \sin 2t, x(0) = x'(0) = 0.$$

$$10.10.2(С47.ШП). x'' + 4x = 20e^{-4t}, x(0) = x'(0) = 0.$$

$$10.10.3(С44.ШЛ). x'' + 2x' + x = t, x(0) = x'(0) = 0.$$

$$10.10.4(С25.Ш7). x'' + 2x' + 2x = 10e^{2t}, x(0) = x'(0) = 0.$$

$$10.10.5(4Д6.57). x'' + x = 10e^{-3t}, x(0) = x'(0) = 0.$$

$$10.10.6(ЯС7.5П). x'' + 4x' + 5x = 10e^t, x(0) = 10, x'(0) = -30.$$

$$10.10.7(528.5Я). x'' + 2x' + x = t^2 + 4t + 2, x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

$$10.10.8(7А9.ШП). x'' + x' = 2 \cos t, x(0) = 4, x'(0) = 0.$$

$$10.10.9(540.ШЛ). x'' + 2x' + x = 2 \sin t, x(0) = 0, x'(0) = -2.$$

$$10.10.10(261.Ш7). x'' + 2x' + 5x = 17 \cos 2t, x(0) = x'(0) = 0.$$

10.11.1—10.11.10. Применяя интеграл Дюамеля, найти решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям  $y(0) = 0, y'(0) = 0$  (см. пример 8.19).

$$10.11.1. y'' - y = \operatorname{th} t. \quad 10.11.2. y'' - y' = \frac{1}{1 + e^t}.$$

$$10.11.3. y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1 + t^2}. \quad 10.11.4. y'' - y = \operatorname{th}^2 t.$$

$$10.11.5. y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}. \quad 10.11.6. y'' - y' = \frac{e^t}{1 + e^t}.$$

$$10.11.7. y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t + 1}. \quad 10.11.8. y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}.$$

$$10.11.9. y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}. \quad 10.11.10. y'' - y = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}.$$

# Литература

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967. — 780 с.
2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1968. — 415 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1965. — 608 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
5. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы): Т.1. Общие функциональные ряды и их приложение. — М.: Высшая школа, 1980. — 280 с.
6. Ельцов А.А. Высшая математика II. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. — 140 с.
7. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного, операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1981. — 304 с.
8. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1970. — 512 с.
9. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. — М.: Высшая школа, 1973. — 576 с.
10. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1983. — 176 с.
11. Куваев М.Р. Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть 2. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. — 376 с.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965. — 716 с.
13. Магазинников Л.И., Глазов Г.Н. Высшая математика: Ч. I, II. Специальные разделы. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1992.
14. Магазинников Л.И. Высшая математика I. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. — 192 с.
15. Магазинников Л.И. Основы теории функций комплексного переменного. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1988. — 212 с.
16. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. — М.: Гостехиздат, 1950. — 704 с.
17. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Наука, 1973. — 336 с.

18. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970. — 304 с.

19. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин Л.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1976. — 407 с.

20. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения — М.: Физматгиз, 1969. — 376 с.

21. Шмелёв П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1983. — 176 с.

22. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1983. — 112 с.