Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники
2011

Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С.
Элементарные функции и их графики: учеб. пособие / И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2011. – 61 с.

Приведены определения, свойства и графики основных элементарных функций, а также правила линейных преобразований графиков функций. Особое внимание уделено графикам гармонических колебаний.

Учебное издание
Гриншпон Ирина Эдуардовна
Гриншпон Яков Самуилович

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
И ИХ ГРАФИКИ

Учебное пособие
Компьютерная верстка Я.С. Гриншпона
Подписано в печать . . . Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. …... Заказ . Тираж экз.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. 8 (3822) 533018.

Введение

При изучении различных явлений мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, связанных между собой так, что значения одних переменных величин (независимых переменных) определяют значения других переменных величин (зависимых переменных или функций). Например, при изменении радиуса круга меняется его площадь. При изменении скорости тела изменяется путь, пройденный телом за данный промежуток времени. При изменении сопротивления проводника изменяется сила тока в цепи.

Отвлекаясь от конкретного смысла переменных, математика рассматривает абстрактные переменные величины, изучает их законы и взаимосвязи.

Понятие переменой величины (функции) является одним из центральных понятий математического анализа. Оно является для математики и ее приложений, связанных с изучением переменных величин, таким же фундаментальным, как понятие числа для арифметики.

Как и остальные понятия математики, понятие функции сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития.

Впервые понятие функции было введено в знаменитом труде математика и философа Рене Декарта «Геометрия» (1637 г.) под названием «переменная величина». В геометрическом и механическом понимании это понятие интерпретируется у Исаака Ньютона (1671 г.). Под функцией он понимал переменную величину, которая изменяется с течением времени. Эту величину Ньютон называл «флюентой».

Термин «функция» (от латинского functio – исполнение) впервые ввёл в 1673 году немецкий математик Готфрид Лейбниц в письме к Гюйгенсу. У Лейбница функция связывалась с геометрический образом (под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону). В работах Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями. В 18 веке функцию стали рассматривать как формулу, связывающую одну переменную с другой. Швейцарский математик Иоганн Бернулли в 1718 году определил функцию следующим образом: «функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». В 1755 году в «Дифференциальном исчислении» Леонард Эйлер (член Петербургской Академии наук) дает общее определение функции: «Когда некоторые количества зависят друг от друга таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называют функцией вторых».

Современное определение функции как зависимости одной переменной величины от другой было дано в работах Николая Ивановича Лобачевского и чешского математика Бернарда Больцано.

Введение переменной в математику оказало решающее влияние на развитие математической науки. Кроме количественных соотношений между постоянными величинами, математика смогла изучать процессы, связанные с изменением величин и движением вообще.

Среди всего многообразия функций исторически выделились функции, отличающиеся своей простотой и наиболее широкой областью применения. Это простейшие элементарные функции, основное значение которых состоит в том, что они составляют базу для изучения более сложных функций, являясь в большинстве своем составными элементами последних.

К элементарным функциям относятся основные элементарные функции (степенные, тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные, логарифмические) и те, которые можно образовать из них с помощью конечного числа операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций.

Для успешного усвоения программы по высшей математике студент должен иметь достаточную математическую базу. В этом пособии систематизированы сведения о функциях, которые изучались в школе на протяжении всего курса математики. В нем рассматриваются основные элементарные функции, приводятся их свойства, строятся графики. Излагается построение графиков линейной, квадратичной и дробно-линейной функций. Рассматриваются линейные преобразования графиков функций: параллельный перенос графиков, их сжатие и растяжение по осям, симметрии относительно осей координат. В последнем параграфе рассматриваются гармонические колебания и строятся графики гармоник.

Рассмотрение элементарных функций продиктовано необходимостью повторения и закрепления знаний студентов по данному разделу математики и подготовки их к успешному изучению математического анализа.

Пособие предназначено для студентов, изучающих математический анализ.

§ 1. Множества. Операции над множествами. Числовые множества

Множество – одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Объекты, составляющие множество, называют его ***элементами***. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, X, …, их элементы – прописными буквами: a, b, c, x,… или буквами с индексами a_1, a_2, a_3, ... Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым*** и обозначают $\varnothing$.

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет. Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}$; множество простых чисел, меньших 20, – $B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$; множество дней недели – C = {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств. Множество может быть задано с помощью ***характеристического свойства***, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству. Задание множества с помощью характеристического свойства записывают следующим образом: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ – характеристическое свойство.

Приведем несколько примеров:

1. Если $A = \left\{x \middle| x - \text{натуральное число}, x < 4\right\}$, то $A = \left\{1; 2; 3\right\}$.

2. Пусть B – множество остатков от деления натуральных чисел на 7. Тогда $B = \left\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\right\}$.

3. Если D – множество действительных чисел, не меньших двух и не больших семи, то D – отрезок [2; 7].

Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то говорят, что B – ***подмножество*** множества A. Этот факт записывают так: $B \subset A$. Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества. Каждое непустое множество A имеет хотя бы два подмножества – само множество A и пустое множество.

Пусть даны два множества A и B.

Пересечением (***произведением***) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B. Обозначают пересечение множеств $A \cap B$:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}.$$

Объединением (***суммой***) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают объединение множеств $A \cup B$:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначают разность множеств $A \setminus B$:

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}.$$

Элементами множества могут быть различные объекты – числа, слова, геометрические фигуры, функции и т. д. В математике особую роль играют ***числовые множества***, то есть множества, элементами которых являются числа.

Например: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Напомним, что натуральными называют числа, используемые при счете предметов, то есть $\mathbb{N}=\{1;2;3;4;5;\ldots\}$. Целыми считают натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число ноль. Таким образом, $\mathbb{Z}=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\ldots\}$. Рациональные числа – это обыкновенные дроби с целым числителем и натуральным знаменателем: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Все десятичные дроби (в том числе и бесконечные непериодические) образуют множество действительных чисел. Действительные числа изображают точками на координатной прямой (числовой оси). Точка O, соответствующая числу 0, разбивает координатную прямую на два луча: положительный и отрицательный. Число, изображением которого на координатной прямой является точка M, называется ***координатой*** точки M. Если $x_1 < x_2$, то точка с координатой x_1 лежит левее точки с координатой x_2.

Особое значение в математике имеют подмножества множества $\mathbb{R}$, называемые числовыми промежутками: ***отрезок*** $[a; b]$ – множество точек x, удовлетворяющих условию

$a \le x \le b$; ***интервал*** $(a; b)$ – множество точек x, удовлетворяющих условию $a < x < b$; ***полуинтервалы*** $[a; b)$ и $(a; b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $a \le x < b$ и $a < x \le b$ соответственно; бесконечные промежутки $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ – множества точек x, удовлетворяющих условиям $x > a$, $x < b$, $x \ge a$, $x \le b$ соответственно.

Множество точек числовой прямой, удовлетворяющих условию $x \in (a - r; a + r)$, называется ***окрестностью*** точки a радиуса r. Окрестность можно записать также через двойное неравенство $a - r < x < a + r$ или неравенство с модулем $|x - a| < r$.

§ 2. Понятие функции

Пусть X и Y – некоторые числовые множества и пусть указано правило, по которому каждому элементу x множества X поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y. Это соответствие называется ***функцией*** и обозначается $y = f(x)$. Переменная x называется независимой или ***аргументом***, переменная y – зависимой или ***функцией***. Множество X называется ***областью определения*** функции и обозначается $D(f)$. Множество Y (множество всех значений, которые принимает переменная y) называется ***областью изменения*** (***областью значений***) функции и обозначается $E(f)$.

Две функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и каждому значению аргумента они ставят в соответствие одно и тоже число.

Наиболее распространенный способ задания функции – ***аналитический***, то есть с помощью формулы. Например, функцию, ставящую в соответствие каждому неотрицательному числу *x* его квадратный корень, можно записать в виде $y=\sqrt{x}$ или $f(x)=\sqrt{x}$. Этот способ задания функции компактен, содержит полную информацию о свойствах функции и наиболее удобен при проведении расчетов. Если не сделано специальной оговорки, то за область определения функции берут все значения аргумента, для которых указанные в формуле действия выполнимы. Например, область определения функции $f(x)=\sqrt{x}$ все неотрицательные значения *x*, то есть $D(f)=[0;+\infty)$, а для функции $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x-4}$ – область определения все действительные значения *x*, кроме $x=2$, то есть $D(g)=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Иногда для разных значений *x* функция задается разными формулами. В этом случае используют обозначение:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in X_1 \\ f_2(x), & x\in X_2 \\ \quad\dots \\ f_n(x), & x\in X_n \end{cases}, \quad \text{причем} \quad X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_n=D(f).$$

График такой функции состоит из n частей.

На практике часто используют ***табличный*** способ задания функции. При этом способе задания функции приводится таблица, в которой для имеющихся значений аргумента указываются соответствующие значения функции. Табличный способ важен потому, что он является основным при описании реальных зависимостей, возникающих при проведении различных экспериментов. С математической точки зрения табличное задание функции неполно, так как оно позволяет найти значение функции только для тех значений аргумента, которые заданы в таблице. Однако оно позволяет высказать предположение об аналитическом представлении функции, и, применяя различные методы приближенных вычислений, найти это представление.

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $(x, f(x))$, называется ***графиком*** функции $y=f(x)$. Графическое представление функции удобно для непосредственного восприятия ее особенностей, описания свойств. Однако графический способ неудобен при выполнении расчетов.

Функции можно также задавать ***словесно***. Например, функция Дирихле задается таким описанием: значение функции равно 1, если x рационально, и 0, если x иррационально.

Примеры функций:

1. Функция $y = f(x)$ каждому положительному числу x ставит в соответствие число $y = 1$, каждому отрицательному числу x ставит в соответствие число $y = -1$ и $y(0) = 0$ (рис. 1). Эта функция называется ***знаком*** числа x и обозначается

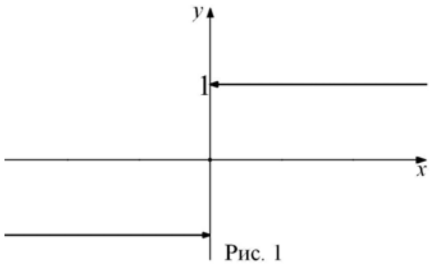


Рис. 1

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

2. Функция $y = f(x)$ каждому числу $x \in [n; n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, ставит в соответствие число n (рис. 2). Эта функция называется ***целой частью*** числа x и обозначается $y = [x]$.

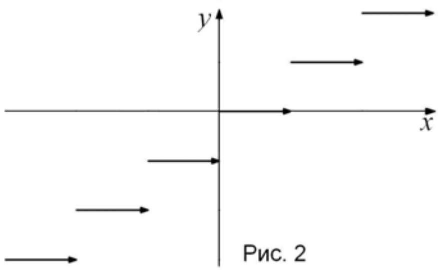


Рис. 2

3. Функция $y = f(x)$ каждому числу $x \in [n; n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, ставит в соответствие число $x - n$ (рис. 3). Эта функция называется ***дробной частью*** числа x и обозначается $y = \{x\}$.

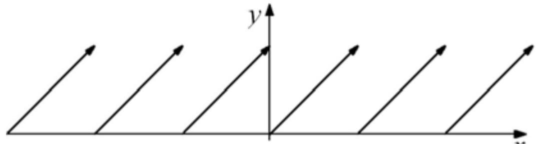


Рис. 3

§ 3. Сложная функция

Познакомимся с понятием ***суперпозиции функций***, которое состоит в том, что в качестве аргумента одной функции используется другая функция. Полученная в результате суперпозиции функция называется ***сложной функцией***. Записывается сложная функция следующим образом: $y = g(f(x))$. Например: $z = f(x) = x^2 + 1$, $y = g(z) = \sqrt{z}$. Тогда сложная функция $y = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$. Чтобы найти значение сложной функции, подставляют сначала заданное значение x_0 во внутреннюю функцию и находят ее значение $z_0 = f(x_0)$, а затем уже вычисляют соответствующее значение функции $y_0 = g(z_0)$.

При выполнении суперпозиции функций считают, что множество значений внутренней функции $f(x)$ содержится в области определения внешней функции $g(z)$.

Сложную функцию можно составить из большего числа более простых функций.

Пример 1. Сложную функцию $f(x) = \sqrt{\log_2 \sin x}$ представьте в виде цепочки элементарных функций.

Решение. Будем последовательно выполнять операции, которые заданы в формуле: $z = \sin x$, $t = \log_2 z$, $y = \sqrt{t}$. Следовательно, заданная в условии задачи функция является суперпозицией трех основных элементарных функций.

Пример 2. Даны функции $y = \sqrt{z+1}, z = t^4, t = \sin u,$ $u = 2x$. Запишите сложную функцию $y = f(x)$.

Решение. Подставляя последовательно функции одну в другую, получим сложную функцию $y = \sqrt{\sin^4 2x + 1}$.

§ 4. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$, определенная на множестве *X*, такова, что любым двум различным значениям аргумента *x* ставит в соответствие различные значения *y*, то есть, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Эта функция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между областью своего определения X и областью изменения Y.

Действительно, каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное $y \in Y$. При этом каждой точке $y \in Y$ соответствует единственное $x \in X$, такое, что $y = f(x)$. Таким образом, на множестве Y определена функция f^{-1}, которая называется ***обратной*** к функции f. Область определения обратной функции – множество Y, область значений – множество X. Графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 4). Для обратных функций верно соотношение $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

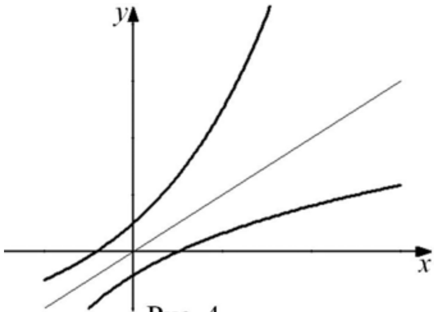


Рис. 4

Для нахождения обратной функции необходимо из равенства $y = f(x)$ выразить x через y, и в полученном выражении $x = f^{-1}(y)$ букву x заменить буквой y, букву y – буквой x.

Пример 3. Имеют ли функции $f(x) = 0{,}5(3x+7)$ и $g(x) = x^2 + 1$ обратные? Если да, то найдите их.

Решение. Выразим x из формулы $y = 0{,}5(3x+7)$. Получим $x = \frac{2y-7}{3}$. Обозначив аргумент через x, а функцию через y, получим $y = \frac{2x-7}{3}$, то есть функция $f^{-1}(x) = \frac{2x-7}{3}$ является обратной к функции $f(x) = 0{,}5(3x+7)$.

Функция $g(x) = x^2 + 1$ не имеет обратной, так как она не является взаимнооднозначной. Действительно, $g(-1) = g(1) = 2$.

Пример 4. Являются ли функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$ взаимнообратными?

Решение. Нет, так как $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x$. Однако, если данные функции рассматривать только при $x \geq 0$, то есть считать $D(f) = [0; +\infty)$, то эти функции становятся взаимнообратными.

§ 5. Свойства функций

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что

$f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно убывающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие функции называют монотонными.

Монотонные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

2) произведение двух положительных монотонно возрастающих (монотонно убывающих) функций является монотонно возрастающей (монотонно убывающей) функцией;

3) если функция $y = f(x)$ монотонно возрастающая (монотонно убывающая), то функция $y = -f(x)$ монотонно убывающая (монотонно возрастающая);

4) если положительная функция $y = f(x)$ является монотонно возрастающей (монотонно убывающей), то функция

$y = \dfrac{1}{f(x)}$ является монотонно убывающей (монотонно возрастающей);

5) если функция $y = f(x)$ монотонная, то она имеет обратную функцию.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число *M*, что значение функции в любой точке не превосходит этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число *m*, что значение функции в любой точке не меньше этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \ge m$.

Ограниченная сверху и снизу на множестве *X* функция называется ограниченной на этом множестве. Другими словами, если функция $f(x)$ ограничена на множестве *X*, то существуют такие числа *m* и *M*, что $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in X$. Условие ограниченности можно также записать в виде $|f(x)| \le M$ для некоторого положительного числа *M*.

Определение 5. Точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой ***максимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение 6. Точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой ***минимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называют точками ***экстремума*** функции.

Заметим, что функция в области своего определения может иметь несколько точек максимума или минимума.

Определение 7. Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает ***наибольшее*** на множестве X значение, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 8. Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает ***наименьшее*** на множестве X значение, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Если множество X представляет собой отрезок $[a; b]$, то наибольшее и наименьшее значения функция принимает либо в точке экстремума, либо на конце отрезка.

Говорят, что множество X ***симметрично относительно начала координат***, если для любой точки $x \in X$ противоположная точка $-x \in X$.

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

Определение 10. Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

График четной функции имеет ось симметрии: так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(x))$ принадлежат графику функции, то он симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции имеет центр симметрии: так как точки $(x; f(x))$ и $(-x; -f(x))$ принадлежат графику функции, то он симметричен относительно начала координат.

Четные и нечетные функции обладают следующими свойствами:

1) сумма двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная);

2) произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная;

3) если нечетная функция $f(x)$ определена в нуле, то $f(0)=0$;

4) всякая функция, определенная на множестве *X*, симметричном относительно начала координат может быть представлена в виде суммы двух функций, определенных на *X*, причем одна из этих функций является четной, а другая – нечетной.

Определение 11. Функция $y=f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T>0$, что для любого $x \in D(f)$ точка $x+T \in D(f)$ и справедливо равенство $f(x+T)=f(x)$.

Наименьшее из чисел *T* в определении 11 называют ***периодом***. Периодическая функция имеет бесконечно много периодов, все они кратны числу *T*.

Все введенные в этом параграфе определения используются при исследовании функций и построении графиков.

§ 6. Основные элементарные функции

В этом параграфе мы рассмотрим основные элементарные функции. Для каждой функции запишем ее свойства и начертим график.

Степенные функции $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим несколько частных случаев степенной функции.

Функции $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbb{R}$. Они принимают только неотрицательные значения, $E(f) = [0; +\infty)$. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. Эти функции ограничены снизу. В точке $x = 0$ они имеют минимум и принимают наименьшее значение, равное 0, сверху функции не ограничены (рис. 5).

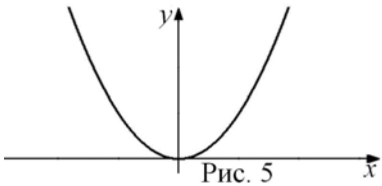


Рис. 5

Функции $y = x^{2n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbb{R}$. Множества их изменения – также вся числовая ось $E(f) = \mathbb{R}$, то есть эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются не-

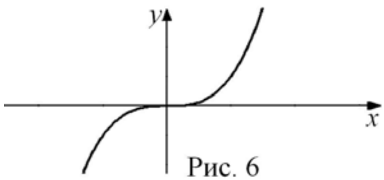


Рис. 6

четными, их графики симметричны относительно начала координат (рис. 6).

Функции $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Они принимают только положительные значения $E(f) = (0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу, но они не принимают свое наименьшее значение. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. При $x > 0$ функции убывают, при $x < 0$ функции возрастают. Графики функций не пересекают оси координат (рис. 7).

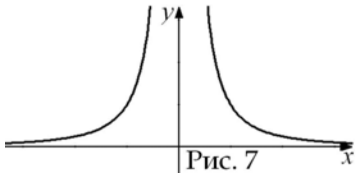


Рис. 7

Функции $y = x^{-2n+1} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Множества их изменения также все значения y, отличные от 0, то есть $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала ко-

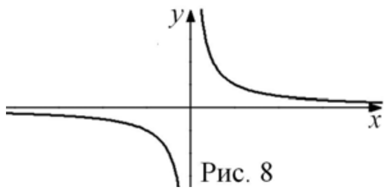


Рис. 8

ординат. Функции убывают при $x<0$ и при $x>0$. Точка $x=0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат (рис. 8).

Функции $y=\sqrt[2n]{x}=x^{\frac{1}{2n}}$ ($n\in\mathbb{N}$). Функции определены для всех неотрицательных значений *x*, то есть $D(f)=[0;+\infty)$. Множества их изменения также все неотрицательные значения *y*, то есть $E(f)=[0;+\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху. Наименьшее значение $y=0$ функции принимают при $x=0$. Функции возрастают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти (рис. 9).

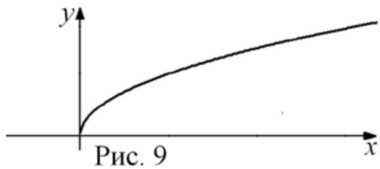


Рис. 9

Функции $y=x^{2n}$ и $y=\sqrt[2n]{x}$ взаимнообратны при $x\geq 0$, а значит, их графики симметричны относительно биссектрисы первой четверти.

Функции $y=\sqrt[2n-1]{x}=x^{\frac{1}{2n-1}}$ ($n\in\mathbb{N}$). Функции определены для всех значений *x*, то есть $D(f)=\mathbb{R}$. Множества их изменения – также все

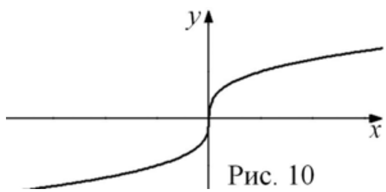


Рис. 10

значения y, то есть $E(f)=\mathbb{R}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции возрастают на всей области своего определения. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат (рис. 10).

Функции $y=x^{2n-1}$ и $y=\sqrt[2n-1]{x}$ взаимнообратны. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.

Функции $y=x^{-\frac{1}{2n}}=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{x}}$ ($n\in\mathbb{N}$). Функции определены для всех положительных значений x, то есть $D(f)=(0;+\infty)$. Множества их изменения – также все положительные значения y, то есть $E(f)=(0;+\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху, но они ни в одной точке не принимают свое наименьшее значение. Функции убывают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти (рис. 11).

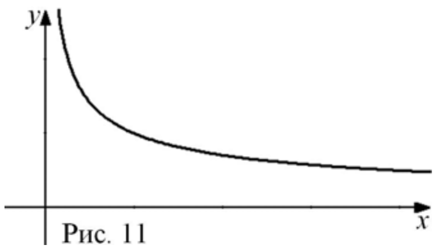


Рис. 11

Функции $y=x^{-2n}$ и $y=x^{-\frac{1}{2n}}$ взаимнообратны при $x>0$, и их графики симметричны относительно биссектрисы первой четверти.

Функции $y = x^{-\frac{1}{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$ ($n \in \mathbb{N}$).Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Множества их изменения – также все значения y, отличные от 0, то есть $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают при $x < 0$ и при $x > 0$. Точка $x = 0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат (рис. 12).

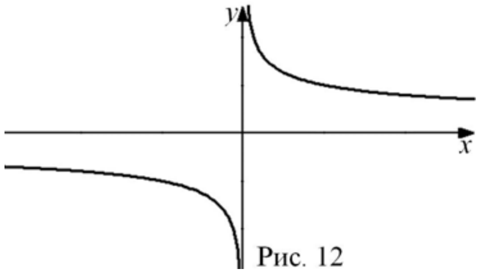


Рис. 12

Функции $y = x^{-2n+1}$ и $y = x^{-\frac{1}{2n-1}}$ взаимнообратны. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.

Тригонометрические функции.

Функция $y = \sin x$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbb{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y=-1$ функция принимает в точках $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ ($n\in\mathbb{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y=1$ функция принимает в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$).

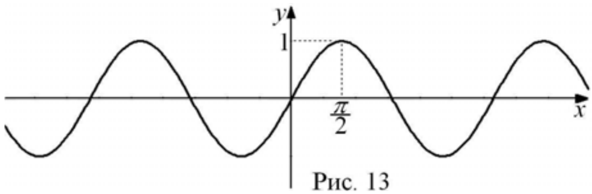


Рис. 13

Функция $y=\sin x$ является периодической, ее период $T=2\pi$. Функция $y=\sin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ ($n\in\mathbb{Z}$) и убывает на каждом промежутке $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi m; \frac{3\pi}{2}+2\pi m\right]$ ($m\in\mathbb{Z}$). График этой функции называется ***синусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π, например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его (рис. 13).

Функция $y = \cos x$. Область определения функции вся числовая прямая: $D(f) = \mathbb{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Функция $y = \cos x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \cos x$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) и убывает на каждом промежутке $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$ ($m \in \mathbb{Z}$). График этой функции называется ***косинусоидой***. Учитывая периодичность, доста-

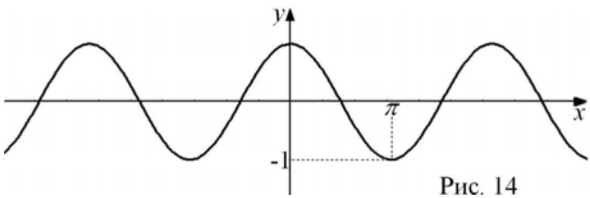


Рис. 14

точно построить график на отрезке длиной 2π, например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его (рис. 14).

Функция $y = \operatorname{tg} x$. Область определения функции все действительные значения x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$): $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi m \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшее, ни наибольшее значения. График функции $y = \operatorname{tg} x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической, ее период $T = \pi$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$ ($n \in \mathbb{Z}$), в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) функция имеет разрывы.

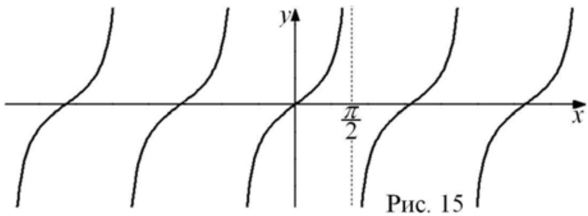


Рис. 15

График этой функции называется ***тангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а затем копировать его (рис. 15).

Функция $y=\operatorname{ctg}x$. Область определения функции все действительные значения x, кроме $x=\pi m\,(m\in\mathbb{Z})$: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi m\middle|m\in\mathbb{Z}\right\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f)=\mathbb{R}$. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшее, ни наибольшее значения. График функции $y=\operatorname{ctg}x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$). Функция $y=\operatorname{ctg}x$ является периодической, ее период $T=\pi$. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

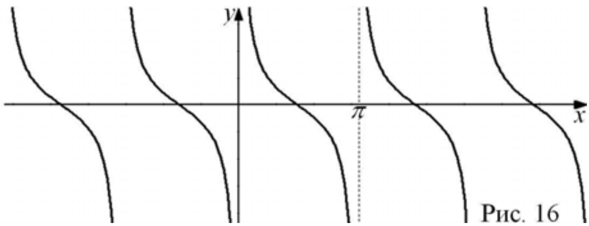


Рис. 16

Функция не является монотонной на всей области определения, но она убывает на каждом промежутке $(\pi n;\pi+\pi n)$ ($n\in\mathbb{Z}$), в точках $x=\pi n$ ($n\in\mathbb{Z}$) функция имеет разрывы. График этой функции называется ***котангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $(0;\pi)$, а затем копировать его (рис. 16).

Обратные тригонометрические функции.

Напомним определения обратных тригонометрических выражений. ***Арксинусом*** числа a называется угол α такой, что $\sin\alpha = a$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. ***Арккосинусом*** числа a называется угол α такой, что $\cos\alpha = a$ и $\alpha \in [0;\pi]$. ***Арктангенсом*** числа a называется угол α такой, что $\mathrm{tg}\,\alpha = a$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ***Арккотангенсом*** числа a называется угол α, такой, что $\mathrm{ctg}\,\alpha = a$ и $\alpha \in (0;\pi)$.

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \sin x$, на которой синус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ каждому значению синуса ставит в соответствие его аргумент.

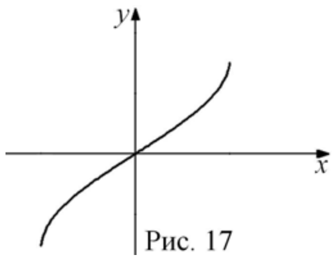


Рис. 17

Таким образом, область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = -1$, наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = 1$. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. График функции $y = \arcsin x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \sin x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 17).

Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \cos x$, на которой косинус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $[0; \pi]$. Функция

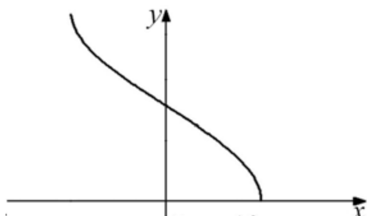


Рис. 18

$y=\arccos x$ каждому значению косинуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y=\arccos x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $[0;\pi]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y=0$ функция принимает в точке $x=1$, наибольшее значение $y=\pi$ функция принимает в точке $x=-1$. Функция $y=\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. График функции $y=\arccos x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y=\cos x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 18).

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является обратной к функции $y=\operatorname{tg} x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y=\operatorname{tg} x$, на которой тангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ каждому значению тангенса

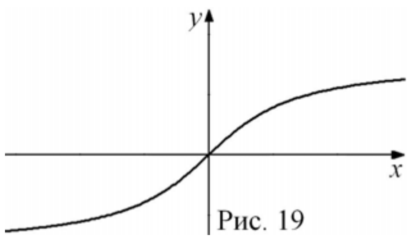


Рис. 19

ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbb{R}$, множество изменения – интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 19).

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, на которой котангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $(0; \pi)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ каждому значению котангенса ставит в соответствие его ар-

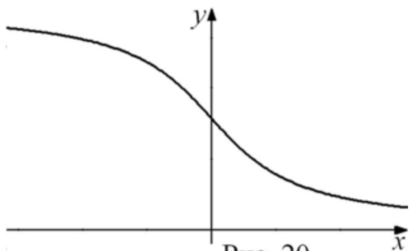


Рис. 20

гумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbb{R}$, множество изменения – интервал $(0; \pi)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен ветви графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 20).

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbb{R}$. Функция принимает только положительные значения: $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экстремума. Показательная функция не является ни четной, ни не-

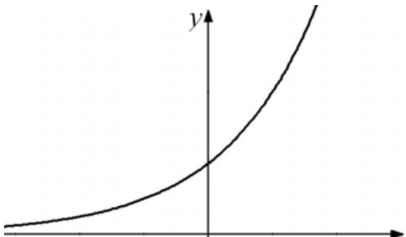


Рис. 21

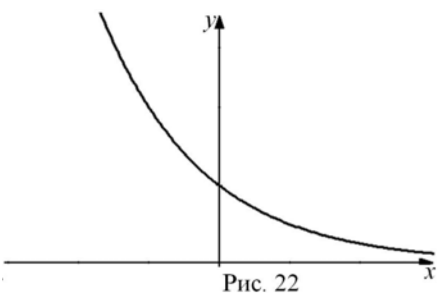


Рис. 22

четной. График функции пересекает ось ординат в точке $(0;1)$, ось абсцисс он не пересекает. При $a>1$ функция является возрастающей (рис. 21), а при $0<a<1$ – убывающей (рис. 22) на всей области определения.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$, где $a>0$ и $a\neq 1$. Логарифмическая функция является обратной к показательной. Поэтому ее область определения – множество положительных чисел, $D(f)=(0;+\infty)$, область изменения – множество действительных чисел, $E(f)=\mathbb{R}$. Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экстремума. Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной. График функции пересекает ось абсцисс в точке $(1;0)$, ось ординат график не пересекает. При $a>1$ функция является возрастающей (рис. 23), а при $0<a<1$ – убывающей (рис. 24) на всей области определения. График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относи-

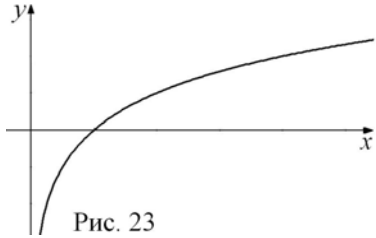


Рис. 23

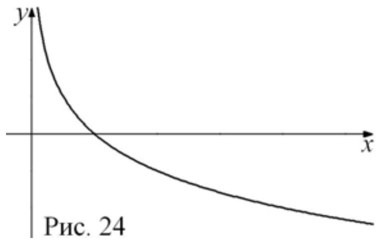


Рис. 24

тельно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.

Упражнения

1. Найдите области определения функций:

а) $y = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$; б) $y = \sqrt{14-5x-x^2}$;

в) $y = \dfrac{x-7}{\sqrt{x^2-9x+20}}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{15+2x-x^2}}{x}$;

д) $y = \dfrac{x+9}{x^3-4x}$; е) $y = \sqrt{(x+1)(x^2-4x-12)}$;

ж) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-6}}$; з) $y = \log_3(4x-7)$;

и) $y = \log_2(12+4x-x^2)$; к) $y = \arcsin\dfrac{x+1}{5}$.

2. Найдите множества изменения функций:

а) $y = x^2-10x+17$; б) $y = \sqrt{12+4x-x^2}$;

в) $y = \log_2(x^2-6x+13)$; г) $y = 4\sin 2x$;

д) $y = -5\sin x + 2$; е) $y = 3\cdot 2^{4x+1} - 7$.

3. Докажите, что функции $y = \dfrac{3x+2}{2x+3}$ и $y = \dfrac{2-3x}{2x-3}$ являются взаимно обратными.

4. Какие из данных функций будут четными, какие нечетными:

а) $y = x^4 - 3x^2 - 7$; б) $y = 2x^5 + 7x^3 - 8x$;

в) $y = x \cdot \sin x + 2\cos x$; г) $y = \sqrt{x^2 + 9} + 2|x|$;

д) $y = (x^2 + x) \cdot \cos x$; е) $y = \lg \dfrac{x-1}{x+1}$.

5. Определите, какие функции будут периодическими и найдите их периоды:

а) $y = 4\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 5\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

в) $y = 2\,\mathrm{tg}\left(3x - \dfrac{5\pi}{12}\right)$; г) $y = \mathrm{ctg}\left(4x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

6. Представьте сложную функцию в виде цепочки элементарных функций:

а) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 11}$; б) $y = \sqrt[3]{5^{x^2 - 9x + 1} + 21}$;

в) $y = \sin(x^2 + \sqrt{x} + 2)$; г) $y = \sqrt{\sin\sqrt[3]{x^2 + 9}}$;

д) $y = \lg(\cos(\sqrt{2x+1}))$; е) $y = \sin^6(\lg(3x+4))$.

7. Составьте суперпозиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 3$; б) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$;

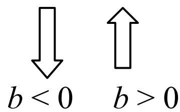
в) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + x + 1$;

г) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = 2x - 1$.

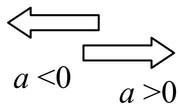
§ 7. Линейные преобразования графиков функций

В этом параграфе мы рассмотрим основные линейные преобразования графиков функций – параллельный перенос графика функции и растяжение графика функции.

1. Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси *OY*, то есть построение графика вида $y = f(x) + b$. Если $b > 0$, то ординаты всех точек графика функции увеличиваются на b единиц, а если $b < 0$, то ординаты всех точек графика функции уменьшаются на $|b|$ единиц.



2. Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси *OX*, то есть построение графика вида $y = f(x - a)$. Если $a > 0$, то график функции сдвигается на a единиц вправо, а если $a < 0$, то график функции сдвигается на $|a|$ единиц влево.



Пример 5. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = f(x) - 2$ и $y = f(x-2)$.

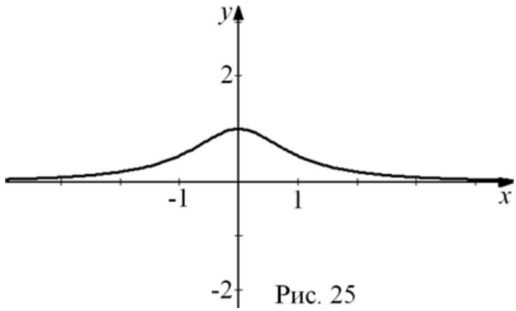


Рис. 25

Решение. Перенесем заданный график функции на две единицы вниз или вправо соответственно (рис. 26).

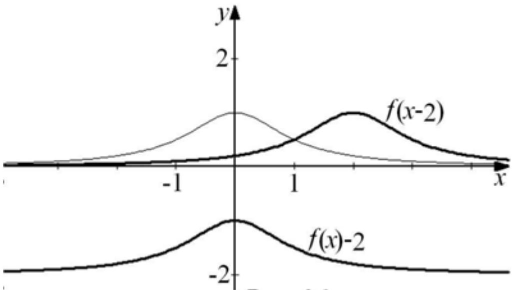


Рис. 26

3. Построение графика функции $y = f(x-a) + b$ осуществляется последовательным выполнением параллельных переносов графика функции $y = f(x)$ вдоль осей координат.

Пример 6. Постройте график функции $y = \sqrt{x+5} + 1$.

Решение. Известный график степенной функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 9) перенесем на единицу вверх и на пять единиц влево (рис. 27).

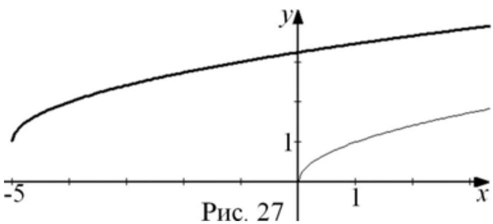
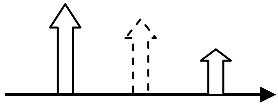
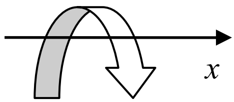


Рис. 27

4. «Растяжение» графика функции $y = f(x)$ от оси *OX*, то есть построение графика функции $y = Af(x)$. Если $A > 1$, то ордината каждой точки графика увеличивается в *A* раз (растяжение графика функции от оси *OX*) и уменьшается в $\frac{1}{A}$ раз, если $0 < A < 1$ (сжатие графика функции к оси *OX*).



5. Симметрия относительно оси *OX*, то есть построение графика функции $y = -f(x)$. При этом каждая точка графика функции отображается в точку, симметричную относительно оси *OX*.



6. Построение графика функции $y = Af(x)$, если $A < 0$, проводится как последовательное выполнение двух преобразований – симметрии относительно оси *OX* и растяжения от оси *OX*.

Пример 7. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = 3f(x)$ и

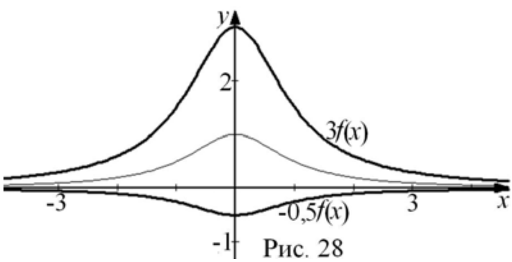
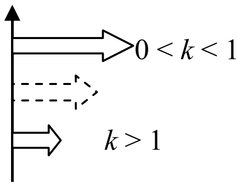


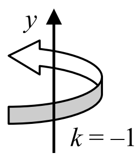
Рис. 28

$y = -0{,}5 f(x)$.

Решение. График функции $y = 3f(x)$ получим растяжением в три раза графика функции $y = f(x)$ от оси *OX*. Чтобы построить график функции $y = -0{,}5 f(x)$ необходимо исходный график сначала отразить относительно оси *OX*, а затем сжать его в два раза вдоль оси *OY* (рис. 28).



7. «Сжатие» графика функции $y = f(x)$ к оси *OY*, то есть построение графика функции $y = f(kx)$. При $k > 1$ абсциссы точек графика функции уменьшаются в *k* раз, происходит сжатие графика функции к оси *OY*. При $0 < k < 1$ абсциссы точек графика функции увеличиваются в $\frac{1}{k}$ раз, происходит растяжение графика функции от оси *OY*.



8. Симметрия относительно оси *OY*, то есть построение графика функции $y = f(-x)$. При этом каждая точка графика функции отображается в точку, симметричную ей относительно оси *OY*.

9. Построение графика функции $y = f(kx)$, если $k < 0$, проводится как последовательное выполнение двух преобра-

зований – симметрии относительно оси OY и сжатия к оси OY.

Пример 8. Задан график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Постройте графики функций $y = f(2x)$ и $y = f(-0,5x)$.

Решение. График функции $y = f(2x)$ строится путем сжатия графика функции $y = f(x)$ в два раза к оси OY. Для построения графика функции $y = f(-0,5x)$ нужно симметрично отразить график исходной функции относительно оси OY и растянуть его вдоль оси OX в два раза (рис. 29). Заметим, что, так как график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси OY, то есть функция $f(x)$ является четной, то отражение относительно OY не меняет вид графика.

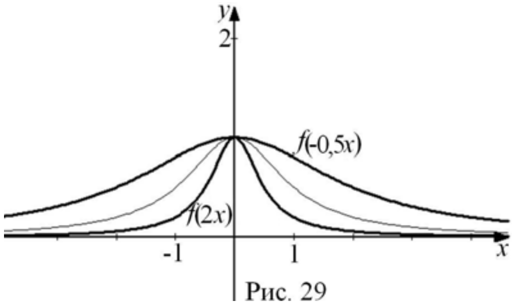


Рис. 29

Пример 9. Постройте график функции $y = 2\sqrt{4-x}$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = 2\sqrt{-(x-4)}$. Следовательно, построение графика произ-

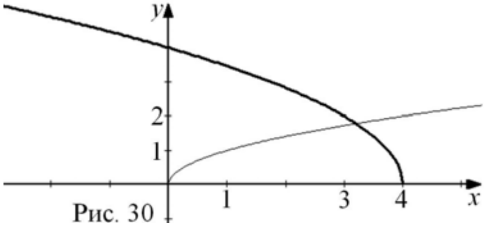


Рис. 30

водится последовательным выполнением преобразований известного графика функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 9): симметричное отражение относительно оси *OY*, параллельный перенос на четыре единицы вправо и растяжение графика от оси *OX* в два раза (рис. 30).

§ 8. Линейные и квадратичные функции

Линейная функция $y = kx + b$. Функция определена на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbb{R}$. Множество ее изменения – также множество всех действительных чисел, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция не ограничена. Она не имеет точек экстремума. При $k > 0$ функция является возрастающей, при $k < 0$ – убывающей. При $k = 0$ функция является постоянной. Графиком линейной функции является прямая. Угловой коэффициент k прямой равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 31). Из аксиом геометрии известно, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости. Поэтому для построения графика линейной функции достаточно задать две точки.

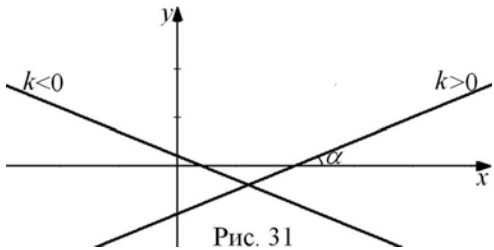


Рис. 31

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Функция определена на всей числовой прямой. Графиком квадратичной функции является парабола.

Для построения графика квадратичной функции целесообразно преобразовать формулу, выделив полный квадрат:
$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Таким образом, получаем, что вершина параболы находится в точке с координатами $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. График квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = x_0$.

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. В точке x_0 функция имеет минимум и принимает в этой точке наименьшее значение. При $x > x_0$ функция возрастает, при $x < x_0$ функция убывает. В этом случае квадратичная функция ограничена снизу и не ограничена сверху.

При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В точке x_0 функция имеет максимум и принимает в этой точке наибольшее значение. При $x > x_0$ функция убывает, при $x < x_0$

функция возрастает. В этом случае квадратичная функция ограничена сверху и не ограничена снизу.

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках. Если дискриминант равен нулю, то парабола касается оси абсцисс. Если дискриминант отрицателен, то парабола расположена выше оси абсцисс, если $a > 0$, и ниже оси абсцисс, если $a < 0$.

Пример 10. Постройте графики функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = 2x - x^2 - 2$.

Решение. Вершина параболы $y = x^2 - 2x - 3$ имеет координаты $x_0 = 1$ и $y_0 = -4$. Так как старший коэффициент $a = 1$ положителен, то ветви параболы направлены вверх. Также, решив уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, можно найти точки пересечения с осью абсцисс: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ (рис. 32).

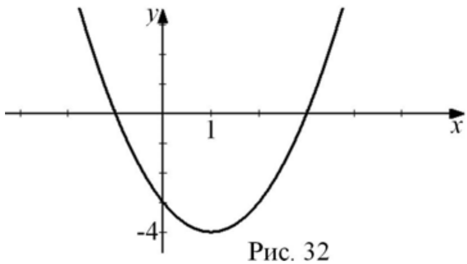


Рис. 32

Для параболы $y = 2x - x^2 - 2$ аналогично получаем, что $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$, и ветви ее направлены вниз. Данная парабола не имеет точек пересечения с осью абсцисс, так как дискриминант соответствующего квадратного уравнения отрицателен (рис. 33).

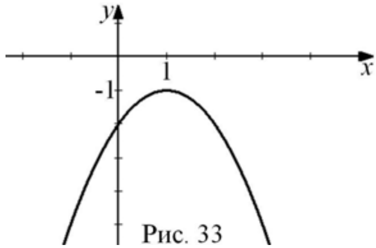


Рис. 33

§ 9. Построение графиков дробно-линейных функций

Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c \neq 0$ и $ad \neq bc$, называется ***дробно-линейной***. Графиком этой функции является гипербола.

Частным случаем дробно-линейной функции является функция обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$. График этой функции состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. При $k > 0$ гипербола расположена в первой и третьей четвертях, при $k < 0$ – во второй и четвертой четвертях.

Пример 11. Постройте график функции $y = \dfrac{3x+10}{2x+4}$.

Решение. Выделим целую часть дроби $y = \frac{3x+10}{2x+4} = \frac{3x+6+4}{2x+4} = \frac{1{,}5(2x+4)+4}{2x+4} = 1{,}5 + \frac{2}{x+2}$.

Таким образом, уравнение, которым задается график функции, примет вид $y = 1{,}5 + \frac{2}{x+2}$. График заданной функции получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ сдвигом на 2 единицы по оси OX влево, растяжением вдоль оси OY в 2 раза и сдвигом на 1,5 единицы по оси OY вверх.

Заметим, что график функции не пересекает прямые $x = -2$ и $y = 1{,}5$, хотя и приближается к ним достаточно близко. Такие прямые называются ***асимптотами*** графика функции. График дробно-линейной функции имеет две асимптоты – вертикальную $x = -2$ и горизонтальную $y = 1{,}5$. Построение графика удобно начинать именно с нахождения асимптот: для нахождения вертикальной асимптоты приравниваем знаменатель дроби нулю, а для нахождения горизонтальной асимптоты выделяем целую часть дроби (рис. 34).

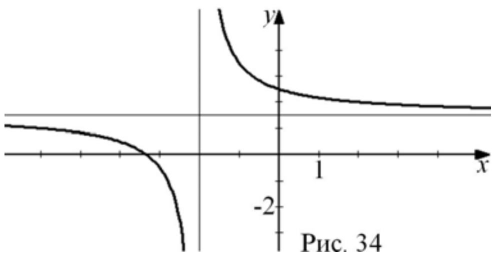


Рис. 34

Построение графика произвольной дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ выполняется по алгоритмам, разобранным в примере 11.

Упражнения

8. Постройте графики функций:

а) $y = 2\sqrt{3x-1}$; б) $y = \sqrt{4x+10} - 3$;

в) $y = 2 + \sqrt{3-x}$; г) $y = 2\sqrt{x+5} - 3$;

д) $y = 2 - \sqrt{x+4}$; е) $y = 3 - \sqrt{2x+9}$.

9. Постройте графики функций:

а) $y = 3 \cdot 2^x - 1$; б) $y = 0{,}5^{2x+3} - 6$;

в) $y = 2^{0{,}5x} - 4$; г) $y = \log_2(x+3) - 1$;

д) $y = 3\sin\dfrac{x}{2} - 2$; е) $y = 2\cos 3x + 3$;

ж) $y = -\log_{0{,}5}(x+5)$; з) $y = \log_3(2x-1) + 4$.

10. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 7x + 2$; б) $y = 2x^2 - 10x - 1{,}5$;

в) $y = -x^2 + 4x + 6$; г) $y = 0{,}5x^2 - 3x - 3$;

д) $y = -x^2 - 6x + 1$; е) $y = -0{,}5x^2 + 2x + 5$.

11. Постройте графики функций:

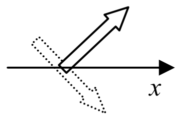
а) $y=\dfrac{4x-1}{x+3}$; б) $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$; в) $y=\dfrac{3x+5}{x-4}$;

г) $y=\dfrac{5-4x}{x-4}$; д) $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$; е) $y=\dfrac{7-2x}{x+2}$.

§ 10. Построение графиков функций, содержащих модуль

По определению $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$. Исходя из этого, получаем, что график функции $y=|x|$ состоит из двух лучей: $y=x$ при неотрицательных x и $y=-x$ при отрицательных x. Построение этого графика можно проводить также, используя преобразование симметрии относительно оси OX.

Так как модуль любого выражения неотрицателен, то все точки графика $y=|f(x)|$ расположены выше оси абсцисс, или на оси абсцисс. Из этого следует, что для получения графика функции $y=|f(x)|$ все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие выше или на оси OX, нужно оставить на месте, а все точки, лежащие ниже оси OX, отобразить симметрично относительно этой оси.



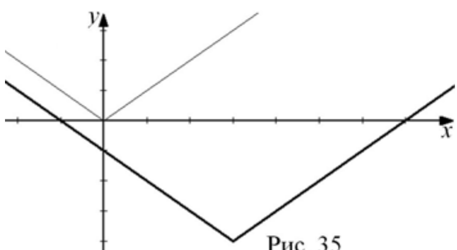


Рис. 35

Пример 12. Постройте график функции $y = |x-3| - 4$.

Решение. Построение графика будем выполнять последовательно. Сначала строим график функции $y = |x|$. Затем сдвигаем его на 3 единицы вправо и на 4 единицы вниз. Заметим, что при этом вершина графика окажется в точке с координатами $x_0 = 3$ и $y_0 = -4$ (рис. 35).

Пример 13. Постройте график функции $y = |x^2 - 3x - 4|$.

Решение. Построение графика будем выполнять последовательно. Сначала строим график функции $y = x^2 - 3x - 4$ как параболу с вершиной в точке $x_0 = 1{,}5$, $y_0 = -6{,}25$ и ветвями, направленными вверх. Затем точки графика, расположенные ниже оси OX, – это точки, у которых координата x принадлежит интервалу $(-1;4)$, – отображаем симметрично относительно этой оси (рис. 36).

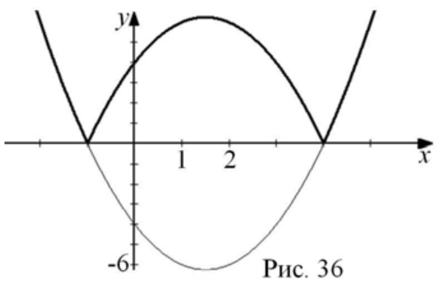


Рис. 36

Пример 14. Постройте график функции $y = 2x^2 - 4|x| + 1$.

Решение. Функция $y = 2x^2 - 4|x| + 1$ – четная. Ее график симметричен относительно оси OY, причем при неотрицательных x он

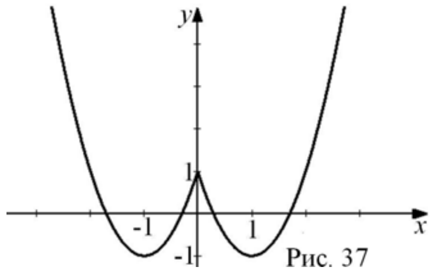


Рис. 37

совпадает с параболой $y = 2x^2 - 4x + 1$, имеющей вершину $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ и ветви, направленные вверх. Сначала построим часть данной параболы при неотрицательных x, а затем полученную кривую симметрично отобразим относительно оси OY (рис. 37).

Упражнения

12. Постройте графики функций:

а) $y = |x^2 - 7x + 10|$; б) $y = |x^2 - x - 6|$;

в) $y = |x^2 - 7x + 12|$; г) $y = |x^2 - 3x - 10|$;

д) $y = |x^2 - 2x - 8|$; е) $y = |x^2 + 3x - 4|$.

13. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 2|x| - 4$; б) $y = x^2 - 4|x| - 1$;

в) $y = x^2 + 2|x| - 3$; г) $y = x^2 - 6|x| + 1$;

д) $y = x^2 - 8|x| + 4$; е) $y = x^2 - 6|x| + 2$.

14. Постройте графики функций:

а) $y=|x^2-7|x|+6|$; б) $y=|x^2-3|x|-4|$;

в) $y=|x^2-6|x|+5|$; г) $y=|x^2+2|x|-8|$;

д) $y=|x^2-6|x|+8|$; е) $y=|x^2-|x|-6|$.

15. Постройте графики функций:

а) $y=1+\log_2|x-3|$; б) $y=2^{|x-1|}-4$;

в) $y=2|\cos x|-1$; г) $y=|\log_2(x+1)|-2$;

д) $y=|2^{x+3}-6|$; е) $y=4\sin|x|-2$.

§ 11. Гармонические колебания

Тригонометрические функции используются для описания различных колебательных процессов: колебания груза, подвешенного на пружине, вокруг положения равновесие, закон изменения переменного тока в цепи, колебания маятника, распространение звуковых и цветовых волн и т.д.

Формулы $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ и $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, с помощью которых описываются такие процессы, называются формулами ***гармонических колебаний***. Положительная величина A называется ***амплитудой*** колебания, положительная величина ω – ***частотой*** колебания, величина φ – ***начальной фазой*** колебания. Амплитуда характеризует размах колебания, частота – количество колебаний в единицу времени.

Построение графиков гармонических колебаний (гармоник) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ производится в несколько этапов.

Рассмотрим алгоритм построения графика функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$: а) строим график функции $y = \sin x$; б) строим график функции $y = \sin(x + \varphi)$, сдвигая график функции $y = \sin x$ на $|\varphi|$ единиц по оси OX (если $\varphi > 0$, то сдвигаем влево, если $\varphi < 0$, то сдвигаем вправо); в) строим график функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$, сжимая его в ω раз к оси OY; г) строим график функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, растягивая его в A раз от оси OX.

Заметим, что функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, описывающие гармонические колебания, являются периодическими с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Они ограничены сверху и снизу, их наибольшее и наименьшее значения равны $\pm A$.

Пример 15. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Решение. Для этой гармоники ампли-

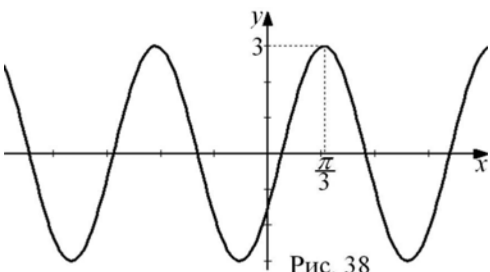


Рис. 38

туда $A = 3$, частота – $\omega = 2$, начальная фаза – $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

Строим график функции $y = \cos x$; сдвигаем на $\frac{2\pi}{3}$ единиц по оси OX вправо; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза (рис. 38).

Пример 16. Постройте график гармонического колебания $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Преобразуем формулу, раскрыв в аргументе косинуса скобки: $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота – $\omega = 2$, начальная фаза – $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

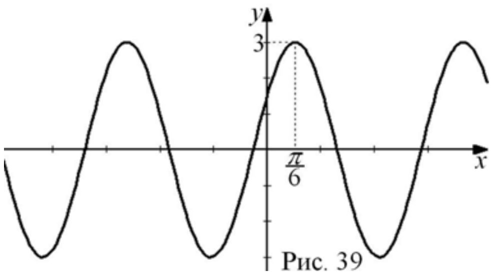


Рис. 39

Строим график функции $y = \cos x$; сдвигаем график на $\frac{\pi}{3}$ единиц по оси OX вправо; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза (рис. 39).

Пример 17. Постройте график гармонического колебания $y = -3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Эта формула не задает гармоническое колебание, так как $A = -3 < 0$. Применив формулу приведения $\cos(x+\pi) = -\cos x$, преобразуем формулу к виду: $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Следовательно, для этой гармоники амплитуда $A = 3$, частота – $\omega = 2$, начальная фаза – $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

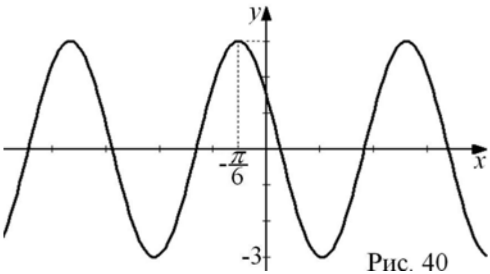


Рис. 40

Строим график функции $y = \cos x$; сдвигаем на $\frac{\pi}{3}$ единиц по оси OX влево; сжимаем график к оси OY в 2 раза; растягиваем от оси OX в 3 раза (рис. 40).

Упражнения

16. Постройте графики функций:

а) $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = -\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

в) $y = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y = 3\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

д) $y = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; е) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y = 1{,}5\cos\left(4x + \frac{5\pi}{3}\right)$; з) $y = 4\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{8}\right)$.

Литература

1. Абрамов А.М., Виленкин Н.Я., Дорофеев Г.В. Избранные вопросы математики. Факультативный курс. / А.М. Абрамов, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев. М.: Изд-во «Просвещение», 1980.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант. – М.: Изд-во физ-мат. литературы, 1963.
3. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа, т.1 / К.А. Бохан, И.А. Егорова, К.В. Лащенов. – М.: Изд-во «Просвещение», 1972.
4. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. Справочные материалы / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Изд-во «Просвещение», 1988.
5. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. – М.: Изд-во «Просвещение», 1990.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Изд-во «Наука», 1986.
7. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Алгебра и анализ элементарных функций. / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. – М.: Изд-во «Наука», 1980.
8. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – М.: Изд-во «Наука», 1984.

9. Туманов С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования / С.И. Туманов. – М.: Изд-во «Просвещение», 1970.
10. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы / Сост. И.Л. Никольская. – М.: Изд-во «Просвещение», 1991.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во «Наука», 1966.
12. Шувалова Э.З., Агафонов Б.Г., Богатырев Г.И. Повторим математику / Э.З. Шувалова, Б.Г. Агафонов, Г.И. Богатырев. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1969.

Оглавление