Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

2012

Гейко, Павел Пантелеевич

Решение уравнений в частных производных гиперболического типа: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» / П.П. Гейко; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 15 с.

Цель работы**:** научиться решать численно уравнения в частных производных гиперболического типа в MathCad.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» по дисциплине «Методы математической физики».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____________С.М. Шандаров
«___» _____________ 2012 г.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Разработчик
__________П.П. Гейко

«____»______________2012 г

2012

Содержание

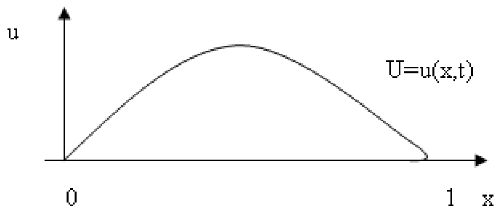
1 Введение

Цель работы: научиться решать численно уравнения в частных производных гиперболического типа в MathCad.

2 Теоретическая часть

2.1 Уравнение колебаний струны. Формулировка краевой задачи

В математической физике струной называют гибкую упругую нить. Пусть струна в начальный момент времени расположена на отрезке $0<x\leq l$ оси *Ox*. Предположим, что ее концы закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от первоначального положения, а потом предоставить самой себе или придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движение. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и в определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.



Если предположить, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси *Ox* и в одной плоскости, то процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая определяет величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент l

Доказано, что при отсутствии внешней силы функция $u(x,t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Для полного определения движения струны одного уравнения недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны (при $x=0$ и $x=l$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ($t=0$). Совокупность граничных и начальных условий называется краевыми условиями.

Пусть, например, концы струны при $x=0$ и $x=l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0.$$

Это - граничные условия для рассматриваемой задачи. В начальный момент t=0 струна имеет определенную форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$, т.е.

$$u(x,0)=f(x).$$

Далее в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $\varphi(x)$, т.е.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x).$$

Эти два условия называются начальными условиями.

2.2 Колебания бесконечной струны. Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения

Прежде чем решать задачу о колебаниях закрепленной струны, рассмотрим более простую задачу - о колебаниях бесконечной струны. Если представить очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникающие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния.

Рассматривая свободные колебания, мы должны решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x,0)=u\big|_{t=0}=f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши.

Преобразуем волновое уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2-a^2dt^2=0$$

распадается на два уравнения:

$$dx-adt=0 \quad \text{и} \quad dx+adt=0,$$

интегралами которых служат прямые

$$x-at=C_1,\quad x+at=C_2$$

Введем новые переменные

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at$$

и запишем волновое уравнение для переменных ξ и η.

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = u_\xi \cdot (-a) + u_\eta \cdot a,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = (-au_{\xi\xi} + au_{\eta\xi})(-a) + (-au_{\xi\eta} + au_{\eta\eta})a = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}),$$

Вычисляя производные и подставляя их в исходное уравнение, видим, что уравнение колебания струны в новых координатах будет

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Интегрируя полученное равенство по $\boldsymbol{\eta}$ при фиксированном $\boldsymbol{\xi}$**,** придем к равенству $u_\xi = \varphi_1(\xi)$ **.** Интегрируя это равенство по $\boldsymbol{\xi}$ при фиксированном $\boldsymbol{\eta}$**,** получим

$$u(\xi,\eta) = \int \varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ являются функциями только переменных $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ соответственно. Следовательно, общим решением исходного уравнения является функция

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

Найдем функции $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x).$$

$$u_t(x,t) = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$u_t(x,0) = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$-a\varphi(x) + a\psi(x) = \int_{x_0}^{x} g(z)dz + C,$$

где x_0 и C - постоянные. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(x)dz + C \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{2}f(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)dz - \dfrac{C}{2}, \\ \psi(x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)dz + \dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, мы определили функции $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ через заданные функции f и g**,** причем полученные равенства должны иметь место для любого значения аргумента. Подставляя в (8) найденные значения φ и ψ, будем иметь

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}g(z)dz-\frac{C}{2}+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}g(z)dz+\frac{C}{2}$$

или

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(z)dz.$$

Найденное решение называется формулой Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения

2.3 Решение волнового уравнения методом разделения переменных (метод Фурье)

Метод разделения переменных применяется для решения многих задач математической физики. Пусть требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \tag{10), (11}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \tag{12), (13}$$

Частное решение уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям (10) и (11), ищут в виде произведения двух функций:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t).$$

Подставляя функцию $u(x,t)$ в уравнение (9) и преобразовывая его, получим .

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

В левой части этого уравнения стоит функция, которая не зависит от x, а в правой - функция, не зависящая от t. Равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от x, ни от /, т.е. равны постоянному числу. Обозначим

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda, \quad \text{где } \lambda>0. \tag{14}$$

$$X''+\lambda X=0 \quad \text{и} \quad T''+a^2\lambda T=0. \tag{15}$$

Из этих уравнений получаем два однородных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общее решение этих уравнений

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x,$$
$$T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t,$$

где *A, B, C, D* - произвольные постоянные.

Постоянные *A* и *B* подбирают так, чтобы выполнялись условия (10) и (11), из которых следует, что *X(0)=X(l)=0,* так как $T(t)\neq 0$ (в противном случае *u(x,t)=0).* Учитывая полученные равенства, находим

$$A=0 \ \text{и} \ B\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

Так как $B\neq O$ (иначе, было бы *X=O* и *u=0,* что противоречит условию), то должно выполняться равенство

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

откуда,

$$X=B\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Найденные значения λ называют собственными значениями для данной краевой задачи. Соответствующие им функции *X(x)* называются собственными функциями.

Заметим, что, если в равенстве (14) вместо - λ взять число λ (λ>0), то первое из уравнений (15) будет иметь решение в виде

$$X=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять граничным условиям (10) и (11).

Зная $\sqrt{\lambda}$, можем записать

$$T(t)=C\cos\frac{a\pi n}{l}t+D\sin\frac{a\pi n}{l}t, \quad n\in N.$$

Для каждого *n* получаем решение уравнения (9)

$$u_n(x,t)=\sin\frac{\pi n}{l}x\left(C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t+D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)$$

Так как исходное уравнение (9) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, и потому функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t+D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

будет решением дифференциального уравнения (9), удовлетворяющим граничным условиям (10) и (11).

Найденное частное решение должно еще удовлетворять начальным условиям (12) и (13). Из условия (12) получим

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Далее, дифференцируя члены ряда (16) по переменной *t,* из условия (13) будем иметь

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

Правые части двух последних равенств есть ряды Фурье для функций *f(x)* и *φ(χ),* разложенных по синусам на интервале (0,*l*). Поэтому

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,\qquad D_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\,. \tag{17}$$

Итак, ряд (16), для которого коэффициенты C_n и D_n определяются по выписанным формулам, если он допускает двукратное почленное дифференцирование, представляет решение уравнения (9), удовлетворяющее граничным и начальным условиям.

3 Экспериментальная часть

3.1 Методические указания

Итак, Гиперболические уравнения возникают при изучении различных колебательных процессов. Типичным примером гиперболического уравнения является уравнение колебаний струны с закрепленными концами. Такая задача имеет вид:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+G(\mathrm{x,t})\quad \text{для}\quad 0<x<l,\quad 0<t<t_{\max}, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=u(l,t)=0\qquad \text{для}\quad 0\prec t\prec t_{\max}\,, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u_t(x,0)=\mathrm{g}\,(x)\qquad \text{для}\quad 0<x<l. \tag{3'}$$

$$u(x,0)=f\,(x)\qquad \text{для}\quad 0<x<l, \tag{3''}$$

Условие (3') описывает начальную форму струны, условие (3") - исходное распределение скоростей. Функция *G(x, t)* описывает внешнюю нагрузку, действующую на струну во время колебательного процесса.

Рассмотрим численное решение уравнения (1) методом конечных разностей, хотя при применении этого метода могут возникнуть проблемы с устойчивостью используемой разностной схемы. Зададим число точек разбиения *n* для отрезка [0; *l*] и *m* для отрезка [0; t_{max}]. Тогда длины отрезков разбиения равны (h = *l*/(n-1) и (τ= $t_{max}/(m-l)$. Вторые производные в уравнении (1) аппроксимируем по формуле центрированной разности

$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+\tau) - 2u(x,t) + u(x,t-\tau)}{\tau^2} + O(\tau^2) \qquad (4')$$

и

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \qquad (4'')$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1), получим разностное уравнение

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Обозначив *r=cx / h,* приводим это уравнение к виду

$$u_{i,j+1} = (2\text{-}2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i\text{-}1,j}) - u_{j,j\text{-}1}\,,\ \ i = 2, 3, \ldots, n\text{-}1. \qquad (5)$$

Вычислительная схема (5) устойчива при выполнении условия $r \le \mathbf{1}$. Существуют неявные схемы, более сложные, но устойчивые при любых значениях *r* [2].

Чтобы проводить расчет по уравнению (5), необходимо знать два начальных ряда, соответствующих *t*= 0 и *t*= τ. Ряд, соответствующий начальному моменту, задается с использованием функции

$$u(x,0) = f(x).$$

Ряд для *t*= *τ* задается с использованием функции

$$u_t(x,0) = g(x)$$

по формуле

$$U_{i,2} = s_1 f_{i\text{-}1} + \tau g_{i\text{-}1} + r_{22}(f_i + f_{i\text{-}1})\,. \qquad (6)$$

Здесь s_1=1-r^2, r_{22}= $r^2/2$. Формула (6) следует из разложения функции *u(x,t)* в ряд Тейлора с точностью до квадратичного члена в точке *t* = τ. Вторая производная аппроксимируется по формуле (4'). После вычисления первых двух рядов значения функции *u(x,t)* вычисляются по формуле (5).

3.2 Задание

Задание 1. Решить численно задачу (1) - (3) на единичном отрезке со следующими данными:

1. $f(x) = (1/15)\sin(11\pi x/2)\cos(4\pi x/2), \quad g(x) = 0$

Аналитическое решение:

$$u(x,t) = (1/30)\,[\cos(7\pi t/2)\sin(7\pi x/2) + \cos(15\pi t/2)\sin(15\pi x/2)]\ .$$

2. $f(x) = (1/8)\sin(3\pi x), g(x) = 0$

Аналитическое решение: $u(x,t) = (1/8)\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$.

3. $f(x) = 0, g(x) = (1/3)\sin(5\pi x)$

Аналитическое решение: $u(x,t) = (1/(15\pi))\sin(5\pi t)\cos(5\pi x)$

4. $f(x) = 0$

Аналитическое решение:
$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2k+1)t}{(2k+1)^3}\cdot\sin(2k+1)\pi x\ .$$

5. $$f(x) = 0, \quad \mathrm{g(x)} = \begin{cases} 1, & \left|\mathrm{x} - \dfrac{1}{3}\right| \prec \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0, & \left|\mathrm{x} - \dfrac{1}{3}\right| \succ \dfrac{\pi}{2h} \end{cases}$$

Аналитическое решение:
$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi k}{3}\sin\dfrac{\pi^2 k}{2}}{k^2}\sin(\pi kt)\sin(\pi kx)\ .$$

Задание 2. Сравнить с аналитическим решением. Ряды аппроксимировать конечной суммой.

Задание 3. Определить максимальное значение шага, при котором вычислительная схема устойчива.

Задание 4. Убедиться в неустойчивости схемы при задании шага больше максимального

В файле **hyperbolic** приведен пример решения задачи.

$$u_{tt} = u_{xx}\ ,$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$u_t(x,0) = x(x\text{-}1)\ .$$

Также проведено сравнение полученного решения с точным теоретическим решением

hyperbolic

ORIGIN:= 1

$a \equiv 1 \qquad tmax \equiv .5 \qquad c \equiv 1 \qquad f(x) \equiv 0 \qquad g(x) \equiv x\cdot(x-a)$

$n \equiv 21 \qquad m \equiv 51 \qquad h \equiv \dfrac{a}{n-1} \qquad \tau \equiv \dfrac{tmax}{m-1} \qquad r \equiv \dfrac{\sqrt{c}\cdot\tau}{h} \qquad r = 0.2$

$r2 \equiv r^2 \qquad r22 \equiv \dfrac{r2}{2} \qquad s1 \equiv 1 - r^2 \qquad s2 \equiv 2\cdot s1$

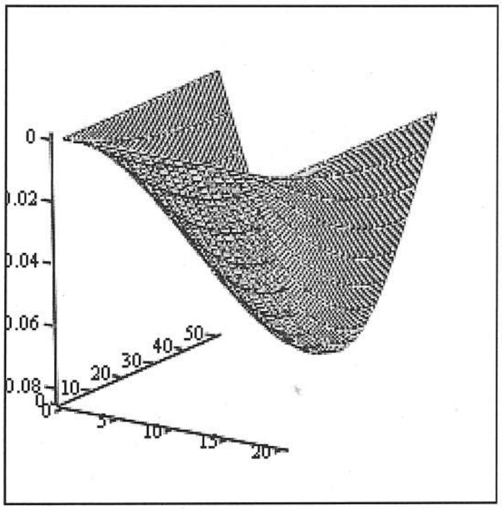
$i := 1..n \qquad j := 1..m \qquad U_{i,j} := 0$

```
volna(U,m,n) := | for i ∈ 2..n − 1
                |   | U[i,1] ← f[(i − 1)·h]
                |   | U[i,2] ← s1·f[h·(i − 1)] + τ·g[h·(i − 1)] + r22·[ f(i·h) + f[h·(i − 2)] ]
                | for j ∈ 3..m
                |   for i ∈ 2..n − 1
                |     U[i,j] ← s2·U[i,j−1] + r2·(U[i−1,j−1] + U[i+1,j−1]) − U[i,j−2]
                | U
```

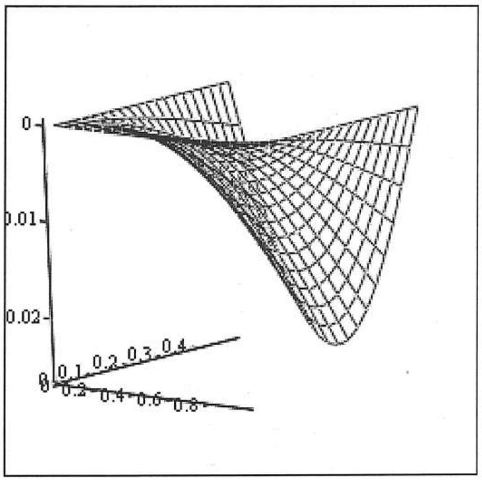
U := volna(U,m,n)

Nmax:= 25

$$utheor(x,t) := \frac{8\cdot a^4\cdot \displaystyle\sum_{m=1}^{Nmax} \frac{\cos\left[\dfrac{(2\cdot m-1)\cdot\pi\cdot t}{a}\right]-1}{(2\cdot m-1)^5}\cdot \sin\left[\dfrac{(2\cdot m-1)\cdot\pi\cdot x}{a}\right]}{\pi^5}$$



U



Uth

Uth := CreateMesh (utheor , 0, 1, 0, .5)

3.3 Содержание отчета

По предложенной лабораторных работе необходимо составить отчет, который должен содержать:

– титульный лист;

- цель работы;
- краткие сведения из теории, содержащие расчетные формулы;
- результаты расчетов и экспериментов в виде таблиц и графиков;
- выводы по проведенной работе.

Список литературы

1. Джон Г.Мэтьюз, Куртис Д.Финк. Численные методы. Использование MATLAB. - М.: Вильямс, 2001. - 568 с
2. Самарский А.А., Гулин А.В.. Численные методы: учебное пособие для вузов. - М.: Наука, 1989.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. - СПб.: Изд-во "Лань", 2009. - 688 с. 6-е изд., испр ISBN: 978-5-8114-0572-5 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1 cid=25&pl1 id=281
4. Ушаков В. М. Методы математической физики: Курс лекций / В. М. Ушаков, Ю. В. Гриняев, С. В. Тимченко, Л. Л. Миньков. - 1-е изд. - Томск : ТМЦ ДО, 2003. - 144 с.
5. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для вузов / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. 4-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2004. - 688 с. http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1 cid=25&pl1 id=2122
6. Ильин А. М. Уравнения математической физики: Учебное пособие для вузов / А. М. Ильин. - 1-е изд. - М. : Физматлит, 2009. -192 с. - URL: http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1 cid=25&pl1 id=2181
7. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учебное пособие / Л. И. Магазинников. - 2-е изд. - Томск: ТМЦ ДО, 2002. URL: http://edu.tusur.ru/training/publications/2258
8. Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. - 1-е изд. - М.: Лань, 2008. - 224 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1 cid=25&pl1 id=140

Учебное пособие

Гейко Павел Пантелеевич

Решение уравнений в частных производных гиперболического типа

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «Методы математической физики»

Усл. печ. л. ______Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40