Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО СХЕМЕ КРАНКА–НИКОЛСОНА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника»

2012

Гейко Павел Пантелеевич

Моделирование параболических уравнений в частных производных по схеме Кранка–Николсона: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» / П.П. Гейко; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 14 с.

Цель работы: научиться строить алгоритмы для решения параболических уравнений в частных производных по схеме Кранка–Николсона

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» по дисциплине «Методы математической физики».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____________С.М. Шандаров
«___» _____________ 2012 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО СХЕМЕ КРАНКА–НИКОЛСОНА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Разработчик
__________П.П. Гейко
«____»______________2012 г

2012

Содержание

1 Введение 5
2 Теоретическая часть 5
2.1 Сравнение распространения тепла в стержне 5
2.2 Решение уравнения теплопроводности 6
3 Экспериментальная часть 8
3.1 Методические указания 8
3.2 Задание 11
3.3 Содержание отчета 12
Список литературы 12

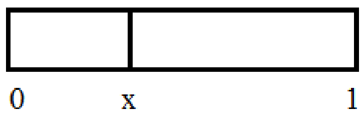
1 Введение

Цель работы: научиться строить алгоритмы для решения параболических уравнений в частных производных по схеме Кранка–Николсона

2 Теоретическая часть

2.1 Сравнение распространения тепла в стержне

Рассмотрим однородный стержень длины *l*. Предположим, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и во всех точках поперечного сечения стержня температура одинакова. ссли стержень предоставить самому себе, то заключенное в нем тепло будет протекать от более нагретых мест к менее нагретым, и температура стержня с течением времени станет выравниваться. На этот процесс будет влиять также режим, который поддерживается на концах стержня. Задача состоит в том, чтобы, зная этот режим и распределение температуры в начальный момент времени $t=0$, найти это распределение в последующие моменты.



Ось *Ox* располагают так, что один конец стержня совпадает с точкой x=0, а другой - с точкой $x=l$. Обозначим через $u(x,t)$ температуру в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t.

Функция $u(x,t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это уравнение и называется уравнением распространения тепла (уравнением теплопроводности) в однородном стержне
Чтобы решение уравнения было определенно, функция $u(x,t)$ должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим физическим условиям задачи. Так называемая первая краевая задача для заключается в следующем:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=\psi_1(t), \quad u(l,t)=\psi_2(t). \qquad (18),(19),(20)$$

Начальное условие (18) соответствует тому, что при $t=0$ в различных сечениях стержня задана температура, равная $\varphi(x)$. Граничные условия (19) и (20) соответствуют тому, что на концахстержняпри x=0 и $x=l$ поддерживаетсятемпература,равная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно.

2.2 Решение уравнения теплопроводности

Пусть в начальный момент времени задана температура в различных сечениях стержня. Концы стержня погружены в тающий лед, т.е. в них поддерживается постоянная температура равная нулю. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени. Таким образом, нужно найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

уловлетворяюшее краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Применяя к решению поставленной задачи метод разделения переменных можно получить решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e \frac{\pi^2 a^2 n^2}{t^2} \cdot sin \frac{\pi n}{l} x \tag{21}$$

Коэффициента A_n выбираются так, чтобы удовлетворялось начальное условие, согласно которому будет иметь

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

Затем, из раенства (21) следует, что при $t \to +\infty$ функция $u(x,t)$. Физический смысл этого соотношения ясен: с течением времени в стержне установится температура люда, в который погружены его концы.

Если стержень очень длинный, то на процессы протекающие в его средней части, главное влияние оказывает начальное распределение температуры. В задачах такого типа стержень считается бесконечным. Краевые условия при этом не учитываются, и на искомую функцию $u(x,t)$ накладывают только начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{22}$$

где функция $\varphi(x)$ определена на всей числовой оси. Задача решения уравнения теплопроводности при условии (22) называется задачей Коши.

Метод разделения переменных позволяет найти решение уравнения в следующем виде

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

Функция $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ выбирают так, чтобы выписанное решение удовлетворяло начальному условию (22). Полагая в последнем рапвенстве t=0, получим

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

Сравнивая интеграл в правой части равенства с интегралом Фурье для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda,$$

видим, что

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$$

Подставляя найденные выражения A(λ) и B(λ) в функцию u(x,t) и преобразовывая ее, окончательно получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi-x)d\xi$$

3 Экспериментальная часть

3.1 Методические указания

Математическая формулировка таких задач обычно включает уравнение в частных производных параболического типа, а также постановку начальных и граничных условий.

Для решения одномерных (по пространственной координате) уравнений можно использовать метод конечных разностей, однако применимость данного метода ограничена из–за его условной устойчивости. Поэтому на практике гораздо чаще используется безусловно устойчивая неявная схема Кранка–Николсона, основанная на численных приближениях для решений в промежуточной точке $(x,\ t + \tau/2)$, где τ - шаг по времени. Постановка задачи в общем виде включает уравнение

$$u_t\,(x,t) = \mathrm{D}\ u_{xx}(x,t) + \mathrm{g(x,t)}\ ,\ \ 0\le x \le L,\ \ \ 0< t < t_{\max}, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = f\,(x),\ \ 0\le x \le L,\ \ t = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями, вообще говоря, являющимися функциями времени.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\mathrm{g(x,t)} = 0$ (однородное уравнение), а в качестве граничных условий используются однородные граничные условия

$$u(0,\ t) = 0,\ \ x=0,\ \ 0\le t \le t_{\max},$$

$$u_ч(L,\ t) = 0,\ \ x=L,\ \ 0\le t \le t_{\max}\ . \tag{3}$$

Согласно схеме Кранка–Николсона, производные в уравнении (1) аппроксимируются формулами

$$\begin{aligned} u_t\left(x,t+\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}+O\left(\tau^2\right),\\ u_{xx}\left(x,t+\frac{\tau}{2}\right) &= \frac{1}{2h^2}\bigl(u(x-h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+u(x+h,t+\tau)+\\ &\qquad +u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)\bigr). \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя формулы (2) в (1) и приводя подобные, получаем уравнение

$$-u_{i-1,\mathrm{j}+1} + \mathrm{s}_2 u_{i,j+1} - u_{i+1,\mathrm{j}+1} = \mathrm{s}_3 u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\ , \tag{3}$$

где $s_2 = 2/r + 2$, $s_3 = 2/r - 2$, $r = D\tau/h^2$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Подставляя в (3) однородное граничное условие на левом конце отрезка $u_{0,j} = 0$, получаем для $i = 1$ уравнение

$$s_2 u_{1,j+1} - u_{2,j+1} = s_3 u_{1,j} + u_{2j} \quad . \qquad (4)$$

Для аппроксимации граничного условия 2–го рода на правом конце отрезка введем фиктивную точку $u(a+h)$ и аппроксимируем производную по формуле центральной разности

$$u_x(a) = 0 = \frac{u(a+h) - u(a-h)}{2h} + O(h^2) \ ,$$

откуда следует, что $u(a-h) = u(a+h)$. Тогда из уравнения (3) при $i = n-1$ получаем формулу

$$-2u_{n-1,j+1} + s_2 u_{n,j+1} = (s_3 + 1)u_{n-1,j} + u_{n-2,j} \ . \qquad (5)$$

Уравнения (3)-(5) представляют собой систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Если уравнение (1) является неоднородным, значения функции g(x,t) также берутся в промежуточной точке.

Пример

В файле Example находится пример решения задачи (1)-(3) для $L=2$, $f(x)= 0$, $g(x,t) = \sin(\pi x/4)$.

Построен график решения задачи, а также график теоретического решения $u(x,t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

Example

Параметры задачи

$L \equiv 2 \quad n \equiv 21 \quad m \equiv 21 \quad h \equiv \dfrac{L}{n-1}$

$h = 0,1 \quad k \equiv 0,05 \quad h^2 = 0,01 \quad t\,max = k \cdot (m-1)$

$D \equiv 1 \quad r \equiv \dfrac{D \cdot k}{h^2} \quad t\,max = 1 \quad r = 5$

Граничные условия Функция неоднородности Начальные условия

$c1(t) \equiv 0 \quad d2(t) \equiv 0 \qquad g(x,t) \equiv sin\left(\pi \cdot \dfrac{x}{4}\right) \qquad f(x) \equiv 0$

Параметры вычислений

$$b \equiv k\cdot(m-1) \qquad s1 \equiv \left(\frac{2}{r}+2\right) \qquad s2 \equiv -2+\frac{2}{r} \qquad s3 \equiv \frac{k}{r}$$

Расчет

$$i \equiv 0..n-1 \qquad j \equiv 0..m-1 \qquad U_{i,j} \equiv 0 \qquad Vb_i \equiv 0 \qquad Vb_0 \equiv c1(0)$$

$$U_{i,0} \equiv f(h\cdot i) \qquad U_{0,0} \equiv c1(0) \qquad Vd_0 \equiv 1 \qquad xmass_i \equiv i\cdot h \qquad tmass_j \equiv j\cdot k \qquad G_{i,j} \equiv g(xmass_i, tmass_j)$$

$$i1 \equiv 1..n-2 \qquad Vc_{i1} \equiv -1 \qquad Vc_0 \equiv 0 \qquad Vb_{i1} \equiv 0 \qquad Vd_{i1} \equiv s1$$

$$Vd_0 \equiv 1 \qquad Vd_{n-1} \equiv s1 \qquad Va_{i1} \equiv -1 \qquad Va_{n-2} \equiv -2 \qquad Va_0 \equiv -1 \qquad Vb_0 \equiv c1(0)$$

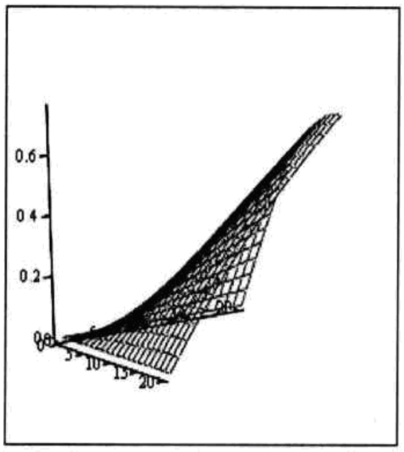
```
Vbm(U,Vb,j) ≡ | for i ∈ 1..n−2
              |    Vb_i ← U_{i−1,j−1} + U_{i+1,j−1} + s2·U_{i,j−1} + s3·(G_{i,j−1} + G_{i,j})
              | Vb_0 ← c1(tmass_j)
              | Vb_{n−1} ← s3·(G_{n−1,j} + G_{n−1,j−1}) + 2·U_{n−2,j−1} + s2·U_{n−1,j−1}
              | ...
```

```
Crank(U) ≡ | for j ∈ 1..m − 1
           |    Vb ← Vbm(U, Vb, j)
           |    X ← trisys(Va, Vd, Vc, Vb)
           |    U^⟨j⟩ ← X
           | U
```

U := Crank(U)

```
trisys(A, D, C, B) ≡ | N ← length(B)
                     | for k ∈ 1.. N − 1
                     |    mult ← A_{k−1} / D_{k−1}
                     |    D_k ← D_k − mult·C_{k−1}
                     |    B_k ← B_k − mult·B_{k−1}
                     | X_{N−1} ← B_{N−1} / D_{N−1}
                     | for k ∈ N − 2, N − 3 .. 0
                     |    X_k ← (B_k − C_k·X_{k+1}) / D_k
                     | X
```

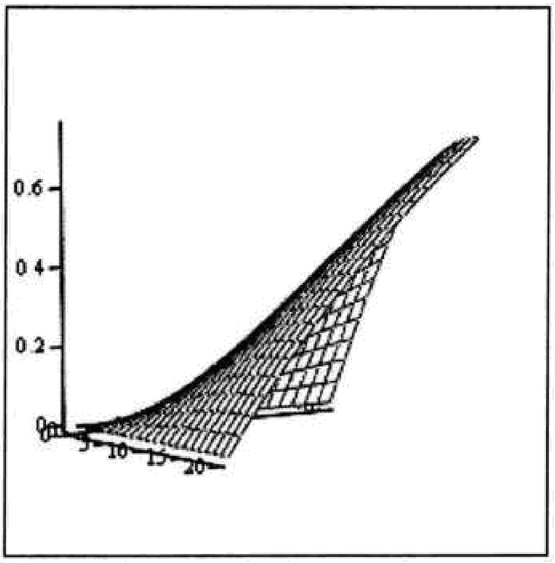
График решения



U

Теоретическое решение

$$u(x,t) := \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \left[1 - e^{-1\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot t}\right] \sin\left(\pi\,\frac{x}{4}\right) \qquad Utheor_{i,j} := u\left(xmass_i, tmass_j\right)$$



Utheor

3.2 Задание

Численно решить краевую задачу для одномерного линейного уравнения теплопроводности, построить графики численного и теоретического решения (ряд аппроксимировать его конечной суммой).

Вариант 1.

$u_t = u_{xx}$, $0< t< T$, $0< x< 1$,

$u(0,x) = 0$, $0< x< 1$,

$u(t, 0) = 0$, $0< t< T$,

$u(t, 1) = 1$, $0< t< T$.

Точное решение: $$u(x,t) = x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\exp\left(-n^2\pi^2 t\right)\sin(n\pi x)$$.

Вариант 2.

$u_t = u_{xx}$, $0 < t < T$, $0 < x < 1$,

$u(0,x) = \sin(\pi x)$, $0 < x < 1$,

$u(t, 0) = 0$, $0 < t < T$,

$u(t, 1) = 0$, $0 < t < T$.

Точное решение: $u(x,t) = exp(-\pi^2 t)\, sin(\pi x)$.

Вариант 3.

$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x)$, $0 < t < T$, $0 < x < 1$,

$u(0,x) = 0$, $0 < x < 1$,

$u(t, 0) = 0$, $0 < t < T$,

$u(t, 1) = 0$, $0 < t < T$.

Точное решение: $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi^2}\left[1 - \exp\left(-\pi^2 t\right)\right]\sin(\pi x)$.

3.3 Содержание отчета

По предложенной лабораторной работе необходимо составить отчет, который должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- краткие сведения из теории, содержащие расчетные формулы;
- результаты расчетов и экспериментов в виде таблиц и графиков;
- выводы по проведенной работе.

Список литературы

1. Джон Г.Мэтьюз, Куртис Д.Финк. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 568 с
2. Самарский А.А., Гулин А.В.. Численные методы: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989.

3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – СПб.: Изд-во "Лань" , 2009. – 688 с. 6-е изд., испр .ISBN: 978-5-8114-0572-5 http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=281

4. Ушаков В. М. Методы математической физики: Курс лекций / В. М. Ушаков, Ю. В. Гриняев, С. В. Тимченко, Л. Л. Миньков. - 1-е изд. - Томск : ТМЦ ДО, 2003. – 144 с.

5. Ильин А. М. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: Учебное пособие для вузов / А. М. Ильин. - 1-е изд. - М. : Физматлит, 2009. - 192 с. – URL: http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2181

6. Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. - 4-е изд., испр. - М. : Лань, 2008. - 224 с. – URL: http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=140

Учебное пособие

Гейко Павел Пантелеевич

Моделирование параболических уравнений
в частных производных по схеме Кранка–Николсона

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «Методы математической физики»

Усл. печ. л. ______Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40