Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника»

2012

Гейко Павел Пантелеевич

Решение дифференциальных уравнений эллиптического типа: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» / П.П. Гейко; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 12 с.

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения эллиптического типа в MathCad.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» по дисциплине «Методы математической физики».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____________С.М. Шандаров
«___» _____________ 2012 г.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Разработчик
__________П.П. Гейко
«____»______________2012 г

2012

Содержание

1 Введение

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения эллиптического типа в MathCad.

2 Теоретическая часть

Очень многие *дифференциальные уравнения в частных производных* не имеют аналитического решения, и для их решения приходиться прибегать к численным методам. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно часто используется *метод конечных разностей*.

1. Метод конечных разностей

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных *методом конечных разностей* состоит в следующем:

1. Построение в области решения равномерной сетки, содержащей *n* узловых точек (рис. 2.1).

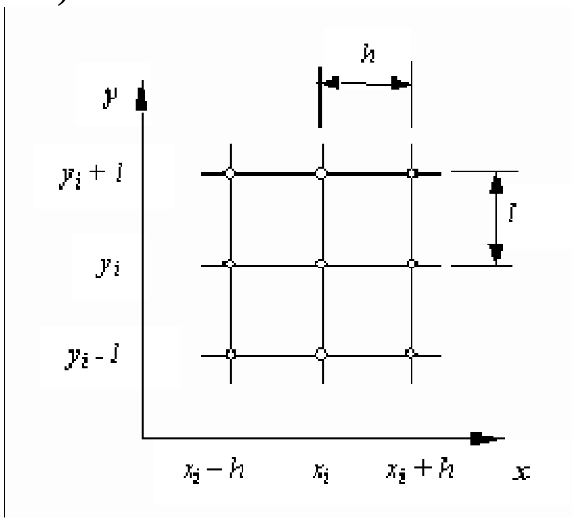


Рисунок 2.1 – Двумерная сетка

2. Представление производных в конечно-разностной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2l}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{l^2} \text{ и т. д.,}$$

где $f_{i,j}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i-1,j}$, $f_{i,j+1}$, $f_{i,j-1}$ - значения функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_j), $(x_i + h, y_j)$, $(x_i - h, y_j)$, $(x_i, y_j + l)$, $(x_i, y_j - l)$ соответственно.

Такие разностные уравнения записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему из *n* уравнений с *n* неизвестными.

3. Решение полученной системы с целью получения приближённого решения в узлах сетки.

2. Эллиптические уравнения в частных производных

К исследованию такого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д.

3 Экспериментальная часть

3.1 Методические указания

Рассмотрим две типичных электростатических задачи:

1) найти потенциал электрического поля при неизвестном местоположении исходных зарядов, но заданном электрическом потенциале на границах области. (Например, задача о распределении потенциала электрического поля, создаваемого системой неподвижных проводников, помещенных в вакуум и подключенных к батареям. Здесь можно измерить потенциал каждого проводника, но задать распределение электрических зарядов на проводниках, зависящее от их формы, очень сложно);

2) найти потенциал электрического поля, создаваемого заданным распределением в пространстве электрических зарядов $\varphi(x,y,z)$.

Хорошо известно, что прямой метод вычисления потенциала электрического поля $\varphi(x,y,z)$ в этих задачах состоит в решении уравнения Лапласа (задача 1)

$$\Delta\varphi(x,y,z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

и уравнения Пуассона (задача 2)

$$\Delta\varphi(x,y,z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\varphi(x,y,z) \tag{3}$$

Уравнения (1), (2) относится к классу дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Далее мы будем рассматривать только частный случай эллиптических уравнений для поля j, зависящего от двух пространственных переменных. Совершенно очевидно, что для полного решения задачи уравнения (1), (2) необходимо дополнить граничными условиями. Различают три типа граничных условий:

1) граничные условия Дирихле (значения j задаются на некоторой замкнутой кривой в плоскости (x,y) и, возможно, на некоторых дополнительных кривых, расположенных внутри области (рис. 3.1));

2) граничные условия Неймана (на границе задается нормальная производная потенциала j);

3) смешанная краевая задача (на границе задается линейная комбинация потенциала j и его нормальной производной).

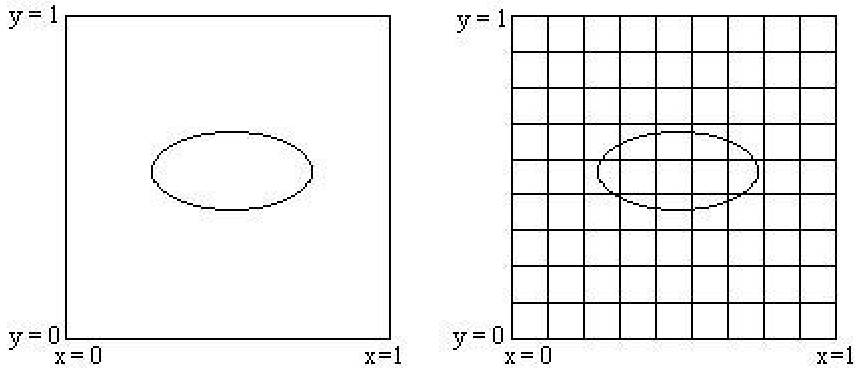


Рисунок 3.1

Рассмотрим решения *двумерного уравнения Пуассона* и его однородной формы - *уравнения Лапласа*.

Решение уравнения Пуассона будем искать в некоторой ограниченной области $\Omega = \{0 \le x \le q_1 \quad 0 \le y \le q_2\}$ изменения независимых переменных *x*, *y*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{4}$$

Граничные условия:

$$u(0,\, y) = \mu_1(y),\quad u(a,\, y) = \mu_2(y),\ y \in [0,\, b],$$
$$u(x,\, 0) = \mu_3(x),\quad u(x,\, b) = \mu_4(x),\ x \in [0,\, a], \tag{5}$$

где f, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 - заданные функции (задача *Дирихле*, состоящая в решении эллиптического уравнения при заданных значениях искомой функции на границе расчётной области).

Построим в области Ω равномерную прямоугольную сетку с шагами h и l по x и y соответственно: $x_i = i\,h$, $i = 0, 1, ..., n$, $h = q_1 / n$; $y_j = j\,l$, $j = 0, 1, ..., m$, $l = q_2 / m$.

Аппроксимируем дифференциальную задачу (4) - (5) на шаблоне “крест” (рис. 3.2),

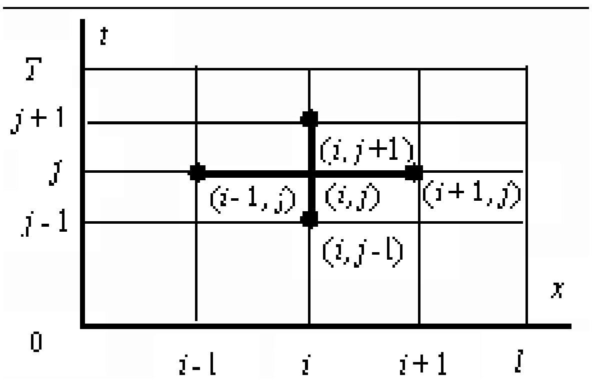


Рисунок 3.2 – Шаблон крест

В результате получаем *неявную трехслойную разностную схему*:

$$a_{i,j}u_{i+1,j}+b_{i,j}u_{i-1,j}+c_{i,j}u_{i,j+1}+d_{i,j}u_{i,j-1}+e_{i,j}u_{i,j}=f_{i,j} \qquad (6)$$

где

$$a_{i,j}=b_{i,j}=\frac{1}{h^2},\ c_{i,j}=d_{i,j}=\frac{1}{l^2},\ e_{i,j}=-2\cdot\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{l^2}\right)$$

$$u_{0,j}=\mu1(y_j),\quad u_{n,j}=\mu2(y_j),\quad j=0,\ 1\ \ldots m$$

$$i=1,2\ \ldots n\text{-}1,\ \ j=1,\ 2\ \ldots m\text{-}1,\quad u_{i,0}=\mu3(x_i),\quad u_{i,m}=\mu4(x_i),\quad i=0,\ 1\ \ldots n$$

Уравнение (6) задает систему линейных уравнений относительно неизвестных переменных j_i *(i=1;N-1)*, причем матрица системы уравнений является трех диагональной (т.е. в матрице отличными от нуля оказываются только элементы, расположенные на главной диагонали и двух диагоналях, расположенных выше и ниже главной диагонали). Для небольшого числа точек данную систему уравнений можно решить прямыми методами.

Однако на практике при численном решении эллиптических уравнений приходится использовать сетки, имеющие значительно большее количество узлов. Ограничимся только одним из итерационных методов (методом релаксаций), применяемым в случае больших разряженных матриц. Сам метод довольно громоздкий и описывать его здесь не будем.

Любознательные студенты могут посмотреть ссылки [1, 2] (есть в интернете!).

Для решения уравнения Пуассона в Mathcad используется метод релаксаций (функция *relax)*

Функция **relax*(a, b, c, d, e, f, u, rjac)*** возвращает квадратную матрицу решения уравнения Пуассона. Здесь *a ,b ,c, d, e* - квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты уравнения (4); *f* - квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения (4) в каждой точке по области Ω , в которой ищется решение; *u* - квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границе области и начальное приближение для решения внутри области; *rjac*- число между 0 и 1, которое управляет сходимостью алгоритма.

При $f = 0$ получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (7)$$

Если для уравнения Лапласа в области Ω ввести сетку с равным шагом по осям *x* и *y*, то разностная схема (6) существенно упрощается

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0$$

$$i=1,2\ \ldots n\text{-}1,\quad j=1,\ 2\ \ldots m\text{-}1$$

$$u_{0,j}=\mu1(y_j),\quad u_{n,j}=\mu2(y_j),\quad j=0,\ 1\ \ldots m$$

$$u_{i,0}=\mu3(x_i),\quad u_{i,m}=\mu4(x_i),\quad i=0,\ 1\ \ldots n \qquad (8)$$

3.2 Задание

Найти стационарное распределение температуры в квадратной пластине со стороной 1, описываемое уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями вида

$u(0, y) = f_1(y)$, $(0 \le y \le 1)$, $u(1, y) = f_2(y)$, $(0 \le y \le 1)$,
$u(x, 0) = f_3(x)$, $(0 \le x \le 1)$, $u(x, 1) = f_4(x)$, $(0 \le x \le 1)$.

Решать задачу с помощью функции *relax*.

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по x (i = 0, 1, ... 10) и из 11 узлов по y (j = 0, 1, ... 10). Отобразить графически с помощью команды Graphics ⇒ Create Contour Plot стационарное распределение температуры в пластине.

Варианты заданий

№	$f_1(y)$	$f_2(y)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	$e^y - ey^2$	y	$1 - x^3$	x^2
2	y^2	$\cos y + (2 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + x$
3	$1 - y^2$	y	$\sin x + 1 - x^3(1 + \sin 1)$	x
4	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x
5	$e^y + y^2 (1 - e) - 1$	y	0	x
6	y^2	$\cos y + (3 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + 2x$
7	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x^2
8	$2ey - (1+2e)\, y^2\, 1$	$-y$	$1 - x^3$	$x - 2$
9	$-10y^2 - 8y + 6$	$-10y^2 - 30y + 22$	$9x^2 + 7x + 6$	$9x^2 - 15x - 12$
10	$-7y^2 - 5y + 3$	$-7y^2 - 21y + 13$	$6x^2 + 4x + 3$	$6x^2 - 12x - 9$
11	1	$y + 1$	1	$1 + x$
12	1	e^y	1	e^x
13	$-y^2 - 5y$	$4 + 5y - y^2$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x + 4$
14	$3 - 7y$	$7 - 6y$	$4x + 3$	$5x - 4$
15	0	$\sin y$	0	$\sin x$

Решение уравнения Лапласа (вариант 1).

Введем на пластине равномерную сетку с расстоянием между узлами

$h := 0.1$

$\tau := 0.1$

$i := 0..10$

$j := 0 .. 10$

$x_i := h \cdot i$

$y_j := \tau \cdot j$

$f1(y) := e^y - e \cdot y^2$

$f2(y) := y$

$f3(x) := -x^3 + 1$

$f4(x) := x^2$

$T_{j,0} := f1\left(y_j\right)$

$T_{j,10} := f2\left(y_j\right)$

$T_{0,i} := f3\left(x_i\right)$

$T_{10,i} := f4\left(x_i\right)$

$a_{j,i} := 1$

$b := a$

Новое значение температуры в узле $T_{i,j}$ можно найти с помощью схемы (6)

$c := a$

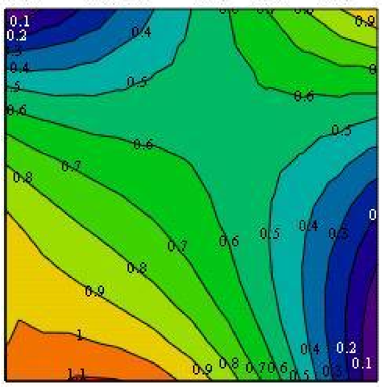
$d := a$

$e_{j,i} := -4$

$f_{j,i} := 0$

$T := relax(a,b,c,d,e,f,T,0.95)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.999 & 0.992 & 0.973 & 0.936 & 0.875 & 0.784 & 0.657 & 0.488 & 0.271 & 0 \\ 1.078 & 1.014 & 0.967 & 0.921 & 0.868 & 0.801 & 0.714 & 0.602 & 0.462 & 0.293 & 0.1 \\ 1.113 & 1.014 & 0.939 & 0.876 & 0.814 & 0.747 & 0.669 & 0.576 & 0.466 & 0.338 & 0.2 \\ 1.105 & 0.989 & 0.9 & 0.829 & 0.766 & 0.704 & 0.639 & 0.567 & 0.485 & 0.396 & 0.3 \\ 1.057 & 0.936 & 0.845 & 0.774 & 0.716 & 0.665 & 0.616 & 0.567 & 0.514 & 0.458 & 0.4 \\ 0.969 & 0.854 & 0.768 & 0.706 & 0.659 & 0.623 & 0.594 & 0.569 & 0.546 & 0.523 & 0.5 \\ 0.844 & 0.742 & 0.67 & 0.621 & 0.591 & 0.575 & 0.569 & 0.571 & 0.578 & 0.588 & 0.6 \\ 0.682 & 0.6 & 0.547 & 0.518 & 0.509 & 0.516 & 0.536 & 0.567 & 0.606 & 0.651 & 0.7 \\ 0.486 & 0.43 & 0.401 & 0.396 & 0.411 & 0.444 & 0.492 & 0.554 & 0.628 & 0.711 & 0.8 \\ 0.258 & 0.232 & 0.232 & 0.253 & 0.295 & 0.356 & 0.434 & 0.53 & 0.641 & 0.766 & 0.9 \\ 0 & 1 \times 10^{-2} & 4 \times 10^{-2} & 9 \times 10^{-2} & 0.16 & 0.25 & 0.36 & 0.49 & 0.64 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}$$



T

3.4. Содержание отчета

По предложенной лабораторной работе необходимо составить отчет, который должен содержать:

– титульный лист;
– цель работы;
– краткие сведения из теории, содержащие расчетные формулы;
– результаты расчетов и экспериментов в виде таблиц и графиков;
– выводы по проведенной работе.

Список литературы

1. Поршнев С.В. Методика использования пакета Mathcad для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений// Вычислительные методы и программирование. 2001. Т. 2. Раздел 3. С. 16.// Интернет журнал: http://num-meth.srcc.msu.su
2. Поршнев С.В. Методика использования пакета Mathcad для изучения итерационных методов решения краевых задач для двумерных эллиптических уравнений// Вычислительные методы и программирование. 2001. Т. 2. Раздел 3. С. 714.// Интернет журнал: http://num-meth.srcc.msu.su
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – СПб.: Изд-во "Лань" , 2009. – 688 с. 6-е изд., испр .ISBN: 978-5-8114-0572-5 http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=281
4. Ушаков В. М. Методы математической физики: Курс лекций / В. М. Ушаков, Ю. В. Гриняев, С. В. Тимченко, Л. Л. Миньков. - 1-е изд. - Томск : ТМЦ ДО, 2003. – 144 с.
5. Ильин А. М. Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: Учебное пособие для вузов / А. М. Ильин. - 1-е изд. - М. : Физматлит, 2009. - 192 с. – URL: http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2181
6. Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. - 4-е изд., испр. - М. : Лань, 2008. - 224 с. – URL: http://e.lanbook.com/books/ element.php?pl1_cid=25&pl1_id=140

Учебное пособие

Гейко Павел Пантелеевич

Решение дифференциальных уравнений эллиптического типа

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «Методы математической физики»

Усл. печ. л. ______Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40