

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СОЛИТОНЫ В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ С НАСЫЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Магазинников Антон Леонидович

Пространственные солитоны в керровской среде с насыщением нелинейности: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» / А.Л. Магазинников; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 21 с.

В методическом пособии рассматриваются общие понятия о солитонах и дана их классификация. Обсуждаются механизмы формирования солитонов, описана математическая модель нелинейной рефракции. Объясняется явление ограничения нелинейности в керровской среде. Даны рекомендации по постановке и проведению вычислительного эксперимента в диалоговом режиме.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» по дисциплине «Методы математической физики».

© Магазинников Антон Леонидович, 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____ С.М. Шандаров
« ___ » _____ 2012 г.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СОЛИТОНЫ В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ
С НАСЫЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Методические указания к лабораторной работе
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Разработчик
_____ А.Л. Магазинников
« ___ » _____ 2012 г

Содержание

1 Введение.....	3
2 Теоретическая часть.....	3
2.1 Понятие солитона. Классификация солитонов в оптических средах ..	3
2.2 Образование оптических солитонов.....	7
2.3 Явление ограничения нелинейности	13
2.4 Пояснение к математической модели.....	14
2.5 Контрольные вопросы.....	15
3 Экспериментальная часть.....	15
3.1 Методика работы с программой.....	15
3.2 Рекомендации по выполнению вычислительного эксперимента	16
3.3 Задание.....	16
3.4. Содержание отчета	17
Список литературы	18

1 Введение

В 1965 г. Н. Забуски и М. Крускал обнаружили, что решения уравнения Кортевега – де – Фриса, описывающего распространение уединённых волн на мелкой воде, обладают отличительными свойствами: они не испытывают дисперсионного уширения и могут упруго взаимодействовать при столкновениях друг с другом, а также проходить друг сквозь друга. Этим уединённым волнам дали название "солитон" (от англ. solitary – уединённый) [2].

Солитонные явления оказались универсальными и обнаружили в математике, гидромеханике, акустике, радиофизике, астрофизике, биологии, океанографии, оптической технике. Существуют различные типы солитонов, например солитоны в твердых кристаллических телах - так называемые дислокации, родственные им магнитные солитоны в ферромагнетиках (например, в железе), солитоноподобные нервные импульсы в живых организмах и многие другие.

В методическом пособии рассматриваются общие понятия о солитонах и дана их классификация. Обсуждаются механизмы формирования солитонов, описана математическая модель нелинейной рефракции. Объясняется явление ограничения нелинейности в керровской среде. Даны рекомендации по постановке и проведению вычислительного эксперимента в диалоговом режиме.

2 Теоретическая часть

2.1 Понятие солитона. Классификация солитонов в оптических средах

Джон Скотт Рассел открыл солитон именно на воде. Дело в том, что на воде могут возникать солитоны, названные групповыми. Их форма весьма сходна с группами волн, которые в реальности наблюдаются вместо бесконечной синусоидальной волны и перемещаются с групповой скоростью (рис. 1). Групповой солитон напоминает амплитудно-модулированные электромагнитные волны; его огибающая несинусоидальна, она описывается более сложной функцией - гиперболическим секансом.

Было показано, что условием возникновения солитона является нелинейность среды, в которой распространяется волна. Условие нелинейности оказалось необходимым, но недостаточным: от среды требовалось ещё что-то, чтобы в ней смогла родиться "уединённая" волна. И в результате исследований стало ясно - недостающим условием оказалось наличие дисперсии среды.

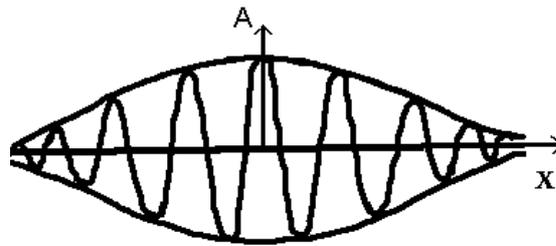


Рис. 1. Схематическое изображение группового солитона – группы (волнового пакета) из нескольких волн с одной и той же длиной, но с отличающимися амплитудами A . Группа распространяется как одно целое вдоль оси x , сохраняя форму огибающей [1]

Явление нелинейности любой реальной среды связано с зависимостью её свойств от амплитуды волны, в ней распространяющейся. Следствие этого – изменение формы самой волны. Например, на поверхности воды скорость волны не зависит от её длины (дисперсия слаба или отсутствует), но увеличивается с ростом амплитуды волны. Вследствие этого гребень волны движется по воде быстрее, чем её подошва. Поэтому фронт волны становится круче (возникают так называемые ударные волны) и она опрокидывается (рис. 2).

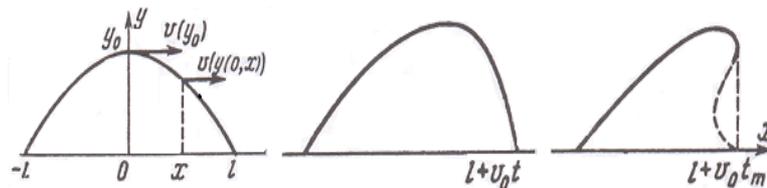


Рис. 2. Образование солитона в среде без дисперсии. Если среда обладает дисперсией длинные волны в ней побегут в ней быстрее коротких. В результате крутизна фронта, вызванная нелинейностью, выравнивается [1]

Напомним, что в оптических средах всегда присутствует дисперсия, т.е. зависимость скорости распространения фазы волны (фазовой скорости) от её частоты, или, что то же самое, от длины волны. Волновой пакет расплывается, поскольку из-за дисперсии одни из гармоник имеют низкую скорость и отстают от других гармоник с частотами, которым соответствует более высокая скорость.

Таким образом, эффекты нелинейности и дисперсии разрушают волну. Но иногда воздействия этих эффектов противоположны друг другу: нелинейность сжимает профиль волны, дисперсия стремится его «размыть». При определенных условиях возможна взаимная компенсация этих двух тенденций, в результате которой рождается солитон.

Итак, солитон – уединенная волна, распространяющаяся в нелинейной среде с дисперсией и потерями и характеризуемая постоянной скоростью распространения и неизменной формой. В отличие от обычных

волн, распространяющихся в подобной среде, солитон может существовать сколь угодно долго, испытывая влияние только со стороны потерь. Классическое описание солитонных систем основывается на одном из трёх дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Теоретически показано, что любое из этих уравнений может дать, среди прочих своих решений, решение в виде уединенной бегущей волны, т.е. солитона, либо многосолитонное решение.

В нелинейных оптических средах солитонные явления особенно многообразны. Здесь солитон (или солитонную волну) следует рассматривать как локализованный, самоорганизованный объект со стабильными свойствами. Оптические солитоны могут быть разделены на две большие группы (рис. 3): пространственные солитоны (они и составят предмет изучения в данной работе) и временные, т.е. оптические импульсы, сохраняющие свою форму в процессе распространения (о них шла речь выше в связи с открытием Рассела).

В свою очередь, пространственные солитоны делятся на два подкласса по типу нелинейности среды, в которой они формируются. Исторически первыми были предсказаны и получены для материалов, обладающих инверсионной симметрией, т.е. центром симметрии (кубические нелинейные среды, или материалы Керровского типа), где самые сильные нелинейные эффекты связаны с третьим порядком восприимчивости $\chi^{(3)}$. Фоторефрактивные кристаллы являются материалами с квадратичным нелинейным откликом, т.е. характеризуются восприимчивостью второго порядка $\chi^{(2)}$ [3, 4].

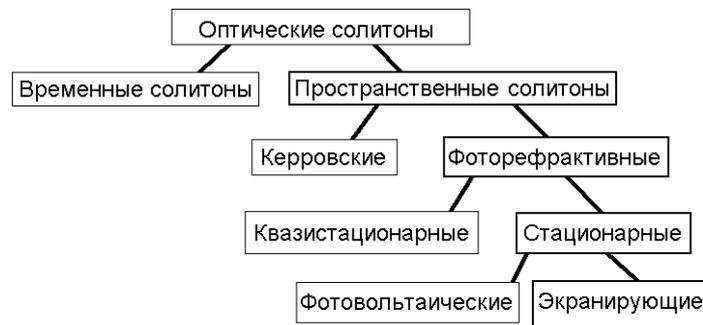


Рис. 3. Классификация оптических солитонов [3]

Были предсказаны и наблюдались три типа пространственных солитонов: квазистационарные, экранирующие, и фотовольтаические. Два последних типа являются стационарными, однако для получения экранирующего солитона необходимо приложение внешнего электрического поля, а фотовольтаические солитоны могут наблюдаться только в фоторефрактивных материалах, обладающих фотовольтаическим эффектом.

Математически формирование и распространение оптических солитонов различных типов описывается с помощью нелинейного

уравнения Шредингера (НУШ) (рис. 4), которое в общем случае имеет форму:

$$i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} + r \nabla^2 \mathbf{A} + \chi |\mathbf{A}|^2 \mathbf{A} = 0,$$

где все зависимые и независимые переменные и параметры безразмерны. Здесь: \mathbf{A} - это медленно меняющаяся комплексная огибающая электрического поля электромагнитной волны; действительные параметры r и χ определяют относительную величину и знак дисперсии/дифракции и нелинейности, соответственно, z - это координата в направлении распространения. Количество координат в операторе Лапласа определяет размерность (D) солитона в задаче.

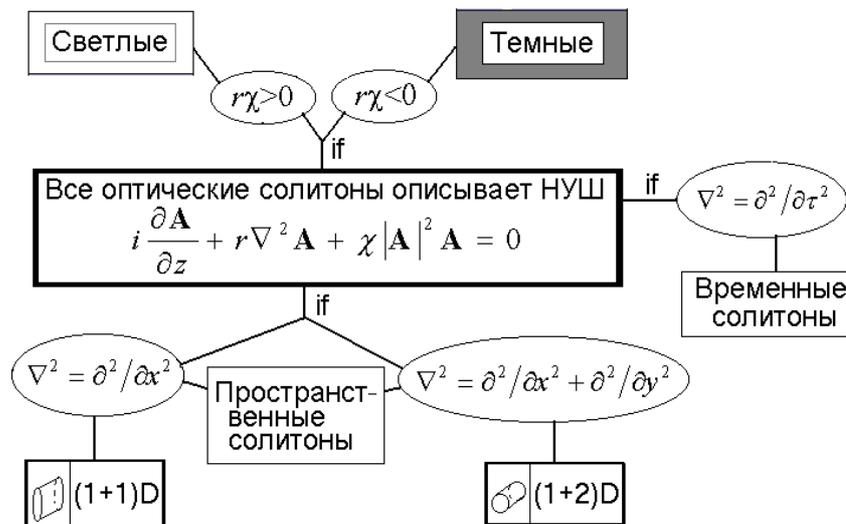


Рис. 4. Иллюстрация к классификации оптических солитонов, основанная на математическом подходе [3]

Для случая временных солитонов НУШ является одномерным, т.к. $\nabla^2 = \partial^2/\partial\tau^2$, где τ это нормированное время запаздывания. Для пространственных солитонов возможны как одно-, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$, луч фокусируется в одном (x) направлении, так и двумерный, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, фокусировка в двух перпендикулярных направлениях (x и y), случаи, где x и y – это нормированные пространственные координаты, перпендикулярные к направлению распространения z [3].

Если световая интенсивность солитона имеет максимум в центре и спадает до нуля в близлежащих областях, такой солитон называется *светлым* (*bright*) и он существует как локализованное решение НУШ при выполнении условия $r\chi > 0$. В противоположном случае ($r\chi < 0$), существующую форму локализованного солитона с минимальной интенсивностью в центре называют *темным* (*dark*) солитоном.

Конечно, приведенная классификация не охватывает весь спектр возможных типов солитонов, могут наблюдаться и многие другие типы. Например, вихревые, кольцевые, щелевые (*gap*) солитоны, резонаторные

(cavity), дискретные солитоны [3]. Кроме этого, в нелинейных средах возможно возникновение сверхузких (с шириной, меньшей длины волны света) пространственных солитонов [5].

Оптические солитоны в последнее время привлекли внимание физиков возможностью их использования в весьма перспективных линиях оптической связи. С помощью солитонов удаётся достичь высокой скорости передачи информации на достаточно большое расстояние (в 1991 г. Наказава передавал информацию на расстояние 10^6 км со скоростью 10 Гбит/сек). Механизмы формирования и условия существования оптических пространственных солитонов могут использоваться при разработке устройств записи и обработки информации, а также в устройствах прецизионной обработки материалов [2, 5].

Одним из применений солитонов может являться солитонный лазер – источник стабильных и перестраиваемых по длительности импульсов с формой огибающих в виде гиперболического секанса. Было показано, что солитоны могут использоваться в оптических устройствах цифровой обработки информации (например на основе интерферометров Саньяка и Маха - Цендера). [2]

2.2 Образование оптических солитонов

Образование временного солитона можно уяснить на примере одного из нелинейно-оптических эффектов - так называемой самоиндуцированной прозрачности (СИП) [1, 2]. Этот эффект заключается в том, что среда, поглощающая свет небольшой интенсивности, то есть непрозрачная, внезапно становится прозрачной при прохождении сквозь неё мощного светового импульса. Физическое описание СИП основывается на представлении резонансной среды ансамблем двухуровневых атомов, эволюция которых происходит только за счёт вынужденных процессов (поглощения и испускания фотонов). При этом $t_p \ll T_1, T_2$, где t_p – длительность светового импульса; T_1 – время жизни возбуждённого состояния; T_2 - времени релаксации поляризации, характеризующее скорость затухания дипольного момента атомной системы. Если на атомную систему воздействовать импульсом когерентного электромагнитного излучения, длительность которого много меньше времён релаксации, то вся система ведёт себя как один атом; все атомы поглощают и испускают фотоны синфазно. По прошествию времени, порядка T_2 эта синфазность нарушится. Но к тому времени и действие импульса прекратится.

Световой квант, взаимодействуя с атомом, отдает ему энергию и переводит на более высокий энергетический уровень, то есть в возбужденное состояние. Фотон при этом исчезает - среда поглощает свет. После того как все атомы среды возбуждаются, поглощение световой энергии прекращается - среда становится прозрачной. Но такое состояние

не может длиться долго: фотоны, летящие следом, заставляют атомы возвращаться в исходное состояние, испуская кванты той же частоты. Именно это и происходит, когда через такую среду направляется короткий световой импульс большой мощности соответствующей частоты. Передний фронт импульса перебрасывает атомы на верхний уровень, частично при этом поглощаясь и становясь слабее. Максимум импульса поглощается уже меньше, а задний фронт импульса стимулирует обратный переход с возбужденного уровня на основной.

Атом излучает фотон, его энергия возвращается импульсу, который и проходит через среду. При этом форма импульса оказывается соответствующей групповому солитону. С. Мак-Колл и Э. Хан при изучении распространения ультракоротких импульсов при резонансном поглощении в рубиновом стержне при температуре, менее 40 К показали, что когда мощность импульса превышала некоторое критическое значение, происходит распространение импульса (солитона) с аномально низкими потерями энергии [2].

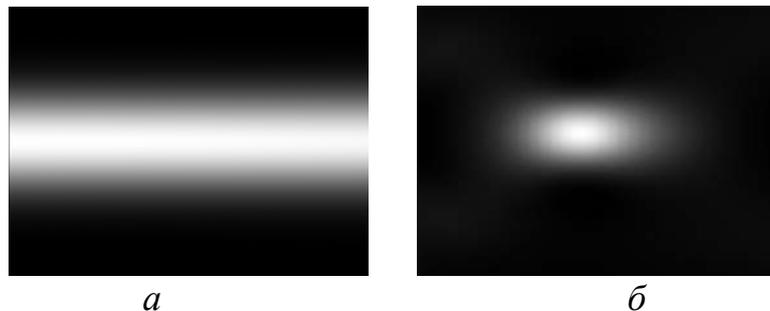


Рис. 5. Форма пространственного солитона вдоль оси z в случае с гауссовым профилем (a) и с плоским профилем (b) интенсивности входного пучка. На рисунке представлены данные моделирования

Однако механизм СИП не единственный, при котором могут образовываться солитоны. Образование *пространственного* солитона возможно при явлении самофокусировки света. Для пространственного солитона, формирующееся в среде распределение возмущений оптических свойств обуславливается градиентом интенсивности светового поля – см. рис. 5. Самофокусировка приводит к эффективной перекачке энергии между составляющими пространственного спектра [6].

Рассмотрим искривление лучей в лазерном пучке из-за поперечного градиента диэлектрической проницаемости среды, обусловленного зависимостью её свойства от интенсивности лазерного излучения. Характер нелинейной рефракции зависит от профиля интенсивности лазерного пучка и его мощности. В случае кубичной по полю нелинейной поляризации среды диэлектрическая проницаемость представляется рядом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 E^2 + \varepsilon_4 E^4 + \dots, \quad (1)$$

где E – напряженность поля лазерного пучка, причем слагаемыми, содержащими E в степени больше двух, можно пренебречь. Количественной мерой нелинейности среды, в которой возникает нелинейная рефракция, может служить параметр:

$$R = \frac{\varepsilon_2 E_0^2}{2\varepsilon_0}, \quad (2)$$

где E_0 – начальная напряженность поля.

Для того, чтобы получить относительно простые аналитические выражения, при описании поведения светового пучка ограничимся приближением нелинейной *геометрической* оптики. Параболический начальный профиль интенсивности лазерного пучка описывается функцией:

$$I_n = E_0^2 \cdot [1 - 2 \cdot r^2 / a^2 \cdot f(z)] / f^{1+m}(z), \quad (3)$$

где r – поперечная, z – продольная координаты, a – начальная ширина пучка, $f(z)$ – безразмерная ширина пучка, связанная с радиусом кривизны волнового фронта пучка $\rho(z)$ соотношением

$$f(z) = \exp\left[\int_0^z dz / \rho(z)\right]. \quad (4)$$

Здесь двумерному «щелевому» пучку соответствует $m=0$, $r=x$, а трехмерному осесимметричному пучку – $m=1$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Колоколообразный начальный профиль интенсивности двумерного пучка ($m = 0$) задается выражением

$$I_k\left(\frac{x}{a}\right) = E_0^2 \cdot ch^2\left(\frac{x}{a}\right). \quad (5)$$

В приближении геометрической оптики для среды без потерь излучения и дисперсии явление нелинейной рефракции отражает система взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных. Одно из уравнений описывает изменение угла наклона $\theta = r/\rho(z)$ элементарного луча к оси пучка z . Причиной изменения служит градиент показателя преломления среды, созданный профилем интенсивности пучка. Рассмотрим ход лучей в нелинейной среде для лазерного пучка с параболическим профилем интенсивности (3) и плоским начальным волновым фронтом:

$$\rho(0) = \infty; \quad f(0) = 1. \quad (6)$$

Используя выражение (3), можно получить, что для трёхмерного осесимметричного пучка ($m = 1$) его безразмерная ширина меняется по мере распространения по закону [7]

$$f^2(z) = 1 - 4 \cdot (\text{sgn } \varepsilon_2) \cdot R \cdot z^2 / a^2, \quad (7)$$

где функция sgn отображает отрицательные числа в -1 , положительные – в $+1$, нуль – в нуль.

Согласно (7), в линейной среде ($\varepsilon_2 = 0$) ширина пучка постоянна, а лучи являются прямыми линиями. В нелинейной среде ($\varepsilon_2 \neq 0$) из-за самовоздействия лазерного пучка траектории лучей искривляются, и кривизна их зависит от степени нелинейности среды R и размера пучка a . В среде с $\varepsilon_2 > 0$ ширина пучка уменьшается, лучи отклоняются к оси пучка z , где интенсивность I больше. Это явление называется самофокусировкой пучка. Нетрудно видеть, что на расстоянии $z = a/2\sqrt{R}$ от входа лазерного пучка в среду его ширина обращается в нуль (см. рис. 6 а).

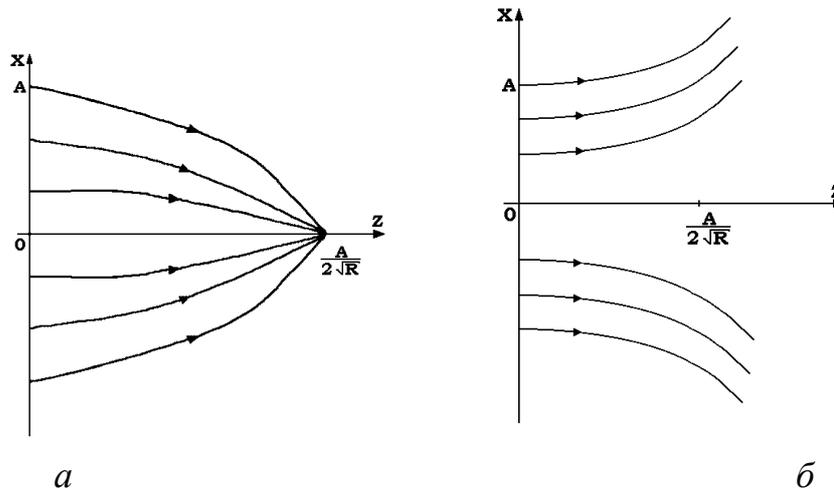


Рис. 6. Безабберационное самовоздействие: а - самофокусировка ($\varepsilon_2 > 0$), б - самодифокусировка ($\varepsilon_2 < 0$)

Другими словами, трехмерный осесимметричный пучок с параболическим профилем интенсивности (3) создает в нелинейной среде с $\varepsilon_2 > 0$ собирающую линзу. Самофокусировка носит лавинообразный характер, поэтому кривизна траекторий лучей возрастает с приближением к нелинейному фокусу.

В среде с $\varepsilon_2 < 0$ ширина пучка увеличивается, лучи изгибаются, отклоняясь от оси пучка, т.е. происходит самодифокусировка. Концентрация излучения при этом снижается, и лучи становятся всё более прямыми (см. рис. 6 б). На больших длинах $z \gg a/2\sqrt{R}$ ширина пучка, согласно (7), растет пропорционально расстоянию. Следовательно, при $z \gg a/2\sqrt{R}$ нелинейность среды практически не влияет на ход лучей, поскольку интенсивность расфокусированного пучка становится низкой.

Для ширины двумерного «щелевого» пучка, когда $m = 0$, получаются неявные выражения. Ширина пучка при самофокусировке ($\varepsilon_2 > 0$) находится из уравнения:

$$f(z) = \cos^2[\sqrt{f(z) \cdot (1 - f(z))} - 2 \cdot \sqrt{R} \cdot \frac{z}{a}]. \quad (8)$$

При самодефокусировке ($\varepsilon_2 < 0$) ширина двумерного пучка удовлетворяет уравнению:

$$f(z) = ch^2[\sqrt{f(z) \cdot (f(z) - 1)} - 2 \cdot \sqrt{R} \cdot \frac{z}{a}]. \quad (9)$$

Таким образом, для пучков с параболическим профилем интенсивности (3) при распространении в кубичной среде свойственно безабберационное самовоздействие. Это значит, что в ходе распространения форма поперечного профиля пучка сохраняется, изменяется лишь ширина пучка. Математическими моделями нелинейной рефракции в этих случаях служат: выражение (7), уравнения (8) и (9).

Напротив, при распространении в нелинейной среде пучков с профилем интенсивности, отличающимся от параболического, возникают aberrации, вследствие чего профиль пучка искажается. Чтобы исследовать эти нелинейные aberrации, целесообразно ограничиться случаем двумерного пучка с колоколообразным профилем (5). Вводя нормированные координаты $L = z/a$ и $T = r/a$, его можно записать так:

$$\theta = -2 \cdot R \cdot L \cdot I \cdot \text{th}(T - \theta \cdot L), \quad (10)$$

$$I = (E_0^2 + R \cdot L^2 \cdot I^2) \text{ch}^{-2}(T - \theta \cdot L). \quad (11)$$

Полагая, что E_0^2 является единичной интенсивностью, исключая I из уравнения (11) и заменяя гиперболические функции показательными, нетрудно перейти к уравнению относительно θ :

$$\theta = -\frac{2 \cdot R \cdot z \cdot (e^y - e^{-y})}{(e^y + e^{-y})^3} - \frac{2 \cdot \theta^2 \cdot z}{e^y + e^{-y}}, \quad (12)$$

где $y = T - \theta \cdot L$, а затем получить выражение для нормированной интенсивности:

$$I = -\frac{\theta}{2 \cdot R \cdot z} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}. \quad (13)$$

Используя соотношения (12) и (13), можно на плоскости (x, z) нанести поле лучевых векторов под углом θ к оси z . Касательные в каждой точке к этим векторам будут траекториями лучей – аналогично рис. 6 а и б б. Математические модели в приближении геометрической оптики (7) – (9), (12) и (13), отражающие нелинейную рефракцию при различных условиях, не учитывают линейного и нелинейного поглощения излучения, дисперсии и дифракции, а также нелинейной поляризации среды 5-го порядка (по полю) и выше. Поэтому корректное рассмотрение ограничено высокопрозрачной слабонелинейной средой и одночастотным лазерным пучком, начальная ширина A которого достаточно велика ($\pi \cdot a \gg \lambda/2 \cdot \sqrt{R}$). Для реальных пучков наиболее типично aberrационное самовоздействие, причем aberrации, как правило, снижают силу нелинейной рефракции на расстояниях $z \geq a/2\sqrt{R}$.

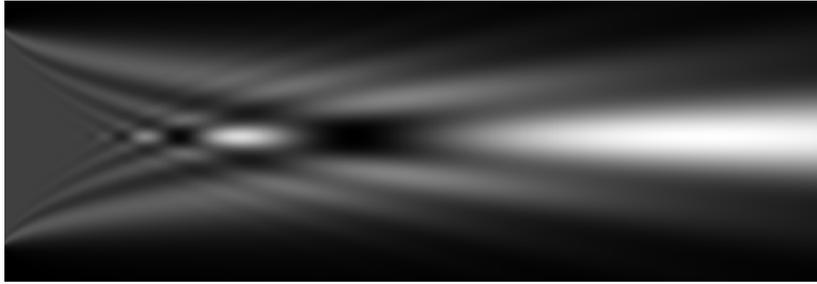


Рис. 7. Дифракционное распыление пучка с плоским профилем интенсивности на входе

Для формирования пространственного солитона конкурирующими процессами являются: *дифракционное распыление* пучка из-за конечности поперечного размера самого пучка и самофокусировка пучка в пространстве благодаря нелинейности среды.

Дифракционное распыление обусловлено тем, что составляющие пучок пространственные гармоники $\exp[i(k_x x + k_z z)]$ распространяются с поперечными компонентами $+k_x$ волнового вектора, направленными *от* оси пучка. Напротив, самофокусировка светового пучка проявляется в том, что формируются поперечные компоненты $-k_x$ волнового вектора, направленные *к* оси пучка.

Таким образом, возможны несколько эффектов, связанных с изменением поперечного размера светового пучка:

во-первых, при некоторых условиях в экспериментах наблюдаются колебания размера пучка. Они вызваны тем, что по мере сужения светового пучка угол дифракционного распыления, обратно пропорциональный размеру пучка, увеличивается. Вследствие этого пространственная плотность оптического поля на оси пучка снижается, т.е. фокусирующее действие «нелинейной» линзы падает. Поэтому размер пучка начинает возрастать. Но тогда снижается величина угла дифракционного распыления, т.е. дефокусирующее действие дифракции. Поэтому начинает увеличиваться плотность светового поля на оси пучка, в силу чего его размер снова уменьшается;

во-вторых, возникновение заметного поперечного градиента показателя преломления, т.е. самофокусировки, приводит к появлению оптических волн, распространяющимися под различными углами к оси пучка, т.е. с проекциями волнового вектора $-k_x$. Вследствие этого происходит интерференция их с волной, распространяющейся строго вдоль оси пучка (у которой $k_x = 0$), а также друг с другом. Поэтому по ходу распространения пучка возникают интерференционные полосы, ориентированные преимущественно вдоль оси пучка. В свою очередь, на поперечном профиле пучка формируются узкие максимумы и минимумы (с максимумом на оси пучка).

Однако, зачастую в нелинейных средах при распространении световых пучков возможно нарушение самофокусировки или её разрушение. Может возникнуть распадная неустойчивость, когда

сфокусированный пучок распадается на отдельные пучки, испытывающие большее дифракционное расплывание. Другим фактором, ограничивающим нелинейную самофокусировку излучения, является отклонение нелинейности среды от керровской (например, насыщение нелинейности) или разрушение среды из-за светового пробоя вследствие высокой мощности светового пучка.

2.3 Явление ограничения нелинейности

Как было сказано выше, теория, основанная на параксиальном приближении, предсказывает предельную неустойчивость самофокусировки (самозахвата) в среде с керровской нелинейностью. Существуют различные механизмы самозахватывающей стабилизации, которые отвечают за формирование устойчивых поперечно двумерных пространственных солитонов. Одним из таких эффектов является насыщение (ограничение) нелинейности. Численные эксперименты [5], показывают, что в керровской среде с ограничением нелинейности возможно формирование сверхузких солитонов – "оптических игл", "лазерных пуль" и др.

Будем рассматривать распространение в керровской среде монохроматического электромагнитного излучения. Мы предполагаем, что условия фазового синхронизма не удовлетворяются для третьей и более высоких гармоник. Опишем ограничение нелинейности оптического излучения следующим выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_2 \cdot E^2}{1 + E^2 / I_s}, \quad (14)$$

где ε_0 – линейная диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_2 > 0$ - возмущенное внешним оптическим полем значение диэлектрической проницаемости; I_s – интенсивность насыщения.

С физической точки зрения, механизм ограничения нелинейности связан с тем, что воздействующее на среду оптическое излучение стремится изменить конфигурацию и пространственную ориентацию электронных оболочек атомов материальной среды, изменяя при этом показатель преломления её, в соответствии с законом Керра. При этом за счёт свойств упругости электронные оболочки препятствуют значительному изменению своей конфигурации и ориентации. Нелинейность отклика среды на входное воздействие уменьшается, т.е. с ростом интенсивности входного излучения нелинейность "сама себя" ограничивает. Величина интенсивности входного электрического поля света, при котором первоначальный (ненасыщенный) параметр, описывающий нелинейность, уменьшается вдвое, характеризует ограничение нелинейности и называется интенсивностью насыщения нелинейности I_s среды.

Напомним, что по такому же закону, как и (14), происходит насыщение усиления в лазерной активной среде, а также насыщение поглощения в пассивной среде – так называемом насыщающемся поглотителе (явление просветления оптической среды).

2.4 Пояснение к математической модели

Явление нелинейной рефракции рассматривалось выше в приближении *геометрической* оптики. Для проведения моделирования этого явления перейдём к более строгому – *волновому* – приближению, оперирующему, в частности понятием волнового вектора (числа) k . В таком случае пространственное изменение светового поля описывает нелинейное волновое уравнение 1-го порядка относительно комплексной амплитуды A пучка:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A = -\frac{ik}{2\varepsilon_0} \varepsilon_{nl} \cdot A - \delta A, \quad (15)$$

где $\varepsilon_{nl} = 2 \frac{n_0 \cdot n_2 \cdot |A|^2}{1 + |A|^2 / I_s}$ – нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости среды, для которой показатель преломления имеет вид $n = n_0 + \frac{n_2 \cdot |A|^2}{1 + |A|^2 / I_s}$. Здесь k – волновое число в среде ($k = k_0 n_0$), k_0 – волновое число для вакуума. В (15) z – координата, вдоль которой распространяется пучок, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа по поперечным координатам, δ – коэффициент линейного поглощения.

Принимая во внимание осевую симметрию лазерного пучка, удобно перейти к полярной системе координат. Тогда в приближении оптической однородности среды в поперечной плоскости оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Нетрудно видеть, что (15) есть пространственный аналог солитонного нелинейного уравнения Шрёдингера. Уравнение (15) записано в приближении квазиоптики. Оно выполняется для не слишком узких и достаточно когерентных световых пучков. Для них справедливо условие: $r \gg \lambda$, $r_k \gg \lambda$ (где r_k – радиус когерентности пучка). Рассмотренная математическая модель (15) оптического солитона учитывает потери излучения.

2.5 Контрольные вопросы

1. Что такое солитон?
2. Каковы физические факторы, необходимые для возникновения солитонов?
3. Поясните явление самоиндуцированной прозрачности, как механизм формирования временного солитона.
4. Поясните физические процессы, лежащие в основе самофокусировки? Что происходит со световым лучом при этом?
5. Какую аналогию можно провести между физическими описаниями и моделями солитона и пространственного солитона?
6. От каких физических параметров зависит длина самофокусировки?
7. От каких физических параметров зависит размер пучка в поперечной плоскости при формировании пространственного солитона?
8. В чём состоит явление насыщения нелинейности? Поясните этот механизм графически.
9. Какое уравнение описывает динамику светового поля, приводящего к формированию пространственного солитона?
10. Перечислите приближения, в которых справедливо это уравнение.
11. По каким признакам можно судить, что полученные в ходе эксперимента структуры действительно являются солитонами?
12. Чем отличаются механизмы формирования пространственного солитона в случаях световых пучков с гауссовым и с плоским профилем?
13. Какие применения солитонов вам известны?

3 Экспериментальная часть

3.1 Методика работы с программой

Программа «Soliton.exe» моделирует физический процесс эволюции лазерного пучка в среде с керровской нелинейностью (уравнение (15)). При работе с ней контрольная задача решается при наборе параметров, указанном в п. 1 задания.

Ввод начальных условий осуществляется в файле «Input.dat». После чего запускается «Soliton.exe». По окончании счета на экран выводятся профили пучка на входе и выходе среды. Под каждым из них даются численные значения амплитуды, отнесенной к максимальной интенсивности входного пучка, и полуширины пучка (для гауссова пучка – по уровню 0.5 от максимума интенсивности). Интенсивность входного пучка всегда соответствует 1 кВт/см^2 . Нажатие кнопки «Enter» позволяет наблюдать эволюцию пучка.

3.2 Рекомендации по выполнению вычислительного эксперимента

Цель вычислительного эксперимента – выяснить, как параметры материальной среды и излучения влияют на распространение и форму солитонов.

При работе с программой «Soliton.exe» рекомендуется использовать следующие значения параметров:

- нелинейная часть показателя преломления $n_2=1e-9 - 1e-6 \text{ см}^2/\text{кВт}$;
- радиус входного пучка $R=0.05 - 0.25 \text{ см}$ (для гауссова пучка – по уровню 0.5);
- расстояние до точки наблюдения $L=0.1 - 24 \text{ м}$;
- длина волны излучения $\lambda=0.4 - 0.78 \text{ мкм}$.

3.3 Задание

1. Пронаблюдать характер эволюции световых пучков с плоским и гауссовым профилем интенсивности в линейной среде ($n_0=1.5$, $n_2=0$), когда радиус пучка $r_0=0.1 \text{ см}$, длина волны $\lambda=0.632 \text{ мкм}$, расстояние до точки наблюдения z , превышающей в 1.5–2 раза дифракционную длину $L_{\text{дифр}}=n_0 r_0^2/\lambda$ (для пучка с плоским профилем интенсивности [8, с. 390]), $L_{\text{дифр}}=2\pi n_0 r_0^2/\lambda$ (для пучка с гауссовым профилем интенсивности, где r_0 измеряется по уровню $1/e$ от максимальной интенсивности [8, с. 390]). Затем повторить это задание для расстояние до точки наблюдения $z=L_{\text{дифр}}$. Записать полученные данные.

2. В случаях пучков с плоским и гауссовым профилем интенсивности для выбранных значений радиуса пучка r_0 (0.05 – 0.25 см), длины волны λ , соответствующей видимому диапазону волн (400 – 780 нм), и расстояния до точки наблюдения, равном дифракционной длине $L_{\text{дифр}}$, построить зависимость диаметра пучка (по уровню интенсивности 0,5) от произведения $n_2 I_0$. Объяснить полученные закономерности формирования пространственного солитона.

Примечание. Процесс увеличения $n_2 I_0$ ограничить значением, при котором начинается деформация поперечного профиля пучка (ведущая к появлению провала в его центре).

3. В случаях пучков с плоским и гауссовым профилем для дальней зоны дифракции $z \geq L_{\text{дифр}}$ определить наименьшее расстояние, начиная с которого формируется пространственный солитон, выразив его в единицах $L_{\text{дифр}}$. В качестве критерия этого принять центр самого яркого из интерференционных максимумов [8, с. 368]. Построить зависимости этого наименьшего расстояния от произведения $n_2 I_0$, а также от радиуса пучка r_0 . Объяснить полученные закономерности формирования пространственного солитона.

Примечание. Эволюция пучка программно представлена так, что наибольшему значению интенсивности соответствует на экране самое яркое (белое) отображение. Участки с меньшей интенсивностью пропорционально темнее.

4. Выявить влияние ограничения нелинейности на характер эволюции световых пучков с плоским и гауссовым профилем интенсивности в нелинейной среде. Варьировать степень ограничения нелинейности, варьируя значения интенсивности насыщения I_s от 0.1 до 10 (изучив не менее 5 случаев), где I_s выражается в единицах интенсивности входного пучка I_0 . Действуя в рамках значений других параметров, указанных в п. 2, построить зависимость полуширины пучка от значения I_s .

5. Выявить влияние ограничения нелинейности на характер явлений, связанных с распространением в керровской среде пучков с плоским и гауссовым профилем для дальней зоны дифракции $z \geq L_{дифр}$. Варьировать степень ограничения нелинейности, варьируя значения интенсивности насыщения I_s : от 0.1 до 10. Действуя в рамках значений других параметров, указанных в п. 3, построить зависимость наименьшего расстояния, начиная с которого формируется пространственный солитон, от значения I_s .

6. Для набора параметров модели, указанных ниже в таблице, провести серию вычислительных экспериментов и объяснить влияние нелинейности и ограничения нелинейности на диаметр пучков с плоским и гауссовым профилем. Рекомендуется использовать следующий набор параметров: $n_0=1,5$; $\lambda=0,632$ мкм; $R=0,1$ см; $z=L_{дифр}$.

$I_{нас}/I_0=0,5$						
Параметр n_2 , см ² /кВт	$1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$
Диаметр пучка, d						

Повторить эксперимент при значениях $I_{нас}/I_0=1$ и $I_{нас}/I_0=5$.

3.4. Содержание отчета

По предложенной лабораторной работе необходимо составить отчет, который должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- краткие сведения из теории;
- результаты расчетов и экспериментов в виде таблиц и графиков;
- выводы по проведенной работе.

Список литературы

1. Голубев А. Солитоны // Наука и жизнь. 2001. - №. 11. - С. 24–28.
2. Маймистов А.И. Оптические солитоны // Соросовский образовательный журнал. 1999. - № 11. - С. 97–102.
3. Письменная Е.А. Солитоноподобные структуры в фоторефрактивном кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$: Дипломная работа. - Минск, 2003. - 58 с.
4. Фролова М.Н., Шандаров С.М., Бородин М.В. Самовоздействие светового пучка в фоторефрактивном кристалле с приложенным знакопеременным электрическим полем при синхронной модуляции интенсивности // Квантовая электроника, 2002. Т. 32. № 1. С. 45-48.
5. Rosanov N.N., Semeonov V.E., Vyssotina N.V. "Optical needles" in media with saturating self-focusing nonlinearities // J. of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2001. - Vol. 3. - P. 96–99.
6. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. - М.: Наука, 1989. - С. 483–493.
7. Распространение солитонов в оптических и радиофизических системах: Методические указания / Сост.: А.В. Лячин, А.Л. Магазинников, Б.Н. Пойзнер. - Томск, 2003. - 31 с.
8. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика: Учебник. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. - 656 с.

Учебное пособие

Магазинников Антон Леонидович
Пространственные солитоны в керровской среде с насыщением
нелинейности

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «Методы математической физики»

Усл. печ. л. _____ Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40