Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника»

2012

Гейко Павел Пантелеевич

Методы математической физики: методические указания к практическим занятиям для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» /П.П. Гейко; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 31 с.

В пособии рассматриваются основные понятия и определения, связанные с уравнениями с частными производными и вопросы приведения к каноническому виду линейных уравнений второго порядка. Излагаются вопросы, относящиеся к аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических) и численным методам их решений.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм, обучающихся по направлению «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» по дисциплине «Методы математической физики».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____________С.М. Шандаров
«___» _____________ 2012 г.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и
«Электроника и микроэлектроника»

Разработчик
_________ П.П. Гейко
«____»____________2012 г

2012

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математическая физика – это математический аппарат изучения физических полей – одного из центральных объектов современной физики и инженерии. Только привлекая рассмотрение физических полей и соответствующий математический аппарат, удается наиболее полно описать физические явления, а в целом ряде случаев без такого привлечения даже не удается сформулировать первоначальные понятия и простейшие утверждения. Поэтому знание тех или иных разделов математической физики оказывается необходимым каждому современному инженеру.

Термин "математическая физика" имеет и более узкий, "классический" смысл. Он относится к уравнениям в частных производных, являющимся теоретическим аппаратом гидромеханики, теории теплопроводности и диффузии, теории упругости, "классической" части теории электромагнитного поля. Поля, рассматриваемые в этих классических разделах, оказывается возможным трактовать как механические системы с бесконечным числом степеней свободы, что и обусловило общность соответствующего математического аппарата.

1. Классификация линейных уравнений второго порядка

Будем рассматривать уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных, т.е. имеющие вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование (для этого достаточно потребовать, чтобы функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля), можно получить уравнение, эквивалентное исходному. Нас будет интересовать вопрос: как выбрать новые переменные ξ и η, чтобы относительно них уравнение имело наиболее простой (канонический) вид.

Перейдя к новым переменным, будем иметь

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
&u_{xx} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_x + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi (\xi_x)_\xi \xi_x +\\
&+ u_{\eta\xi}\eta_x \xi_x + u_\eta (\eta_x)_\xi \xi_x + u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_\xi (\xi_x)_\eta \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta (\eta_x)_\eta \eta_x =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\left[(\xi_x)_\xi \xi_x + (\xi_x)_\eta \eta_x\right] + u_\eta\left[(\eta_x)_\xi \xi_x + (\eta_x)_\eta \eta_x\right] =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

После подстановки полученных производных в (1.1) получим уравнение

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$
$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \tag{1.5}$$
$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

то F_1 имеет вид

$$F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta.$$

Таким образом, уравнение в этом случае снова получается линейным.

Попытаемся выбрать переменную $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ в уравнении (6.4) был равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $\xi = \varphi(x, y)$ было решением уравнения

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \tag{1.6}$$

Уравнение (6.6) можно записать в виде произведения

$$\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right)\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right).$$

Таким образом, решение уравнения (1.6) свелось к решению двух линейных однородных уравнений первого порядка

$$a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y = 0. \tag{1.7}$$

для решения уравнений (1.7) надо найти общий интеграл каждого из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.8}$$

На вид решений уравнений (1.8) существенно влияет знак подкоренного выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. По знаку этого выражения определяется тип уравнения (1.1).

Будем называть уравнение (1.1) в точке M

<u>гиперболического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

<u>эллиптического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

<u>параболического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Можно убедиться в справедливости равенства

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2,$$

из которого следует, что тип уравнения не меняется при преобразовании переменных.

Следует отметить также, что тип уравнения зависит от точки M и в разных точках может быть разным.

<u>Пример 1.1.</u> Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{1.9}$$

здесь $a_{11} = 1, a_{12} = 0$ и $a_{22} = x$, следовательно,

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x.$$

Тем самым при $x < 0$ уравнение (1.9) гиперболического типа, при $x = 0$ – параболического типа, а при $x > 0$ – эллиптического типа.

2. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (2.1)$$

будем называть характеристическим для уравнения (6.1), а его интегралы – характеристиками. Уравнение (2.1) распадается на два уравнения (1.8) и играет основную роль в задаче приведения к каноническому виду уравнения (1.1). Затем, что для уравнения гиперболического типа характеристики действительные и различные, для уравнений эллиптического типа – комплексные и различные, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительные и совпадают.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (1.8) действительные и различные. Общие интегралы их $\varphi(x,y) = C$ и $\psi(x,y) = C$ определяют семейства характеристик.

Положим

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

тогда коэффициенты $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ (1.5) обратятся в нуль и уравнение (1.4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ приведется к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_1}{2\bar{a}_{12}}$. Это – так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуется другой канонической формой. Положим

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β - новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \qquad u_\eta = (u_\alpha - u_\beta), \qquad u_{\xi\eta} = (u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

и уравнение (2.2) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1,$$

где $\Phi_1 = 4\Phi$.

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$ и уравнение (1.8) дает один общий интеграл $\varphi(x,y) = C.$ Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ - любая функция, допускающая вместе с $\varphi(x,y)$ обратное преобразование переменных. Тогда

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{12}\xi_y^2 = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi\right)\left(\eta_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y\right) = 0,$$

т.к. $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. После деления уравнения 6.4) на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_{11}}{\bar{a}_{22}}.$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0$ и правые части уравнения (1.8) комплексно сопряженные, поэтому общие интегралы этих уравнений будут также комплексно сопряженными

$$\varphi(x, y) = C, \qquad \overline{\varphi}(x, y) = C.$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными и функциями, введем новые, уже вещественные, переменные α и β

$$\alpha = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \qquad \beta = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i},$$

т.е. $\varphi = \alpha + i\beta$, $\overline{\varphi} = \alpha - i\beta$. Таким образом,

$$0 = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) +$$
$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y).$$

Отсюда следует (см. (6.5)), что $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22}$ и $\overline{a}_{12} = 0$.

Уравнение (1.4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\xi, u_\beta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_1}{\overline{a}_{11}}$.

Итак, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (т.е. от типа уравнения) получаем следующие канонические формы уравнения (1.1):

1. Гиперболический тип: $u_{\xi\eta} = \Phi$ или $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi$.
2. Параболический тип: $u_{\eta\eta} = \Phi$.
3. Эллиптический тип: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$.

3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_1u_y + cu + f(x, y) = 0. \tag{3.1}$$

Решая уравнение (1.8) получаем характеристики, которые будут прямыми линиями

$$y = \lambda_1 x + C_1, \qquad y = \lambda_2 + C_2,$$

где λ_1 и λ_2 корни уравнения (его удобно в данном случае тоже называть характеристическим)

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. \tag{3.2}$$

Теперь с помощью соответствующего преобразования переменных, а именно:

1. Если λ_1 и λ_2 вещественные и различные (гиперболический тип)

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x \quad \text{или} \quad \xi = y - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x, \quad \eta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}x;$$

2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (параболический тип)

$$\xi = y - \lambda x, \quad \eta = x;$$

3. Если $\lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (b \neq 0)$ (эллиптический тип)

$$\xi = y - ax, \quad \eta = bx;$$

уравнение (1.1) приводится к одному из следующих видов:

1. $u_{\xi\eta} + \Phi = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0$;

2. $u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

3. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

здесь $\Phi = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + cu + f.$

Пример 3.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \tag{3.3}$$

Напишем характеристическое уравнение (3.2)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Уравнение - гиперболического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - 2x \text{ или } \xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = x.$$

После замены переменных уравнение имеет вид $u_{\xi\eta} = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0.$

Заметим, что решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ рассматривалось в примере 1.3. Тем самым мы можем выписать общее решение уравнения (3.3)

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x).$$

Пример 3.2. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{3.4}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, уравнение (3.4) параболического типа. Делаем замену $\xi = y - x, \eta = x$. Имеем

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta - u_\xi,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_x = -(u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) + (u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta}) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (3.4) и приводя подобные члены, будем иметь

$$u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

Заметим, что мы получили уравнение, которое можно рассматривать и как обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от параметра ξ. Решая его, получаем

$$u = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta} = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-x}.$$

Пример 3.3. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{3.5}$$

Для корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

имеем $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Уравнение – эллиптического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = x + y, \quad \eta = x.$$

Подставляя выражения

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi},$$

в уравнение (3.5), получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta = 0. \tag{3.6}$$

Для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами возможны дальнейшие упрощения канонической формы уравнений. Введем для этого вместо u новую функцию ϑ:

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta}\vartheta,$$

где λ и μ - некоторые постоянные. Тогда

$$\begin{aligned}
u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\xi + \lambda\vartheta),\\
u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\eta + \mu\vartheta),\\
u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\xi} + 2\lambda\vartheta_\xi + \lambda^2\vartheta),\\
u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\eta} + \lambda\vartheta_\eta + \mu\vartheta_\xi + \lambda\mu\vartheta),\\
u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\eta\eta} + 2\mu\vartheta_\eta + \mu^2\vartheta).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставляем эти выражения, например, в уравнение

$$u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_1 u_\eta + cu + f = 0$$

и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим

$$\vartheta_{\xi\eta} + (\mu + \beta_1)\vartheta_\xi + (\lambda + \beta_2)\vartheta_\eta + (\lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + C)\vartheta + f_1 = 0.$$

Выберем параметры λ и μ так, чтобы коэффициенты при первых производных обратились в нуль $(\lambda = -\beta_2, \mu = -\beta_1)$.

В результате получим

$$\vartheta_{\xi\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0,$$

где $\gamma = \lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + c = c - \beta_1\beta_2$, $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$.

Аналогично упрощения проводятся и для других канонических форм. Окончательно приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

1. Гиперболический тип

$$\vartheta_{\xi\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0 \text{ или } \vartheta_{\xi\xi} - \vartheta_{\eta\eta} - \gamma\vartheta + f_1 = 0.$$

2. Параболический тип

$$\vartheta_{\eta\eta} + \beta_1\vartheta_\xi + f_1 = 0.$$

3. Эллиптический тип

$$\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0.$$

Пример 3.4. Упростим уравнение (3.6), полученное в примере 3.3. Подставляя выражения для производных (8.7) и сокращая на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$ будем иметь

$$\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + 2(\lambda+1)\vartheta_\xi + (2\mu+1)\vartheta_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda + \mu)\vartheta = 0.$$

Выберем $\lambda = -1, \quad \mu = -\dfrac{1}{2}.$ Тогда уравнение будет иметь вид

$$\boldsymbol{\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} - \frac{5}{4}\vartheta = 0.}$$

4. Нахождение общего решения линейного однородного уравнения 1-го порядка.

Общий вид линейного однородного уравнения 1-го порядка

$$\varphi_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (4.1)$$

где $u = u(x,y)$, а $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ заданные функции переменных (x,y). Для нахождения функции $u(x,y)$ необходимо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\varphi_2(x,y)}{\varphi_1(x,y)} \qquad (4.2)$$

Обозначив через $\varphi(x,y) = C$ общий интеграл уравнения (4.2), общее решение уравнения (4.1) записывается в виде

$$u(x,y) = F(\varphi(x,y)), \qquad (4.3)$$

где F - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (\sin x + yctgx)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Напишем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\sin x + yctgx}{1}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение, которое будем решать методом вариации постоянных

$$\frac{\partial y}{\partial x} = yctgx$$

$$\frac{\partial y}{y} = ctgxdx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C_1$$

$$y = C_1 \sin x$$

$$т.е. y(x) = C_1(x)\sin x$$

$$C_1' \sin x + C_1 \cos x = \sin x + C_1 \cos x$$

$$C_1' = 1, C_1(x) = x + C$$

$$y(x) = (x + C)\sin x, \frac{y}{\sin x} = x + C, C = \frac{y}{\sin x} - x$$

Ответ: $u(x,y) = F(\frac{y}{\sin x} - x)$.

5. Краевая задача для однородного уравнения теплопроводности.

Дано уравнение $U_t = a^2 U_{xx}$ и условия $U(0,x)=\varphi(x), U(t,0)=U(t,l)=0.$ Согласно методу Фурье решение записывается в виде $U(t,x)=T(t)X(x).$ Подставляя его в данное уравнение, получим

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2.$$

Для функции $X(x)$ имеем краевую задачу $X''=-\lambda^2 X, X(0)=X(l)=0$, решение которой имеет вид $X(x)=X_n(x)=d_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda=\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$.

Для функции $T(t)$ имеем уравнение $T'+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T=0,$ решение которого имеет вид $T(t)=T_n(t)=A_n \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right)$. Следовательно, решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

коэффициенты b_n находим из начального условия $U(0,x)=\varphi(x),$ т.е. $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$

Пример 5.1 Решить краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$U_t=a^2U_{xx},\ a=1,\ U(0,x)=2\sin^2\frac{\pi n}{2l}x,\ U(t,0)=U(t,l)=0$$

так как $U(x)=2\sin^2\frac{\pi n}{l}x,$ то

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l 2\sin^2\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l (1-\cos\frac{\pi n}{l}x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}xdx-$$

$$-\frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{2\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+\frac{1}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{2}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi n}, если\ n-нечетное,\\ 0, если\ n-четное.\end{cases}$$

Ответ: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\exp\left(-\frac{4\pi^2(2k-1)^2}{l^2}t\right)\sin\frac{2\pi(2k-1)}{l}x.$

6. Краевая задача для однородного волнового уравнения.

Дано однородное волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x), \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x)$ и краевыми условиями $U(t,0) = U(t,l) = 0$.

Данная задача может быть решена методом Фурье, согласно которому решение записывается в виде $U(t,x) = X(x)T(t)$. После подстановки $U(t,x)$ в данное уравнение, получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$.

Решая уравнение $X'' = -\lambda^2 X$ относительно функции $X(x)$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$, получим

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Решая уравнение $T'' = -\lambda^2 a^2 T$ относительно функции $T(t)$, получим

$$T(t) = T_n(t) = C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t,$$

где A_n, C_n, D_n - некоторые константы. В силу однородности уравнения, можно полагать, что $A_n = 1$. Следовательно, решение данного уравнения записывается в виде

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Для нахождения констант C_n, D_n воспользуемся начальными условиями $U(0,x) = \varphi(x), \dfrac{\partial U(0,x)}{\partial x} = \psi(x).$

Тогда получим уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \qquad D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x), \qquad C_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Пример 6.1. Решить краевую задачу для однородного волнового уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1{,}5$$

$$U(0,x) = x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

Решение записывается в виде

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $C_n = 0$, т.к. $\psi(x) = 0$, а $D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx$, т.к. $\varphi(x) = x(l-x)$, D_n вычислим, воспользовавшись дважды интегрированием по частям

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{\pi n}{l}x=-\frac{2}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x(l-2x)dx=\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l(l-2x)d\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{2l}{(\pi n)^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{4l}{(\pi n)^2}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\pi n+\frac{4l^2}{(\pi n)^3}=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1-\cos\pi n\right]=$$

$$=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$$

Ответ: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1{,}5\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$

Пример 6.2 Найти решение краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0)=x(x-1)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$

и граничным условиям $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$.

Так как $a=\frac{3}{2}$, $l=1$, то согласно формуле (16) решение заданного уравнения ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{3\pi n}{2}t+D_n\sin\frac{3\pi n}{2}t\right)\sin\pi nx.$$

Коэффициенты C_n и D_n найдем по формулам (17). При вычислении интегралов используем формулу интегрирования по частям.

$$C_n=2\int_0^1\left(x^2-x\right)\sin\pi nxdx=2\left[\left(x^2-x\right)\cdot\frac{-\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{-\cos\pi nx}{\pi n}(2x-1)dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^1(2x-1)\cos\pi nxdx=\frac{2}{\pi n}\left[(2x-1)\cdot\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\cdot 2dx\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2n^2}\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1=\frac{4}{\pi^3n^3}(\cos\pi n-1)=\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{\pi^3n^3},\quad n=1,2,3,...$$

$$D_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^1 0\cdot\sin\pi nxdx=0.$$

Итак, искомое решение уравнения имеет вид

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\cos\frac{3\pi n}{2}t\sin\pi nx.$$

7. Краевая задача для неоднородного волнового уравнения.

Ограничимся рассмотрением краевой задачи для неоднородного волнового уравнения вида

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f_1(x) f_2(t) \tag{7.1}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями, т.е.

$$U(0,x) = \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде разложения $U(t,x)$ в ряд Фурье по x:

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (7.\qquad)$$

Подставляя (7) в (6), получим задачу Коши для неизвестной функции

$$T_n(t): T_n'' + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n = d_n f_2(t), T_n(0) = T_n'(0) = 0, d_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx.$$

Обозначив решение этой задачи через $T_n(t)$ и подставляя в разложение (7), получим искомую функцию $U(t,x)$.

Пример 7.1 Решить краевую задачу для неоднородного волнового уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + xt, a = 1$$

$$U(0,x) = \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

Неизвестные функции $T_n(t)$ удовлетворяют задаче Коши

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n = d_n t,$$

$$d_n = \frac{2}{l}\int_0^l x \sin\frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^l x d\cos\frac{\pi n}{l} x = -\frac{2}{\pi n} x \cos\frac{\pi n}{l} x\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n}\int_0^l \cos\frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} l \cos \pi n + \frac{2l}{(\pi n)^2} \sin\frac{\pi n}{l} x\Big|_0^l = \frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

Следовательно, получили уравнение $T_n'' + \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2} T_n = \dfrac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1} t$ (7.3)

Его общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения

$$T_n'' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} T_n = 0 \tag{9}$$

и частного решения уравнения (8). Характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$K^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = 0, \text{ т.е. } K_{1,2} = \pm\frac{\pi n}{l} i.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) записывается в виде

$$T_n = d_1 \cos\frac{\pi n}{l} t + d_2 \sin\frac{\pi n}{l} t$$

Найдем частное решение уравнения (8). Его надо искать в виде $T_n = At + B,$ подставляя его в уравнение (8), получим

$$\frac{\pi^2 n^2}{l^2}(At+B) = \frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1} t, B = 0, A = (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3}.$$

Итак, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$T_n(t) = d_1 \cos\frac{\pi n}{l} t + d_2 \sin\frac{\pi n}{l} t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3} t.$$

Константы d_1, d_2 находим из начальных условий $T_n(0) = T_n'(0) = 0$, а потому $d_1 = 0, d_2 = (-1)^n \dfrac{2l^4}{\pi^4 n^4}.$

Ответ: $U(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{2l^4}{\pi^4 n^4}\sin\frac{\pi n}{l} t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$

8. Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения

Прежде чем решать задачу о колебаниях закрепленной струны, рассмотрим более простую задачу – о колебаниях бесконечной струны. Если представить очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникающие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния.

Рассматривая свободные колебания, мы должны решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = u\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши.

Преобразуем волновое уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a dt = 0 \quad \text{и} \quad dx + a dt = 0,$$

интегралами которых служат прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введем новые переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ и запишем волновое уравнение для переменных ξ и η.

Вычисляя производные

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = u_\xi \cdot (-a) + u_\eta \cdot a,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = (-au_{\xi\xi} + au_{\eta\xi})(-a) + (-au_{\xi\eta} + au_{\eta\eta})a = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}),$$

и подставляя их в исходное уравнение, видим, что уравнение колебания струны в новых координатах будет

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Интегрируя полученное равенство по η при фиксированном ξ, придем к равенству $u_\xi = \varphi_1(\xi)$. Интегрируя это равенство по ξ при фиксированном η, получим

$$u(\xi,\eta)=\int\varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

где φ и ψ являются функциями только переменных ξ и η соответственно. Следовательно, общим решением исходного уравнения является функция

$$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at). \tag{8}$$

Найдем функции φ и ψ так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0)=\varphi(x)+\psi(x)=f(x).$$

$$u_t(x,t)=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at),$$

$$u_t(x,0)=-a\varphi'(x)+a\psi'(x)=g(x).$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$-a\varphi(x)+a\psi(x)=\int_{x_0}^{x}g(z)dz+C,$$

где x_0 и C – постоянные. Из системы уравнений

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=f(x),\\ -\varphi(x)+\psi(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz+C\end{cases}$$

находим

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz-\dfrac{C}{2},\\ \psi(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz+\dfrac{C}{2}.\end{cases}$$

Таким образом, мы определили функции φ и ψ через заданные функции f и g, причем полученные равенства должны иметь место для любого значения аргумента. Подставляя в (8) найденные значения φ и ψ, будем иметь

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}g(z)dz-\frac{C}{2}+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}g(z)dz+\frac{C}{2}$$

или

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(z)dz.$$

Найденное решение называется формулой Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения

<u>Пример.8.1</u> Решить уравнение $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\big|_{t=0}=x^2+1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x$.

Используя формулу Даламбера, сразу получаем

$$u(x,t)=\frac{(x-at)^2+1+(x+at)^2+1}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos z dz=$$

9. Краевые задачи для уравнения Лапласа

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т.е. не меняющихся во времени процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 .$$

Например, если имеется однородная пластина, занимающая область D, ограниченную линией L, то можно показать, что температура в различных точках пластины должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Если процесс установившийся, т.е. температура не зависит от времени, а зависит только от координат точек пластины, то $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и, следовательно, температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 . \qquad (9.1)$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. В каждой задаче, связанной с уравнением Лапласа, искомое решение выделяется из множества всех гармонических функций с помощью дополнительного условия, которое чаще всего является краевым. Так, чтобы температура на пластине определялась однозначно, нужно знать температуру на контуре L пластины. Таким образом, требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (9.1) внутри области D и принимающую в каждой точке M кривой L заданные значения:

$$u\big|_L=\varphi(M) . \qquad (9.2)$$

Эта задача называется <u>задачей Дирихле</u> или первой краевой задачей для уравнения (9.1).

Если на границе L температура неизвестна, а известен тепловой поток в каждой точке кривой, который пропорционален производной функции u по направлению вектора $\vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор, направленный по нормали к кривой, то вместо условия (9.2) на границе области будем иметь условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L=\varphi(M) . \qquad (9.3)$$

Задача нахождения решения уравнения (9.1), удовлетворяющего краевому условию (9.3), называется <u>задачей Неймана</u> или второй краевой задачей.

Если вместо плоской пластины задано однородное тело T, ограниченное поверхностью σ, то функция u будет функцией трех переменных и должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 .$$

Краевые условия (9.2) или (9.3) в этом случае должны выполняться на поверхности σ.

Заметим, что задача Дирихле решается просто в одномерном случае, т.е. когда в соответствующей системе координат неизвестная функция u зависит только от одной из координат.

В случае декартовых координат одномерное уравнение Лапласа принимает вид $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ и его решением является линейная функция $u=Ax+B$. Задача Дирихле в этом случае имеет решение $u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0$, где $u(0)=u_0$, $u(l)=u_l$.

10. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для кольца

Пусть $u(x,y,z)$ – гармоническая функция. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad \text{или} \quad \Delta u=0.$$

Рассмотрим цилиндрические координаты

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z,$$

откуда

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=arctg\frac{y}{x}, \quad z=z.$$

Заменяя независимые переменные x, y, z на r, φ и z, придем к функции $u(r,\varphi,z)$. Используя правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, можно доказать, что найденная функция $u(r,\varphi,z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Это и есть уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

Если функция u не зависит от z, а только от x и y, то функция $u(r,\varphi)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \tag{10.1}$$

где r и φ – полярные координаты на плоскости.

Найдем решение уравнения Лапласа в области D, ограниченной окружностями L_1: $x^2+y^2=R_1^2$ и L_2: $x^2+y^2=R_2^2$, если это решение принимает следующие граничные значения:

$$u\big|_{L_1}=u_1, \quad u\big|_{L_{21}}=u_2, \tag{10.2}$$

где u_1, u_2 –постоянные.

Решим эту задачу в полярных координатах. Целесообразно искать решение, не зависящее от φ, так как граничные условия от φ не зависят. Уравнение (10.2) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Интегрируя уравнение, найдем

$$u=C_1\ln r+C_2. \tag{10.3}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (10.4)

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \quad C_2=\frac{u_1\ln R_2-u_2\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу (28), окончательно получим

$$u = \frac{u_2 \ln \dfrac{r}{R_1} - u_1 \ln \dfrac{r}{R_2}}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}.$$

Фактически мы решили следующую задачу: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах): $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$, $z=H$, и следующим граничным условиям:

$$u\Big|_{r=R_1} = u_1, \quad u\Big|_{r=R_2} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0.$$

(задача Дирихле-Неймана).

11. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим на плоскости xOy круг с центром в начале координат радиуса R. Пусть на его окружности задана некоторая функция $r=f(\varphi)$, где φ – полярный угол. Найдем функцию $u(r,\varphi)$, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{11.1}$$

и на окружности принимающую заданные значения

$$u\Big|_{r=R} = f(\varphi).$$

Решение задачи ищут методом разделения переменных, полагая

$$u = \Phi(\varphi) \cdot R(r).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (29), получим

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r\Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0,$$

или

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2.$$

Левая часть этого равенства не зависит от r, а правая от φ, следовательно, они равны постоянному числу, которое обозначили через $-k^2$. Таким образом, нашли два дифференциальных уравнения

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \tag{11.2}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0. \tag{11.3}$$

Общее решение первого из этих уравнений будет

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi.$$

Второе уравнение является уравнением Эйлера. Его решение найдем в виде $R(r) = r^m$. Подставив выписанную функцию в уравнение (11.3), найдем два частных линейно независимых решения r^k и r^{-k}. Тогда общее решение уравнения (11.3) запишется в виде

$$R = Cr^k + Dr^{-k}.$$

Итак,

$$u_k = \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)\left(C_k r^k + D_k r^{-k}\right). \tag{11.4}$$

Полученная функция будет решением данного уравнения при любом значении k, отличном от нуля. Если $k=0$, то уравнения (30) и (31) принимают вид

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Откуда получаем

$$u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r).$$

Так как решение должно быть периодической функцией от φ с наименьшим положительным периодом 2π, то в найденном выражении для u_0 B_0=0. Далее функция $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной и конечной в круге, поэтому D_0=0 и D_k=0.

Решение исходной задачи будем составлять в виде суммы решений (11.4). Сумма должна быть периодической функцией от φ. Для этого k должно принимать целые значения. Итак,

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot r^n\ . \tag{11.5}$$

Постоянные A_n и B_n находят так, чтобы выполнялось краевое условие задачи. Подставляя в выражение для $u(r,\varphi)$ значение $r=R$, получим

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)R^n\ .$$

Найденная сумма является рядом Фурье для функции $f(\varphi)$ на интервале (-π, π). Следовательно, A_n и B_n должны определяться по формулам

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi\,,\quad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\,,\quad B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\,. \tag{11.6}$$

Таким образом, ряд (33) с коэффициентами, определенными по формулам (34), будет решением поставленной задачи, если он допускает почленное двукратное дифференцирование по r и φ.

Пример11.1 Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\le r<2$, принимающее на границе круга значения $u\big|_{r=2}=2\varphi+1$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot r^n\ .$$

Найдем коэффициенты ряда по формулам (34).

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\varphi^2+\varphi\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\ .$$

$$A_n=\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{1}{n}\sin n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\sin n\varphi d\varphi\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi 2^n n^2}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\ .$$

$$B_n=\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}(2\varphi+1)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi 2^n}\left[(2\varphi+1)\frac{-1}{n}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\cos n\varphi d\varphi\right]=$$

$$=\frac{-(-1)^n 4\pi}{\pi 2^n n}+\frac{2}{\pi 2^n n^2}\sin n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}\,.$$

Итак,

$$u(r,\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}\sin n\varphi\right)r^n$$

12. Численные методы решения задач по уравнениям математической физики.

Рассмотрим численные методы на примере решения неоднородного уравнения теплопроводности

$$U_t = a^2 U_{xx} + F(x,t) \qquad (10)$$

с границей γ и удовлетворяющее условиям

$$D = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1\},\ U\Big|_{t=0} = f(x),\ U\Big|_{x=0} = \varphi(t),\ U\Big|_{x=1} = \psi(t). \qquad (11)$$

Используем метод сеток с шагом по оси $Ox, h_x = 0{,}1$ и с шагом по оси $Ot, h_t = 0{,}005$. Метод состоит в том, что искомое решение $U(x,t)$ представляются в виде таблицы $[U^*]$ значений этого решения в точках некоторого точечного множества $D^* \subset D \cup \gamma$ называемого сеткой. Точки множества называют узлами сетки. Узлы сетки совпадают с точками пересечения прямых $x_m = x_0 + mh,\ t_n = t_0 + n\tau$, т.е. с точками $(x_m, t_n) = (x_0 + mh, t_0 + n\tau)$. Решение $[U^*]$ представляет собой множество значений $\{U_{mn}\}$, где $U_{mn} = U(x_0 + mh, t_0 + n\tau)$. Запишем уравнение (10) в операторном виде

$$LU = F_1(x,t) \qquad (12)$$

$$LU = \begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} \\ U(x,0),\ 0 \le x \le 1 \\ U(0,t) \\ U(1,t) \end{cases} \qquad F_1(x,t) = \begin{cases} F(x,t) \\ f(x) \\ \varphi(t) \\ \psi(t) \end{cases} \qquad (13)$$

Заменив значения всех функций в точках (x,t) на их значения в точках (x_m, t_n), где $x_m = mh,\ t_n = n\tau,\ m = \overline{1,k},\ n = \overline{0,s}$, получим приближенное уравнение, называемое разностным уравнением

$$L\widetilde{U} = \begin{cases} \dfrac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{\tau} - a^2 \dfrac{U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}}{h^2} \\ 1 \le m \le k-1, \quad 0 \le n \le s-1 \\ U_{m,0}, \quad 0 \le m \le k, \\ U_{0,n}, \\ U_{k,n}, \quad 0 \le n \le s \end{cases}$$

$$\widetilde{F}_1(x,t) = \begin{cases} F_{mn}, \quad 1 \le m \le k-1, \quad 0 \le n \le s-1, \\ f_m, \quad 0 \le m \le k, \\ \varphi_n, \\ \psi_n, \quad 0 \le n \le s \end{cases}$$

Варианты заданий

1.

$1) ctgx\frac{\partial U}{\partial x}+(y+2\cos^2 xctgx)\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$2) U_{xx}-9U_{yy}=0$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=(l-x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$

$U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+t\sin\frac{\pi x}{2}, a=5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$

$U(t,0)=U(t,l)=0$

$5) U_t=U_{xx}+\cos\frac{\pi x}{2}, U(x,0)=x^2\sin\pi x, U(0,t)=0,$

$U(l,t)=0, x\in[0,1], t\in[0;0.4]$

2.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+y\ln\frac{y}{x}\frac{\partial U}{\partial y}=0$

$2) U_{xx}-6U_{xy}+2U_y=0$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx,} a=3, U(0,x)=x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0,$

$U(t,0)=U(t,l)=0$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+(t+5)x, a=3, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$

$U(t,0)=U(t,l)=0$

$5) U_t=U_{xx}+\sin\frac{\pi x}{2}, U(x,0)=1{,}2x^2\sin\pi x, U(0,t)=0,$

$U(l,t)=e^{-0,1}\sin\frac{\pi t}{4}, x\in[o,2], t\in[0;0,1].$

3.

$1) x\frac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0$

$2) U_{xx}+8U_{xy}+3U_x=0$

$3) U_{tt}=a^2U_{xx}, a=4, U(0,x)=2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

$4) U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2-1)x, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0, U(t,0)=U(t,l)=0$

$5) U_t=U_{xx}+\sin\frac{\pi x}{2}, U(0,x)=4x\sin\pi x, U(0,t)=1,$

$U(l,t)=2. x\in[0,1], t\in[0,1].$

4.

1) $(x^2-1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(xy+x^4-1)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

2) $U_{xx}-4U_{yy}+10U_x=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=10, U(0,x)=10x, U(t,0)=U(t,l)=0, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+10(t-1)\cos 2x, a=1, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+2x+t, U(x,0)=0{,}5x^4+1, U(0,t)=t, U(l,t)=\sin 2t,$
$x\in[0{,}1], t\in[0{,}2].$

5.

1) $(2x-y)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x+y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $2U_{xx}-6U_{xy}+4U_{yy}=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5, U(0,x)=2(x+3), \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\sin x,$
$U(t,0)=U(t,l)=1.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+tx^2, a=2, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x(1-x), U(0,t)=\sqrt{t}, U(l,t)=t$
$x\in[0;0{,}5], t\in[0{,}1]$

6.

1) $x^2\dfrac{\partial U}{\partial x}+(2xy+3)\dfrac{\partial U}{\partial x}=0.$

2) $4U_{xy}-U_{yy}+U_x-2U_y=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\cos 2x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=x,$
$U(t,0)=U(t,l)=t.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=3, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+e^{-0{,}3x}\sin x, U(x,0)=x^2, U(0,t)=1, U(l,t)=5t$
$x\in[0;1], t\in[0{,}3]$

7.

1) $(2x+y+1)\dfrac{\partial U}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

2) $2U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}=0.$

3) $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x^2, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\dfrac{1}{x},$
$U(t,0)=U(t,l)=0.$

4) $U_{tt}=a^2U_{xx}-50(l-x)\sin 4t, a=1{,}5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

5) $U_t=U_{xx}+\sin\dfrac{\pi x}{12}, U(x,0)=x\sin\pi x, U(0,t)=0{,}5, U(l,t)=e^{-t},$
$x\in[0;1], t\in[0{,}2].$

8.

$1)(x-y+2)\frac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y-1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-9U_{yy}+3U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1, U(0,x)=\frac{x}{2}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x^2, a=3{,}5,\ U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+t\sin 2x, U(x,0)=3x(2-x), U(0,t)=t^2,\ U(l,t)=\cos t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

9.

$1)(x+2y+1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-2y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-2U_{xy}-8U_{yy}+U_{x}-U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2,\ U(0,x)=2\cos 2{,}5x,\ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+\sin\frac{\pi x}{6}, U(x,0)=4x^2, U(0,t)=t+1,\ U(l,t)=\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,2].$

10.

$1)(x+y+2)\frac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)2U_{xx}-10U_{xy}+12U_{yy}+U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1.5, U(0,x)=x\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2+1)\sin 2x, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+e^{-x}, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=2t-1, U(l,t)=2\sin t,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

11.

$1)2y\frac{\partial U}{\partial x}+(\sin x-y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-10U_{yy}+5U_{x}-U_{y}=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

$5)U_{t}=U_{xx}+t\sin 3x, U(x,0)=2x, U(0,t)=-1, U(l,t)=t+1,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

12.

$$1)2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}+6U_{xy}+8U_{yy}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2.5,\ U(0,x)=x\cos\frac{\pi x}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$$

$$U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+2)\sin t, a=2, l=\pi,$$

$$U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+(t+1)\sin x, U(x,0)=x(1-x), U(0,t)=t, U(l,t)=\cos\sqrt{t},$$

$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

13.

$$1)(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}+10U_{xy}+25U_{yy}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x+2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+t\sin 3x, U(x,0)=x^4, U(0,t)=0{,}1t, U(l,t)=e^{-0.3t},$$

$$x\in[0;2], t\in[0,1].$$

14.

$$1)(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2-3y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xy}-2U_{yy}+3U_y=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=e^x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+\sin t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$$

$$5)U_t=U_{xx}+t+x, U(x,0)=\sqrt{x}, U(0,t)=t, U(l,t)=4,$$

$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

15.

$$1)(x+y+3)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-9U_{yy}+2U_x=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=e^{x+1}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=1, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+4)\cos 3t, a=1, l=\frac{\pi}{2}, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_t=U_{xx}+xt, U(x,0)=x^2, U(0,t)=t, U(l,t)=1,$$

$$x\in[0;1], t\in[0,1].$$

16.

$$1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-ytgx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-U_{xy}+U_{yy}+2U_{y}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx},a=2,U(0,x)=x^2,\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,l=\pi.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2,a=1,U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_{t}=U_{xx}+tx,U(x,0)=3x,U(0,t)=t-1,U(l,t)=\sin 2t,$$
$$x\in[0;1],t\in[0,1].$$

17.

$$1)x\frac{\partial U}{\partial x}+(xy+xe^{x})\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}+2U_{xy}+10U_{yy}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx},a=4,U(0,x)=x,\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,l=\frac{\pi}{2}.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+x\sin 2t,a=1,U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,l=1.$$

$$5)U_{t}=U_{xx}+2x(t+1),U(x,0)=x,U(0,t)=t,U(l,t)=\sin t,$$
$$x\in[0;1],t\in[0,1].$$

18.

$$1)x\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2\sqrt{y}-yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xy}-U_{yy}+2U_{x}-U_{y}=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx},a=2,U(0,x)=2x+1,\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,l=\pi.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+te^{x},a=1,l=2U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_{t}=U_{xx}+t\sqrt{x},U(x,0)=x^2,U(0,t)=t+1,U(l,t)=e^{-t},$$
$$x\in[0;1],t\in[0,1].$$

19.

$$1)(x^2-y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+2xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

$$2)U_{xx}-4U_{xy}-1=0.$$

$$3)U_{tt}=a^2U_{xx},a=3,U(0,x)=x,\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0,l=2.$$

$$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+e^{x}\sin t,a=1,U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$$

$$5)U_{t}=U_{xx}+t^2x,U(x,0)=x,U(0,t)=t-1,U(l,t)=\sqrt{t},$$
$$x\in[0;1],t\in[0,1].$$

20.

$1)(x^2-1)\frac{\partial U}{\partial x}+(-x+yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)3U_{xx}+U_{xy}+U_y=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+e^x\cos 2t, a=4, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$5)U_t=U_{xx}-x^3t, U(x,0)=t, U(0,t)=1, U(l,t)=2x,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

21.

$1)x\frac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-8U_{xy}+U_y-U_x=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=\sin 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\frac{\pi}{2}.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$5)U_t=U_{xx}+t\sin x, U(x,0)=x^4, U(0,t)=t, U(l,t)=t^2,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

22.

$1)2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2 tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-4U_{yy}+U_x=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+x\cos 2t, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi.$

$5)U_t=U_{xx}+t^2\sin x, U(x,0)=2x, U(0,t)=t, U(l,t)=\sqrt{t},$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

23.

$1)(x-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x+2y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

$2)U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+U_y=0.$

$3)U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

$4)U_{tt}=a^2U_{xx}+e^x\sin t, a=4, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

$5)U_t=U_{xx}+tx, U(x,0)=x, U(0,t)=2t, U(l,t)=t,$

$x\in[0;1], t\in[0,1].$

Задачи к экзамену

1. Найти колебания струны с жестко закрепленными концами $x=0$ и $x=1$, возбужденной начальным отклонением $f(x)=x$, если начальные скорости точек струны равны нулю.

2. Найти продольные колебания стержня, один конец которого $x=0$ закреплен жестко, а другой $x=l$ свободен, при начальных условиях $u(x,0)=a=const$, $u_t(x,0)=0$ при $0\le x\le l$.

3. Решить методом разделения переменных: $u_{tt}=u_{xx}+xt$ $(0<x<\pi)$, $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0$, $u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0$.

4. Решить смешанную задачу: $u_{tt}-u_{xx}+2u_t=e^t\cos x$ $(0<x<\pi/2)$, $u\big|_{x=0}=2t$, $u\big|_{x=\pi/2}=0$, $u\big|_{t=0}=\cos x$, $u_t\big|_{t=0}=x$.

5. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0<x<p, 0<y<q)$, закрепленной вдоль контура, если $u\big|_{t=0}=Axy$, $u_t\big|_{t=0}=0$.

6. Найти распределение температуры в стержне $0\le x\le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна функции $f(x)=x$.

7. Найти температуру стержня $0\le x\le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированными концами, если его начальная температура является функцией $f(x)=x$.

8. Решить следующую смешанную задачу: $u_t=u_{xx}$, $0<x<l$, $u_x\big|_{x=0}=4$, $u_x\big|_{x=1}=0$, $u\big|_{t=0}=0$.

9. Решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx}+4u+x^2+2\cos^2 x$, $0<x<\pi$, $u\big|_{x=0}=0$, $u_x\big|_{x=\pi}=2\pi t$, $u\big|_{t=0}=0$.

10. Найти решение задачи Коши: $u_t=u_{xx}+4$, $u\big|_{t=0}=\sin x$.

11. Найти решение внутренней (и внешней) задачи Дирихле для круга радиуса a с центром в начале координат, если $u\big|_{\rho=a}=Ay$, где (ρ,φ) - полярные координаты, (x,y) - прямоугольные.

12. Выяснить, правильно ли поставлена внутренняя (и внешняя) задача Неймана для круга радиуса a с центром в начале координат, если $\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=A\sin\varphi$, где (ρ,φ) - полярные координаты, (x,y) - прямоугольные. Если задача поставлена правильно – решить ее.

13. Найти функцию $u=u(\rho,\varphi)$, гармоническую внутри кольца $a<\rho<b$ и удовлетворяющую граничным условиям $u\big|_{\rho=a}=A$, $u\big|_{\rho=b}=0$.

14. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -Axy$ в круге радиуса R с центром в начале координат, если $u\big|_{\rho=R} = 0$.

15. Найти функцию, гармоническую в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$, если на границе этого прямоугольника $u(x, y)$ принимает следующие значения: $u\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{b}$, $u\big|_{x=a} = 0$, $u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}$, $u\big|_{y=b} = 0$.

Учебное пособие

Гейко Павел Пантелеевич

Методы математической физики

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Методы математической физики»

Усл. печ. л. ______Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40