



Кафедра конструирования  
и производства радиоаппаратуры

---

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой КИПР

\_\_\_\_\_ **В.Н. ТАТАРИНОВ**

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2012 г.

## **Моделирование статических режимов подсистем РЭС**

Лабораторная работа по дисциплинам «Информатика» для студентов специальностей  
211000.62 «Конструирование и технология электронных средств» (бакалавриат) и  
162107.65 «Информатика и информационные технологии» (специалитет)

Разработчик:  
Доцент кафедры КИПР

\_\_\_\_\_ **Ю.П. Кобрин**

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Цель работы.....	3
2	Порядок выполнения работы .....	3
3	Контрольные вопросы .....	4
4	Отчетность .....	4
5	Краткая характеристика класса задач .....	5
5.1	Математические модели при проектировании РЭС.....	5
5.2	Формальная аналогия физически однородных подсистем РЭС.....	8
5.2.1	<i>Источники фазовой переменной типа «поток»</i> .....	9
5.2.2	<b>Источники фазовой переменной типа «напряжение»</b> .....	10
5.2.3	<i>Зависимые источники</i> .....	10
5.2.4	<i>Размерности источников фазовых переменных в различных подсистемах РЭС</i> .....	11
5.2.5	<i>Элементы типа R</i> .....	11
5.2.6	<i>Элементы типа C</i> .....	12
5.2.7	<i>Элементы типа L</i> .....	13
5.3	Методы формирования математических моделей.....	14
5.3.1	<i>Основные понятия</i> .....	14
5.3.2	<i>Метод топологических уравнений</i> .....	15
5.3.3	<i>Метод узловых потенциалов</i> .....	18
6	Численное решение алгебраических уравнений (АУ) .....	20
6.1	Постановка задачи .....	20
6.2	Решение линейных алгебраических уравнений .....	20
6.2.1	<i>Численное решение систем линейных АУ</i> .....	21
6.2.2	<i>Решение линейных АУ в MathCAD</i> .....	21
6.3	Решение нелинейных алгебраических уравнений .....	22
6.3.1	<i>Общие сведения</i> .....	22
6.3.2	<i>Отделение корней</i> .....	22
6.3.3	<i>Метод Ньютона</i> .....	23
6.3.4	<i>Нахождение корней уравнения с одним неизвестным в MathCAD</i> .....	25
6.3.5	<i>Поиск корней уравнений при помощи блока Given .. Find(...) в MathCAD</i> .....	25
6.3.6	<i>Поиск решения при помощи блока Given .. Minerr(...) в MathCAD</i> .....	26
6.3.7	<i>Решение уравнений в символьном виде</i> .....	26
7	Индивидуальные задания .....	28
7.1	Варианты линейных подсистем РЭС .....	28
	Список рекомендуемой литературы.....	29

## 1 Цель работы

В ходе настоящей работы предусматривается:

- 1) изучение методов анализа статических режимов при проектировании радиоэлектронных средств (РЭС);
- 2) приобретение навыков в формировании функциональных математических моделей (ММ) РЭС, используемых для анализа статических режимов;
- 3) приобретение практических навыков в работе с системой автоматизации математических расчетов **MathCAD** [1] [2] [3] [4] для решения задач анализа статических режимов.
- 4) приобретение практических навыков в работе с системой схемотехнического моделирования **MicroCAP** [5] [6] [7] для решения задач анализа статических режимов.

## 2 Порядок выполнения работы

Приступая к изучению настоящего раздела, повторите:

- ✓ из курса "Высшая математика": решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений;
  - ✓ из курса "Физика": электростатика, электродинамика, термодинамика.
- 1) Внимательно изучите раздел 3, из которого Вы должны четко усвоить принцип аналогии, типы компонент, уравнения связи фазовых переменных на разных типах компонент. В качестве дополнительной литературы используйте [8] [9] [10].
  - 2) Изучите раздел 4, в результате чего Вы научитесь правильно составлять топологические уравнения и уравнения по методу узловых потенциалов в различных физически однородных подсистемах РЭС. В качестве дополнительной литературы используйте [11] [12]
  - 3) Изучите методы численного решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений (АУ).
  - 4) Используя [1], встроенный в **MathCAD** электронный учебник, а также дополнительную литературу [2] [3] [4] овладеть основными приемами работы с системой **MathCAD** для решения систем АУ.
  - 5) Ответьте на контрольные вопросы.
  - 6) Составьте систему уравнений с использованием законов Кирхгофа и уравнений узловых потенциалов для статического режима предложенного Вам варианта схемы. В качестве дополнительной литературы можно использовать [11] [12].
  - 7) Решите эти системы уравнений с помощью системы **MathCAD**. Обратите внимание на то, что результаты решения обеих систем должны совпасть.
  - 8) Введите Вашу схему в **MicroCAP** [5] [6] [7] и проведите проверку результатов расчетов, полученных с помощью системы **MathCAD**.
  - 9) Оформить и защитить отчет по лабораторной работе у преподавателя.

### 3 Контрольные вопросы

Ответьте письменно на следующие контрольные вопросы:

- 1) Что называется фазовыми переменными?
- 2) Какие типы компонент встречаются в схемах технических подсистем?
- 3) В чем заключается аналогия различных подсистем?
- 4) Запишите уравнения связи фазовых переменных на элементах типа **R**, типа **L** и типа **C** для различных физически однородных подсистем РЭС.
- 5) По какому принципу выделяют элементы типа **R**, типа **L** и типа **C** в различных физически однородных подсистемах РЭС?
- 6) Как обозначаются и что представляют источники фазовых переменных в различных подсистемах РЭС?
- 7) Какие Вы знаете методы формирования математических моделей?
- 8) Чем отличается метод топологических уравнений от метода узловых потенциалов?
- 9) Какие методы применяются для решения систем линейных алгебраических уравнений? Как они решаются в системе **MathCAD**?
- 10) Какие методы применяются для решения систем нелинейных алгебраических уравнений? Как они решаются в системе **MathCAD**?
- 11) Как отделить корни нелинейных уравнений?
- 12) В чем сущность итерационных процессов решения нелинейных уравнений?
- 13) Как в САПР **MicroCAP** ввести схему электрическую принципиальную?
- 14) Как в САПР **MicroCAP** выполнить моделирование статического режима?

### 4 Отчетность

Отчет должен состоять из следующих разделов:

- 1) Тема и цель работы.
- 2) Условия задания.
- 3) Листинги программ на **MathCAD** вместе с вводимыми исходными данными и результатами.
- 4) Файл с результатами анализа статического режима Вашей схемы в **MicroCAP**.
- 5) Результаты выполнения вычислений.
- 6) Выводы.

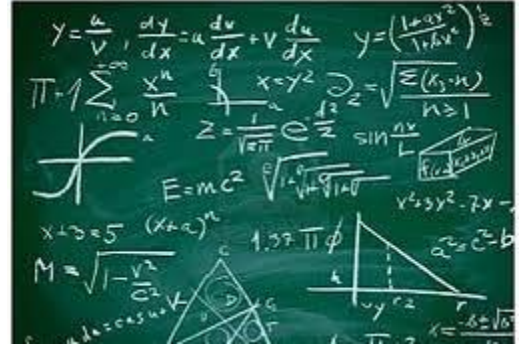
В ходе защиты отчета по лабораторной работе для получения зачета студент должен уметь:

- 1) обосновать избранные математические модели и ограничения;
- 2) проявить знание использованных методов решения алгебраических линейных и нелинейных уравнений и их работоспособность на своих примерах;
- 3) продемонстрировать навыки работы в средах **MathCAD** и **MicroCAP**.

## 5 Краткая характеристика класса задач

### 5.1 Математические модели при проектировании РЭС

В процессе проектирования РЭС оперируют большим количеством математических моделей (ММ), отражающих свойства объекта, существенных с точки зрения проектировщика.



**Математической моделью РЭС** называют совокупность математических объектов (чисел, переменных, матриц, множеств и т.п.) адекватно отображающая некоторые свойства радиоэлектронного средства и отношения между ними (уравнения, условия и ограничения), и реализующая определенные математические методы по расчету его характеристик.

ММ играют *определяющую роль* в процессе проектирования РЭС. ММ обеспечивают разработчика средствами объективной оценки свойств проектируемого РЭС на каждой стадии проекта, и позволяют прогнозировать возможные последствия принимаемых проектных решений. Успешное решение задач проектирования в значительной мере зависит от состоятельности используемых ММ, от их способности давать новую информацию о проектируемом РЭС и, конечно, от возможности реализации избранных ММ на компьютере.

ММ классифицируют по ряду признаков.

*По внешнему виду* ММ можно разделить на аналитические, алгоритмические и имитационные:

- ✓ **аналитические ММ** имеют вид систем уравнений;
- ✓ **в алгоритмических ММ** связи выходных параметров с внутренними и внешними параметрами выражают с помощью алгоритма решения, обычно на базе численного метода;
- ✓ **имитационные ММ** отражают поведение сложных РЭС при заданных (часто случайных) внешних воздействиях<sup>1</sup>. Это модели массового обслуживания, заданные в алгоритмической форме.



*По характеру отображаемых свойств объекта* ММ делятся на функциональные, технологические и структурные.

**Функциональные ММ** отражают процессы функционирования, **технологические ММ** – процессы изготовления, а **структурные ММ** отражают структурные (геометрические) свойства объекта.

<sup>1</sup> Например, работа радиолокационной станции.

Любую ММ можно представить в виде некоторого математического преобразования

$$Z = F(X, Y), \quad (5.1)$$

где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  – вектор  $N$  *входных параметров*, которыми может управлять проектировщик РЭС;

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$  – вектор  $M$  *внешних параметров*, характеризующих свойства внешней по отношению к проектируемому РЭС среды;

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_K\}$  – вектор  $K$  *выходных параметров*, характеризующих свойства РЭС;

$F$  – оператор преобразования, определяющий вид системы уравнений (5.1) ММ. Она может иметь вид системы линейных алгебраических уравнений, нелинейных уравнений различного вида, дифференциальных в полных или частных производных и т.п.

Кроме перечисленных выше, в описаниях ММ проектируемых изделий также присутствуют следующие параметры и переменные:

- ✓ *фазовые переменные* - величины, характеризующие физическое или информационное состояние объекта. Использование вектора фазовых переменных позволяет упростить алгоритмическую реализацию программ, составляющих уравнения математической модели РЭС.
- ✓ Минимальный по размерности вектор фазовых переменных, полностью характеризующий работу объекта проектирования, называют *базисным вектором*<sup>2</sup>.
- ✓ *внутренние параметры (параметры элементов)* - величины, характеризующие свойства элементов. В принципе каждый из параметров может быть функцией, вектором или еще более сложным математическим функционалом;
- ✓ - *ограничения* на диапазоны изменения *входных, выходных и внешних параметров*.

В частности, в описании ММ электронного усилителя могут быть представлены:

- ✓ *фазовые переменные* - напряжения и токи, рассматриваемые как функции времени или частоты;
- ✓ *входные параметры* – параметры входного сигнала (напряжение, ток, форма, частота);
- ✓ *выходные параметры* - параметры выходного сигнала (коэффициент усиления на средних частотах, полоса пропускания, потребляемая мощность, динамический диапазон);
- ✓ *внутренние параметры* – параметры элементов (сопротивления резисторов, барьерные емкости и тепловые токи переходов в транзисторах, емкости конденсаторов);
- ✓ *внешние параметры* - напряжения источников питания, параметры входных сигналов и нагрузки, температура окружающей среды;
- ✓ *ограничения* - верхняя граница допустимого диапазона значений потребляемой мощности, нижние границы значений коэффициента усиления, полосы пропускания, динамического диапазона.

---

<sup>2</sup> В частности, при составлении уравнений математической модели РЭС в качестве базисного вектора можно использовать *вектор узловых потенциалов* либо вектор напряжений на конденсаторах и токов в индуктивностях – *вектор переменных состояния*.

Следует заметить, что вследствие неизбежного технологического разброса параметров комплектующих изделий и материалов, а также нестабильности условий изготовления РЭС большинство параметров реального РЭС являются *случайными величинами*. Эти свойства могут быть отражены в *статистических ММ*.

При описании объекта проектирования могут использоваться *различные уровни абстрагирования* (иерархические уровни): *микроуровень*, *макроуровень*, *метауровень*.

- 1) **Микроуровень** - иерархический уровень в описаниях сложных объектов, в котором рассматриваются физические процессы, протекающих в сплошных средах и непрерывном времени. Типичные ММ на микроуровне - дифференциальные уравнения в частных производных с заданными краевыми условиями. Результаты анализа на микроуровне - *поля* электрические, магнитные, механических напряжений, деформаций, температуры и т.п.
- 2) **Макроуровень** - иерархический уровень в описаниях сложных объектов, в котором рассматриваются физические процессы, протекающие во времени в дискретизированном пространстве. На макроуровне рассматриваются процессы в радиоэлектронных схемах и их аналогах в других физически однородных подсистемах. Типичными ММ объектов на макроуровне являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), превращающиеся в системы алгебраических уравнений (АУ) в частных случаях анализа статических состояний в задачах проектирования РЭС.
- 3) **Метауровень** - иерархический уровень в описаниях сложных систем, в котором протекающие в системе процессы рассматриваются наиболее укрупнено. На метауровне используют методы теории массового обслуживания, автоматического управления.

а. *По уровню сложности* различают *полные модели* и *макромодели*:

- 4) **Полные модели** объекта проектирования получаются путем *непосредственного* объединения компонентных моделей в общую систему уравнений.
- 5) **Макромодели** представляют собой упрощенные математические модели, аппроксимирующие полные.

а. *По способу задания внутренних и внешних параметров* ММ разделяют на:

- 6) **дискретные** (например, сопротивления постоянных резисторов выпускаются промышленностью в соответствии с стандартным рядом дискретных значений);
- 7) **непрерывные** (например, задают диапазон значений сопротивления переменного резистора).

В зависимости от того, учитывают ли ММ в проектируемого РЭС *инерционность процессов*, различают *статические* и *динамические* модели.

- 1) **Статические ММ** отражают состояние объекта проектирования при неизменных внешних параметрах и не учитывают его переходные характеристики. Статический режим технической подсистемы характеризуется тем, что производные фазовых переменных равны нулю, отсутствуют меняющиеся во времени внешние воздействия. Такие задачи разработчик РЭС встречает при анализе работы электронных схем в статическом режиме, при исследовании тепловых режимов РЭС и т.д.
- 2) **Динамические ММ** позволяют отображать *переходные процессы* в РЭС, отображающие изменение фазовых переменных во времени.



К любой ММ предъявляются требования достаточного уровня универсальности, адекватности и экономичности.

На всех этапах проектирования математические модели РЭС обязаны соответствовать многообразным (часто противоречивым) требованиям:

- 1) отражать с заданной точностью зависимость выходных параметров РЭС от его внутренних и внешних параметров в широком диапазоне их изменения;
- 2) иметь однозначное соответствие физическим процессам в объекте;
- 3) включать необходимые аппроксимации и упрощения, позволяющие их программно реализовать на компьютерах с различными возможностями;
- 4) иметь большую универсальность, т.е. быть применимыми к моделированию многочисленной группы однотипных устройств;
- 5) быть экономичными с точки зрения затрат ресурсов компьютера и т.п.

**Универсальную ММ**, адекватно отражающие *все свойства* проектируемого РЭС во всех возможных ситуациях, создать чрезвычайно сложно, да и использование ее сопряжено со значительными трудностями (*неэкономично*). Вследствие этого ММ, как правило, *с допустимой точностью* воспроизводят *отдельные* свойства РЭС лишь в заданных техническим заданием ограниченных диапазонах изменения переменных (*области адекватности*). По этой же причине для одного и того же компонента или РЭС в целом часто приходится иметь не одну, а несколько моделей, используемых в соответствующих поддиапазонах проектных параметров.

В настоящее время методы математического моделирования применимы практически для любого этапа проекта. Для каждой стадии проектирования РЭС разработан подбирающий математический аппарат, созданы методики формирования ММ, получены типовые модели различного уровня сложности, найдены наиболее эффективные методы их реализации.

На каждом уровне моделирования различают *математические модели проектируемого РЭС* и математические модели составляющих его компонентов. ММ компонентов представляют собой системы уравнений, устанавливающих связь между фазовыми переменными, внутренними и внешними параметрами, относящимися к данному компоненту. Такие уравнения называют *компонентными*, а соответствующие математические модели - *компонентными*.

Математические модели сложных РЭС, состоящих из большого числа входящих в них компонентов, получают объединением математических моделей этих компонентов. Объединение компонентных уравнений в математическую модель объекта осуществляется на основе фундаментальных физических законов, выражающих условия *непрерывности* и *равновесия* фазовых переменных, например *законов Кирхгофа*. Уравнения, описывающие эти законы, называют *топологическими*, они отражают связи между компонентами в устройстве. Совокупность компонентных и топологических уравнений для проектируемого объекта и образует систему (5.1), являющуюся математической моделью объекта.

В современных САПР формирование такой системы уравнений ММ РЭС выполняется с помощью компьютера *автоматически*.

## 5.2 Формальная аналогия физически однородных подсистем РЭС

Создание единого математического и программного обеспечения для анализа технических систем РЭС возможно благодаря *аналогии уравнений*, описывающих подсистемы различной физической природы, из которых состоит проектируемое РЭС.

В природе существует множество процессов, описываемых одними и теми же математическими уравнениями или системами уравнений.



Можно проследить аналогию уравнений, описывающих процессы в различных подсистемах электрической, механической поступательной, механической вращательной, гидравлической (пневматической), тепловой, магнитной, массопереноса и др. Мы ограничимся рассмотрением уравнений в трех типах подсистем, с которыми чаще всего сталкивается разработчик РЭС: *электрической, механической поступательной и тепловой*.

В подавляющем большинстве физически однородных технических подсистем можно выделить пять типов компонентов-двухполюсников:

- ✓ два типа активных источников фазовых переменных (*типа потока* и *типа напряжения*);
- ✓ три типа пассивных элементов (*типа R*, *типа L* и *типа C*).

Для удобства, кроме задания связи фазовых переменных на компоненте с помощью математических символов, каждому элементу обычно ставится в соответствие специальный графический символ - *условное графическое обозначение* (УГО) *элемента*. Изображение цепи в виде соединения таких графических символов, называемое *схемой цепи*, оказывается весьма удобным, особенно при наличии в цепи большого числа элементов.

Рассмотрим вначале основные характеристики компонент характеризующих активную часть цепи.

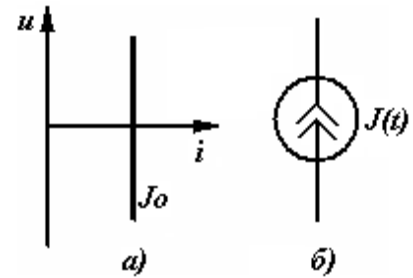


Рисунок 5.1 – Идеальный источник тока:

а) вольтамперная характеристика; б) условное обозначение источника тока.

### 5.2.1 Источники фазовой переменной типа «поток»

**В электрической подсистеме** источником типа поток является идеальный источник тока (рис. 5.1) – элемент цепи, который создает заданный ток  $j(t)$  независимо от напряжения на его полюсах.

**В механической поступательной подсистеме** источником типа поток является сила  $F$ .

**В тепловой подсистеме** источником типа поток является тепловой поток  $P$ .

### 5.2.2 Источники фазовой переменной типа «напряжение»

В электрической подсистеме источником типа напряжение является идеальный источник напряжения (рис. 5.2) - элемент цепи, который создает на своих зажимах напряжение  $u(t) = e(t)$  независимо от того, какой ток протекает через источник.

В механической поступательной подсистеме источником типа напряжение является скорость  $V$

В тепловой подсистеме источником типа напряжение является температура  $T$

Источник напряжения характеризует внесенную в цепь энергию извне и связан с работой сил, в том числе неэлектрического происхождения (так называемых «сторонних» сил) по созданию электрического поля, поэтому он называется также источником электродвижущей силы – ЭДС. Напряжение на зажимах источника равно его ЭДС.

### 5.2.3 Зависимые источники

При создании ММ РЭС нередко возникает необходимость в использовании *зависимых источников*, когда ток источника тока или напряжение источника напряжения не являются постоянными, а зависят *от тока* или *напряжения* у некоторого элемента (табл. 5.1) (может и самого себя).

Функция  $f$ , определяющая зависимость тока или напряжения от тока или напряжения, называется *функцией управления*. Ее аргумент называют *управляющим током* или *напряжением*, а значение – *управляемым током* или *напряжением*.

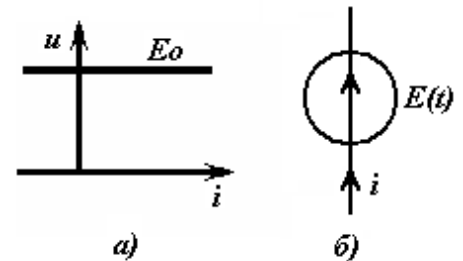
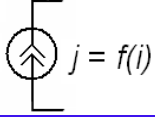


Рисунок 5.2 - Идеальный источник напряжения:

- а) вольтамперная характеристика;
- б) условное обозначение источника напряжения

Таблица 5.1 - Зависимые источники

Зависимый источник	Управляемый параметр	Функция управления	Управляющий параметр
$e = f(u)$	$e$	$f(u)$	$u$ - напряжение
$e = f(i)$	$e$	$f(i)$	$i$ - ток
$j = f(u)$	$j$	$f(u)$	$u$ - напряжение

	$j$	$f(i)$	$i$ - ток
---	-----	--------	-----------

Отношение  $(u, i)$ , задаваемое зависимым источником, называют *вольтамперной характеристикой*, отношения  $(i, i)$  - *передаточной характеристикой по току*,  $(u, u)$  - *по напряжению*.

#### 5.2.4 Размерности источников фазовых переменных в различных подсистемах РЭС

В табл. 5.2 приведены названия и размерности источников фазовых переменных в различных подсистемах РЭС.

Таблица 5.2 - Источники фазовых переменных

Фазовые переменные	Электрическая подсистема	Механическая поступательная	Тепловая подсистема
<i>типа «поток»</i>	Ток $I$ , [А] (ампер)	Сила $F$ , [Н] (ньютон)	Тепловой поток, $P$ [Вт]
<i>типа «напряжение»</i>	Напряжение, $U$ [В] (вольт)	Скорость, $V$ [м·с <sup>-1</sup> ] (метров в секунду)	Температура $T$ , [К] (Кельвин или градус)

#### 5.2.5 Элементы типа $R$

На элементах *типа  $R$*  происходит **преобразование различных форм энергии в тепловую и рассеивание её в пространство**.

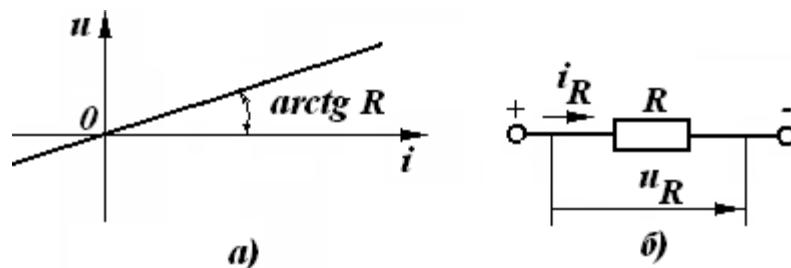
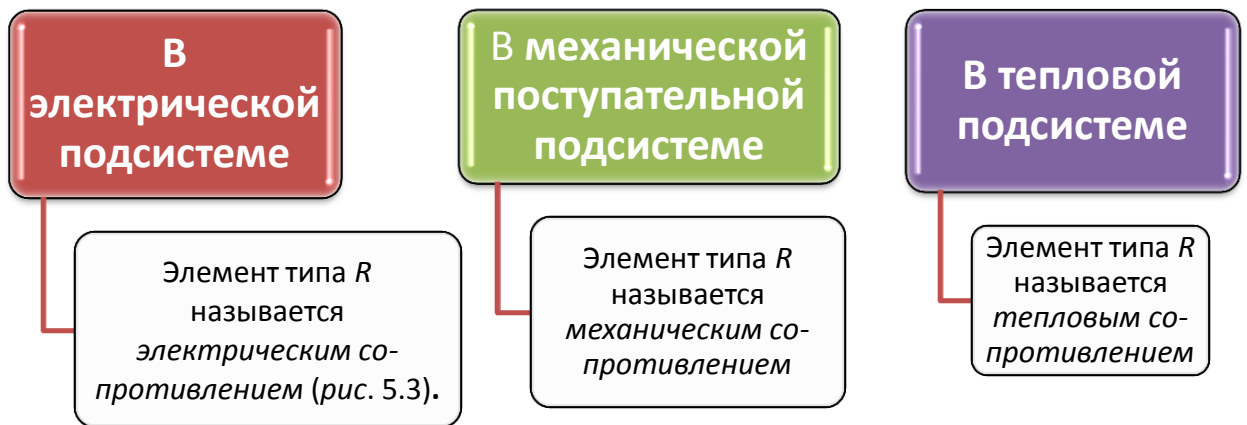


Рисунок 5.3 - Электрическое сопротивление:

а) вольтамперная характеристика; б) условное обозначение сопротивления

Заданное электрическое сопротивление обеспечивают включением компонента, называемого *резистором*.

Уравнения связи фазовых переменных на элементе типа  $R$  в электрической подсистеме определяются *законом Ома* для ненагреваемых проводников:

$$u(t) = R \cdot i(t), \text{ или } i(t) = \frac{u(t)}{R}, \text{ или } i(t) = g \cdot u(t), \text{ где } g = \frac{1}{R}.$$

Если напряжение на сопротивлении изменяется во времени, то в точности по такому же закону будет изменяться и ток в нем.

*В механической поступательной подсистеме* аналог закона Ома:

$$F = \frac{V}{R_m},$$

Здесь *механическое сопротивление*  $R_m = 1 / K$  ( $K$  - коэффициент вязкого трения) является аналогом электрического сопротивления.

*В тепловой подсистеме* аналог электрического сопротивления – *тепловое сопротивление*  $R_T$ , а аналог закона Ома:

$$P = \frac{T}{R_T}.$$

Величина  $R_T$  зависит от вида теплоотдачи.

При отводе тепла за счет *конвекции* и *излучения*

$$R_T = \frac{1}{\alpha \cdot S},$$

где  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи  $\alpha = \alpha_{\text{конв}} + \alpha_{\text{луч}}$ ,  $S$  – площадь теплоотдающей поверхности.

При *кондуктивной* передаче тепла

$$\alpha = \frac{\lambda}{l},$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $l$  - длина пути теплового потока.

### 5.2.6 Элементы типа C

На элементах типа  $C$  происходит **накопление потенциальной энергии**.

В электрической подсистеме величина  $C$  выражается в фарадах [Ф] и называется *емкостью* (рис. 5.4). В реальных электронных схемах необходимую емкость чаще всего обеспечивают включением специального радиоэлектронного компонента, называемого *конденсатором*.

По определению, ток в емкости пропорционален производной от напряжения:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Формы тока и напряжения для емкости совпадают только для экспоненциальной и гармонической зависимостей. Емкость обладает свойством непрерывности для напряжения: при ограниченном токе напряжение на емкости не может измениться скачком.

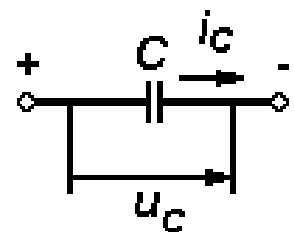


Рисунок 5.4 - Емкость

Уравнения связи фазовых переменных на элементе типа  $C$  в механической поступательной подсистеме записываются:

$$F = m \cdot a = C_M \frac{dV}{dt}.$$

В тепловой подсистеме

$$P = \frac{dQ}{dt} = C_T \frac{dT}{dt}$$

Здесь  $C$  - электрическая емкость;  $a = dV/dt$  - ускорение;  $C_M = m$  - аналог электрической емкости (масса элемента);  $C_T$  - теплоемкость объекта.

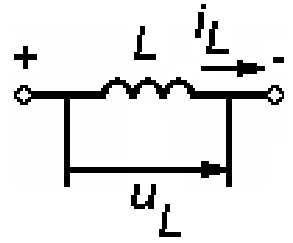


Рисунок 5.5 -  
Индуктивность.

### 5.2.7 Элементы типа $L$

На элементах типа  $L$  происходит **накопление кинетической энергии**.

В электрической подсистеме величина  $L$  выражается в генри [Гн] и называется индуктивностью (рис. 5.5). В реальных электронных схемах индуктивности обычно задают включением различных катушек и просто проводников.

Отношение, определяющее индуктивность, обратно тому, которое задает емкость, т.е. напряжение на индуктивности пропорционально производной от тока:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Для индуктивности формы тока и напряжения также различны. Кроме того, справедливо свойство непрерывности для тока: ток в индуктивности при изменении напряжения на конечную величину не может измениться скачком.

Уравнения связи фазовых переменных на элементе типа  $L$  в механической поступательной подсистеме:

$$V = L_M \frac{dF_M}{dt},$$

где  $L_M$  - аналог электрической индуктивности.

В тепловой подсистеме аналога индуктивности нет.

Емкость и индуктивность носят название **реактивных элементов**. Они проявляют себя **только в динамических режимах**. В статическом режиме индуктивность следует заменить перемычкой, а емкость вообще исключить из электрической схемы.

В табл. 5.3 приведены названия и размерности простейших пассивных компонентов-двухполюсников в рассматриваемых подсистемах РЭС.

Таблица 5.3 - Идеальные пассивные двухполюсники

Компоненты двухполюсники	Электрическая подсистема	Механическая поступательная	Тепловая подсистема
<b>типа <math>R</math></b>	Сопротивление, $R$ [Ом] (ом)	Трение, [с·кг <sup>-1</sup> ]	Тепловое сопротивление, $R_T$ , [К/Вт] (Кельвин на
<b>типа <math>C</math></b>	Емкость, $C$ [Ф] (фарада)	Масса $m$ , [кг]	Теплоемкость, $C_T$ [Дж/К] (джоуль на Кельвин)

типа $L$	Индуктивность, $L$ [Гн] (генри)	Упругость, $[c^2 \cdot кг^{-1}]$	-
----------	------------------------------------	----------------------------------	---

### 5.3 Методы формирования математических моделей

#### 5.3.1 Основные понятия

Так как большинство процессов в физически однородных подсистемах РЭС подобны, то далее в качестве образца рассмотрим подробно вопросы их моделирования лишь в электрической подсистеме.

В общем случае получение ММ не является формализованной процедурой. Выбор используемых переменных и параметров, вида математических соотношений во многом зависят от опыта и знаний, наконец, вкусов проектировщика.

Вместе с тем имеется ряд положений и приемов (теоретических и экспериментальных), общих для получения всевозможных ММ:

1) С учетом цели исследования и условий функционирования (режима работы) объекта определяются свойства объекта, которые отображаются ММ и степень ее универсальности.

2) Собирается информация о моделируемом объекте (справочные данные, научно-техническая литература, аналоги, прототипы, опыт и знания проектировщика).

3) Выбирают структуру уравнений ММ (в виде графа, схемы, формул). Если есть возможность – составляют эквивалентные схемы (схемы замещения). При этом выделяют множество элементов объекта и его структуру. Структура определяется порядком соединения (связей) элементов между собой.

4) Определяют численные значения параметров ММ. При этом стараются минимизировать погрешности ММ (например, с помощью метода наименьших квадратов).

5) Оценивают точность полученной ММ и области ее адекватности.

Напомним ключевые структурные понятия теории электрических цепей.

**Электрической цепью** называется совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий напряжения и тока. В общем случае электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии.

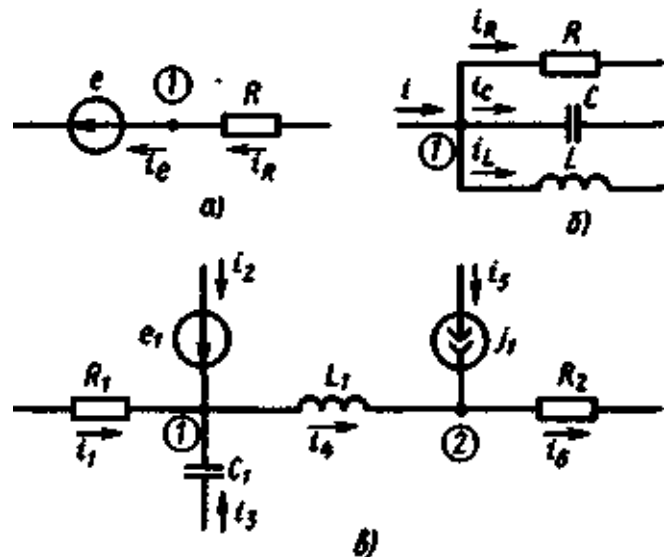


Рисунок 5.7 - Узлы электрической схемы: а) устранимый узел; б) цепь с одним узлом (неустранимым); в) – цепь с двумя узлами (неустранимыми).

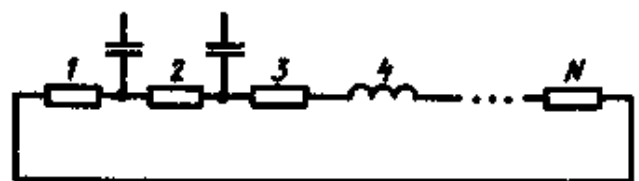


Рисунок 5.7 - Контур из  $N$  - электрических элементов



**Узел.** Если два или более элементов электрической цепи имеют общую точку, то она называется узлом. Узел будем обозначать цифрой в кружочке, соответствующей номеру узла. Примеры узлов даны на *рис. 5.6*.

**Контур.** Если *два элемента* имеют общий узел, то говорят, что они соединены *в цепочку* (*рис. 5.6, а*). В этом случае через элементы протекает один и тот же ток, и для упрощения расчетов такой узел в электротехнике часто опускают, а узел называют *устраняемым*.

Продолжая, можно получить цепочку из трех элементов и т.п.

Если все узлы в цепочке *устраняемые*, то такая цепочка элементов называется *ветвью*. Через все элементы ветви протекает один и тот же ток.

Если в такой цепочке имеются узлы, объединяющие выводы *более трех элементов*, то такие узлы называются *неустраняемыми*<sup>3</sup>.

Если в цепочке из  $N$  элементов  $N$ -й элемент имеет общий узел с первым, то такая цепочка образует *контур* (*рис. 5.7*).

Универсальными методами получения ММ различных технических подсистем являются методы топологических уравнений, узловых потенциалов, контурных токов и т.д. Эти методы отличаются друг от друга видом и размерностью получаемой системы уравнений, а также употребляемыми типами фазовых переменных. Базируются данные методы на уравнениях *равновесия* и уравнениях *непрерывности* (аналогия первого и второго закона Кирхгофа в электрической подсистеме). Эти уравнения позволяют составить *топологические* уравнения цепи.

### 5.3.2 Метод топологических уравнений

**Уравнение равновесия в электрической подсистеме** (первый закон Кирхгофа) - в любом узле схемы алгебраическая сумма мгновенных значений токов равна нулю:

$$\sum_{k \in Q} i_k = 0, \quad (5.2)$$

где  $i_k$  - ток  $k$ -й ветви;  $Q$  - множество номеров ветвей сходящихся в узле.

Под алгебраической суммой понимают сумму *мгновенных* значений токов с учетом выбранного условного направления, отмеченного стрелками. Положительное направление тока принимается обычно от узла с *большим* потенциалом к узлу с *меньшим* потенциалом. Ток в уравнении учитывается со знаком плюс, если он направлен к рассматриваемому узлу, и со знаком минус, если направлен от узла.

Например, для узла *рис. 5.6, б* уравнение равновесия запишется:

$$i - i_R - i_C - i_L = 0.$$

<sup>3</sup> Заметим, что для топологических САПР типа *P-CAD, OrCAD, Altium Designer* и т.п. понятия «устраняемый узел» не существует, так как даже соединения выводов двух элементов должны быть реализованы в САПР в любом случае с помощью реальных печатных или пленочных проводников. Другими словами, в подобных САПР все узлы «неустраняемые».

Вторая формулировка первого закона Кирхгофа - сумма втекающих в узел мгновенных значений токов равна сумме мгновенных значений токов, вытекающих из узла.

Для того же узла на *рис. 5.6, б* в этом случае

$$i = i_R + i_C + i_L.$$

Аналог первого закона Кирхгофа **в механической поступательной подсистеме** - сумма сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\sum_{k \in Q} F i_k = 0.$$

**В тепловой подсистеме** - сумма тепловых потоков в узле подсистемы равна нулю:

$$\sum_{k \in Q} i_k = 0.$$

**Уравнение непрерывности в электрической подсистеме** (второй закон Кирхгофа) - алгебраическая сумма мгновенных значений падений напряжений на элементах любого замкнутого контура в схеме равна нулю:

$$\sum_{j \in Q} u_j = 0, \quad (5.3)$$

где  $j$  - номер ветви;  $u_j$  - падение напряжения на  $j$ -й ветви схемы, входящей в контур;  $Q$  - множество номеров ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Под **алгебраической суммой** понимают сумму мгновенных значений напряжений с учетом произвольно выбранного условного направления обхода контура и падений напряжений. Положительное направление падения напряжения совпадает с направлением тока: от узла с большим потенциалом (+) к узлу с меньшим потенциалом (-). Если направление падения напряжения совпадает с выбранным направлением обхода контура, то это падение напряжения берется со знаком плюс и наоборот.

Например, для контура на *рис. 5.8* при выбранном направлении обхода контура уравнение непрерывности записывается:

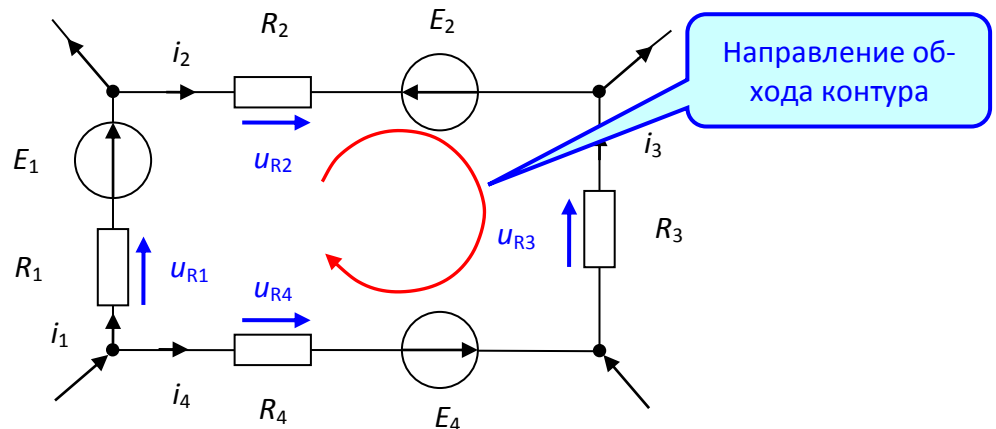


Рисунок 5.8 - Пример электрического контура

$$u_{R1} - E_1 + u_{R2} + E_2 - u_{R3} + E_4 - u_{R4} = 0. \quad (5.4)$$

Вторая форма записи **уравнения непрерывности в электрической подсистеме** - в каждом электрическом контуре алгебраическая сумма напряжений равна алгебраической сумме ЭДС с учетом произвольно выбранного направления обхода:

$$\sum_k u_k = \sum_i e_i$$

В этом случае, для контура *рис. 5.8*

$$u_{R1} + u_{R2} - u_{R3} - u_{R4} = E_1 - E_2 - E_4.$$

**В механической поступательной подсистеме** - сумма относительных и переносных скоростей равна нулю:

$$\sum_{j \in Q} V_j = 0.$$

**В тепловой подсистеме** - сумма разностей температур при обходе по замкнутому контуру равна нулю:

$$\sum_{j \in Q} T_j = 0.$$

Уравнения равновесия и непрерывности строго справедливы для установившихся режимов, но их можно применять и для динамических режимов, когда время распространения сигнала по линиям связи между элементами несоизмеримо меньше, чем длительность переходного процесса в схеме.

Если в схеме количество узлов  $N_{\text{узл}}$ , количество независимых источников тока  $N_J$ , количество идеальных источников напряжения  $N_E$ , а общее число элементов в схеме  $N \geq N_{\text{узл}} + 1$ , то необходимо составить

$$N_{\text{ур}}^1 = N_{\text{узл}} - 1 - N_E$$

независимых уравнений равновесия, которые будут содержать  $N - N_J$  неизвестных.

Количество независимых уравнений непрерывности  $N_{\text{ур}}^2$  для схемы равно числу независимых контуров (хотя бы одна ветвь в таком контуре должна отличаться от предыдущих):

$$N_{\text{ур}}^2 = N_B - N_{\text{узл}} + 1 - N_J,$$

где  $N_B$  – количество ветвей в схеме.

**Проверьте** – количество неизвестных фазовых переменных в системе уравнений **обязательно** должно быть равно числу уравнений!

### 5.3.3 Метод узловых потенциалов

Количество уравнений, описывающих состояние подсистемы, по сравнению с описанием с помощью уравнений равновесия и непрерывности может быть сокращено, если использовать не тот методы. Одним из первостепенных методов формирования ММ в программном обеспечении САПР считается *метод узловых потенциалов*.

Метод узловых потенциалов основан на уравнениях равновесия и законе Ома. При этом число уравнений, описывающих схему, равно числу уравнений, которые необходимо составить по первому закону Кирхгофа.

Ток в любой ветви схемы можно найти по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Это становится возможным, если известны *потенциалы узлов схемы* относительно *опорного* узла, потенциал которого принимают равным нулю.

Если схема имеет в своем составе  $N_{\text{узл}}$  узлов, а потенциал опорного узла  $\varphi_{N_{\text{узл}}} = 0$ , то для любого узла  $p$  схемы ( $p = 1, 2, \dots, N_{\text{узл}} - 1$ ) можно составить в общей форме уравнение:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{N_{\text{оцё}}} g_{p,j} \cdot \varphi_p - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{N_{\text{оцё}}} g_{p,j} \cdot \varphi_j = J_p + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{N_{\text{оцё}}} g_{p,j} \cdot E_{p,j} \quad (5.5)$$

где

- ✓  $\varphi_p, \varphi_j$  – потенциалы узлов с номерами  $p$  или  $j$  соответственно;
- ✓  $g_{p,j}$  – сумма проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы;
- ✓  $J_p$  – *узловой* ток, равный алгебраической сумме токов всех источников тока, присоединенных к рассматриваемому узлу. Со знаком "плюс" учитывают токи, направленные к узлу, со знаком "минус" – от узла;
- ✓  $E_{p,j}$  – ЭДС *источников*, присоединенных к рассматриваемому узлу  $p$  (произведения вида  $g_{p,j} \cdot E_{p,j}$  записываются с положительным знаком в том случае, когда ЭДС направлена к рассматриваемому узлу, и с отрицательным, когда ЭДС направлена от узла).

Сформируем ММ по методу узловых потенциалов для схемы электрической подсистемы рис. 5.9, содержащей  $N_{\text{узл}} = 4$  узла, при  $\varphi_4 = 0$ .

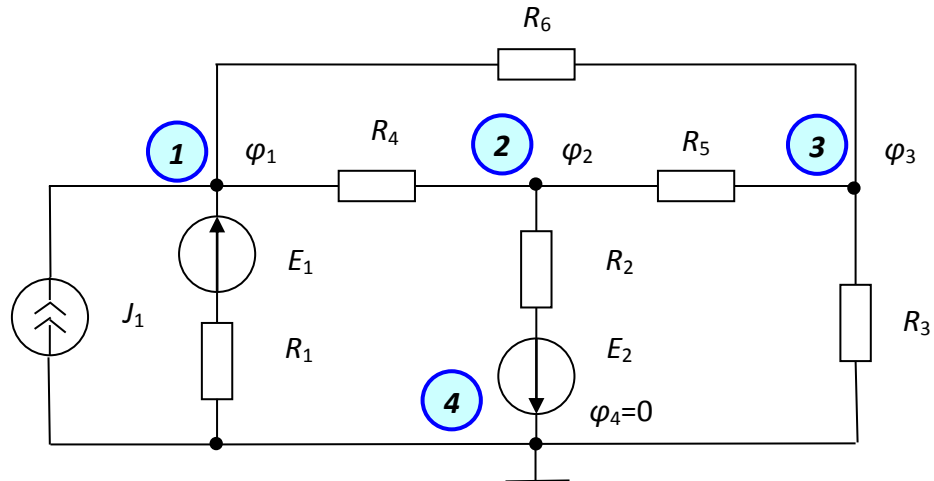


Рисунок 5.9 - Электрическая схема для расчета методом узловых потенциалов

Преобразуем все сопротивления в проводимости:

$$g_1 = 1 / R_1, \quad g_2 = 1 / R_2, \quad g_3 = 1 / R_3, \quad g_4 = 1 / R_4, \quad g_5 = 1 / R_5, \quad g_6 = 1 / R_6.$$

Запишем уравнения:

для узла 1:  $(g_1 + g_4 + g_6) \cdot \varphi_1 - g_4 \cdot \varphi_2 - g_6 \cdot \varphi_3 = J_1 + g_1 \cdot E_1;$

для узла 2:  $(g_2 + g_4 + g_5) \cdot \varphi_2 - g_4 \cdot \varphi_1 - g_5 \cdot \varphi_3 = -g_2 \cdot E_2;$

для узла 3:  $(g_3 + g_5 + g_6) \cdot \varphi_3 - g_6 \cdot \varphi_1 - g_5 \cdot \varphi_2 = 0.$

Обозначим:

- ✓ суммарную проводимость ветвей, присоединенных к узлу  $p$ , *собственной узловой проводимостью этого узла*:

$$\checkmark \sum g_{p,j} = g_{p,p};$$

- ✓ проводимости параллельных ветвей, соединяющих узлы  $p$  и  $j$  - *общей узловой проводимостью*  $g_{p,j}$ ;
- ✓ алгебраическую сумму правых частей уравнения для узла  $p$  -  $J_{cp}$ .

Тогда можно записать систему:

$$\begin{aligned} +g_{1,1} \cdot \varphi_1 & -g_{1,2} \cdot \varphi_2 & -g_{1,3} \cdot \varphi_3 & = J_{c1}; \\ -g_{2,1} \cdot \varphi_1 & +g_{2,2} \cdot \varphi_2 & -g_{2,3} \cdot \varphi_3 & = J_{c2}; \text{ где} \\ -g_{3,1} \cdot \varphi_1 & -g_{3,2} \cdot \varphi_2 & +g_{3,3} \cdot \varphi_3 & = J_{c3}. \end{aligned}$$

- ✓  $g_{1,1} = g_1 + g_4 + g_6$ ,  $g_{2,2} = g_2 + g_4 + g_5$ ,  $g_{3,3} = g_3 + g_5 + g_6$  - собственные проводимости узлов (суммы проводимостей ветвей, подходящих к соответствующему узлу);
- ✓  $g_{1,2} = g_{2,1} = g_4$ ,  $g_{1,3} = g_{3,1} = g_6$ ,  $g_{2,3} = g_{3,2} = g_5$  - общие проводимости узлов;
- ✓  $J_{c1} = J_1 + g_1 \cdot E_1$ ,  $J_{c2} = -g_2 \cdot E_2$ ,  $J_{c3} = 0$  - узловые токи.

Или в матричной форме:

$G \cdot \varphi = J$ , где

$$G = [g_{i,j}] = \begin{bmatrix} +g_{1,1} & -g_{1,2} & -g_{1,3} \\ -g_{2,1} & +g_{2,2} & -g_{2,3} \\ -g_{3,1} & -g_{3,2} & +g_{3,3} \end{bmatrix}$$

- матрица коэффициентов (проводимостей) системы;

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \text{ - столбец неизвестных;}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{c1} \\ J_{c2} \\ J_{c3} \end{bmatrix} \text{ - столбец свободных членов.}$$

Таким образом, ММ для схемы на *рис. 5.9* по методу узловых потенциалов изображается системой АУ из трех уравнений. Тип фазовых переменных – *узловые потенциалы*. ММ этой же схемы при использовании уравнений непрерывности и равновесия описывается системой АУ из шести уравнений, фазовые переменные - *токи* и *напряжения*.

## 6 Численное решение алгебраических уравнений (АУ)

### 6.1 Постановка задачи

Знание методов численного решения систем АУ необходимо пользователям САПР РЭС, т.к. проектировщик должен представлять возможности методов, заложенных в САПР, уметь оценивать вычислительные затраты, необходимые для решения конкретных задач, диагностировать причины возможных отказов, уметь правильно и грамотно формулировать задание для САПР и настраивать программное обеспечение на работу в оптимальном режиме.

### 6.2 Решение линейных алгебраических уравнений

Пусть ММ подсистемы РЭС описывается системой из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1;$$

$$a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \dots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2;$$

.....

$$a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \dots + a_{n,n} \cdot x_n = b_n. \quad (6.1)$$

В матричной форме

$$A \cdot X = B, \text{ где}$$



$$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ - матрица коэффициентов системы;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ - столбец свободных членов; } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ - столбец неизвестных.}$$

Если матрица  $A$  *неособенная*, т.е.  $\det A \neq 0$ , то система (5.1) является системой совместных алгебраических уравнений, которая имеет единственное решение – вектор неизвестных  $X$ .

### 6.2.1 Численное решение систем линейных АУ

Систему (6.1) легко решить с помощью обратной матрицы  $A^{-1}$ , получаемой путем обращения матрицы  $A$ . Вектор неизвестных  $X$  может быть получен путем *умножения обратной матрицы на вектор-столбец свободных членов  $B$* :

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (6.2)$$

Одним из популярных методов решения систем линейных АУ является *метод исключения Гаусса*.

При большой размерности системы АУ рассмотренные выше «точные» методы дают чрезвычайно большую погрешность из-за неизбежных ошибок округления при выполнении компьютером математических операций над числами с плавающей запятой, хранящимися в ячейках памяти с ограниченной разрядностью. В этом случае применяются *приближенные итерационные методы* нахождения корней АУ: методы *последовательных итераций, Зейделя, Ньютона* и т.п., позволяющие получить решение *с заданной точностью*.

### 6.2.2 Решение линейных АУ в MathCAD

Для решения систем линейных алгебраических уравнений в системе **MathCAD** можно использовать несколько приемов.

#### 1. Использование встроенной функции *Isolve(...)*.

Пусть задана система линейных уравнений:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

$$-x + 5y = 0$$

Матрицы коэффициентов:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система может быть представлена как  $A \cdot X = B$ , её решение:

$$lsolve(A, B) = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

2. Нахождение корней линейных АУ матричным способом:

$$X := A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

3. Нахождение корней линейных АУ при помощи блока Given ... Find(...)

$$x := 0 \quad y := 0$$

Given

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$

$$-x + 5y = 0$$

$$X := Find(x, y)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

## 6.3 Решение нелинейных алгебраических уравнений

### 6.3.1 Общие сведения

Необходимость отыскания корней нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений встречается при расчетах электронных схем с элементами, обладающими нелинейными характеристиками (диодами, транзисторами, трансформаторами с сердечниками и т.п.). Нелинейные системы уравнений могут представлять ММ тепловых режимов РЭС, собственных колебаний машин, конструкций со многими степенями свободы и т.д.

В отличие от систем линейных уравнений, системы нелинейных уравнений за очень редкими исключениями не могут быть решены с помощью прямых методов.

Для решения нелинейных уравнений наиболее пригодными для реализации на компьютере являются методы последовательных приближений (итерационные).

Итерационные методы сводятся к последовательному уточнению начального приближения корня до заданной точности.

### 6.3.2 Отделение корней

**Отыскание начального приближения корней** называют их отделением. Алгебраические уравнения  $m$ -й степени

$$a_0 \cdot x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + \dots + a_{m-1} \cdot x + a_m = 0$$

имеют  $m$  корней, которые при действительных коэффициентах могут быть или действительными или комплексными числами. Трансцендентные уравнения включают степенные алгебраические, тригонометрические и экспоненциальные функции от некоторого аргумента  $x$ . Такие уравнения могут иметь бесконечное множество корней.

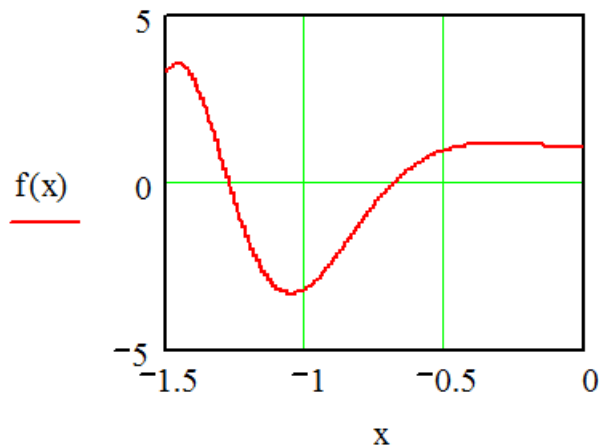
Отделить корни можно попытаться аналитически. Например, взять производную от функции, приравнять ее нулю и решив полученное уравнение, найти точки, где функция

может изменить направление. Если функция на интервале между двумя такими точками *меняет знак*, значит, на этом интервале есть корень.

Однако часто проще отделить корень путем анализа графика функции, построенного в системе **MathCAD** или аналогичных системах.

Для примера, с помощью **MathCAD** построим для отделения корней на интервале  $-1.5 \leq x \leq 0$  график функции

$$f(x) := \exp(-x) \cdot \cos(3 \cdot x^2) + 0.5 \cdot x$$



Как видно из графика, функция на заданном интервале имеет два корня, которые находятся на интервалах  $-1.35 \leq x_1 \leq -1.2$  и  $-0.75 \leq x_2 \leq 0.6$ .

### 6.3.3 Метод Ньютона

После отделения корней следует провести их *уточнение приближенными методами*, например методом *простой итерации*, методом *половинного деления*, методом *Ньютона* или другими методами.

В системах САПР наибольшее распространение получил метод *Ньютона* и его модификации, который обеспечивает быструю сходимость по сравнению с методом *простой итерации*.

Пусть задана система нелинейных уравнений вида

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0;$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0;$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (6.3)$$

или в матричной форме

$$F(X) = 0. \quad (6.4)$$

Все  $n$  уравнений приведенной выше системы можно представить в виде рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n) = \\ = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{df_1}{dx_1} + \dots + \Delta x_n \frac{df_1}{dx_n} + \text{члены более высоких порядков;} \end{aligned}$$

.....

$$f_n(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n) = \\ = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \Delta x_1 \frac{df_n}{dx_1} + \dots + \Delta x_n \frac{df_n}{dx_n} +$$

Если приращения  $\Delta x_i$  таковы, что функция  $f_i$  принимает значение близкое к нулю, то будем считать, что левые части этих уравнений обращаются в нули.

Таким образом, задача сводится к отысканию такой совокупности приращений  $\Delta x_i$ , при которой достигается указанная цель. Отбросив члены более высоких порядков, сведем задачу к решению системы линейных уравнений.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_n \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

в которой матрицу частных производных и вектор-столбец правой части можно оценить для любого приближенного решения. Найденные значения  $\Delta x_i$  в дальнейшем используются как поправки к исходному приближенному решению:

$$x_1 = x_1 + \Delta x_1,$$

.....

$$x_n = x_n + \Delta x_n.$$

Если все корректирующие приращения становятся меньше заданной абсолютной погрешности  $\varepsilon$ , счет прекращается. Используя матричную форму записи, можно представить метод Ньютона с помощью итерационной формулы

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{F(X^{(k)})}{\mathcal{Y}(X^{(k)})}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots - \text{номер итерации};$$

$\mathcal{Y}(X^{(k)})$  - квадратная матрица частных производных вектор-функции  $F(X^{(k)})$  по вектору  $X^{(k)}$  для заданной системы уравнений.

Важным моментом расчета является сходимость. Если значения корней значительно отличаются друг от друга, то условие

$$\Delta x_i^{(k)} \leq \varepsilon, \quad \text{где } i = 0, 1, \dots, n$$

может оказаться слишком завышенным для корней  $x_i$ , имеющих большие значения. В таких случаях следует пользоваться нормированными корректирующими приращениями, сравнивая их с относительной погрешностью  $\bar{\varepsilon}$

$$\frac{\Delta x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \leq \bar{\varepsilon}, \quad \text{где } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

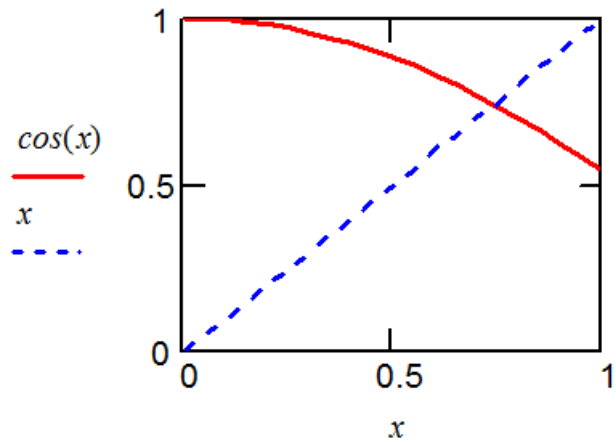


Рисунок 6.1 - Графическое решение уравнения  $x = \cos(x)$

Как и для других итерационных методов, для метода Ньютона существует проблема сходимости. Величина области сходимости обратно пропорциональна степени сложности и числу уравнений. Кроме того, на сходимость в сильнейшей степени влияют выбор начального приближения неизвестных и заданная погрешность вычислений.

### 6.3.4 Нахождение корней уравнения с одним неизвестным в MathCAD

В **MathCAD** нахождение корней уравнения обеспечивает функция **root**.

**Пример.** Пусть необходимо найти корень трансцендентного уравнения  $x = \cos(x)$ . Графическое решение этого уравнения показано на рис. 6.1.

Зададим начальное значение

$$x := 1$$

Решение с помощью функции

$$\text{root}(x - \cos(x), x) = 0.74$$

Точность вычислений задаётся системной переменной TOL, равной по умолчанию  $10^{-3}$  и определённой в меню *Math\Options*. Проиллюстрируем полученное решение.

$$TOL := 10^{-8}$$

$$x_0 := \text{root}(x - \cos(x), x)$$

$$x_0 = 0.739$$

$$x := 0, 0.05. 1$$

Здесь мы явно изменили значение системной переменной TOL.  $x_0$  - переменная с текстовым индексом, который вводится при помощи точки:  $x_0$ . *Текстовый индекс* - это просто декоративное украшение, он является составной частью имени переменной.

Отметим ещё, что при выводе результата отображается только 3 значащих цифры после десятичной точки. Эту установку можно изменить в меню *Format\Number* в переменной *Displayed Precision*.

### 6.3.5 Поиск корней уравнений при помощи блока Given .. Find(...) в MathCAD

Здесь могут решаться уже системы уравнений с несколькими неизвестными, однако, как и в предыдущем случае, необходимо задание начальной точки, от которой будет происходить поиск.

Решение ищется методом итераций и при наличии нескольких корней, очевидно, будет найдено лишь ближайшее решение, если оно существует.

$$x := 1 \quad y := 1$$

*Given*

$$x^3 + \sin(y) = 25$$

$$y^2 - \cos(x) = 27$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

$$x = 2.96 \quad y = 5.101$$

Таким же образом можно решать и системы линейных уравнений, однако придется задавать начальное приближение, потому что системы линейных уравнений лучше решать матричным методом.

### 6.3.6 Поиск решения при помощи блока Given .. Minerr(...) в MathCAD

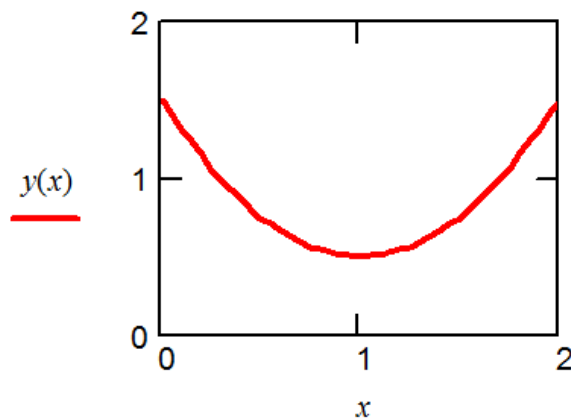
Осуществляется подобный поиск практически так же, что и в предыдущем случае. Однако здесь решение будет найдено в любом случае, даже при его отсутствии. Дело в том, что здесь ищется не решение системы, а *минимальная невязка* уравнений.

Рассмотрим функцию, заведомо не имеющую действительных корней и найдем точку, в которой эта функция наиболее приближена к оси  $x$ .

При построении графика необходимо указать начальное значение  $y = 0$ .

$$y(x) := x^2 - 2 \cdot x + 1.5$$

$$x := 0, 0.05 \dots 2]$$



Для этого простого случая очевидно, что наименьшая невязка функции будет при  $x = 1$ .

$$x := 0$$

*Given*

$$y(x) = 0$$

$$\text{Minerr}(x) = 1$$

Первая строка даёт нам решение  $x = 1$ , а системная переменная ERR показывает невязку уравнения.

$$ERR = 0.25$$

Аналогично решаются и более сложные уравнения или их системы.

### 6.3.7 Решение уравнений в символьном виде



Некоторые уравнения **MathCAD** может разрешить в символьном виде. Для этого существуют три возможности:

- первая - это использование меню Symbolics,
- вторая - использование оператора *solve*,  $x$  и третья - использование блока Given .... Find(...).





Например, запишем квадратный трёхчлен, выделим переменную  $x$  и выберем в меню пункт `Symbolics\Variable\Solve`. Получим решение в символьном виде.

Для того, чтобы решение было записано справа от выражения, необходимо установить флажок в меню `Symbolics\Evaluation Style\Horizontally`

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot (-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}) \\ \frac{1}{(2 \cdot a)} \cdot (-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}) \end{array} \right]$$

При использовании оператора `?` необходимо иметь в виду, что переменные не должны быть определены заранее, так попытка раскрытия квадратного уравнения

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ solve, } x \rightarrow$  приведёт к ошибке  
однако, квадратный трёхчлен

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c \text{ solve, } z \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[ -b + (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[ -b - (b^2 - 4 \cdot a \cdot c)^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right]$$

раскрывается вполне удовлетворительно.

Попробуем решить систему линейных уравнений.

*Given*

$$u + 2 \cdot \pi \cdot v = a$$

$$4 \cdot u + v = b$$

$$\text{Find}(u, v) \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{(2 \cdot \pi \cdot b - a)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \\ \frac{(4 \cdot a - b)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \end{array} \right]$$

В данном случае, нам пришлось вводить неиспользованные до сих пор переменные  $u$   $v$ , поскольку переменные  $x$   $y$  уже определены. Обойти эти трудности можно довольно просто, если решить уравнение на новом рабочем листе.

Покажем ещё решение для полинома третьего порядка.

$$a := 1$$

$$b := 1$$

$$c := 1$$

$$d := 1$$

Мы определили заранее значение констант, в противном случае решение получится в общем виде, и на лист не помещается. Попробуйте его вывести и посмотрите, что получится.

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d \text{ solve } , z \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

## 7 Индивидуальные задания

### 7.1 Варианты линейных подсистем РЭС

1. Получить у преподавателя номер варианта задания и сформировать на основе обобщенной схемы блока РЭС (рис. 7.1) схему анализируемой *линейной* электрической подсистемы. Параметры элементов выбирать в соответствии со своим вариантом по табл. 7.1. Если параметр элемента равен 0, то это означает, что соответствующий элемент в формируемой схеме отсутствует. Знак «-» означает смену направления соответствующего источника фазовой переменной.

2. Разработать ММ полученной линейной подсистемы:

- 1) методом топологических уравнений;
- 2) методом узловых потенциалов.

При формировании ММ будьте внимательны со знаками! Рекомендуется описания ММ представлять в общем виде, не рассчитывая значения коэффициентов уравнений.

3. Провести анализ ММ заданной подсистемы с помощью системы **MathCAD**.

4. Убедиться, что полученные результаты анализа двух ММ идентичны. Для их сравнения целесообразно предусмотреть вспомогательные уравнения перехода от вектора фазовых переменных одной ММ к вектору фазовых переменных другой ММ.

5. Запустить схемотехническую САПР MicroCAP и ввести в графическом виде свой вариант схемы. Получить решение и сравнить его с результатами, полученными в п.4.

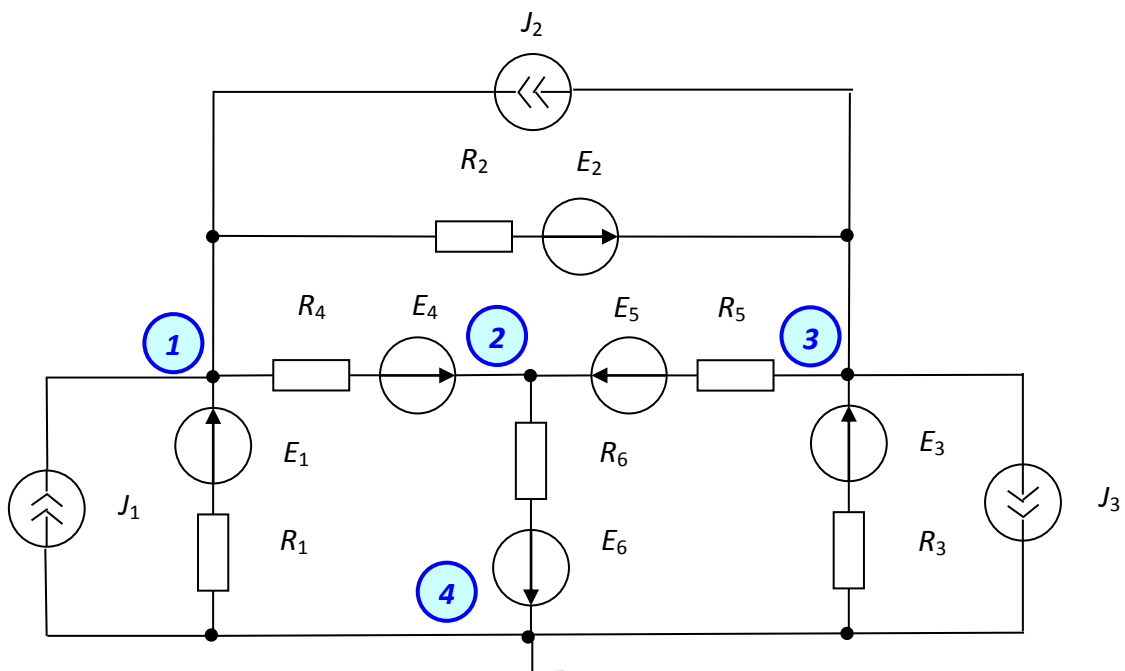


Рисунок 7.1 - Обобщенная схема электрическая принципиальная блока РЭС

## 6. Сделать выводы

Таблица 7.1 – Варианты параметров элементов (в системе СИ) к обобщенной схеме электрической принципиальной на рис. 7.1

№	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
1.	50	100	150	200	250	300	0	-5	10	15	20	25	1	2	0
2.	100	150	200	250	300	50	10	15	20	25	0	-5	2	0	1
3.	150	200	250	300	50	100	15	20	25	0	-5	10	0	1	2
4.	200	250	300	50	100	150	20	25	0	5	10	15	-1	2	0
5.	250	300	50	100	150	200	25	0	5	10	15	20	2	0	1
6.	300	50	100	150	200	250	0	5	10	15	20	25	0	-1	2
7.	300	250	200	150	100	50	0	-5	-10	-15	20	25	-1	2	0
8.	150	100	50	300	250	200	20	25	0	-5	-10	-15	1	0	1
9.	200	150	100	50	300	250	-15	20	25	0	-5	-10	0	1	2
10.	150	100	50	300	250	200	20	25	0	-5	-10	-15	1	2	0
11.	100	50	300	250	200	150	25	0	-5	-10	-15	20	2	0	1
12.	50	300	250	200	150	100	0	-5	-10	-15	20	25	0	-1	-2
13.	50	100	150	200	250	300	0	5	10	15	-20	-25	-1	-2	0
14.	100	150	200	250	300	50	10	15	-20	-25	0	5	-2	0	-1
15.	150	200	250	300	50	100	15	-20	-25	0	5	10	0	-1	-2
16.	200	250	300	50	100	150	-20	-25	0	5	10	15	-1	-2	0
17.	250	300	50	100	150	200	-25	0	5	10	15	-20	-2	0	-1
18.	300	50	100	150	200	250	0	5	10	15	-20	-25	0	-1	-2
19.	300	250	200	150	100	50	0	-5	-10	-15	20	25	-1	-2	0
20.	250	200	150	100	50	300	-10	-15	20	25	0	-5	-2	0	-1
21.	200	150	100	50	300	250	-15	20	25	0	-5	-10	0	1	2
22.	150	100	50	300	250	200	20	25	0	-5	-10	-15	1	2	0
23.	100	50	300	250	200	150	25	0	-5	-10	-15	20	-2	0	-1
24.	50	300	250	200	150	100	0	-5	-10	-15	20	25	0	-1	-2
25.	50	100	150	200	250	300	0	-5	10	-15	20	-25	1	-2	0

## Список рекомендуемой литературы

1. **Кобрин, Ю.П.** Применение системы автоматизации научно-технических расчетов MathCAD при проектировании РЭС. - Томск : ТУСУР, кафедра КИПР, 2012. - 52 с.
2. **Каганов, В.И.** Радиотехника + компьютер + Mathcad. - М. : Горячая линия - Телеком, 2001. - 416 с.
3. **Гурский Д.А., Турбина Е.С.** Вычисления в Mathcad 12. - СПб. : Питер , 2006. - 544 с.
4. **Очков , В.Ф.** Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. . —СПб. : БХВ-Петербург, 2007. — 368 с.
5. **Амелина М.А., Амелин С.А.** Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. - М. : Горячая линия-Телеком, 2007. - 464 с.
6. **Касьянов, А.Н.** Micro-Cap в схемотехнике: Учебное пособие. - Тамбов Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. - 112 с.

7. **Разевиг, В.Д.** . Схемотехническое моделирование с помощью Micro-Cap 7 . - М. : Горячая линия-Телеком, 2003. - 368 с.
8. САПР: в 9 кн. Кн. 4: Математические модели технических объектов: Учеб. пособие для вузов / В.А. Трудоношин, М.В. Пивоварова: Под ред. И.П. Норенкова. - Мн. : Высш. шк., 1988. - 159 с.
9. САПР: в 9 кн. Кн. 5: Автоматизация функционального проектирования: Учеб. пособие для вузов / П.К. Кузьмик, В.Б. Маничев; Под ред. И.П. Норенкова. - Мн. : Высш. шк., 1988. – 141 с.
10. **Ненашев, А.П.** Конструирование радиоэлектронных средств. - М. : Высш. шк., 1990. - 432 с.
11. Основы теории цепей. Учебник для вузов/ Г.В. Зевеке, И.А. Ионкин, и др. - 5-е изд., перераб. – М. : Энергоатомиздат, 1989. - 527 с.
12. **Бессонов, Л.А.** Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л. А. Бессонов. - 10-е изд. - М. : Гардарики, 2001. - 640 с.