

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессио-нального образования  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра ЭМИС

Буймов Б.А.

# **КОМПЬЮТЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГРАФИКА**

Учебное пособие

2012

Буймов Б.А.

Компьютерная геометрия и графика. Учебное пособие. - Томск: Кафедра экономики ТУСУР, 2012. - 108 с.

Учебное пособие посвящено рассмотрению математического аппарата, лежащего в основе компьютерной графики. В нем изложены способы представления на компьютере элементов графики, геометрических фигур и поверхностей различных классов, описаны математические методы преобразования координат. получения аксонометрических и перспективных проекций.

Пособие рассчитано на студентов вузов.

## Содержание

1	ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ .....	5
1.1	Введение .....	5
1.2	Матричные операции.....	5
1.2.1	Сложение и вычитание.....	6
1.2.2	Умножение .....	6
1.2.3	Определитель квадратной матрицы.....	7
1.2.4	Обращение квадратной матрицы .....	7
1.3	Преобразование точек .....	8
1.4	Преобразование прямых линий.....	11
1.5	Параллельные линии .....	13
1.6	Пересекающиеся линии.....	14
1.7	Преобразование плоских фигур .....	15
1.7.1	Вращение .....	15
1.7.2	Отображение .....	16
1.7.3	Изменение масштаба .....	17
1.7.4	Преобразование единичного квадрата .....	19
1.7.5	Произвольная матрица вращения $2 \times 2$ .....	20
1.7.6	Двумерное смещение и однородные координаты.....	21
1.7.7	Точки в бесконечности.....	25
1.7.8	Композиция преобразований на плоскости .....	26
2	ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРОЕКЦИИ.....	28
2.1	Изменение масштаба .....	29
2.2	Сдвиг .....	30
2.3	Вращение вокруг координатных осей .....	31
2.4	Отображение относительно координатных плоскостей.....	33
2.5	Пространственный перенос .....	33
2.6	Трёхмерное вращение вокруг произвольной оси.....	33
2.7	Некоторые сведения из математики .....	34

2.8	Аффинная и перспективная геометрия.....	39
2.8.1	Аксонметрические проекции.....	40
2.8.2	Ортогональная аксонметрическая проекция .....	41
2.8.3	Диметрическая проекция .....	43
2.8.4	Изометрическая проекция.....	46
2.8.5	Перспективные преобразования и проекции .....	47
2.8.6	Восстановление трехмерной информации .....	52
3	ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ .....	56
3.1	Математическое описание плоских кривых .....	56
3.2	Окружность.....	58
3.3	Эллипс .....	63
3.4	Парабола .....	65
3.5	Гипербола.....	67
4	ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ .....	70
4.1	Представление пространственных кривых .....	70
4.2	Кубические сплайны.....	71
4.3	Кривые Безье .....	77
4.4	В-сплайны .....	81
5	ОПИСАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ.....	88
5.1	Сферические поверхности .....	89
5.2	Билинейные поверхности.....	94
5.3	Линейчатые поверхности .....	95
5.4	Линейные поверхности Кунса .....	96
5.5	Участок бикубической поверхности.....	97
5.6	Поверхности Безье .....	100
5.7	В – сплайн поверхности .....	103
	Алфавитный указатель .....	105
	Рекомендуемая литература .....	108

# 1 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## 1.1 ВВЕДЕНИЕ

Ниже мы рассмотрим лежащие в основе машинной графики положения математики, необходимые для представления и преобразования точек и линий.

На плоскости точку представляют с помощью двух ее координат. Их значения можно рассматривать как элементы матрицы вектор-строки  $[x \ y]$  или вектор-столбца  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . В пространстве каждая точка представляется тремя

координатами – аналогично  $[x \ y \ z]$  или  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ .

Последовательность точек, образующих объект, может быть представлена, таким образом, в виде матрицы чисел. Положением точек можно управлять путем преобразования матриц. В результате многие физические задачи можно привести к следующей формулировке. Пусть даны матрицы  $A$  и  $B$ , и задана их взаимосвязь:  $AT = B$ . Необходимо найти матрицу преобразования  $T$ .

С другой стороны, матрицу  $T$  можно рассматривать как оператор, а умножение  $A$  на  $T$  – как геометрическое преобразование над системой точек, содержащихся в матрице  $A$ . При этом матрицы  $A$  и  $T$  должны быть известны. Такая интерпретация является основой математических преобразований, используемых в машинной графике.

Прежде чем перейти к рассмотрению отдельных видов преобразований, вспомним основные положения математической алгебры.

## 1.2 МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Матрица – это прямоугольный массив чисел размером  $m \times n$  ( $m$  – число строк,  $n$  – число столбцов). Если  $m = n$ , то матрица называется квадратной. Размер матрицы называют ещё порядком. Элементы  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , ... называются

диагональными. Нулевая матрица – такая, в которой все элементы равны 0. Единичная матрица – в которой все диагональные элементы равны 1, а остальные – 0.

### 1.2.1 Сложение и вычитание

Если две матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковый порядок  $m \times n$ , то допустимо их сложение и вычитание. Результирующая матрица будет иметь тот же порядок. Сложение и вычитание матриц осуществляется поэлементно, то есть если

$$C = A \pm B, \quad \forall i$$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

### 1.2.2 Умножение

Это самая распространенная матричная операция в машинной графике. Пусть матрица  $A$  имеет размерность  $k \times m_1$ , матрица  $B$  –  $m_2 \times n$ . Умножение матриц определено только в том случае, если  $m_1 = m_2$ , то есть число столбцов левой матрицы в произведении  $AB$  равно числу строк правой матрицы. Результирующая матрица будет иметь порядок  $k \times n$ . Значения элементов матрицы  $C = AB$  определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Например, при умножении матрицы  $A$  размером  $4 \times 3$  на матрицу  $B$  размером  $3 \times 2$  получим матрицу  $C$  размером  $4 \times 2$ . Элемент матрицы  $C$  с номером, например,  $(3; 2)$  определяется как

$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32},$$

то есть как сумма произведений элементов третьей строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы второго столбца матрицы  $B$ .

Важно иметь в виду, что умножение матриц не коммутативно, то есть

$$AB \neq BA.$$

При этом выполняются левая и правая дистрибутивность относительно сложения  $A(B + C) = AB + AC$  и  $(A + B)C = AC + BC$  и ассоциативность  $A(BC) = (AB)C = ABC$ .

### 1.2.3 Определитель квадратной матрицы

Определитель квадратной матрицы  $A$  обозначается  $|A|$ . Определитель матрицы  $2 \times 2$   $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Определитель матрицы  $3 \times 3$ :

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Определитель матрицы  $n \times n$ :

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|,$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение матрицы  $A$  – это матрица размером  $(n-1) \times (n-1)$ , получаемая путём вычёркивания из матрицы  $A$  элементов  $i$ -той строки и элементов  $j$ -того столбца;

$$|A_{ij}| \text{ – определитель матрицы } A_{ij}.$$

### 1.2.4 Обращение квадратной матрицы

В матричной алгебре операция деления не определена. Поэтому в выражении

$$AT = B.$$

матрица  $T$  определяется как

$$T = A^{-1}B.$$

в том случае, если  $A$  – квадратная матрица. Матрица  $A^{-1}$  называется обратной к матрице  $A$ .

Произведение обратных матриц даёт единичную матрицу того же порядка:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица вычисляется следующим образом

$$A^{-1} = 1/|A| \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \cdots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & \cdots & [A_{2n}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [A_{n1}] & [A_{n2}] & \cdots & [A_{nn}] \end{bmatrix}^T,$$

где  $|A_{ij}|$  – по-прежнему определители алгебраических дополнений, верхний символ  $T$  означает операцию транспонирования, то есть записи строк столбцами, а столбцов – строками.

Видно, что если  $|A|=0$ , то матрицы  $A^{-1}$  не существует. В остальных случаях матрица  $A^{-1}$  существует и единственна.

### 1.3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧЕК

Рассмотрим результаты матричного умножения матрицы  $[x \ y]$ , определяющей точку  $P$  на плоскости, и матрицы преобразования  $2 \times 2$  общего вида:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax + cy) \ (bx + dy)] = [x^* \ y^*]. \quad (1.1)$$

Эта запись означает, что исходные координаты точки  $P$   $x$  и  $y$  преобразованы в  $x^*$ ,  $y^*$ , где  $x^* = ax + cy$ ;  $y^* = bx + dy$ . Проведём анализ этого преобразования, рассматривая отдельные частные случаи.

1)  $a = d = 1$ ,  $c = b = 0$ ,

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y] = [x^* \ y^*],$$

то есть положение точки  $P$  не изменилось.



$$2) d=1, b=c=0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

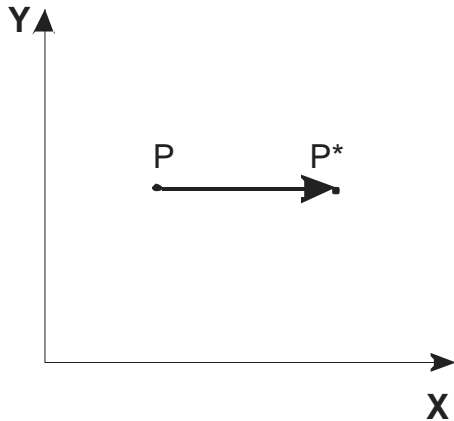


Рисунок 1.1

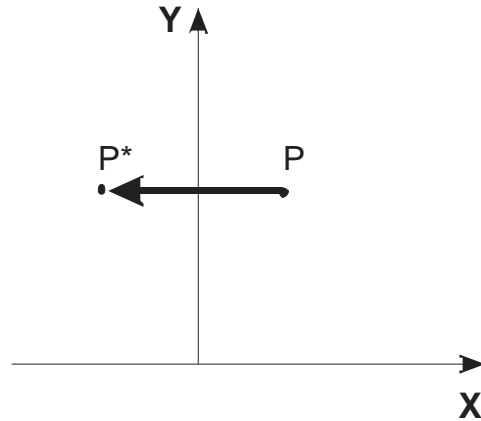


Рисунок 1.2

Получили изменение масштаба по оси:  $x^* = ax$  или перемещение точки  $P$  по оси  $x$ . Если  $a > 1$ , то происходит увеличение масштаба (перемещение вправо); если  $0 < a < 1$ , то уменьшение масштаба (перемещение влево) (см. Рисунок 1.1).

Если  $a < 0$ , то происходят аналогичные изменения, но с отображением относительно оси  $y$  (см. Рисунок 1.2).

$$3) a=1, b=c=0,$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Здесь происходят аналогичные изменения масштаба, но по оси  $y$ , и отображение (если  $d < 0$ ) относительно оси  $x$ .

$$4) b=c=0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Изменение масштаба (перемещение) происходит по обеим осям (если  $d < 0$ , то не одинаково), отображение, если  $a < 0$  или  $b < 0$ , то относительно осей  $y$  или  $x$  соответственно, а если  $a = d < 0$  вместе, то относительно начала координат.

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

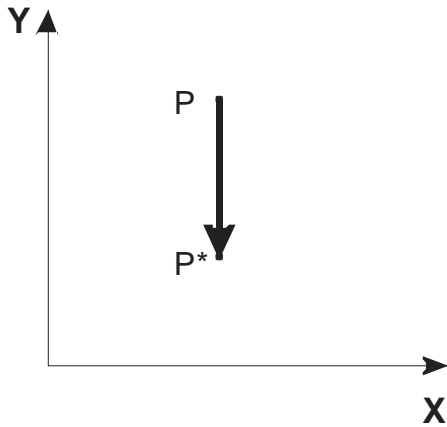


Рисунок 1.3

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

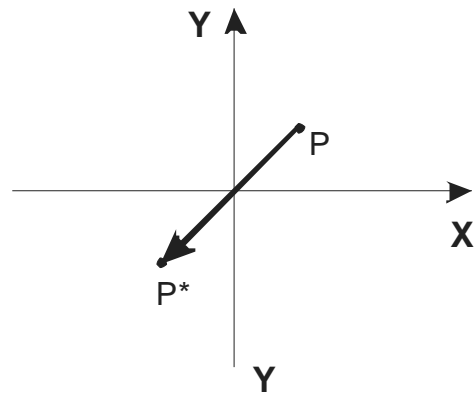


Рисунок 1.4

5)  $a = d = 1, c = 0,$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & bx + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Координата  $x$  точки  $P^*$  не изменяется, а координата  $y$  линейно зависит от начала координат. Этот эффект называется сдвигом (см. Рис. 1.5).

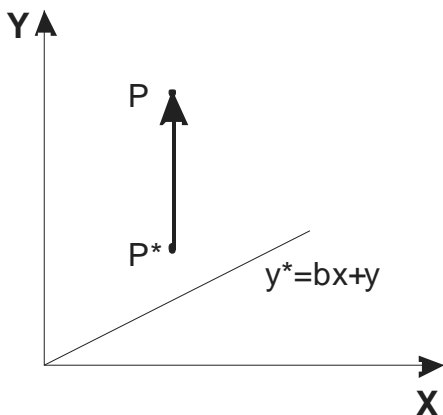


Рисунок 1.5

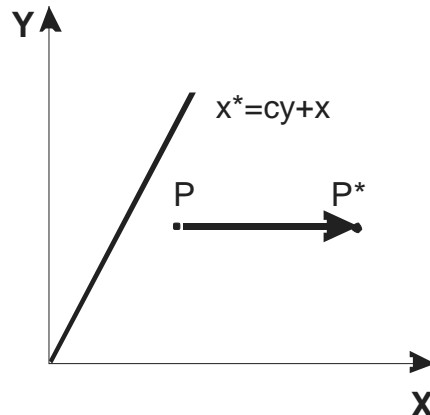


Рисунок 1.6

б)  $a = d = 1, b = 0,$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + cy & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

Здесь все аналогично, но сдвиг происходит вдоль оси  $x$  пропорционально началу координате  $y$  (см. Рис. 2.6).

В заключение отметим, что преобразование общего вида (2.1), примененное к началу координат, не изменяет положения начала координат

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Иными словами, начало координат инвариантно к преобразованию  $2 \times 2$ . Это является недостатком такого преобразования, который будет преодолен введением обобщённых однородных координат. Но об этом позже.

#### 1.4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Прямая линия может быть задана координатами двух её точек. Отрезок прямой задается координатами его концов.

Пусть координаты концов отрезка равны

$$A = [x_1 \quad y_1], \quad B = [x_2 \quad y_2].$$

В результате преобразования  $2 \times 2$  получим:

$$A^* = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax_1 + cy_1 \quad bx_1 + dy_1] = [x_1^* \quad y_1^*];$$

$$B^* = [x_2 \quad y_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax_2 + cy_2 \quad bx_2 + dy_2] = [x_2^* \quad y_2^*];$$

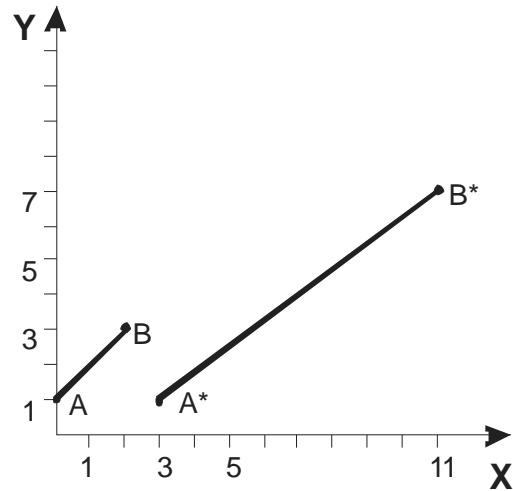


Рисунок 1.7

$$\hat{I} \text{ áúâèð} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow A \\ \leftarrow B \end{matrix}.$$

$$\hat{I} \text{ áúâèð}^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow A^* \\ \leftarrow B^* \end{matrix}.$$

На рисунке 1.7 показано преобразование сдвига по обеим осям для отрезка с координатами  $A = [0 \ 1]$  и  $B = [2 \ 3]$ . В результате получим

$$A^* = [3 \ 1], \quad B^* = [11 \ 7],$$

то есть произошло изменение положения отрезка и увеличение его длины.

Преобразование отрезка можно записать в более компактной форме, представив его в виде матрицы координат концов:

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда преобразованный отрезок получится как

$$L = LT = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix}.$$

Итак, матрица преобразования  $2 \times 2$  преобразует прямую линию в другую прямую. Говоря об отрезке, легко показать, что между точками исходного и преобразованного отрезка существует взаимно однозначное соответствие.

Концы отрезка преобразуются в концы нового отрезка. Покажем, что средняя точка преобразуется в среднюю точку.

Координаты средней точки исходного отрезка равны

$$M = \left[ \begin{array}{cc} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array} \right];$$

преобразованного отрезка

$$M^* = \left[ \begin{array}{cc} \frac{x_1^* + x_2^*}{2} & \frac{y_1^* + y_2^*}{2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{a(x_1 + x_2) + c(y_1 + y_2)}{2} & \frac{b(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2)}{2} \end{array} \right].$$

Применение преобразования  $2 \times 2$  к точке  $M$  даёт

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{a(x_1 + x_2)}{2} + \frac{c(y_1 + y_2)}{2} & \frac{b(x_1 + x_2)}{2} + \frac{d(y_1 + y_2)}{2} \end{array} \right],$$

то есть точку  $M^*$ . Очевидно, что это соответствие выполнится для любой точки отрезка, делящей его в отношении  $1/k$  (во всех выражениях вместо «2» подставить « $k$ »), то есть вообще для любой точки отрезка.

При применении машинной графики для того, чтобы получить преобразованный отрезок, необходимо преобразовать его концы и соединить полученные точки.

## 1.5 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ

Покажем, что преобразование  $2 \times 2$  преобразует две параллельные линии в две другие параллельные линии.

Пусть даны две линии

$$L_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \text{ и } L_2 = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix},$$

параллельные друг другу. Значит, тангенс угла наклона этих линий одинаков и равен

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

Преобразование  $L_1$  по формуле (2.2) даст линию  $L_1^*$  с наклоном

$$m_2 = \frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)} = \frac{b + d \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{a + c \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}.$$

Для  $L_2$  – аналогично: наклон  $L_2^*$  равен

$$m_2 = \frac{y_4^* - y_3^*}{x_4^* - x_3^*} = \frac{b(x_4 - x_3) + d(y_4 - y_3)}{a(x_4 - x_3) + c(y_4 - y_3)} = \frac{b + d \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}}{a + c \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}.$$

Получили, что линии  $L_1^*$  и  $L_2^*$  имеют одинаковый наклон, то есть параллельны. Это означает, в частности, что преобразованием  $2 \times 2$  параллелограмм преобразуется в другой параллелограмм.

## 1.6 ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ЛИНИИ

Преобразование пересекающихся линий рассмотрим на примере.

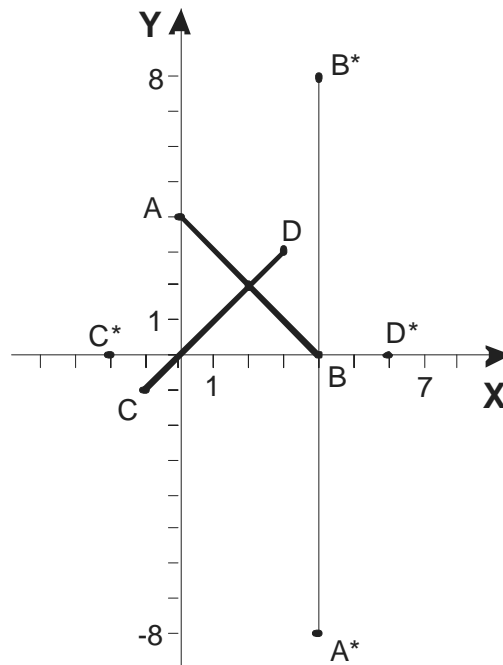


Рисунок 1.8

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ C: \\ D: \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 8 \\ -2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} :A^* \\ :B^* \\ :C^* \\ :D^* \end{array};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$  преобразуется в точку пересечения прямых  $A^*B^*$  и  $C^*D^*$ . Этот вывод является общим для любых пересекающихся прямых, но мы не будем это строго показывать.

## 1.7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

Рассмотрим преобразование матрицей  $2 \times 2$  плоских фигур на примере треугольника.

### 1.7.1 Вращение

Вращение вокруг начала координат против часовой стрелки на угол  $90^\circ$

реализуется матрицей  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

На угол  $180^\circ$  – матрицей  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;

На угол  $270^\circ$  – матрицей  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

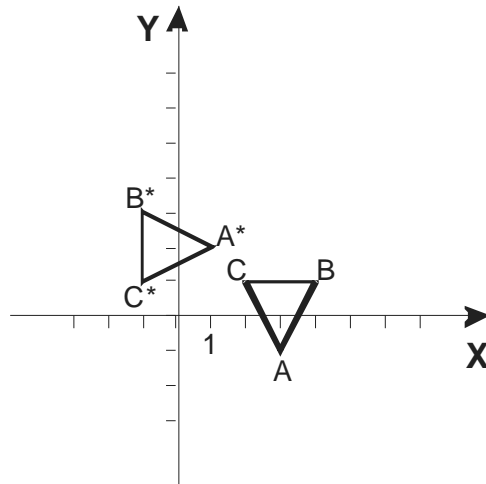


Рисунок 1.9

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} :A^* \\ :B^* \\ :C^* \end{matrix};$$

Отметим, что вращение осуществляется вокруг оси, перпендикулярной к плоскости  $xу$ .

### 1.7.2 Отображение

Отображение определяется поворотом на  $180^\circ$  вокруг оси, лежащей в плоскости  $xу$ .

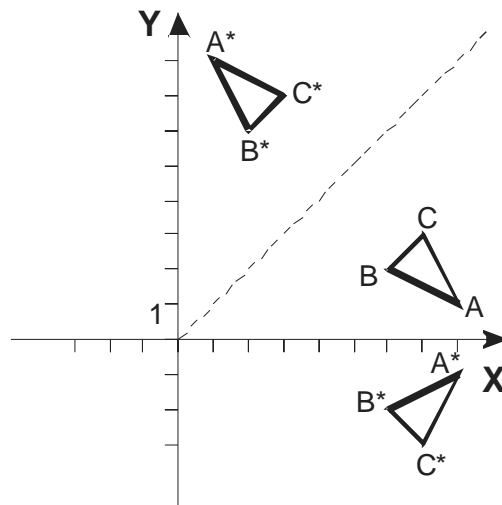


Рисунок 1.10



$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} :A^* \\ :B^* \\ :C^* \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} :A^* \\ :B^* \\ :C^* \end{matrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отображение относительно оси  $y = x$  осуществляется матрицей  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

Относительно оси  $y = 0$  – матрицей  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;

Относительно оси  $x = 0$  – матрицей  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

### 1.7.3 Изменение масштаба

Изменение масштаба, как уже отмечалось, определяется значением элементов главной диагонали матрицы  $2 \times 2$ .

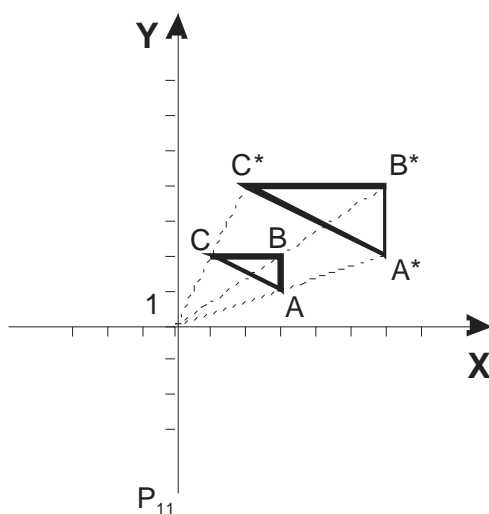


Рисунок 1.11

$$\begin{array}{l} A: \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ B: \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ C: \end{array} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}: A^* \\ \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}: B^* \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}: C^* \end{array}$$

Если элементы главной диагонали матрицы  $2 \times 2$  не равны, то происходит искажение формы.

Часто для достижения желаемого результата требуется выполнить последовательность преобразований, например, ряд преобразований, рассмотренных ранее. При этом важно помнить, что операция умножения матриц некоммукативна, то есть играет роль порядок выполнения преобразований.

Рассмотрим пример.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \text{вращение на } 90^\circ;$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{отображение относительно оси } x = 0.$$

Некоторая точка  $A = [x \ y]$  преобразуется:

$$AT_1 = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \ x];$$

$$(AT_2)T_1 = [-y \ x] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [y \ x].$$

В другом порядке:

$$AT_2 = [y \ x] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ y];$$

$$(AT_2)T_1 = [-x \ y] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-x \ -y].$$

Как видим, результаты получились разными.

То же самое можно показать несколько иначе. Вначале получим общую матрицу преобразования для комбинации  $T = T_1T_2$ :

$$T = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а затем для комбинации  $T^* = T_2 T_1$ :

$$T^* = T_2 T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что  $T^* \neq T$ , значит и результаты преобразования будут различны.

#### 1.7.4 Преобразование единичного квадрата

Использование машинной графики предполагает визуализацию изображений в дискретной области экрана, который можно рассматривать как квадратно-решетчатую сетку, состоящую из единичных квадратов в плоскости  $xу$ .

Рассмотрим преобразование общего вида единичного квадрата с вершиной в начале координат.

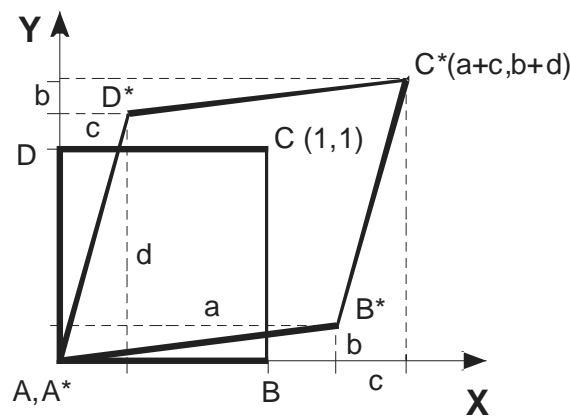


Рисунок 1.12

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \\ D: \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Видно, что начало координат не изменило своего положения, а весь квадрат преобразовался в параллелограмм (сохраняется параллельность сторон). Отметим, матрица  $T$  однозначно восстанавливается здесь по двум точкам:

$$B^* = [a \quad b] \text{— первая строка,}$$

$$D^* = [c \quad d] \text{— вторая строка.}$$

Площадь параллелограмма  $A^*B^*C^*D^*$  равна

$$\begin{aligned} S_n^* &= (a+c)(b+d) - ab - cd - bc - bc = \\ &= ab + bc + ad + cd - ab - cd - bc - bc = ad - bc = |T|, \end{aligned}$$

то есть  $S_i^* = S|T|$ .

Можно показать, что эта формула верна в случае преобразования произвольной фигуры.

### 1.7.5 Произвольная матрица вращения $2 \times 2$

Ранее мы рассмотрели матрицы вращения вокруг начала координат на углы, кратные  $90^\circ$ . Сейчас на примере единичного квадрата получим общий вид матрицы вращения на угол  $\theta$ .

Мы уже говорили, что в случае преобразования единичного квадрата координаты точки  $B^*$  определяют первую строку матрицы, а точки  $D^*$  – вторую строку. Таким образом, матрица вращения на произвольный угол  $\theta$  определяется как

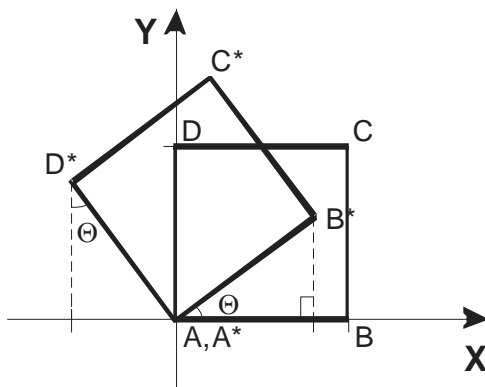


Рисунок 1.13.

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ C: \\ D: \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta - \sin \theta & \cos \theta + \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{array}{l} :A^* \\ :B^* \\ :C^* \\ :D^* \end{array}.$$

Частные случаи, рассмотренные выше, легко получаются подстановкой значений  $\theta = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ .

### 1.7.6 Двумерное смещение и однородные координаты

Очень часто используемым преобразованием в машинной графике является преобразование смещения (переноса начала координат). Раньше мы уже убедились, что такое преобразование нельзя реализовать умножением на матрицу  $2 \times 2$  (начала координат инвариантно к умножению на матрицу  $2 \times 2$ ). Эту трудность можно устранить, введя третью компоненту в вектор координат точки и третью строку в матрицу преобразования. Получим

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}.$$

То есть введенная третья строка как раз и реализует требуемое смещение.

Однако, матрица преобразования  $3 \times 2$  не является квадратной и, значит, не имеет обратной матрицы. Это часто оказывается неудобным. Поэтому дополним ее до квадратной, тогда получим

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y+n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, теперь мы имеем трехмерный вектор координат точки на плоскости и матрицу преобразования размера  $3 \times 3$ .

В случае произвольных значений элементов матрицы  $3 \times 3$  получим вектор преобразованных координат вида  $\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{h} \end{bmatrix}$ .

Представление двумерного вектора трехмерным или, в общем случае, представление  $n$ -мерного вектора в  $(n+1)$ -мерным называется однородным координатным воспроизведением; координаты  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}$  – однородными координатами.

Однородные координаты интерпретируются как результат масштабного преобразования точки  $[x \ y]$ , лежащей в плоскости  $z=1$ , в точку  $[\tilde{x} \ \tilde{y}]$  в плоскости  $z=\tilde{h}$ . При однородном координатном преобразовании  $n$ -мерного вектора оно выполняется в  $(n+1)$ -мерном пространстве, а конечные результаты в  $n$ -мерном пространстве получают как

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\tilde{h}}; \quad y^* = \frac{\tilde{y}}{\tilde{h}}.$$

Очевидно, что для любой точки на плоскости существует бесконечное множество однородных координатных представлений  $[x \ y] \rightarrow [hx \ hy \ h]$ . Например, однородные координаты  $(12 \ 8 \ 4)$ ,  $(6 \ 4 \ 2)$  и  $(3 \ 2 \ 1)$  представляют одну и ту же точку  $(3 \ 2)$ .

Введение однородных координат и применение матрицы преобразования  $3 \times 3$  общего вида

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}.$$

дает довольно много дополнительных преимуществ.

Во-первых, отметим, что все рассмотренные ранее преобразования матрицей  $2 \times 2$  реализуются в однородных координатах с помощью матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[x \ y \ 1] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax + cy \ bx + dy \ 1] = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{h}].$$

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{\tilde{h}} = ax + cy; \quad y^* = \frac{\tilde{y}}{\tilde{h}} = bx + dy;$$

то есть результат тот же, что и для

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [x^* \ y^*]. \quad (\text{формула 2.1})$$

Влияние элементов  $m$  и  $n$  третьей строки матрицы  $3 \times 3$  мы уже рассмотрели, они реализуют смещение. Рассмотрим влияние элементов третьего столбца:  $p, q, s$ .

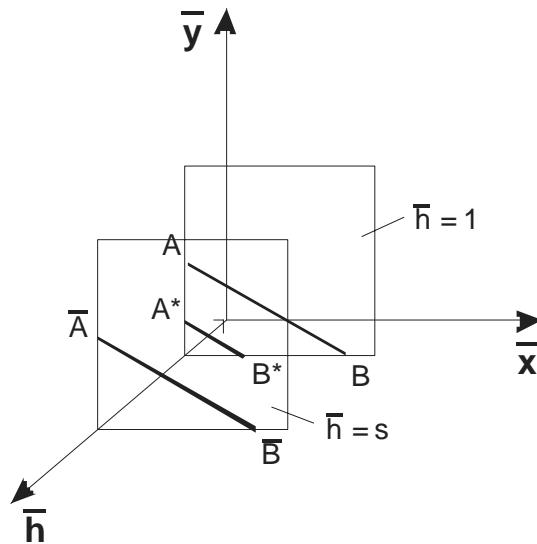


Рисунок 1.14.

$$[x^* \ y^*] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ s & s \end{bmatrix}.$$

Видно, что элемент  $s$  реализует полное изменение масштаба (при  $s > 1$  – уменьшение; при  $s < 1$  – увеличение), то есть то же самое, что реализуется в случае использования обычных координат и матрицы  $2 \times 2$  вида

$$\begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}.$$

$$\text{Матрица } \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Пусть  $p=1, q=1$

$$A = (1,3), B = (4,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

то есть  $A^* = (1/5; 3/5), B^* = (2/3; 1/6)$

В общем виде

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & px+qy+1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px+qy+1} & \frac{y}{px+qy+1} \end{bmatrix}.$$

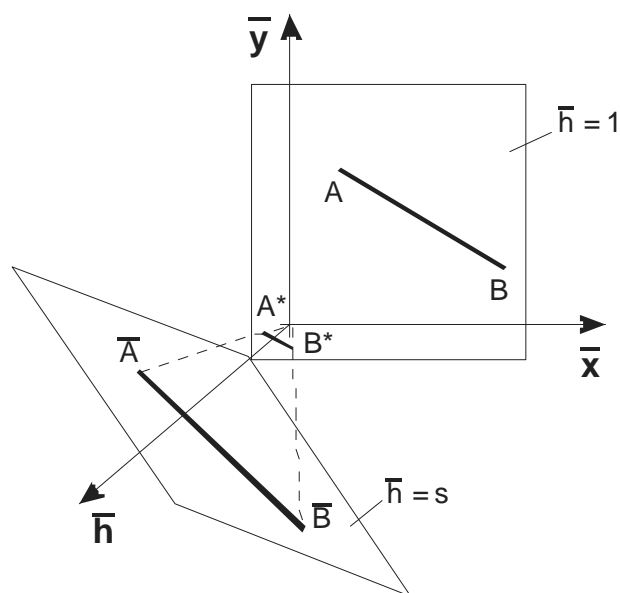


Рисунок 1.16.



Отрезок получается проектированием отрезка  $\tilde{A}\tilde{B}$ , находящегося в плоскости  $\tilde{h} = px + qy + 1$ , в плоскость  $\tilde{h} = 1$ ; центр проекции лежит в начале координат.

Итак, элементы матрицы  $3 \times 3$  выполняют следующие функции:

$$\begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix},$$

где :

$a, b, c, d$  – покоординатное изменение масштаба, сдвиг; вращение;

$m, n$  – смещение;

$s$  – полное изменение масштаба;

$p, q$  – получение центральных проекций; центр проектирования в начале координат.

### 1.7.7 Точки в бесконечности

Здесь мы рассмотрим довольно экзотическое свойство однородных координат представлять точки в бесконечности, лежащие на некоторой прямой.

Двумерный вектор однородных координат  $[a \ b \ 0]$  образует точку в бесконечности на линии

$$y^* = \frac{b}{a} x^*.$$

Для иллюстрации этого рассмотрим линию  $y^* = 3/4x^*$  и точку, однородные координаты которой имеют вид  $[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{h}] = [3 \ 4 \ \tilde{h}]$ , при  $\tilde{h} \rightarrow 0$ .

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{h}$	$x^*$	$y^*$
4	3	1	4	3
4	3	1/2	8	6
4	3	1/10	40	30
4	3	1/100	400	300
4	3	$10^{-6}$	$4 \times 10^6$	$3 \times 10^6$

Видно, что при  $\tilde{h} \rightarrow 0$ ,  $x^* \rightarrow \infty$ ,  $y^* \rightarrow \infty$ . При этом все время сохраняется соотношение  $y^* = (3/4)x^*$ , то есть точка движется в бесконечность по указанной прямой. Из этого следует, например, что вектор однородных координат  $[1 \ 0 \ 0]$  характеризует точку в бесконечности на оси абсцисс ( $y = 0$ ); вектор  $[0 \ 1 \ 0]$  – точку в бесконечности на оси ординат ( $x = 0$ ).

### 1.7.8 Композиция преобразований на плоскости

Рассматривая преобразования матрицей  $2 \times 2$ , мы уже говорили о том, что последовательность преобразований

$$A \times T_1 \times T_2 \times \dots \times T_k$$

может быть реализована как

$$AT, \text{ где } T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_k.$$

Произведение матриц часто называют их композицией. Соответственно, преобразования с матрицей  $T$  называется композицией преобразований с матрицами  $T_1, \dots, T_k$ . Напомним, что здесь важна последовательность умножения матриц.

Один из примеров композиции преобразований с использованием однородных координат – это вращение вокруг произвольной точки (раньше мы рассматривали лишь вращение вокруг начала координат). Вращение вокруг произвольной точки может быть выполнено путем переноса центра вращения в начало координат, поворотом относительно начала координат, а затем переноса

точки вращения в исходное положение. То есть поворот точки  $[x \ y \ 1]$  вокруг точки  $(m, n)$  на угол  $\theta$  выполняется следующим образом:

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{h}].$$

Композиция трёх матриц преобразования дает общую матрицу вращения вокруг произвольной точки

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -m(\cos \theta - 1) + n \sin \theta & -m \sin \theta - n(\cos \theta - 1) & 1 \end{bmatrix}.$$

В частности, для  $\theta = 90^\circ$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ m+n & -m+n & 1 \end{bmatrix};$$

для  $\theta = 180^\circ$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2m & 2n & 1 \end{bmatrix};$$

для  $\theta = 270^\circ$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m-n & m+n & 1 \end{bmatrix}.$$

В заключение отметим, что хотя композиция (умножение) матриц в общем случае не коммутативна, но в некоторых частных случаях коммутативность имеет место, то есть  $T_1 \times T_2 = T_2 \times T_1$ , если  $T_1, T_2$ :

- перенос, перенос;
- масштабирование, масштабирование;
- поворот, поворот;
- общее масштабирование, поворот.

## 2 ТРЕХМЕРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРОЕКЦИИ

Процесс вывода трехмерной графической информации по сути своей является более сложным, чем соответствующий двумерный процесс. Это связано с тем, что экран ЭВМ – это плоскость, и в процессе визуализации трехмерная информация все равно должна быть преобразована в двумерную. Это осуществляется с помощью проекций. При этом преобразования трехмерной информации естественно осуществлять в трехмерном пространстве, и построение проекций производить лишь непосредственно перед визуализацией.

Рассмотрим сначала способы преобразования трехмерной информации. Для этого обобщим результаты, полученные для плоскости, на трехмерный случай.

Точка в трехмерном пространстве  $[x \ y \ z]$  с использованием однородных координат представится четырехмерным вектором  $[x \ y \ z \ 1]$  или  $[x \ y \ z \ h]$ .

Преобразование однородных координат описывается соотношениями

$$\begin{aligned} [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ \tilde{h}] &= [x \ y \ z \ 1]T; \\ [x^* \ y^* \ z^* \ 1] &= [\tilde{x}/\tilde{h} \ \tilde{y}/\tilde{h} \ \tilde{z}/\tilde{h} \ 1], \end{aligned}$$

где  $T$  – матрица преобразования. Обобщенная матрица  $T$  для трехмерных однородных координат имеет порядок  $4 \times 4$  и записывается как

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & \vdots & p \\ d & e & f & \vdots & q \\ h & i & j & \vdots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l & m & n & \vdots & s \end{bmatrix};$$

Эта матрица может быть представлена как совокупность четырех частей:

Матрица

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix},$$

осуществляет покоординатное изменение масштаба, сдвиг и вращение; матрица

$[l \ m \ n]$  – перенос;

матрица  $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$  – преобразования в перспективе;

матрица  $[s]$  – общее изменение масштаба.

Иногда преобразование матрицей  $T$  размера  $3 \times 3$  для плоских однородных координат называется линейным. Соответственно, преобразование матрицей  $T$  размера  $4 \times 4$  для трехмерных однородных координат называется билинейным.

Рассмотрим подробнее эти преобразования.

## 2.1 ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА

Покоординатное изменение масштаба выполняется с помощью диагональных элементов  $T$ :

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \ ey \ jz \ 1] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1].$$

Таким способом можно, например, преобразовать параллелепипед в куб:

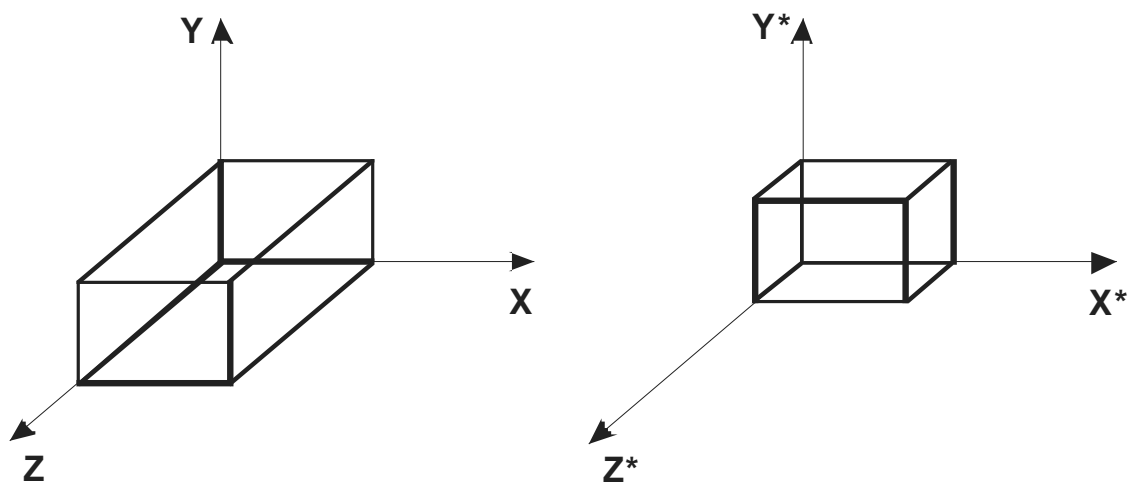


Рисунок 2.1.

Общее изменение масштаба—либо

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ s] = [x/s \ y/s \ z/s \ 1],$$

либо

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x^* \ y^* \ z^* \ 1] = [x/s \ y/s \ z/s \ 1].$$

Результат, как видим, будет тот же самый.

## 2.2 СДВИГ

За преобразование сдвига «отвечают» недиагональные элементы верхней левой подматрицы  $3 \times 3$

$$[x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [x + dy + hz \ bx + y + iz \ cx + fy + z \ 1] = [x^* \ y^* \ z^* \ 1].$$

### 2.3 ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Вспомним, что на плоскости вращение вокруг оси, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскости, осуществлялось матрицей

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \vdots & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Положительным направлением считается направление против часовой стрелки (если смотреть вдоль этой оси к началу координат!). В трехмерном случае вращение вокруг оси  $x$

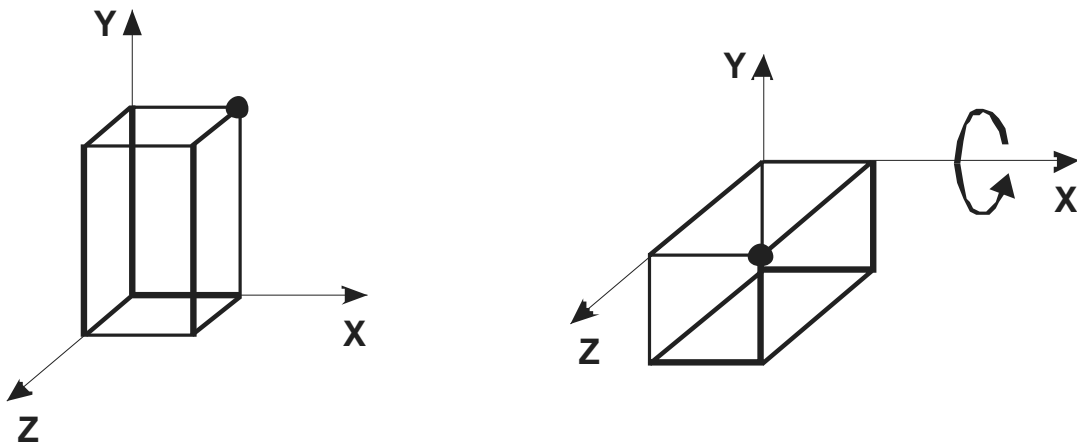
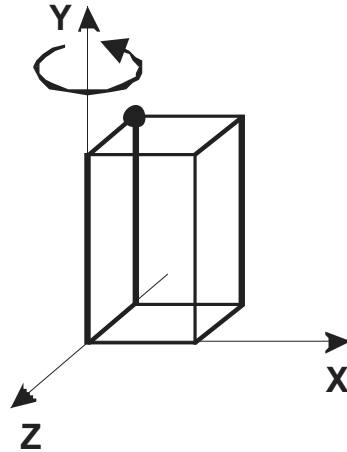


Рисунок 2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos Q & \sin Q & 0 \\ 0 & -\sin Q & \cos Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 90^\circ \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

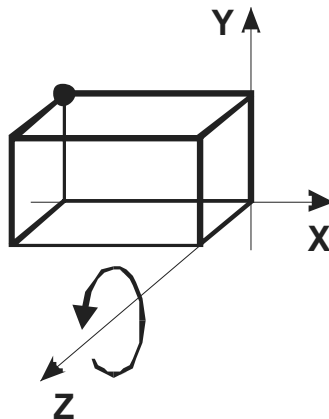
то есть первая строка и первый столбец имеют вид  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$

Вокруг оси  $y$  – аналогично,



$$\begin{bmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = 90^\circ \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Вокруг оси  $z$



$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = 90^\circ \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Положительное направление по-прежнему определяется как направление против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси, вокруг которой осуществляется вращение, к началу координат. Отметим, что в следствии некоммутативности умножения матриц при выполнении композиции вращений порядок преобразований существенен (в отличие от вращения на плоскости).



## 2.4 ОТОБРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Отображение относительно плоскости  $xOy$  меняет лишь знак  $z$  координаты точек. Таким образом,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{— отображение относительно } xOy;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{— отображение относительно } yOz.$$

## 2.5 ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ПЕРЕНОС

Трёхмерный линейный перенос изображения определяется выражением:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix};$$

откуда  $\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+l & y+m & z+n & 1 \end{bmatrix}$ ,

то есть  $\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+l & y+m & z+n & 1 \end{bmatrix}$ ,

## 2.6 ТРЕХМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

В двумерном случае вращение вокруг произвольной оси осуществлялось путем композиции преобразований:

- переноса начала координат в точку пересечения оси вращения с плоскостью  $xOy$ ;
- вращения вокруг оси;
- переноса начала координат в исходное состояние.

При этом ось вращения должна быть перпендикулярна плоскости  $xу$ .

В трехмерном случае ставится задача вращения вокруг произвольной оси в трехмерном пространстве. Как и для плоскости, метод заключается в последовательном выполнении переноса, вращения вокруг оси, проходящей через начало координат и обратного переноса.

– переноса начала координат в исходное состояние.

При этом ось вращения должна быть перпендикулярна плоскости  $xу$ .

В трехмерном случае ставится задача вращения вокруг произвольной оси в трехмерном пространстве. Как и для плоскости, метод заключается в последовательном выполнении переноса, вращения вокруг оси, проходящей через начало координат и обратного переноса.

При этом, однако, ось, проходящая через начало координат, может иметь произвольное направление.

Итак, если ось, вокруг которой выполняется вращение, проходит через точку  $A = [l \ m \ n]$ , то матрица преобразования однородных координат определяется как

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l & -m & -n & 1 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Определим элементы матрицы вращения  $R$ .

## 2.7 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

Направление произвольной оси, проходящей через начало координат, удобно определять через так называемые направляющие косинусы. Единичный вектор направления задается как

$$n = n_1 i + n_2 j + n_3 k,$$

где  $n_1 = \cos \alpha$ ,  $n_2 = \cos \beta$ ,  $n_3 = \cos \gamma$

или в векторной форме

$$n = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]; |n| = 1 .$$

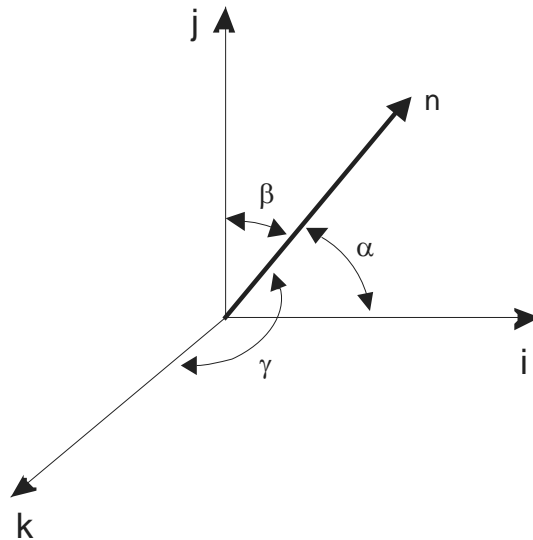


Рисунок 2.3

Скалярное произведение вектора  $n$  на произвольный вектор  $P$  определяется как

$$Pn = |P| |n| \cos \Omega = |P| \cos \Omega \text{ (это число).}$$

Если  $P = [x \quad y \quad z]$ , то

$$Pn = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}.$$

Векторное произведение в системе координат  $(i, j, k)$  задается как

$$nP = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ x & y & z \end{bmatrix} = i(n_2z - n_3y) + j(n_3x - n_1z) + k(n_1y - n_2x).$$

или в матричной форме:

$$nP = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом справедливо выражение

$$|nP| = |n| |P| \sin \Omega = |P| \sin \Omega.$$

Направление  $nP$  перпендикулярно плоскости  $nOP$ . Теперь вернемся к получению элементов матрицы вращения  $R$ .

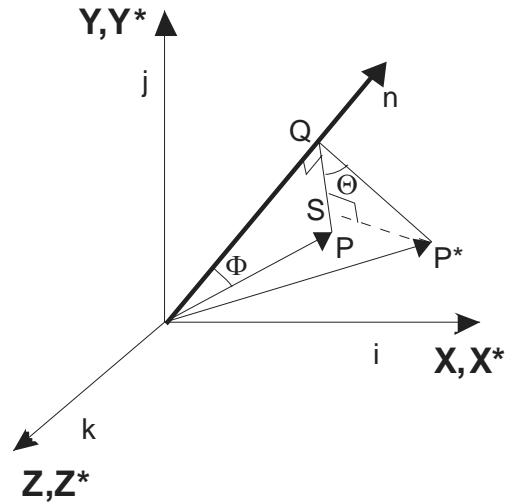


Рисунок 2.4

На рисунке 2.4 точка  $P$  преобразуется к точке  $P^*$  путем вращения вокруг оси  $n$ . Здесь

$$|OP| = |OP^*|; |PQ| = |P^*Q|;$$

$$PQ \perp OP; P^*Q \perp OQ; P^*S \perp PQ.$$

Для получения элементов матрицы  $R$  необходимо координаты точки  $P^*$  выразить через координаты точки  $P$ , угол поворота  $\theta$  – и направление оси вращения  $n$ .

Из рисунка видно

$$OQ + QP^* = P^* \quad (\text{или } Q + QP^* = P^*), \quad (3.7.1)$$

$$QP^* = QS + SP^*, \quad (3.7.2)$$

$$OQ + QP = OP \quad (\text{или } Q + QP = P), \quad (3.7.3)$$

Из (3.7.3) следует  $QP = P - Q$ .

Далее

$$|QS| = |QP^*| \cos \theta = |QP| \cos \theta = |P - Q| \cos \theta.$$

Поскольку направление  $QS$  и  $QP$  совпадают, то

$$QS = (P - Q) \cos \theta.$$

Отсюда, объединяя (3.7.1) и (3.7.2), получим:

$$P^* = Q + (P - Q) \cos \theta + SP^*. \quad (3.7.4)$$

Длина вектора  $SP^*$

$$SP^* = |QP^*| \sin \theta = |QP| \sin \theta = |P - Q| \sin \theta.$$

Направление вектора  $SP^*$  перпендикулярно плоскости  $QOP$ , то есть параллельно вектору  $nP$ .

Единичный вектор в этом направлении определяется соотношением

$$u = \frac{nP}{|nP|} = \frac{nP}{|P| \sin \Phi}.$$

Таким образом,

$$SP^* = \frac{nP}{|P| \sin \Phi} |P - Q| \sin \theta.$$

При этом  $|P| \sin \Phi = |QP| = |P - Q|$ ; следовательно,  $SP^* = (nP) \sin \theta$ .

Перепишем (3.7.4):

$$P^* = Q + (P - Q) \cos \theta + (nP) \sin \theta. \quad (3.7.5)$$

Величина  $Q$  определяется  $|Q| = |P| \cos \Phi$ ;

Направление  $Q$  совпадает с  $n$ .

Так как  $|P| \cos \theta = Pn$ , то  $Q = (Pn)n$

Тогда перепишем (3.7.5)

$$\begin{aligned} P^* &= (Pn)n + P \cos \theta - (Pn)n \cos \theta + (nP) \sin \theta = \\ &= (Pn)n(1 - \cos \theta) + P \cos \theta + (nP) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Таким образом, мы выразили координаты точки  $P$  через координаты точки  $P$ , угол  $Q$  и вектор  $n$ .

Запишем этот результат в матричной форме;

$$P^* = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} [n_1 \ n_2 \ n_3] (1 - \cos \theta) + [x \ y \ z] \cos \theta + \\ + [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta.$$

С использованием однородных координат и произведя некоторые преобразования

$$P^* = [x \ y \ z \ 1] \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 & 0 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 & 0 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta + \\ + \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 & 0 \\ -n_3 & 0 & n_1 & 0 \\ n_2 & -n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sin \theta \end{array} \right\}.$$

Выражение в скобках как раз и позволяет получить требуемую матрицу вращения R:

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \theta & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta & n_1 n_3 (1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta & 0 \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta & 0 \\ n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta & n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим вращение на угол  $Q$  вокруг оси  $z$ . При этом  $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то есть результат, который уже был получен ранее.

## 2.8 АФФИННАЯ И ПЕРСПЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аффинная геометрия сохраняет параллельность линий и соотношения между параллельными линиями. Аффинное преобразование является комбинацией линейных преобразований, сопровождаемых переносом изображения. Для аффинного преобразования последний столбец матрицы  $4 \times 4$  должен быть равным  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Композиция аффинных преобразований также является аффинным преобразованием.

В перспективной геометрии не сохраняется параллельность. Перспективное преобразование имеет место в том случае, когда последний столбец матрицы  $4 \times 4$  не нулевой. Перспективными изображениями часто пользуются художники и архитекторы, так как эти изображения позволяют получить картину, близкую к реальности. Однако из-за сложности построения их редко используют конструкторы. Используя однородные координаты и матрицу преобразования  $4 \times 4$  одинаково легко можно получать как аффинные, так и перспективные изображения.

Аффинное или перспективное преобразование в сочетании с построением проекции на некоторую плоскость образуют соответствующую (аффинную или перспективную) проекцию.

В общем случае проекции преобразуют точки, заданные в системе координат размерностью  $n$ , в точки системы координат размерностью  $m < n$ . В машинной графике рассматривают проекции точек трехмерного пространства в двумерное (рисунок 2.5). Проекция трехмерного объекта (совокупности точек) строится при помощи прямых проецирующих лучей, которые называются проекторами, выходящими из центра проекции. Эти прямые проходят через каждую точку объекта; проекцией являются совокупность точек пересечения проекторов с проекционной плоскостью. При этом всегда проекцией отрезка является отрезок, поэтому достаточно спроецировать лишь граничные точки.

Отметим, что мы определили класс плоских проекций, то есть проекций на плоскость. Существуют еще проекции на криволинейную поверхность, но их мы рассматривать не будем.

В зависимости от расположения центра проекции, проекция бывает центральной (центр проекции удален от плоскости на конечное расстояние) и параллельной (центр в бесконечности).

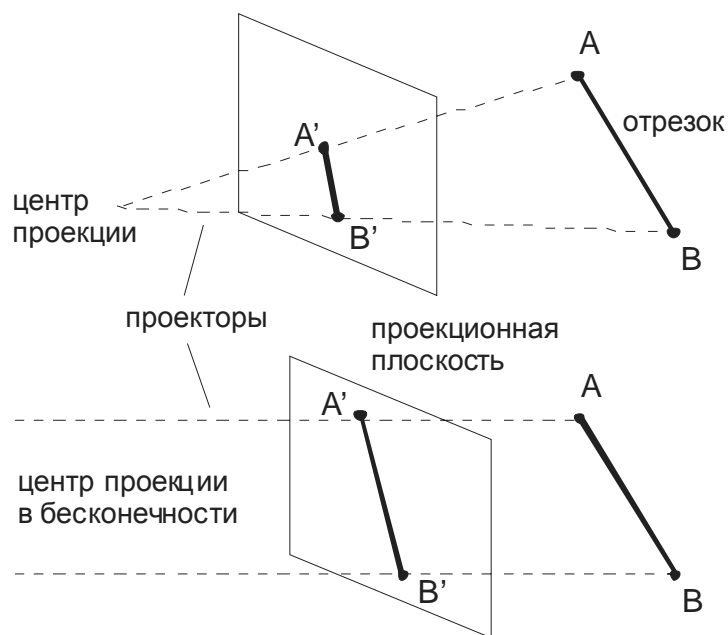


Рисунок 2.5

Параллельная проекция является аффинной, а центральная – перспективной (по виду преобразования).

### 2.8.1 Аксонометрические проекции

Аксонометрическая проекция получается с помощью преобразования, определитель которого равен нулю. После выполнения преобразования осуществляется параллельное проецирование.

Существуют три вида аксонометрических проекций, различающихся по виду аффинного преобразования – ортогональная, диметрическая и изометрическая. Прежде чем остановиться на них, рассмотрим общую для всех этих видов часть – параллельное проецирование.



Проекция из трехмерного пространства на плоскость может быть получена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & n & 1 \end{bmatrix},$$

то есть  $\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$ .

Это преобразование представляет собой композицию двух преобразований:  $T'T''$  – параллельного проецирования на плоскость  $z = 0$

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и переноса вдоль оси  $z$  на величину  $n$

$$T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, проецирование в плоскость  $x = l$  или  $y = m$  реализуется матрицами

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

соответственно.

### 2.8.2 Ортогональная аксонометрическая проекция

При ортогональной аксонометрической проекции осуществляется только вращение вокруг какой-либо координатной оси на угол, кратный  $90^\circ$ , или

отображение относительно какой-либо координатной плоскости. Эти преобразования мы уже рассматривали.

Пример:

Ортогональная проекция “вид сверху”: поворот относительно оси  $x$  на угол  $90^\circ$  и проецирование на плоскость  $z = 0$

Матрица  $T$ :

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ вращение, } T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ проецирование,}$$

$$T = T'T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

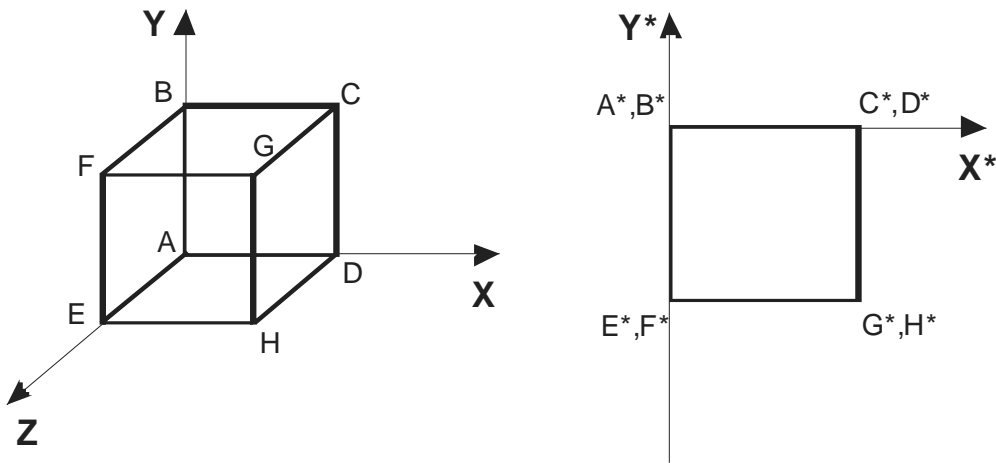


Рисунок 2.6

$$\begin{array}{l}
 A \\
 E \\
 B \\
 F \\
 D \\
 H \\
 C \\
 G
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 T =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 A^* \\
 E^* \\
 B^* \\
 F^* \\
 D^* \\
 H^* \\
 C^* \\
 G^*
 \end{array}
 .$$

### 2.8.3 Диметрическая проекция

При построении диметрической проекции производится комбинированное вращение, при котором одинаково сокращаются две из трех координатных осей.

Рассмотрим следующую последовательность преобразований при построении диметрических проекций:

- вращение вокруг оси  $Y$  на угол  $\Phi$  ;
- вращение вокруг оси  $X$  на угол  $\theta$  ;
- параллельное проецирование на плоскость  $z = 0$  .

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} &= \\
= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \cos \Phi & 0 & -\sin \Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Phi & 0 & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \sin \theta & -\sin \Phi \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \Phi & -\cos \Phi \sin \theta & \cos \Phi \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
= \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \Phi & -\cos \Phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Единичный вектор оси  $X$   $[1 \ 0 \ 0 \ 1]$  в результате такого преобразования преобразуется к виду

$$[\cos \Phi \ \sin \Phi \sin \theta \ 0 \ 1]$$

и имеет длину

$$\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} = \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \sin^2 \theta}.$$

Аналогично, единичный вектор оси  $Y$   $[0 \ 1 \ 0 \ 1]$  преобразуется к  $[0 \ \cos \theta \ 0 \ 1]$  и имеет длину  $\sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta|$ .

По условию диметрической проекции значения двух преобразованных единичных векторов сокращаются в равное число раз. Приравнивая значения векторов осей  $x$  и  $y$ , получим

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta,$$

$$1 - \sin^2 \Phi + \sin^2 \Phi \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta,$$

используя

$$\cos^2 \Phi = 1 - \sin^2 \Phi \Rightarrow \sin^2 \Phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (3.8.3.1)$$

Таким образом, мы получим требуемое соотношение между углами  $\Phi$  и  $\theta$  для построения диметрической проекции. При этом, разумеется, конкретные значения одного из углов можно выбрать достаточно произвольно.

Часто используется следующий подход к выбору углов. Будем выбирать  $\theta$  таким образом, чтобы ось  $z$  сократилась в фиксированное число раз, например, в  $1/2$ . Единичный вектор оси  $z$   $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$  преобразуется к  $[\sin \Phi \ -\cos \Phi \sin \theta \ 0 \ 1]$  длиной  $\sqrt{\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi \sin^2 \theta}$ .

Требование уменьшить его длину в  $1/2$  означает

$$\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi \sin^2 \theta = (1/2)^2,$$

$$\sin^2 \Phi + (1 - \sin^2 \Phi) \sin^2 \theta = 1/4.$$

С учетом (3.8.3.1)

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} + \sin^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 1/4.$$

.....

$$8\sin^4 \theta - 9\sin^2 \theta + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения, и  $\sin^2 \theta = \pm 1$ ,

Пусть  $\sin^2 \theta = \pm 1/8$ , тогда  $\theta = 20.705^\circ$ , так как  $\sin \Phi = \operatorname{tg} \theta$ , то  $\Phi = 22.208^\circ$ .

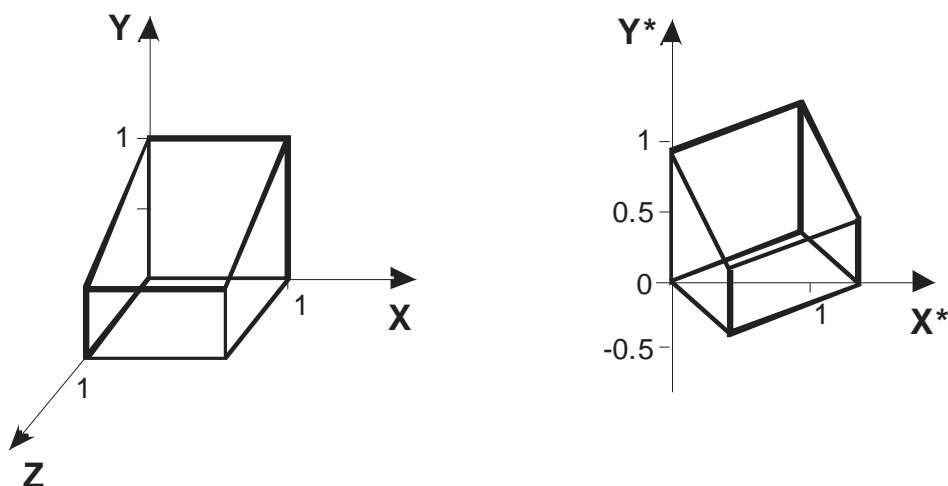


Рисунок 2.7

### 2.8.4 Изометрическая проекция

В отличие от диметрической в изометрической проекции ставится условие равного сокращения всех трех координатных осей, т.е.

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta,$$

$$\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

Или

$$\sin \Phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta,$$

$$\text{и } \sin^2 \theta = \frac{1 - 2 \sin^2 \Phi}{1 + \sin^2 \Phi}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим  $\theta = 35.26^\circ$ ,  $\Phi = 45^\circ$ .

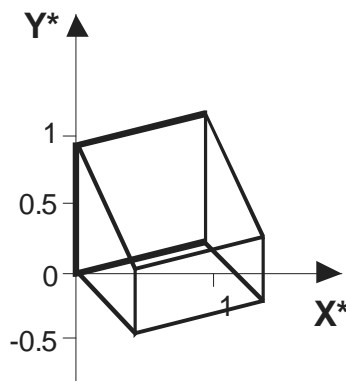


Рисунок 2.8

Отметим, что угол между преобразованным единичным вектором оси  $x$  и исходным составляет

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sin^2 \Phi \sin^2 \theta}{\cos^2 \Phi} = 30^\circ.$$

Поэтому, кстати, конструкторы при построении изометрических проекций используют в основном треугольник с углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$  градусов (в качестве чертежного инструмента).

### 2.8.5 Перспективные преобразования и проекции

Перспективная проекция получается путем перспективного преобразования и проецирования на некоторую плоскость наблюдения. Как мы увидим, перспективную проекцию можно получить путем выполнения одной из двух последовательностей преобразований:

1) перспективное преобразование в трехмерном пространстве и параллельное проецирование.

2) аффинные преобразования в трехмерном пространстве и центральное (перспективное преобразование) проецирование.

Напомним, что перспективные преобразования (в т.ч. проецирование) отличаются от аффинных наличием ненулевых элементов 4-го столбца матрицы  $4 \times 4$ .

Перспективная проекция на плоскость  $z = 0$  обеспечивается преобразованием

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & rz+1 \end{bmatrix},$$

$$\text{т.е. } \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

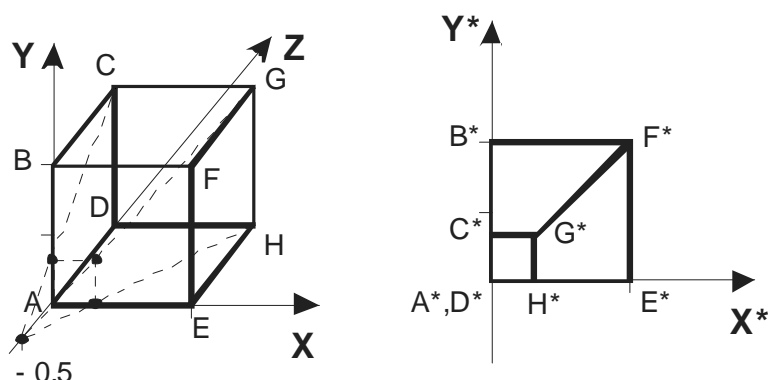


Рисунок 2.9

Геометрический смысл этого преобразования виден из рисунка. Каждая точка (например, C) переводится в точку  $C^*$  путем центральной проекции, центр

которой лежит на оси  $z$  в точке с координатами  $[0 \ 0 \ -k], k=1/r$ . Из рассмотрения подобных треугольников  $ODH$  и  $HOD$  видно, что

$$\frac{x^*}{k} = \frac{x}{z+k} \text{ или } x^* = \frac{x}{z/k+1}.$$

Аналогично, из треугольников  $OCD$  и  $DOC$

$$y^* = \frac{y}{z/k+1}.$$

При  $k = \infty$  перспективное преобразование вырождается в аксонометрическое.

Очевидно, что проекцию из другой точки можно получить, выполнив предварительно аффинные преобразования, переводящие центр проекции в требуемое положение, или, что то же самое, помещающее объект в нужное положение и под нужный ракурс. При этом координата  $h$  у всех точек останется равной 1, т.к. 4-й столбец матрицы аффинных преобразований  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . После этих преобразований выполняется центральное проецирование.

С другой стороны, при проецировании на плоскость  $z=0$  информация о координате  $z$  теряется. Иногда это неудобно. В этом случае можно выполнить перспективное преобразование, например матрицей

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ rz+1],$$

а затем – параллельное проецирование (см. рис. 3.10.)

Видно, что полученное трехмерное изображение и проекция воспринимаются скошенными, что дает неверное визуальное представление об их глубине. Более реалистическая картина получится, если предварительно сместить куб влево по оси  $x$  на 0.5 и вниз по оси  $y$  на 0.5 (центрирование) (см. рис.3.11)



Отметим еще одно интересное обстоятельство. Возьмем точку в бесконечности на оси  $z$  и выполним перспективное преобразование:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r \end{bmatrix}.$$

Поскольку параллельные линии исходного пространства “сходятся” в бесконечности, то в преобразованном пространстве линии, которые были параллельны оси  $z$ , будут сходиться в точке  $[0 \ 0 \ 1/r \ 0]$ . Эту точку называют точкой схода.

Аналогично, перспективное преобразование

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} & \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & qy+1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{qy+1} & \frac{y}{qy+1} & \frac{z}{qy+1} & 1 \end{bmatrix}.$$

будет приводить к точке схода  $[0 \ 1/q \ 0 \ 1]$ .

Преобразование  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  будет приводить к точке схода

$[1/p \ 0 \ 0 \ 1]$ .

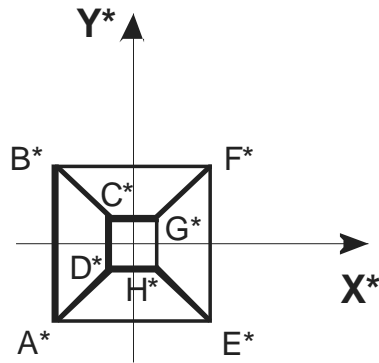


Рисунок 2.10

Преобразования, которые мы сейчас рассмотрели, являются односточными (имеют одну точку схода). Их еще называют параллельными перспективными преобразованиями.

Если в 4-м столбце матрицы  $4 \times 4$  два элемента ненулевые, то получим двухточечную или угловую перспективу

$$[\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{z} \quad \tilde{h}] = [x \quad y \quad z \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad px + qy + 1],$$

$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = \left[ \frac{x}{px + qy + 1} \quad \frac{y}{px + qy + 1} \quad \frac{z}{px + qy + 1} \quad 1 \right].$$

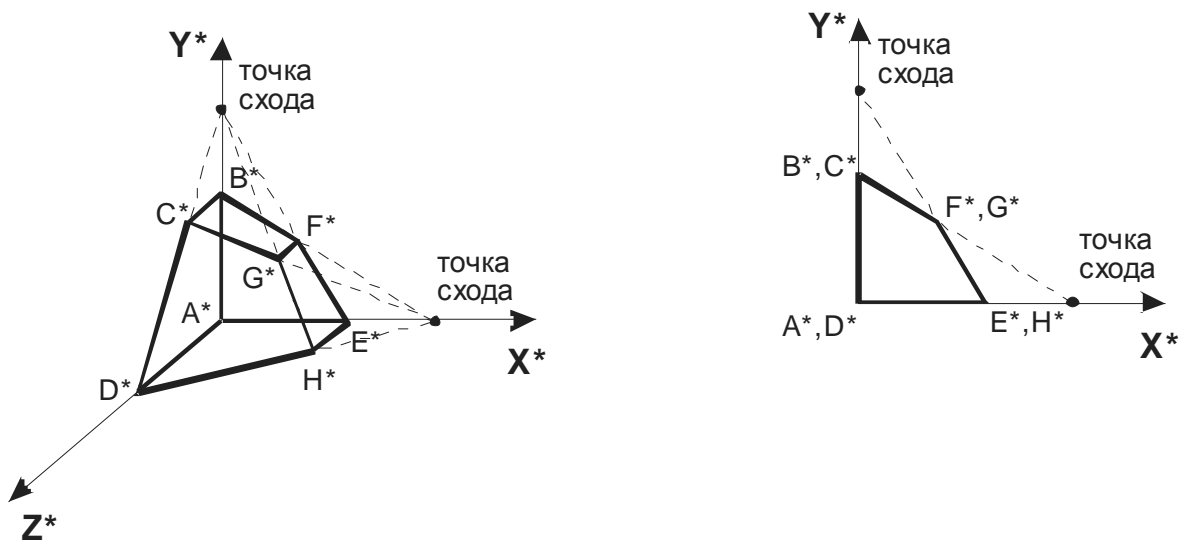


Рисунок 2.11

Точки схода в данном случае расположены на оси  $x$   $[1/p \ 0 \ 0 \ 1]$  и на оси  $y$   $[0 \ 1/q \ 0 \ 1]$ .

Отметим, что для построения реалистичной проекции недостаточно просто отцентрировать объект. Его нужно еще повернуть определенным образом, но это мы рассмотрим позже.

Аналогично, трехточечная или косая перспектива получается

$$[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ \tilde{h}] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ px + qy + rz + 1],$$

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[ \frac{x}{px + qy + rz + 1} \quad \frac{y}{px + qy + rz + 1} \quad \frac{z}{px + qy + rz + 1} \quad 1 \right].$$

Точки схода лежат на всех трех осях:

$$[1/p \ 0 \ 0 \ 1], [0 \ 1/q \ 0 \ 1], [0 \ 0 \ 1/r \ 1].$$

Пример построить самостоятельно.

При построении перспективных проекций для получения “правильных” (реалистических) изображений часто полезно выполнить ряд предварительных аффинных преобразований поворотов вокруг координатных осей и смещений. При этом может измениться вид перспективы.

Повернем единичный куб вокруг оси  $y$  на угол  $\theta$  и сместим его к точке  $[l \ m \ n]$ . Затем построим одноточечную перспективную проекцию с центром в точке  $k$  на оси  $z$  на плоскости  $z = 1$

Матрица:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & -\sin \theta/k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & \cos \theta/k \\ l & m & n & n/k + 1 \end{bmatrix}.$$

Т.е. матрица преобразования дает двухточечную перспективу.

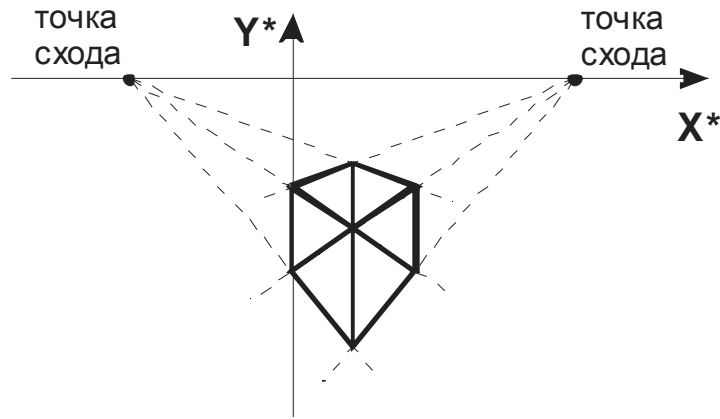


Рисунок 2.12

При этом линии, которые были параллельны оси  $y$ , остались параллельны, а линии, которые были параллельны осям  $x$  и  $z$ , сходятся в точках  $[-kctg\theta \ 0]$  и  $[ktg\theta \ 0]$  на оси  $x$ .

Трехточечная перспектива получается, если предварительно выполнено вращение вокруг двух координатных осей, например на угол  $\theta$  вокруг оси  $y$  и угол  $\Phi$  вокруг оси  $x$ .

### 2.8.6 Восстановление трехмерной информации

Восстановление трехмерной информации по его проекциям является проблемой в самых разных областях науки и техники. Очень распространен и хорошо изучен метод восстановления трехмерной информации по трем ортогональным проекциям (чертежи: вид сверху, сбоку и спереди). Менее известно и более проблематично восстановление информации по перспективным проекциям, например по фотографиям. Ниже мы рассмотрим основные положения, позволяющие восстанавливать трехмерную информацию по проекциям произвольного вида, и сформулируем требования к тому, какая априорная информация необходима в тех или иных случаях.

Проекция произвольного вида на плоскость  $z = 0$  получается с помощью следующего преобразования общего вида:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & 0 & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & 0 & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & 0 & T_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & 0 & \tilde{h} \end{bmatrix}. \quad (3.8.6.1)$$

Аналогично можно записать проекции на плоскость  $x=0$  и  $y=0$ . Мы будем рассматривать вопросы восстановления в случае плоскости  $z=0$ . Остальные случаи, очевидно, легко могут быть рассмотрены по аналогии.

Раскроем уравнение (3.8.6.1):

$$\begin{aligned} a) \quad & T_{11}x + T_{21}y + T_{31}z + T_{41} = \tilde{h}x^*; \\ b) \quad & T_{12}x + T_{22}y + T_{32}z + T_{42} = \tilde{h}y^*; \\ c) \quad & T_{14}x + T_{24}y + T_{34}z + T_{44} = \tilde{h}. \end{aligned} \quad (3.8.6.2)$$

Подставим (3.8.6.2)  $c)$  в  $a)$  и  $b)$ :

$$\begin{aligned} (T_{11} - T_{14}x^*)x + (T_{21} - T_{24}x^*)y + (T_{31} - T_{34}x^*)z + (T_{41} - T_{44}x^*) &= 0; \\ (T_{12} - T_{14}y^*)x + (T_{22} - T_{24}y^*)y + (T_{32} - T_{34}y^*)z + (T_{42} - T_{44}y^*) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.6.3)$$

На систему уравнений (3.8.6.3) можно смотреть с трех точек зрения.

1. Пусть известны  $x, y, z$  и матрица  $T$ . Найти  $x^*, y^*$ . Это – задача построения проекции, которой мы уже занимались до сих пор. Решение получается непосредственно из уравнения (3.8.6.3).

2. Пусть известны матрица  $T$  и координаты  $x^*, y^*$ . Требуется найти координаты  $x, y, z$ . Это задача восстановления трехмерной информации по проекции известного вида. При этом система уравнений (3.8.6.3) не имеет решения (два уравнения с тремя неизвестными). Для получения искомым координат требуется иметь две различные проекции, матрицы которых  $T$  и  $T''$  известны, и, кроме того, известны координаты одной и той же точки пространства на каждой из этих проекций  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ . (Пример – две фотографии объекта). Тогда имеем две пары уравнений вида (3.8.6.3), которое в матричном виде можно записать как

$AX = T$ , где

$$A = \begin{bmatrix} T'_{11} - T'_{14} x_1^* & T'_{21} - T'_{24} x_1^* & T'_{31} - T'_{34} x_1^* \\ T'_{12} - T'_{14} y_1^* & T'_{22} - T'_{24} y_1^* & T'_{32} - T'_{34} y_1^* \\ T''_{11} - T''_{14} x_2^* & T''_{21} - T''_{24} x_2^* & T''_{31} - T''_{34} x_2^* \\ T''_{12} - T''_{14} y_2^* & T''_{22} - T''_{24} y_2^* & T''_{32} - T''_{34} y_2^* \end{bmatrix},$$

$$X = [x \quad y \quad z]^T;$$

$$B = \begin{bmatrix} T'_{44} x_1^* - T'_{41} & T'_{44} y_1^* - T'_{42} & T''_{44} x_2^* - T''_{41} & T''_{44} y_2^* - T''_{42} \end{bmatrix}^T.$$

Получим систему из 4-х уравнений с тремя неизвестными. Решение этой системы может быть получено только приближенно, методом подбора. Тем не менее, то, что мы получили – это метод восстановления трехмерной информации по двум различным, но известным проекциям.

3. Пусть известны координаты точки в трехмерном пространстве  $x, y, z$  и ее координаты на проекции  $x, y$ . Необходимо определить матрицу  $T$ , то есть вид проекции. Теперь два уравнения (3.8.6.3) содержат 12 неизвестных. Для получения решения нам нужно иметь 6 таких пар уравнений, т.е. знать координаты в пространстве и на проекции – 6 так называемых опорных точек. Имея такую априорную информацию, мы можем восстановить вид проекции, то есть найти элементы матрицы  $T$ , и затем использовать этот результат для восстановления трехмерных координат других, не опорных точек, по методу, рассмотренному в предыдущем случае.

В матричной форме система 12 – ти уравнений может быть записана следующим образом:

$$A'T = 0,$$

где

$$A' = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & -x_1 x_1^* & y_1 & 0 & -y_1 x_1^* & z_1 & 0 & -z_1 x_1^* & 1 & 0 & x_1^* \\ 0 & x_1 & -x_1 y_1^* & 0 & y_1 & -y_1 y_1^* & 0 & z_1 & -z_1 y_1^* & 0 & 1 & y_1^* \\ x_2 & 0 & -x_2 x_2^* & y_2 & 0 & -y_2 x_2^* & z_2 & 0 & -z_2 x_2^* & 1 & 0 & x_2^* \\ 0 & x_2 & -x_2 y_2^* & 0 & y_2 & -y_2 y_2^* & 0 & z_2 & -z_2 y_2^* & 0 & 1 & y_2^* \\ x_3 & 0 & -x_3 x_3^* & y_3 & 0 & -y_3 x_3^* & z_3 & 0 & -z_3 x_3^* & 1 & 0 & x_3^* \\ 0 & x_3 & -x_3 y_3^* & 0 & y_3 & -y_3 y_3^* & 0 & z_3 & -z_3 y_3^* & 0 & 1 & y_3^* \\ x_4 & 0 & -x_4 x_4^* & y_4 & 0 & -y_4 x_4^* & z_4 & 0 & -z_4 x_4^* & 1 & 0 & x_4^* \\ 0 & x_4 & -x_4 y_4^* & 0 & y_4 & -y_4 y_4^* & 0 & z_4 & -z_4 y_4^* & 0 & 1 & y_4^* \\ x_5 & 0 & -x_5 x_5^* & y_5 & 0 & -y_5 x_5^* & z_5 & 0 & -z_5 x_5^* & 1 & 0 & x_5^* \\ 0 & x_5 & -x_5 y_5^* & 0 & y_5 & -y_5 y_5^* & 0 & z_5 & -z_5 y_5^* & 0 & 1 & y_5^* \\ x_6 & 0 & -x_6 x_6^* & y_6 & 0 & -y_6 x_6^* & z_6 & 0 & -z_6 x_6^* & 1 & 0 & x_6^* \\ 0 & x_6 & -x_6 y_6^* & 0 & y_6 & -y_6 y_6^* & 0 & z_6 & -z_6 y_6^* & 0 & 1 & y_6^* \end{bmatrix},$$

$$T = [T_{11} \quad T_{12} \quad T_{14} \quad T_{21} \quad T_{22} \quad T_{24} \quad T_{31} \quad T_{32} \quad T_{34} \quad T_{41} \quad T_{42} \quad T_{44}]^T.$$

### 3 ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

#### 3.1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

В этом разделе мы будем заниматься математическим описанием кривых на плоскости, а затем в пространстве, и далее – описанием поверхностей.

С одной стороны, любая кривая может быть представлена совокупностью точек, над которыми затем могут выполняться рассмотренные ранее преобразования. При этом важно, чтобы точки кривой располагались достаточно близко друг к другу, иначе они будут давать неверное представление о форме кривой. Математическое описание кривой имеет целый ряд преимуществ перед описанием через совокупность точек.

Основные преимущества следующие:

1. математическое описание является точным; оно позволяет вычислить такие характеристики кривой, как наклон, радиус кривизны и т. д.

2. оно компактно может быть занесено в память.

3. математическое описание позволяет легко менять форму кривых; результаты преобразования кривых известной матрице  $T$  могут быть также представлены в форме математического описания.

Теперь рассмотрим различные методы математического описания плоских кривых.

Математически кривая может быть представлена в параметрической и непараметрической форме. Непараметрическое описание задается в виде явной функции

$$y = f(x),$$

либо в виде неявной функции

$$f(x, y) = 0.$$

Задание в виде явной функции имеет один существенный недостаток: этим способом нельзя определить многозначные кривые, то есть такие, в которых одному значению  $x$  может соответствовать два и более значения  $y$ . Неявные функции лишены этого недостатка.



При параметрическом задании кривой каждая координата точки на кривой представляется как функция одного параметра.

Плоские параметрические кривые с одним параметром представляются в виде

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},$$

где  $t$  – параметр.

Геометрическая интерпретация математических описаний следующая. Для непараметрических функций – это геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих уравнениям  $y = f(x)$  или  $f(x, y) = 0$ . То есть все точки  $[x, y]$ , удовлетворяющие этим уравнениям, принадлежат кривой, и ни одна точка, координаты которой не удовлетворяют уравнениям, не принадлежит кривой.

Параметрические кривые интерпретируются как траектория движения некоего точечного объекта. При этом  $t$  имеет смысл времени. Положение конкретной точки (то есть в фиксированный момент времени) определяется парой  $[f(t); g(t)]$ .

Наклон кривой определяется следующим образом:

– для явной непараметрической функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x) \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \text{ – уравнения касательных}$$

– для неявной непараметрической функции:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \quad (\text{из уравнения } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0).$$

Уравнения касательных:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0;$$

– для параметрической функции:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)};$$

Уравнения касательных:

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'};$$

Наибольшее применение в машинной графике находят так называемые конические сечения.

Конические сечения – это сечения правильного конуса некоторой плоскостью. В зависимости от взаимного расположения секущей плоскости и оси симметрии конуса сечение будет являться кривой, относящейся к следующим четырем типам:

окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Все эти кривые относятся к кривым второй степени, то есть могут быть описаны уравнениями второй степени

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (4.1.1.)$$

где хоть один из  $a, b, c \neq 0$ . Вопрос, о том, какую именно кривую представляет это уравнение, определяется значениями его коэффициентов. Можно показать, что если величина дискриминанта.

$$D = b^2 - 4ac = 0, \text{ то это парабола;}$$

если  $D < 0$  – эллипс или окружность;

если  $D > 0$  – гипербола.

### 3.2 ОКРУЖНОСТЬ

Окружность с центром в точке  $C[m, n]$  и радиусом  $r$  задается уравнением

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Раскрывая скобки, приведем его к виду (4.1.1):

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

где

$$d = -2m, e = -2n, f = m^2 + n^2 - r^2.$$

Таким образом, уравнение окружности содержит три неизвестных коэффициента. Соответственно, для построения окружности (или дуги окружности) необходимо знать три точки, через которые она проходит: две концевые точки дуги и одну промежуточную. Однако построение дуги окружности через три заданные точки – это не единственный способ. Дуга окружности будет определена, если известны

- две концевые точки и центр;
- одна концевая точка и наклон в начале и в конце и т. д.

Приведем пример.

1. Построить дугу окружности, проходящей через три точки:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 2).$$

Уравнение окружности  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  в результате подстановки координат этих точек:

$$2 + d + e + f = 0;$$

$$8 + 2d + 2e + f = 0;$$

$$13 + 3d + 2e + f = 0.$$

Решением этой системы является  $d = -5; e = -1; f = 4$ ,

то есть уравнение искомой дуги

$$x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0; 1 < x < 3.$$

Центр этой окружности лежит в точке  $[m, n]$

$$m = -d/2 = 5/2 = 2.5,$$

$$n = -e/2 = 1/2 = 0.5.$$

Радиус этой окружности

$$r = \sqrt{m^2 + n^2 - f} = \sqrt{6.25 + 0.25 - 4} = \sqrt{2.5}.$$

2. Построить дугу окружности заданного радиуса  $r = 5$ , проходящую через две точки  $(1, 1)$  и  $(3, 2)$ .

Тогда

$$2 + d + e + f = 0$$

$$13 + 3d + 2e + f = 0$$

$$d^2/4 + e^2/4 - f = 25.$$

Решение этой системы получается итерационным способом:

$$d = -8.4; e = 5.7; f = 0.7.$$

Центр окружности  $[m, n] = [4.2; -2.85]$ .

3. Построить окружность с начальной точкой  $(1, 1)$  и с наклоном в начале  $1$ , в конце  $-0$ . (конечная точка здесь не известна и не может быть выбрана произвольно).

Определим уравнение наклона:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{2x + d}{2y + e}.$$

Тогда исходные данные запишутся как

$$y = 1 \text{ при } x = 1;$$

$$dy/dx = 1 \text{ при } y = 1 \text{ и } x = 1;$$

$$dy/dx = 0 \text{ при } x = 3;$$

то есть

$$2 + d + e + f = 0;$$

$$-\frac{2 + d}{2 + e} = 1, \text{ то есть } 4 + d + e = 0;$$

$$6 + d = 0.$$

Отсюда  $d = -6; e = 2; f = 2$ .

Уравнение исходной окружности:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0.$$

Радиус:  $r = \sqrt{(d/2)^2 + (e/2)^2 - f} = \sqrt{9 + 1 - 2} = \sqrt{8}$ .

Центр:  $[m, n] = [3; -1]$ .

Конечная точка: при  $x = 3$ ,  $y = (-2 \pm \sqrt{32})/2$ ,

то есть может быть две конечные точки  $[3; 1.8]$   $[3; -3.8]$ .

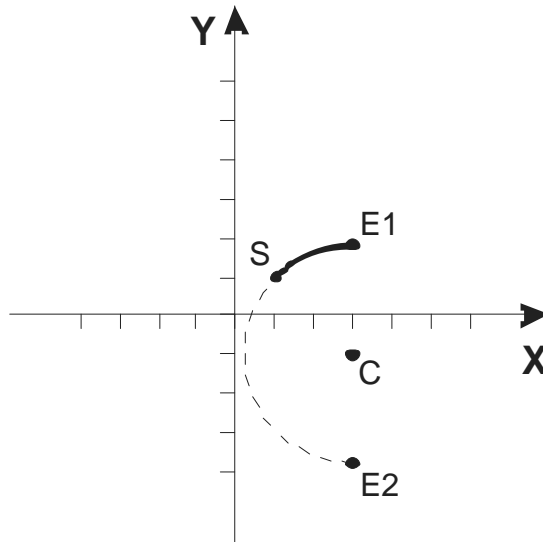


Рисунок 3.1

Параметрическое представление окружности задается следующим образом:

$$x = r \cos \theta;$$

$$y = r \sin \theta,$$

или другим способом :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(Здесь  $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ ).

При выборе способа задания окружности необходимо учитывать ряд моментов, связанных с вычислительной эффективностью алгоритма визуализации по математическому описанию и качеством воспроизведения.

Во-первых, чтобы распределение точек на кривой при визуализации позволяло хорошо представлять форму кривой.

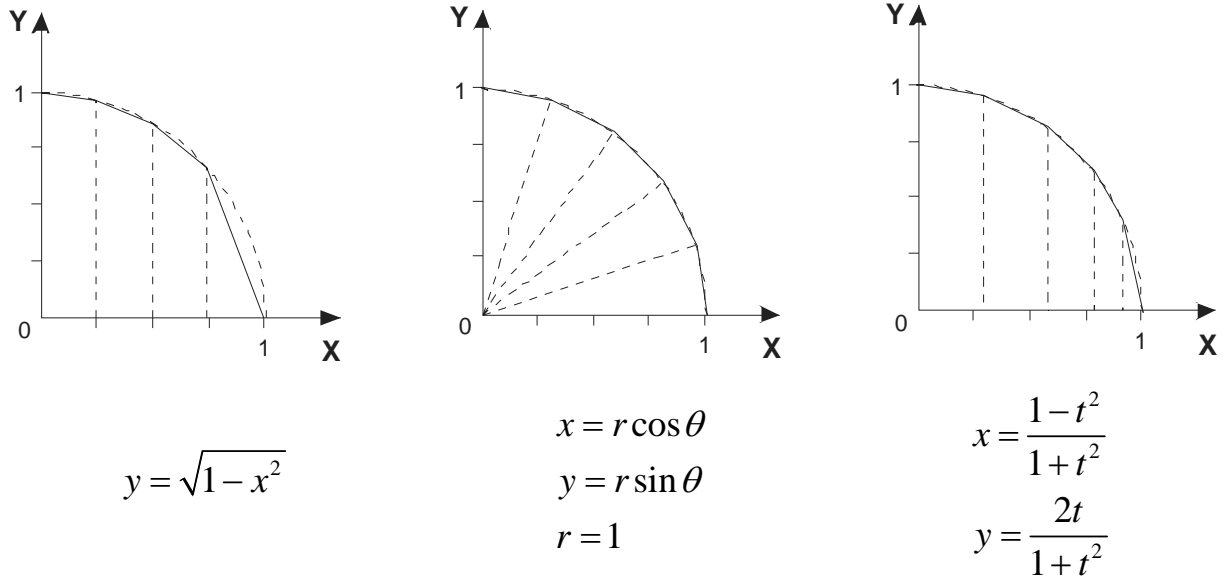


Рисунок 3.2

Из рисунков видно, что использование явного описания при равномерном приращении неизвестной переменной  $x$  дает довольно некачественное (неравномерное) распределение точек. Наиболее удачно здесь параметрическое задание через угол  $\theta$  с равномерным приращением по этому углу. Однако в вычислительном отношении оно довольно неэффективно, так как требует при вычислении каждой точки считать  $\cos$  и  $\sin$ .

Существует способ, позволяющий исключить вычисление тригонометрических функций на каждом шаге. Он основан на применении формул двойного угла:

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos \theta \cos d\theta - \sin \theta \sin d\theta;$$

$$\sin(\theta + d\theta) = \cos \theta \sin d\theta + \sin \theta \cos d\theta.$$

Даже если рассматривать всю окружность, то диапазон изменения угла можно считать фиксированным  $0 \div 2\pi$ , а приращение  $d\theta$  – константой.

Тогда  $x_n = r \cos \theta$ ;

$$y_n = r \sin \theta;$$

и  $x_{n+1} = r \cos(\theta + d\theta)$ ;

$$y_{n+1} = r \sin(\theta + d\theta);$$

откуда, с использованием формул двойного угла

$$x_{n+1} = x_n \cos d\theta - y_n \sin d\theta ;$$

$$y_{n+1} = x_n \sin d\theta + y_n \cos d\theta ,$$

так как  $d\theta = const$ , то величины  $\sin d\theta$  и  $\cos d\theta$  необходимо определить только один раз. Таким образом, имеем рекуррентную процедуру построения окружности.

### 3.3 ЭЛЛИПС

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (эта постоянная должна быть больше расстояния между фокусами).

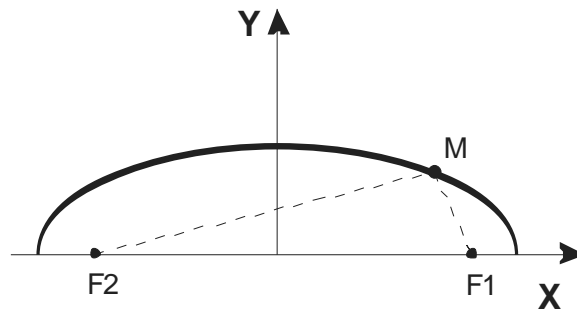


Рисунок 3.3

Уравнение эллипса в канонической форме:

$$\frac{(x-m)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-n)^2}{\beta^2} = 1; \alpha > \beta.$$

Приведем его к общему виду (4. 1. 1)

$$\beta^2 (x-m)^2 + \alpha^2 (y-n)^2 = \alpha^2 * \beta^2;$$

$$\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\beta^2 mx - 2\alpha^2 ny + \beta^2 m^2 + \alpha^2 n^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

ТО ЕСТЬ

$$a' = \beta^2; c' = \alpha^2; d' = -2\beta^2 m; e' = -2\alpha^2 n;$$

$$f' = \beta^2 m^2 + \alpha^2 n^2 - \alpha^2 \beta^2,$$

то есть уравнение (4. 1. 1) определяет эллипс, если  $a > 0, c > 0, a \neq c, b = 0$ .

Отметим, что это уравнение определяет эллипс в системе координат, в которой оси симметрии эллипса параллельны координатным осям.

Поворот осей координат на угол приводит к изменению коэффициентов:

$$a = a' \cos^2 \alpha + c' \sin^2 \alpha$$

$$b = 2(c' - d') \cos \alpha \sin \alpha$$

$$c = a' \sin^2 \alpha + c' \cos^2 \alpha$$

$$d = d' \cos \alpha + e' \sin \alpha$$

$$e = e' \cos \alpha - d' \sin \alpha$$

$$f = f'.$$

В дальнейшем будем рассматривать систему координат, в которой оси совпадают с осью симметрии кривой, и опустим штрихи у коэффициентов.

Непараметрическое представление эллипса имеет тот же недостаток, что и непараметрическое представление окружности. При равномерном приращении по оси  $x$  точки на кривой не позволяют качественно отобразить ее форму. Необходимо, чтобы точки вблизи  $[\alpha, 0]$  располагались чаще, а вблизи  $[0, \beta]$  – реже.

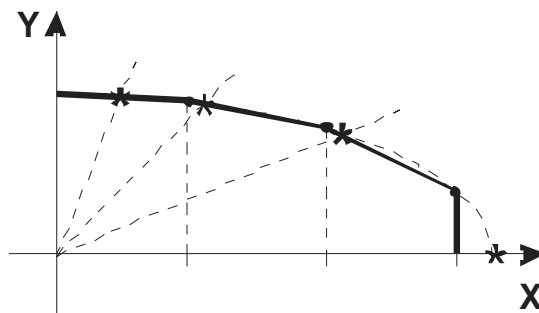


Рисунок 3.4

Параметрическое представление эллипса задается следующим образом:

$$x = \alpha \cos \theta;$$

$$y = \beta \sin \theta,$$

(предполагается, что центр находится в начале координат).



Использование формул двойного угла снова позволяет ввести рекуррентную процедуру вычисления координат точек эллипса при равномерном изменении угла  $\theta$ :

$$x_0 = \alpha$$

$$y_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n * \cos d\theta - \alpha/\beta y_n * \sin d\theta$$

$$y_{n+1} = \beta/\alpha x_n * \sin d\theta + y_n * \cos d\theta .$$

Однако и в этом случае точки на кривой располагаются так, что в окрестности с большой крутизной их недостаточно.

Последняя процедура лучше непараметрической лишь с вычислительной точки зрения: здесь не требуется вычислять квадратный корень, как в случае явного представления эллипса.

### 3.4 ПАРАБОЛА

Парабола есть геометрическое место точек, равноотдаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директриссой (предполагается, что фокус не лежит на директриссе) т.к. по оси  $y(\pm)$ .

$$(y - n)^2 = 2p(x - n)$$

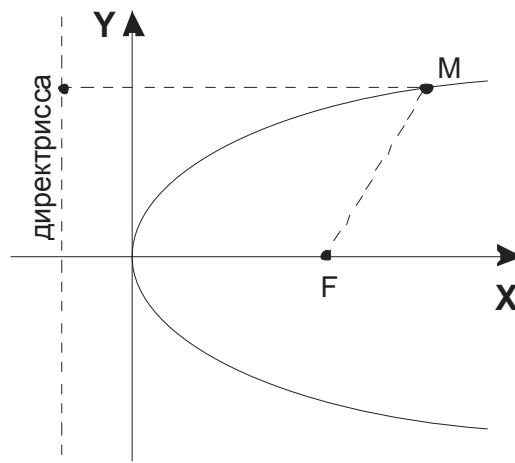


Рисунок 3.5

Уравнение параболы

$$;(x' - m)^2 = 4p(y' - n);$$

$$x'^2 - 2mx' - 4py' + m^2 - 4pn = 0,$$

то есть  $a \neq 0, b = 0, c = 0$ .

$$\text{При } a = 1, d = -2m, e = -4p, f = m^2 - 4pn,$$

( $m, n$  – координаты вершины;  $p$  – параметр, определяющий расстояние между директрисой и фокусом).

Приведенное уравнение представляет параболу, осью симметрии которой является  $y'$ . Если  $x'$  и  $y'$  поменять местами, осью симметрии будет  $x'$ . Если  $p > 0$ , то ветви параболы будут направлены в положительную сторону (вверх или вправо), если  $p < 0$  – в отрицательную сторону (вниз или влево).

Рассмотрим параболу, вершина которой находится в начале координат и осью симметрии является положительная часть оси  $x$ . В неявной непараметрической форме ее уравнение будет иметь вид

$$y^2 = 2px.$$

Параметрические представления могут быть различны.

Одно из них:

$$\begin{cases} x = tg^2\theta \\ y = \pm 2\sqrt{p}tg\theta \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi/2,$$

другое:

$$\begin{cases} x = p\theta^2 \\ y = 2p\theta \end{cases} \quad 0 < \theta < \infty.$$

Поскольку здесь  $\theta$  изменяется до  $\infty$ , требуется ввести ограничение:

значение  $\theta_{\max}$ . Например, ограничив ось  $x$ , получим  $\theta_{\max} = \frac{\sqrt{x_{\max}}}{p}$ .

Рекуррентную процедуру вычисления точек параболы в I квадрате с использованием постоянного приращения параметра, можно получить следующим образом:

для  $\theta_{n+1} = \theta_n + d\theta$

$$x_{n+1} = p\theta_n^2 - 2p\theta_n d\theta + p(d\theta^2)$$

$$y_{n+1} = 2p\theta_n + 2pd\theta,$$

то есть  $x_0 = 0$

$$y_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - y_n d\theta + p(d\theta)^2$$

$$y_{n+1} = y_n + 2pd\theta.$$

Точки кривой в IY квадрате могут быть получены отображением. Такая процедура является и эффективной с вычислительной точки зрения, и позволяет качественно представить форму: вблизи вершины точек больше, чем вдали от нее.

### 3.5 ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Уравнение:

$$\frac{(x-m)^2}{\alpha^2} - \frac{(y-n)^2}{\beta^2} = 1$$

или

.

Здесь  $a \neq 0$  и  $c \neq 0$ ;  $ac < 0, b = 0$ .

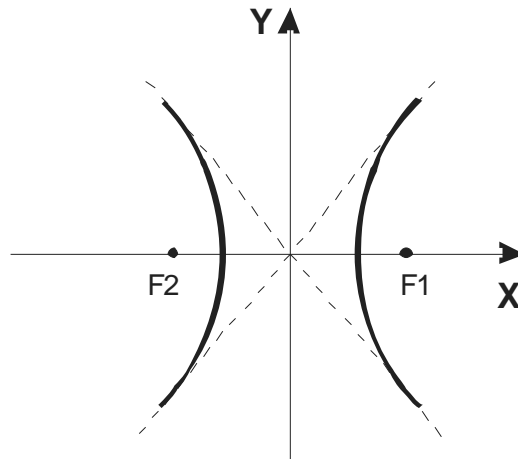


Рисунок 3.6

Будем рассматривать гиперболу, центрированную относительно начала координат и с положительной полуосью  $x$  в качестве оси симметрии.

Тогда в непараметрическом виде ее уравнение запишется как

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Это уравнение показывает, что вершина ее находится в точке  $[\alpha, 0]$ , а наклоны асимптот равны  $\pm \beta/\alpha$ .

Параметрическое представление задается зависимостями

$$\begin{cases} x = \pm \alpha \sec \theta \\ y = \pm \beta \operatorname{tg} \theta \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Для получения рекуррентной процедуры снова используем формулы двойного угла:

$$\sec(\theta + d\theta) = \frac{1}{\cos(\theta + d\theta)} = \frac{1}{\cos \theta \cos d\theta - \sin \theta \sin d\theta}$$

$$\operatorname{tg}(\theta + d\theta) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} d\theta}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} d\theta},$$

таким образом,

$$x_0 = \alpha;$$

$$y_0 = 0;$$

$$x_{n+1} = \pm a \sec(\theta + d\theta) = \pm \frac{ab/\cos\theta}{b\cos d\theta - btg\theta \sin\theta};$$

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{b\cos d\theta - y_n \sin d\theta};$$

$$y_{n+1} = \pm btg(\theta + d\theta) = \pm \frac{btg\theta + btgd\theta}{1 - tg\theta tg d\theta};$$

$$y_{n+1} = \frac{b(y_n + btgd\theta)}{b + y_n tg d\theta}.$$

Другим параметрическим представлением гиперболы является следующее:

$$x = ch\theta$$

$$y = bsh\theta .$$

Из-за того, что в компьютере не обрабатывается отдельно  $ch\theta, sh\theta$

$$(ch\theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2; sh\theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2).$$

Формулы двойного угла для  $ch$  и  $sh$ :

$$ch(\theta + d\theta) = ch\theta * chd\theta + sh\theta shd\theta ;$$

$$sh(\theta + d\theta) = sh\theta * chd\theta + ch\theta shd\theta .$$

Рекуррентная процедура:

$$x_{n+1} = x_n * chd\theta + a/b * y_n * shd\theta ;$$

$$y_{n+1} = b/a * x_n * shd\theta + y_n * chd\theta .$$

Эта процедура дает очень хорошее распределение точек на гиперболе.

## 4 ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

### 4.1 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

Как и плоские кривые, пространственные кривые могут быть представлены непараметрически и параметрически.

Непараметрическое явное задание:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} .$$

Непараметрическое неявное задание – кривая на пересечении двух поверхностей:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} .$$

Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 < t < t_2. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Многие кривые имеют известное и хорошо изученное аналитическое описание.

Простейший пример – цилиндрическая спираль:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

где

$|a|$  – радиус,  $2\pi|b|$  – шаг спирали.

Очень часто аналитическое описание неизвестно. В этом случае ставится задача проведения кривой через ряд заданных точек, или проведения кривой, имеющей более сложную зависимость от заданных точек (например, некоторые точки определяют наклон) и т.д.

Рассмотрим сначала задачу проведения гладкой кривой через ряд заданных точек. Для её решения часто используют сплайновые сегменты.

## 4.2 КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Физически сплайны можно представить в виде узкой деревянной рейки, лежащей концами на точках опоры, кривизны которой реализуется с помощью свинцовых грузов.

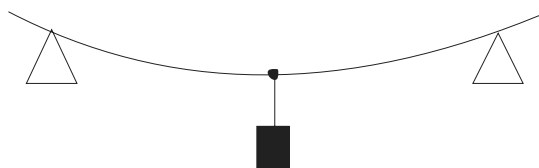


Рисунок 4.1

Математически сплайн описывается полиномом  $k$  – той степени. Чаще всего используют полиномы третьей степени – кубические сплайны. Конкретный вид кубического сплайна определяется координатами точек, через которые его надо провести (концевых точек) и наклоном в этих точках.

Если требуется провести гладкую кривую между  $n$  точками, то используется совокупность  $n-1$  сплайнов – так называемые сплайновые сегменты. При этом предъявляется требование непрерывности второго порядка в местах соединений.

Уравнение единственного кубического сплайнового сегмента в параметрической форме выглядит следующим образом:

$$P(t) = B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3 = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1}, t_1 < t < t_2,$$

где  $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  – вектор положения произвольной точки на сплайне.

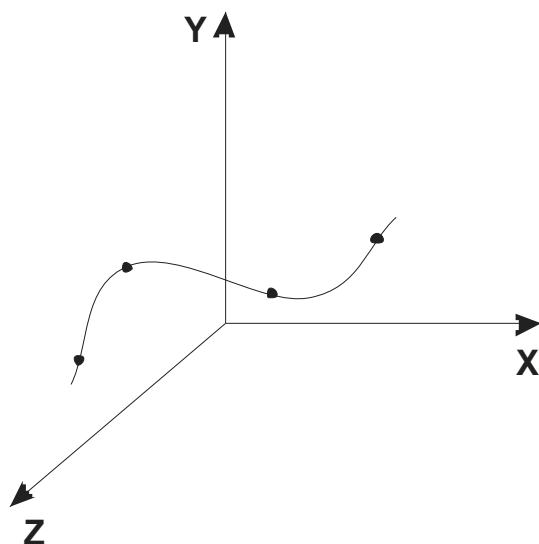


Рисунок 4.2

Коэффициенты  $B_i, i = \overline{1,4}$  определяются координатами концов сегмента  $P_1$  и  $P_2$  и касательными векторами на концах  $P'_1$  и  $P'_2$ , которые являются произвольными по параметру  $t$ .

Внутри сплайнового сегмента параметр  $t$  меняется от  $t_1$  до  $t_2$  ( $t_1$  соответствует  $P_1, t_2 - P_2$ ).

Обычно полагают  $t_1 = 0$ . Тогда

$$P(0) = P_1$$

$$P(t_2) = P_2,$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = P'_1,$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} = P'_2.$$

Отсюда получим:

$$P(0) = B_1 = P'_1,$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2 \Big|_{t=0} = B_2 = P'_1,$$

$$P(t_2) = B_1 + B_2t_2 + B_3t_2^2 + B_4t_2^3 = P_2,$$



$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2 = P'_2.$$

Окончательно имеем:

$$B_1 = P_1,$$

$$B_2 = P'_1,$$

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2} - \frac{P'_2}{t_2},$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} - \frac{P'_1}{t_2^2} - \frac{P'_2}{t_2^2}.$$

Отсюда уравнение одного кубического сплайнового сегмента:

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left( \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right) t^2 + \left( \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} - \frac{P_2'}{t_2^2} \right) t^3.$$

Обобщение этого уравнения для любых двух смежных сегментов  $P_k(t)$  и  $P_{k+1}(t)$ , где  $1 < k < n - 2$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_k(t) &= P_k + P_k' t + \left( \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P_k'}{t_{k+1}} - \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}} \right) t^2 + \\ &+ \left( \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P_k'}{t_{k+1}^2} - \frac{P_{k+1}'}{t_{k+1}^2} \right) t^3; \\ P_{k+1}(t) &= P_{k+1} + P_{k+1}' t + \left( \frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P_{k+1}'}{t_{k+2}} - \frac{P_{k+2}'}{t_{k+2}} \right) t^2 + \\ &+ \left( \frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P_{k+1}'}{t_{k+2}^2} - \frac{P_{k+2}'}{t_{k+2}^2} \right) t^3. \end{aligned}$$

При этом важно, что в уравнении

$$\begin{aligned} P_k(t) & \quad t_k < t < t_{k+1} \\ P_{k+1}(t) & \quad t_{k+1} < t < t_{k+2}. \end{aligned}$$

Кривая в этом случае определяется тремя точками  $P_k(t)$ ,  $P_{k+1}(t)$ ,  $P_{k+2}(t)$  и касательными на концах, то есть  $P_k'$  и  $P_{k+2}'$ . Касательная в точках  $P_{k+1} - P_{k+1}'$  определяется из условия непрерывности второго порядка – постоянства кривизны в точке соединения  $P_{k+1}$ .

Вторая производная  $P(t)$

$$P''(t) = 2B_3 + 6B_4 t \quad \text{при } t = t_{k+1} \text{ в конце первого сегмента.}$$

$$P''(t) = 2B_3 + 6B_4 t_{k+1}$$

а в начале второго ( $t = 0$ ).

$$P'' = 2B_3 \quad (\text{это коэффициенты двух разных сплайновых сегментов}).$$

Приравняем  $P$  в этих точках, подставим  $B_3$  и  $B_4$ :

$$6t_{K+1} \left[ \frac{2(P_K - P_{K+1})}{t_{K+1}^3} + \frac{P'_K}{t_{K+1}^2} + \frac{P'_{K=1}}{t_{K=1}^2} \right] + 2 \left[ \frac{3(P_{K+1} - P_K)}{t_{K=1}^2} - \frac{2P'_K}{t_{K+1}} - \frac{P'_{K=1}}{t_{K=1}} \right] =$$

$$= 2 \left[ \frac{3(P_{K+2} - P_{K=1})}{t_{K+2}^2} - \frac{2P'_{K+1}}{t_{K+2}} - \frac{P'_{K+2}}{t_{K=2}} \right].$$

После преобразований (умножения на  $t_{K+1}t_{K+2}$  и группировки членов) получим

$$t_{K+2}P' + 2(t_{K+2} + t_{K+1})P'_{K+2} + t_{K+1}P'_{K+2} =$$

$$= \frac{3}{t_{K+1}t_{K+2}} \left[ t_{K+2}^2(P_{K+2} - P_{K+1}) + t_{K+2}^2(P_{K+1} - P_K) \right].$$

В этом уравнении только одно неизвестное  $-P'_{K+2}$ , то есть касательная в точке соединения.

При проведении кривой через  $n$  точек касательные во всех точках соединения  $-P'_2 \div P'_{n-1}$  – определяются из следующего матричного уравнения:

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & & & \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & & \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & t_n & 2(t_{n-1} + t_n) & t_{n-1} & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \dots \\ P'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)] \\ \frac{3}{t_3 t_4} [t_3^2(P_4 - P_3) + t_4^2(P_3 - P_2)] \\ \dots \\ \dots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} [t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})] \end{bmatrix}.$$

Это произведение матрицы размера  $(n-2) \times n$  на матрицу  $n \times 1$ .

Результатом является матрица  $(n-2) \times 1$ .

Система обычных уравнений, получающихся из этого матричного уравнения, будет определена, если известны, то есть касательные на концах кривой.

Решение этой системы даст значения касательных в точках соединения, после чего могут быть получены коэффициенты  $B_i, i = \overline{1,4}$  всех сплайновых сегментов.

Для окончательного решения задачи построения сплайн-кривой нам остаётся выбрать пределы изменения параметра  $t$  в каждом сегменте. Поскольку все полученные формулы предполагают, что начало каждого сегмента соответствует  $t=0$ , то необходимо определить лишь значения  $t_k, k = 2 \div n$ . Выбор этих величин будет влиять на гладкость сплайна.

Обычно эту задачу решают не из строгих соображений (например, обеспечение минимума кривизны вдоль всей кривой) – это довольно сложно. На практике приемлемыми являются простейшие методы выбора  $t_k$ .

Можно, например, использовать так называемые нормализованные параметры, то есть считать, что на всех участках  $0 < t < 1$ .

Тогда матричное уравнение для определения касательных в точках соединения будет иметь вид:

$${}_{n-2} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_n \times \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \dots \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_3 - P_1) \\ 3(P_4 - P_2) \\ \dots \\ 3(P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix},$$

а с учетом того, что  $P'_1$  и  $P'_2$  должны быть заданы:

$${}_{n-2} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{n-2} \times \begin{bmatrix} P'_2 \\ P'_3 \\ \dots \\ P'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_3 - P_1) - P'_1 \\ 3(P_4 - P_2) - P'_2 \\ \dots \\ 3(P_n - P_{n-1}) - P'_n \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты  $B_i, i = \overline{1,4}$  для каждого сегмента вычисляются из следующего уравнения:

$$\begin{bmatrix} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_K \\ P_{K+1} \\ P_K \\ P_{K+1} \end{bmatrix}, 1 < k < n-1.$$

Такой метод удобен в вычислительном отношении, так как трехдиагональную матрицу из уравнения для  $P'_k, k = \overline{2, n-1}$  приходится обращать только один раз. На практике метод дает хорошие результаты, если точки  $P_1, \dots, P_{K-1}$  расположены достаточно равномерно.

При неравномерном распределении точек в качестве  $t$  обычно выбирают расстояние между  $P$  и  $P$  – метод локальных хорд. Кубические сплайновые кривые широко распространены, однако имеют ряд недостатков. Например, с их помощью нельзя точно передать дугу окружности, а только приближенно.

Примеры кубических сплайновых сегментов.

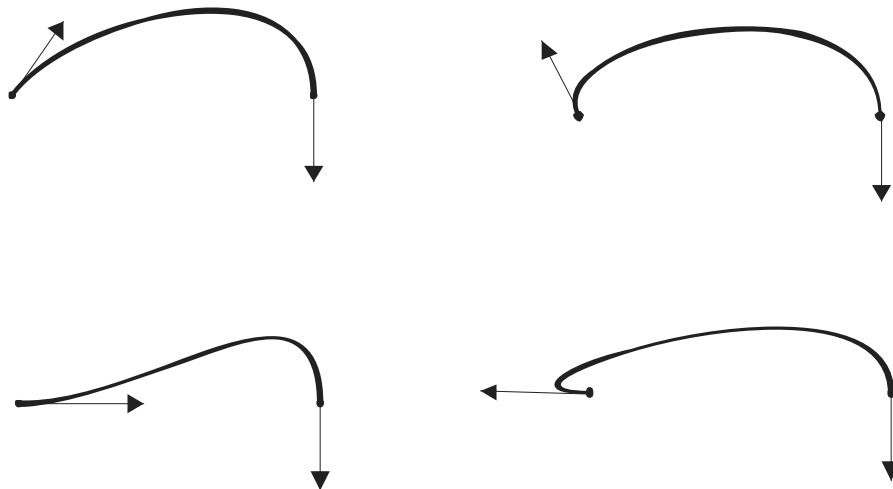


Рисунок 4.3

### 4.3 КРИВЫЕ БЕЗЬЕ

Рассмотренные сплайн-кривые проходят через все заданные точки. Во многих случаях это дает хорошие результаты, однако имеется один недостаток

– необходимость явного задания касательных векторов. Интуитивно эти вектора трудно себе представить, особенно неподготовленному пользователю.

Более удобный способ построения кривых предложил Безье. Кривая Безье определяется несколькими точками, – так называемыми вершинами многоугольника. При этом кривой принадлежат лишь первая и последняя точки, а остальные задают ее форму.

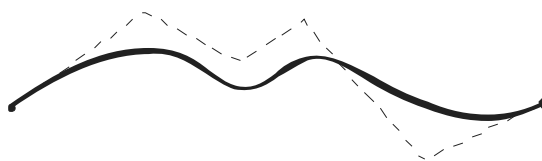


Рисунок 4.4.

Так как вид кривой зависит от формы многоугольника, то изменение положения вершин создает у пользователя значительно более ясное интуитивное ощущение восприятия связи между вершинами, задаваемыми в диалоговом режиме, и требуемой формой.

Кроме того, если сплайн-кривые имеют фиксированный порядок (мы рассмотрели. Порядок равный трем – кубические сплайны), то в методе Безье порядок любого криволинейного сегмента может быть увеличен путем задания дополнительных вершин.

Математически кривая Безье описывается полиномиальной функцией, построенной в так называемом базисе Бернштейна. Базисная функция в нем задается соотношением

$$I_{n,i}(t) = c^n_i t^i (1-t)^{n-i},$$

где  $c^n_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ ,  $0 < i < n$ .

Здесь  $n$  – степень полинома;  $i$  – порядковый номер отдельной вершины.

Точки кривой в базисе Бернштейна задаются как

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i I_{n,i}(t), \quad 0 < t < 1$$

то есть  $n$ -й порядок полинома характеризуется  $n+1$ -й вершиной.

В начальной точке  $t = 0$

$$I_{n,0}(0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} 0^0 (1-0)^{n-0} = 1; (0! = 1);$$

$$I_{n,i}(0) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (0^0 = 1).$$

В конечной точке  $t = 1$

$$I_{n,n}(1) = \frac{n!}{n!(n-n)!} 1^n (1-1)^{n-n} = 1;$$

$$I_{n,i}(1) = 0, i = \overline{0, n-1}.$$

То есть  $P(0) = P_0$  и  $P(1) = P_n$ , вершины  $P_0$  и  $P_n$  действительно являются началом и концом криволинейного сегмента.

В качестве примера рассмотрим кубические кривые Безье. Зададим постоянные приращения параметру  $t$ :

$$t = \{0; 1/3; 2/3; 1\}$$

Тогда

$$I_{3,1}(t) = \frac{3!}{1!2!} t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2;$$

$$I_{3,2}(t) = \frac{3!}{2!1!} t^2(1-t) = 3t^2(1-t).$$

Получим

$T$	$I_{3,0}$	$I_{3,1}$	$I_{3,2}$	$I_{3,3}$
0	1	0	0	0
1/3	8/27	4/9	2/9	1/27
2/3	1/27	2/9	4/9	8/27
1	0	0	0	1

То есть

$$P(0) = P_0;$$

$$P(1/3) = 8/27 P_0 + 4/9 P_1 + 2/9 P_2 + 1/27 P_3;$$

$$P(2/3) = 1/27 P_0 + 2/9 P_1 + 4/9 P_2 + 8/27 P_3;$$

$$P(1) = P_3.$$

В зависимости от положения точек  $P_0 \div P_3$  могут получаться различные кривые.

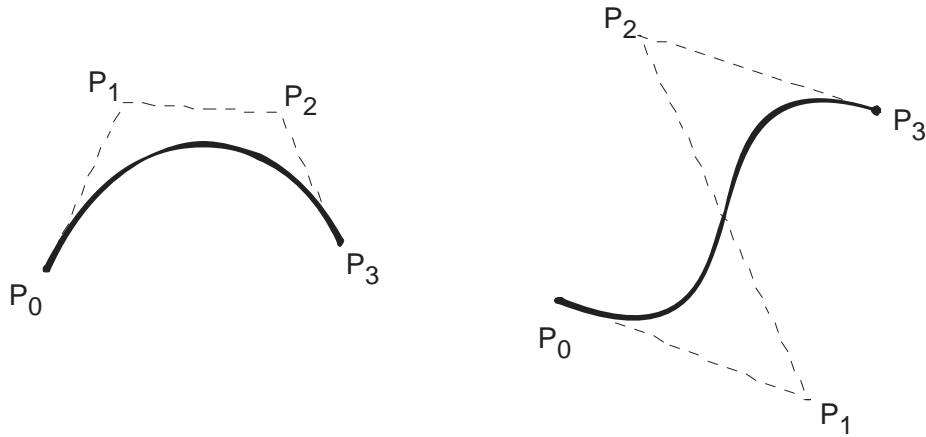


Рисунок 4.5

При сопряжении двух сегментов требуется выполнить условия непрерывности в общем случае  $k$  – го порядка, то есть равенства  $k$  – й производной кривой первого сегмента в конечной точке и  $k$  – й производной второго сегмента в начальной точке.

Рассмотрим условие непрерывности первого порядка.

Выражение для  $P'(t)$  удобно найти, явно расписав сумму для  $P(t)$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 C_n^0 t^0 (1-t)^n + P_1 C_n^1 t^1 (1-t)^{n-1} + \dots + P_{n-1} C_n^{n-1} t^{n-1} (1-t) + P_n C_n^n t^n (1-t)^0 = \\ &= P_0 (1-t)^n + n P_1 t (1-t)^{n-1} + \dots + n P_{n-1} t^{n-1} (1-t) + P_n t^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P'(t) &= -n P_0 (1-t)^{n-1} + n P_1 (1-t)^{n-1} - n(n-1) P_1 t (1-t)^{n-2} + \dots + \\ &+ n(n-1) P_{n-1} t^{n-2} (1-t) - n P_{n-1} t^{n-1} + n P_n t^{n-1}. \end{aligned}$$

В точках  $t=0$  и  $t=1$  получим

$$P'(0) = n(P_1 - P_0);$$

$$P'(1) = n(P_n - P_{n-1});$$



Пусть одна кривая Безье определена точками  $P_0 \div P_n$ , а другая точками  $Q_0 \div Q_m$ . Непрерывность первого порядка имеет место, если

$$P'(1) = gQ'(0), \text{ где } g \text{ – скаляр}$$

Имеем

$$n(P_n - P_{n-1}) = gm(g - Q_0)$$

Раз кривые сопрягаются, то  $P_n = Q_0$

Таким образом, для обеспечения непрерывности первого порядка требуется, чтобы конечный отрезок первого многоугольника и начальный отрезок второго лежали на одной прямой (или точки  $P_{n-1}, P_n = Q_0, Q_0$  – на одной прямой).

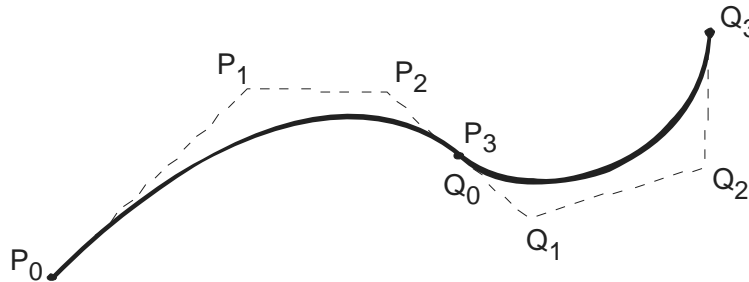


Рисунок 4.4

#### 4.4 В-СПЛАЙНЫ

Еще одним методом построения гладкой кривой между двумя точками (концами), форма отдельных участков которой определяется промежуточными точками, является метод *B*-сплайнов.

Вначале определим понятие *B*-сплайна. Произвольная точка кривой  $P(t)$ , то есть ее вектор положения, задается в *B*-сплайн базисе следующим образом:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t),$$

Здесь  $P_i$  – вершины характеристического многоугольника,  $i = \overline{0,1}$ ;

$N_{i,k}$  – базисные функции;

$k$  – порядок кривой;

$t$  – параметр, изменяющийся в диапазоне от 0 до  $t_{\max}$ .

В отличие от метода кривых Безье, где  $0 < t < 1$ , в методе  $B$ -сплайнов величина  $t_{\max} \neq 1$  и определяется порядком кривой, а также наличием так называемых кратных вершин, которые мы рассмотрим чуть ниже.

Для определения базисных функций  $N_{i,l}$  введем понятие узлового вектора.

Узловой вектор или вектор параметрических узлов представляет собой последовательность целых положительных чисел  $q_j$

$$[q_1, q_2, \dots, q_{j+1}],$$

в которой  $q_j < t < q_{j+1}$ . Примерами узлового вектора является  $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$  или  $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$  и т.д. Значения  $q_j$  рассматриваются как параметрические узлы, характеризующие различные интервалы изменения параметра  $t$ . Размерность узлового вектора и конкретные значения узлов зависят от числа вершин задающего многоугольника, то есть от  $n$ , порядка кривой  $k$  и сложности вершин.

Сложная (или кратная) вершина это две или более вершины с одинаковыми координатами. В узловом векторе сложным вершинам соответствует последовательность одинаковых по величине компонент  $q_1, q_{i+1}, \dots, q_{i+l-1}$ , где  $l$  – кратность вершины.

Алгоритм формирования узлового вектора следующий. Входными параметрами являются:

- массив вершин задающего многоугольника, в котором  $l$  – кратная вершина представлена как  $l$  – простых вершин с совпадающими координатами – массив  $P[n+1]$ ;
- $n$  – число вершин без  $l$ ;
- $k$  – порядок кривой.

На выходе формируется вектор  $q$ .

Размерность вектора  $q$  определяется, как  $n + 2(k - 1)$ , то есть  $q = [q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+k}]$ ;

1) Для  $0 < j < k - 1$   $q_j = 0$ ;

2) Для  $k < j < n + 1$ , если  $P_{j-k} \neq P_{j-k+1}$ , то  $q_j = q_{j-1} + 1$ ; если  $P_{j-k} = P_{j-k+1}$ , то  $q_j = q_{j-1}$ ;

3) Для  $n + 2 < j < n + k$   $q_j = q_{j-1}$ .

Например, если задающий многоугольник содержит пять вершин, то есть  $n = 4$ , порядок кривой  $k = 2$  и отсутствуют сложные вершины, то  $q = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$ ;

если  $k = 3$ , то  $q = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ;

если одна из вершин, например  $P_1$ , двойная, то есть массив вершин включает  $P_0, P_1, P_1, P_2, P_3, P_4$ , или  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , где  $P_1 = P_2$ , то есть  $n = 5$  и  $k = 2$ , то

$q = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4]$ ;

если  $n = 3$ , то  $q = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ .

Отметим одно общее правило: начальные и конечные вершины условно считаются  $k$  – кратными, однако, в отличие от кратных промежуточных вершин, это не приводит к увеличению  $n$ , а лишь отражается в узловом векторе.

Теперь определим базисные функции  $N_{ik}(t)$ .

Они задаются рекуррентным соотношением

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i < t < q_{i+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases};$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - q_i}{q_{i+k-1} - q_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{q_{i+k} - t}{q_{i-k} - q_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Отсюда видно, что если порядок кривой равен  $k$ , то функция  $N_{i,k}(t)$ , соответствующая  $i$  – вершине  $P_i$ , не равна нулю только на промежутке

$q_1 < t < q_{1+k}$  то есть каждая вершина  $P_1$  имеет ограниченное (локальное) влияние на форму кривой.

Метод  $B$ -сплайнов позволяет изменить форму кривых и добиваться нужной формы различными способами – изменяя количеством положение вершин, их сложность, порядок кривой и так далее. Если порядок кривой  $k$  равен числу вершин и отсутствуют сложные вершины, то  $B$ -сплайн кривая совпадает с кривой Безье; с уменьшением порядка форма кривой приближается к форме описывающего ее многоугольника.

При  $k = 2$  кривая полностью совпадает с многоугольником.

Рассмотрим пример.

Пусть многоугольник состоит из четырех вершин:

$P_0, P_1, P_2, P_3$ , то есть  $n = 3$ . Пусть  $k = 2$ .

Тогда  $q = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$ , т.е.  $q_0 = 0, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 2, q_4 = 3, q_5 = 3$ ;

Определим функцию  $N$ . При этом будем считать, что  $0/0 = 0$

$$N_{0,2}(t) = \frac{t - q_0}{q_1 - q_0} N_{0,1}(t) + \frac{q_2 - t}{q_2 - q_1} N_{1,1}(t);$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t - q_1}{q_2 - q_1} N_{1,1}(t) + \frac{q_3 - t}{q_3 - q_2} N_{2,1}(t);$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{t - q_2}{q_3 - q_2} N_{2,1}(t) + \frac{q_4 - t}{q_4 - q_3} N_{3,1}(t);$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{t - q_3}{q_4 - q_3} N_{3,1}(t) + \frac{q_5 - t}{q_5 - q_4} N_{4,1}(t).$$

Заполним таблицу:

$t$	$N_{0,2}$	$N_{1,2}$	$N_{2,2}$	$N_{3,2}$	$P(t)$
0	1	0	0	0	$P_0$
0.5	0.5	0.5	0	0	$0.5(P_0 + P_1)$
1	0	1	0	0	$P_1$
1.5	0	0.5	0.5	0	$0.5(P_1 + P_2)$
2	0	0	1	0	$P_2$
2.5	0	0	0.5	0.5	$0.5(P_2 + P_3)$
3	0	0	0	1	$P_3$

$t = 0$

$$N_{0,2} = \frac{0-0}{0-0} + \frac{1-0}{1-0}1 = 1$$

$$N_{1,2} = \frac{0-0}{1-0} + \frac{2-0}{2-1}0 = 0$$

$$N_{2,2} = N_{3,2} = 0$$

$t = 0.5$

$$N_{0,2} = \frac{0.5-0}{0-0}0 + \frac{1-0.5}{1-0}1 = 0.5$$

$$N_{1,2} = \frac{0.5-0}{1-0}1 + \frac{2-0.5}{2-1}0 = 0.5$$

$$N_{2,2} = N_{3,2} = 0$$

и так далее.

Далее,  $P(t) = P_0N_{0,2}(t) + P_1N_{1,2}(t) + P_2N_{2,2}(t) + P_3N_{3,2}(t)$ .

При  $t = 0$ ,  $P(0) = P_01 + P_10 + P_20 + P_30 = P_0$

$t = 0.5$ ,  $P(0.5) = P_00.5 + P_10.5 = (P_0 + P_1)$

$t = 1$ ,  $P(1) = P_1$ .

Таким образом, мы убедились, что при  $k = 2$  кривая совпадает с задающим многоугольником.

Проиллюстрируем теперь различные способы коррекции формы  $B$ -сплайн кривой.

Изменение порядка кривой.

при  $k = 2$  кривая совпадает с многоугольником;

при  $k = 4$  – это кривая Безье;

при  $k = 3$  – промежуточное положение.

Чем выше порядок, тем больше форма кривой отличается от формы задающего многоугольника.

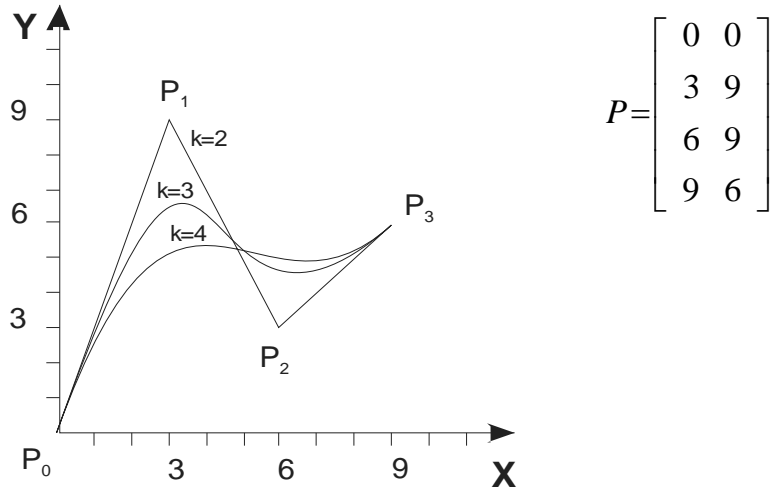


Рисунок 4.7

Увеличение сложности вершины с одновременным увеличением порядка.

(количество вершин / порядок)

4/4 – нет сложных вершин – кривая Безье;

5/5 –  $P_1$  – двойная вершина, то есть

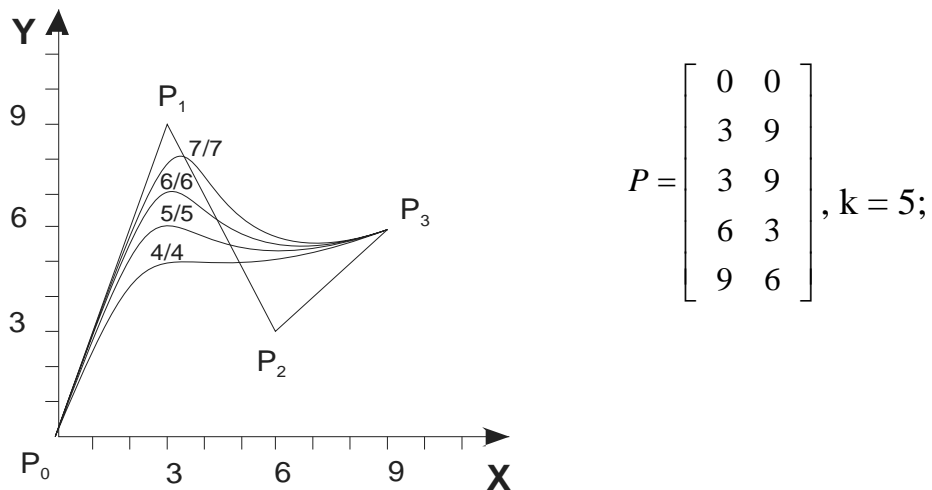
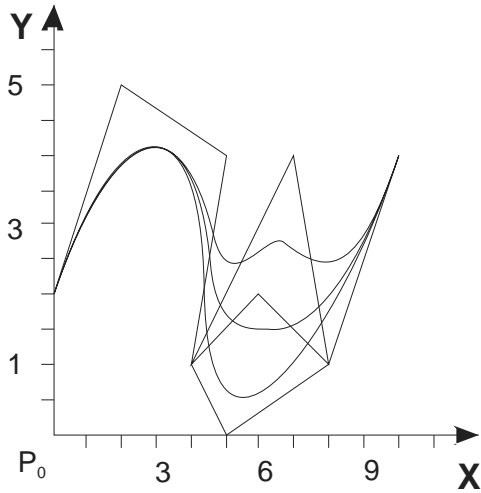


Рисунок 4.8

и так далее. То есть сложные вершины подтягивают кривую к себе. Отметим, что в этом случае начальные и конечные наклоны кривой остаются неизменными.

Локальная коррекция формы – изменение положения одной вершины.



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n = 6, k = 5$$

Рисунок 4.9

Видно, что изменение положения пятой вершины  $P_4$  не меняет начальную форму кривой. В этом проявляется локальная природа базисных функций  $N(t)$ .

## 5 ОПИСАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Задача построения поверхностей возникает в таких областях, как проектирование самолетов, кораблей и так далее, при работе с местностью (ее участками) и так далее.

Традиционным способом описания поверхностей у конструкторов является ортогональные проекции, у картографов – линии равного уровня. Однако многие сложные поверхности не могут быть эффективно представлены таким образом. Для машинной графики актуальной является задача поиска эффективных описаний поверхности, с помощью которых ее затем можно отобразить (используя проекции) произвольным образом. Причем в простых случаях ищут единое математическое описание для всей поверхности, в более сложных – используют кусочную аппроксимацию (приближение) отдельных ее частей.

Рассмотрим различные методы аналитического (точного) и численного (приближенного) представления трехмерных поверхностей. Вначале отметим, что поверхность (или ее участок) может быть описана явно, неявно и параметрически:

– явно:  $z = f(x, y)$ ;

– неявно:

– параметрически: 
$$\begin{cases} x = f(u, w) \\ y = g(u, w) \\ z = h(u, w) \end{cases}.$$



## 5.1 СФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Неявное описание единичной сферы выглядит следующим образом:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Характерные кривые на сферической поверхности могут быть получены с помощью плоскостей, которые ее пересекают. Пересечение единичной сферы и плоскости

$$z = \cos \Phi_1 = a_1$$

(плоскость, параллельная плоскости  $XOY$  и проходящая через точку  $z = a_1$ )

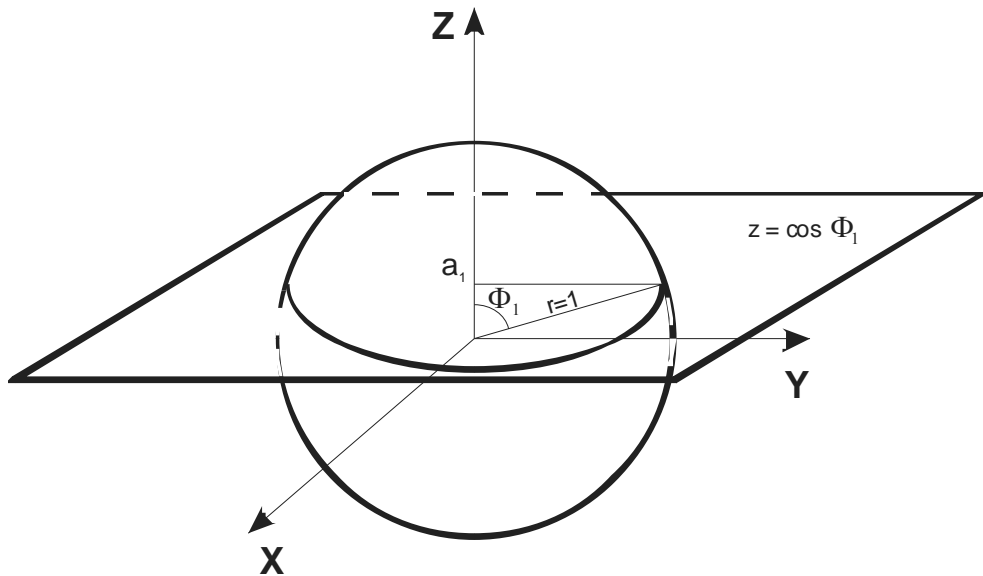
дает

$$x^2 + y^2 + a_1^2 = 1, \text{ то есть}$$

$$x^2 + y^2 = 1 - a_1^2.$$

Мы получили уравнение окружности, которая называется широтой.

Широта



Долгота

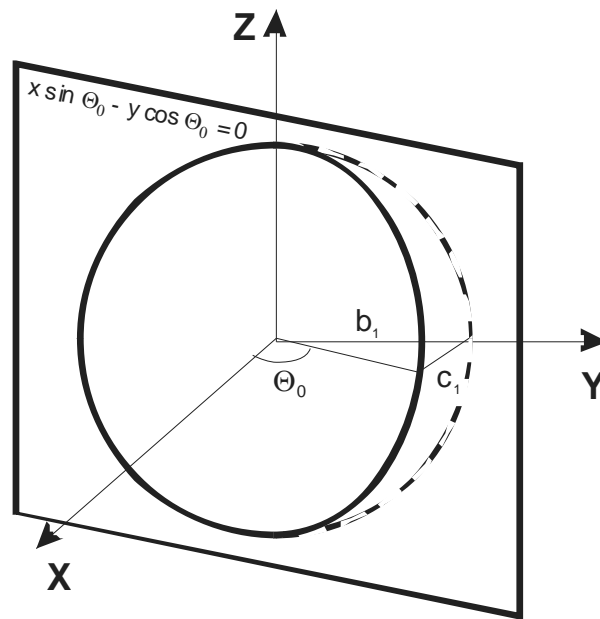


Рисунок 5.1

Пересечение сферы с плоскостью

$$x \sin \Theta_0 - y \cos \Theta_0 = 0 \text{ или}$$

$$c_1 x - b_1 y = 0$$

дает окружность, называемую долготой:

$$y^2 \left( \frac{b_1^2}{c_1^2} + 1 \right) + z^2 = 1.$$

Часто широтой и долготой называют не окружности, а углы  $\Phi_1$  и  $\Theta_0$ .

Участок сферической поверхности может быть образован четырьмя границами – это две широты и две долготы.

Параметрическое представление единичной сферической поверхности имеет вид:

$$\begin{cases} x = \cos \Theta \cdot \sin \Phi \\ y = \sin \Theta \cdot \cos \Phi \\ z = \cos \Phi \end{cases} .$$

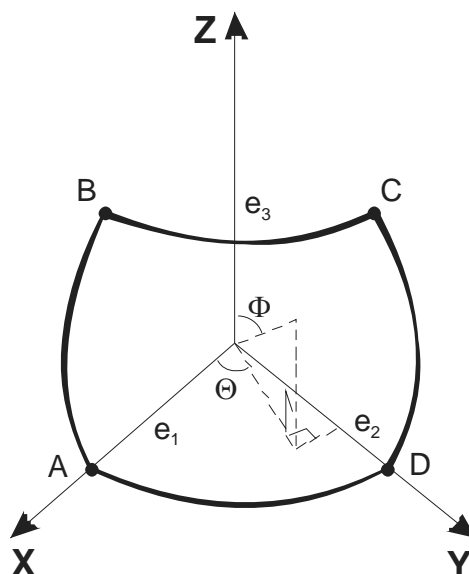


Рисунок 5.2

Можно записать векторное уравнение для сферической поверхности:

$$S = (\cos \Theta \cdot \sin \Phi) e_1 + (\sin \Theta \cdot \cos \Phi) e_2 + \cos \Phi \cdot e_3,$$

где  $e_1, e_2, e_3$  - единичные векторы в прямоугольной системе координат;

$s$  - вектор положения точки на поверхности.

Поверхность, изображенная на рисунке 5.2, характеризуется следующим изменением параметров (углов  $\Theta$  и  $\Phi$ ):

$$0 \leq \Theta \leq \pi/2$$

$$\pi/4 \leq \Phi \leq \pi/2$$

Форма граничных кривых может быть описана касательными векторами в начале и в конце каждой кривой, а также векторами кривизны.

Для участка сферической поверхности касательные векторы получаются:

$$\frac{dS}{d\Theta} = -\sin \Theta \cdot \sin \Phi e_1 + \cos \Theta \cdot \cos \Phi e_2$$

$$\frac{dS}{d\Phi} = -\cos \Theta \cdot \cos \Phi e_1 + \sin \Theta \cdot \cos \Phi e_2 - \sin \Phi e_3$$

Тогда в граничных точках:

$$A : (\Theta = 0; \Phi = \pi/2) \quad \frac{dS}{d\Theta} = e_2;$$

$$\frac{dS}{d\Phi} = -e_3$$

$$B: (\Theta = 0; \Phi = \pi/4) \quad \frac{dS}{d\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2;$$

$$\frac{dS}{d\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3);$$

$$C: (\Theta = \pi/2; \Phi = \pi/4) \quad \frac{dS}{d\Theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1;$$

$$\frac{dS}{d\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3);$$

$$D: (\Theta = \pi/2; \Phi = \pi/2) \quad \frac{dS}{d\Theta} = -e_1;$$

$$\frac{dS}{d\Phi} = -e_3.$$

Вектора кривизны описываются смешанными производными

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Theta \partial \Phi} = \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi \partial \Theta} = -\sin \Theta \cdot \cos \Phi \cdot e_1 + \cos \Theta \cdot \cos \Phi \cdot e_2.$$

В угловых точках имеем:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Theta \partial \Phi} = \begin{cases} 0 & \hat{a} & \hat{A} \\ 1/\sqrt{2}e_2 & \hat{a} & B \\ -1/\sqrt{2}e_1 & \hat{a} & \tilde{N} \\ 0 & \hat{a} & D \end{cases}.$$

Для указания формы и ориентации участка поверхности можно использовать нормаль к поверхности. Нормали задаются векторным смешанным произведением двух касательных векторов. Для сферического участка имеем:

$$N = \frac{\partial S}{d\Theta} \frac{dS}{d\Phi} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \sin \Phi & 0 \\ \cos \Theta \cos \Phi & \sin \Theta \cos \Phi & -\sin \Phi \end{bmatrix}.$$

В угловых точках получим следующие вектора нормалей:

$$A: N = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -e_1,$$

$$B: N = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2),$$

$$C: N = -\frac{1}{2}(e_2 + e_3),$$

$$D: N = -e_2.$$

Единичная нормаль определяется величиной  $n = N/|N|$ . Раскрывая матричное выражение для  $N$ , получим:

$$N = -\cos \Theta \sin^2 \Phi e_1 - \sin \Theta \sin^2 \Phi e_2 - \sin \Phi \cos \Phi e_3.$$

То есть

$$|N| = \sqrt{\cos^2 \Theta \sin^4 \Phi + \sin^2 \Theta \sin^4 \Phi + \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi} = |\sin \Phi|.$$

Таким образом

$$n = -\cos \Theta \sin \Phi e_1 - \sin \Theta \sin \Phi e_2 - \cos \Phi e_3.$$

Итак, с помощью сферической поверхности мы проиллюстрировали некоторые наиболее распространенные способы описания поверхностей и их участков:

- аналитическое описание ( неявное и параметрическое);
- описание участка с помощью четырех граничных кривых;
- описание участка с помощью касательных векторов и векторов кривизны, а также
- нормали к поверхности.

Рассмотрим теперь примеры более сложных поверхностей. Для этого сделаем ряд предварительных замечаний.

1. Будем использовать параметрическое представление поверхностей.
2. Будем использовать следующее описание:

$Q(u, w) = [x(u, w), y(u, w), z(u, w)]$  – векторная функция, описывающая положение точки на поверхности. Любая точка на поверхности может быть

получена фиксацией  $u$  и  $w$ , то есть  $Q(u,w)$ . Фиксация одного из параметров  $Q(u,w)$  даст описание кривой на поверхности;

$P$  – векторная функция, описывающая входные данные поверхности (точки, кривые и так далее);

$Q$  – векторная функция, описывающая конструируемую поверхность, соответствующую входным данным, то есть  $P$  и  $Q$  совпадают только в заданных точках.

## 5.2 БИЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Это один из простейших видов поверхностей. Предположим, что четыре угловые точки поверхности заданы на плоскости  $u, w$  вершинами единичного квадрата  $P(0,0), P(0,1), P(1,0), P(1,1)$ . Необходимо, построить поверхность  $Q(u,w)(u,w \in [0;1])$ , на которой любая точка может быть получена путем линейной интерпретации. Получим следующую функцию:

$$Q(u, w) = P(0,0)(1-u)(1-w) + P(0,1)(1-u)w + P(1,0)u(1-w) + P(1,1)uw$$

или 
$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix},$$

или 
$$Q(u, w) = UP,$$

где 
$$U = \begin{bmatrix} (1-u)(1-w) & (1-u)w & u(1-w) & uw \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix}.$$

Здесь легко проверить, что  $Q(0,0) = P(0,0)$  и так далее. Точка в центре поверхности  $(u = w = 0.5)$  получится 
$$Q(0.5;0.5) = \frac{1}{4}(P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) + P(1,1)).$$

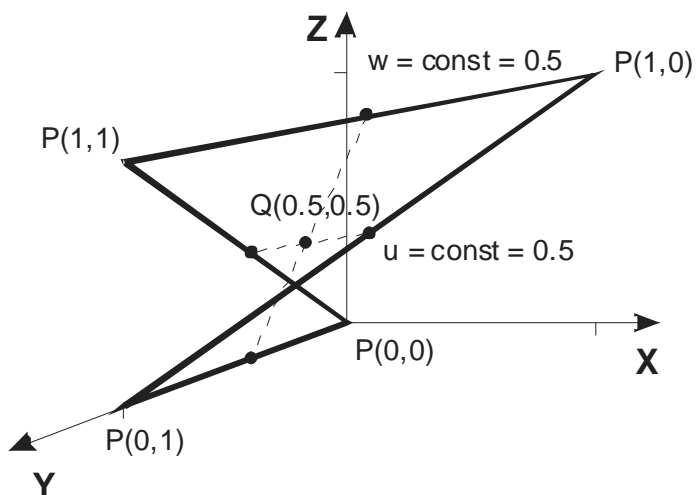


Рисунок 5.3

### 5.3 ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатые поверхности часто применяют в авиационной и кораблестроительной промышленности. Строятся они следующим образом. Предполагаются, что известны две граничные кривые. Допустим, что это  $P(u,0)$  и  $P(u,1)$ . Эти кривые могут быть заданы любым из способов, которые мы рассматривали в разделе «Пространственные кривые». Линейчатая поверхность в этом случае получается с помощью линейной интерполяции между этими кривыми.

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w$$

Здесь  $Q(0,0) = P(0,0)$

$$Q(0,1) = P(0,1)$$

$$Q(1,0) = P(1,0)$$

$$Q(1,1) = P(1,1)$$

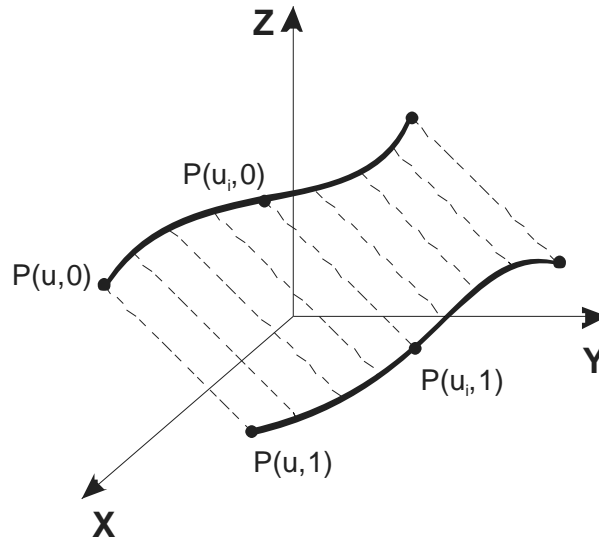


Рисунок 5.4

Кроме того, края конструируемой поверхности совпадают с заданными кривыми, то есть  $Q(u,0) = P(u,0)$  и  $Q(u,1) = P(u,1)$ .

Аналогично можно рассмотреть случай, когда известны  $P(0,w)$  и  $P(1,w)$ :

$$Q(u,w) = P(0,w)(1-u) + P(1,w)u.$$

#### 5.4 ЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КУНСА

Логика получения этих поверхностей следующая. Пусть известны четыре граничные кривые  $P(u,0), P(u,1), P(0,w), P(1,w)$ . Линейная поверхность Кунса получается суммированием координат точек линейчатых поверхностей между кривыми  $P(u,0), P(u,1), P(0,w), P(1,w)$ . Однако при этом границы полученной поверхности не будут совпадать с заданными граничными кривыми:

$$Q(u,w) = P(u,0)(1-w) + P(u,1)w + P(0,w)(1-u) + P(1,w)u;$$

$$Q(0,0) = P(0,0) + P(0,0);$$

$$Q(0,w) = P(0,0)(1-w) + P(0,1)w + P(0,w).$$

Это происходит потому, что угловые точки просчитываются дважды, так как содержится в описании обеих линейчатых поверхностей.

Правильный результат дает следующее уравнение поверхности:



$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u - P(0, 0)(1 - u)(1 - w) - \\ - P(0, 1)(1 - u)w - P(1, 0)u(1 - w) - P(1, 1)uw.$$

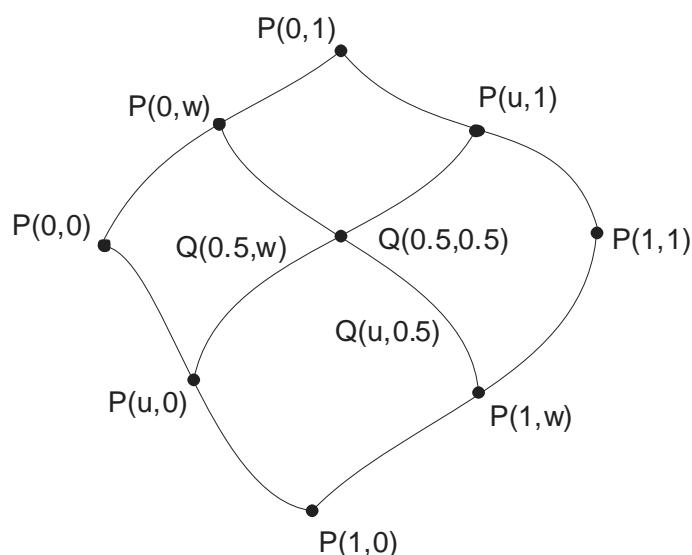


Рисунок 5.5

В матричной форме это уравнение имеет вид:

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, w) \\ P(1, w) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(u, 0) & P(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix},$$

или в более компактной форме

$$O(u, w) = \begin{bmatrix} 1 - u & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(0, 0) & -P(0, 1) & P(0, w) \\ -P(1, 0) & -P(1, 1) & P(1, w) \\ P(u, 0) & P(u, 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Функции  $1 - u, u, 1 - w, w$  называются весовыми функциями.

## 5.5 УЧАСТОК БИКУБИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Бикубическую поверхность можно рассматривать как частный случай линейной поверхности Кунса, когда граничные кривые представляют собой кубические сплайновые сегменты, то есть для описания кривых  $P(u, 0), P(u, 1), P(0, w), P(1, w)$  используются параметрические многочлены третьего порядка. Вспомним этот вид:

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3$$

Ограничим изменение параметра  $t$ :  $0 \leq t \leq 1$ , то есть будем использовать нормализованный многочлен. Мы уже записывали уравнение для коэффициентов  $B_i$  в этом случае:

$$\begin{bmatrix} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix}.$$

Подставим значения  $B_i$  в выражение для  $P(t)$  и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(0) + P'(0)t - 3P(0)t^2 + 3P(0)t^2 - 2P'(0)t - P'(1)t^2 + 2P(0)t^3 - \\ &- 2P(1)t^3 + P'(0)t^3 + P'(1)t^3 = P(0)(1 - 3t^2 + 2t^2) + P(1)(3t^2 - 2t^3) - \\ &- P'(0)(t - 2t^2 + t^3) + P'(1)(-t^2 + t^3) \end{aligned}$$

или

$$P(t) = F_1(t)P(0) + F_2(t)P(1) + F_3(t)P'(0) + F_4(t)P'(1),$$

где  $[F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Используем полученные результаты для построения бикубического участка. Сделаем это также, как мы строили линейную поверхность Кунса. Сначала построим линейчатую поверхность, удовлетворяющую кривым  $P(u,0), P(u,1)$ , а затем объединим эти результаты, то есть просуммируем и вычтем угловые точки с соответствующими весами. Для удобства введем систему обозначений для произвольных от вектора положения.

$$P^{a,b}(u, w) = \frac{\partial^{a+b} P(u, w)}{\partial u^a \partial w^b}$$

и  $P^{a,b}(u_i, w_j) = \frac{\partial^{a+b} P(u, w)}{\partial u^a \partial w^b} \Big|_{u=u_i, w=w_j}$

Например,

$$P^{1,1}(u_i, w_j) = \frac{\partial^2 P(u, w)}{\partial u \partial w} \Big|_{\substack{u = u_i \\ w = w_j}}.$$

Тогда линейчатая поверхность между кривыми  $P(0, w)$  и  $P(1, w)$  получится:

$$Q(u, w) = P(0, w)(1 - 3u^2 + 2u^3) + P(1, w)(3u^2 - 2u^3) - P^{0,1}(0, w)(u - 2u^2 - u^3) + P^{0,1}(1, w)(-u^2 + u^3),$$

а между кривыми  $P(u, 0)$  и  $P(u, 1)$ :

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - 3w^2 + 2w^3) + P(w, 1)(3w^2 - 2w^3) - P^{0,1}(u, 0)(w - 2w^2 - w^3) + P^{0,1}(u, 1)(-w^2 + w^3).$$

После суммирования и соответствующего вычитания получится следующее уравнение (мы его приводим без вывода):

$$Q(u, w) = [F_1(u) \quad F_2(u) \quad F_3(u) \quad F_4(u)] \times \\ \times \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P^{0,1}(0,0) & P^{0,1}(0,1) \\ P(0,1) & P(1,1) & P^{0,1}(1,0) & P^{0,1}(1,1) \\ P^{1,0}(0,0) & P^{1,0}(0,1) & P^{1,1}(0,0) & P^{1,1}(0,1) \\ P^{1,0}(1,0) & P^{1,0}(1,1) & P^{1,1}(1,0) & P^{1,1}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $P$  здесь можно рассматривать как матрицу граничных условий.

Ее можно подразделить на четыре части:

$$P = \begin{bmatrix} \acute{o}\acute{a}\acute{e}\acute{i} \acute{a}\acute{u} \acute{a} & w - \acute{e}\acute{\alpha}\acute{\eta}\acute{\alpha}\acute{o} \acute{a}\acute{e}\acute{i}\acute{u} \acute{u} \acute{a} \\ \acute{e}\acute{i} \acute{d}\acute{a}\acute{e}\acute{i} \acute{a}\acute{o} \acute{u} & \acute{a}\acute{a}\acute{e}\acute{o} \acute{i} \acute{d}\acute{u} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u - \acute{e}\acute{\alpha}\acute{\eta}\acute{\alpha}\acute{o} \acute{a}\acute{e}\acute{i}\acute{u} \acute{u} \acute{a} & \acute{a}\acute{a}\acute{e}\acute{o} \acute{i} \acute{d}\acute{u} \\ \acute{a}\acute{a}\acute{e}\acute{o} \acute{i} \acute{d}\acute{a} & \acute{e}\acute{d}\acute{e}\acute{a}\acute{e}\acute{c}\acute{i} \acute{u} \end{bmatrix}.$$

То есть задание участка бикубической поверхности связано с заданием координат угловых точек, а также касательных векторов и векторов кривизны в этих точках. В этом заключается основное неудобство с точки зрения машинной графики – эти исходные данные имеют существенно различные порядки (значения); кроме того, интуитивно очень сложно понять, как повлияет

изменение некоторого вектора (касательной или кривизны) на результирующую форму поверхности.

Иногда пользуются упрощенным вариантом бикубическим поверхностями – так называемые F – участки. В них принимается, что все векторы кривизны равны 0.

Эти поверхности в ряде случаев не дают достаточной гладкости, однако, они пригодны для представления осе симметричных поверхностей (например, вазы, чашки, бутылки, фюзеляжи самолетов и так далее).

## 5.6 ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЬЕ

Во многих случаях удобным методом задания поверхностей является метод, основанный на распространении понятия кривой Безье на случай поверхности.

Описание участка поверхности Безье может быть представлено в той же форме, что и участка бикубической поверхности, но с другими весовыми функциями. Например, участок поверхности с шестнадцатью вершинами может быть описан как:

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} (1-u) & 3(1-u) & u & 3(1-u)u & u \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-w)^3 \\ 3(1-w)^2 w \\ 3(1-w)w^2 \\ w^3 \end{bmatrix}.$$

В матрице  $P$  записаны координаты точек, образующих участок поверхности. При этом самой поверхности принадлежат лишь угловые точки  $P_{11}, P_{14}, P_{41}, P_{44}$ .

Участок поверхности с характеристическим многогранником  $4 \times 4$ .

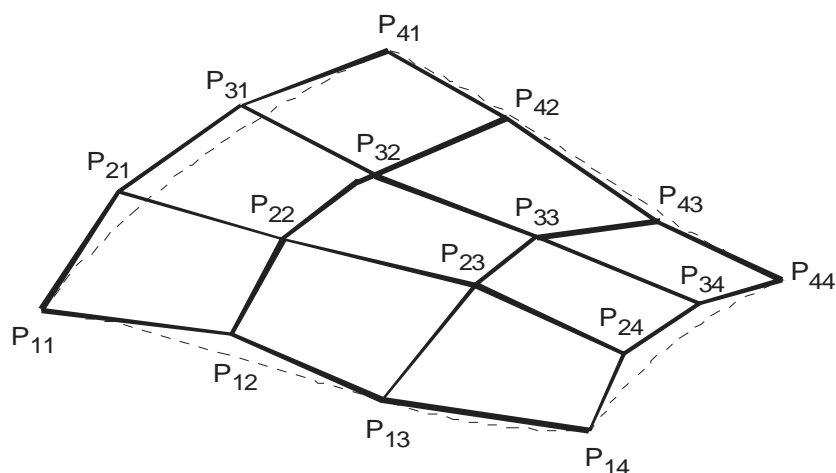


Рисунок 5.6

Кривые на этой поверхности могут быть получены фиксацией одного из параметров –  $u$  или  $w$ .

Например, при  $0 \leq u \leq 1$  и  $w = w_j$ :

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3(1-u)^2u & 3(1-u)u^2 & u^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-w_j)^3 \\ 3(1-w_j)^2w_j \\ 3(1-w_j)w_j^2 \\ w_j^3 \end{bmatrix}.$$

Здесь произведение двух последних матриц дает вектор – столбец точек характеристического многоугольника, определяющего кривую, то есть

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-w_j)^3 \\ 3(1-w_j)^2w_j \\ 3(1-w_j)w_j^2 \\ w_j^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Точки  $P_1 \div P_4$  определяют кривую, причем точка  $P_1$  лежит на этой кривой и на кривой, граничной к поверхности при  $u = 0$ :

$$P_1 = Q(0, w_j), \text{ точка } P_4 - \text{ на другой граничной кривой при } u = 1:$$

$$P_4 = Q(1, w_j), \text{ точки } P_2 \text{ и } P_3 \text{ лежат вне кривой и вне поверхности.}$$

Окончательное уравнение кривой на поверхности определяется как:

$$Q(u, w_j) = [(1-u)^3 \quad 3(1-u)^2u \quad 3(1-u)u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

При описании поверхности Безье матрица  $P$  не обязательно должна быть квадратной. Например, если характеристический многогранник имеет размерность  $3 \times 5$ , то

$$Q(u, w) = [(1-u)^4 \quad 4(1-u)^3u \quad 6(1-u)^2u^2 \quad 4(1-u)u^3 \quad u^4] \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-w)^2 \\ 2(1-w)w \\ w^2 \end{bmatrix}.$$

Граничная кривая при  $u = 0$  получится

$$Q(0, w) = [ P_{11} \quad P_{12} \quad P_{13} ] \begin{bmatrix} (1-w)^2 \\ 2(1-w)w \\ w^2 \end{bmatrix} \text{ или, что то же самое}$$

$$Q(0, w) = [ (1-w)^2 \quad 2(1-w)w \quad w^2 ] \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{bmatrix}.$$

Граничная кривая при  $u = 1$

$$Q(1, w) = [ P_{51} \quad P_{52} \quad P_{53} ] \begin{bmatrix} (1-w)^2 \\ 2(1-w)w \\ w^2 \end{bmatrix}.$$

Остальные граничные кривые (при  $w = 0$  и  $w = 1$ ) – аналогично.

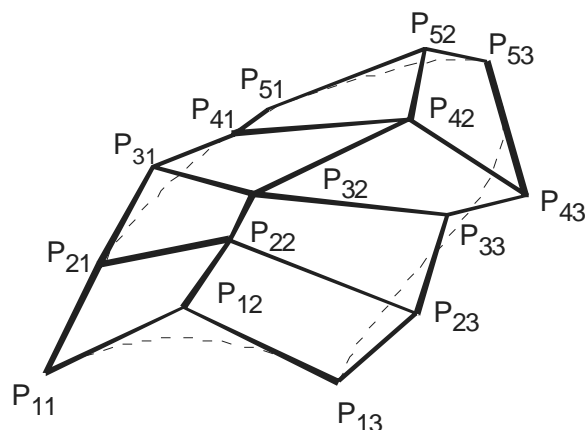


Рисунок 5.7

Поверхность  $3 \times 5$  может быть предпочтительнее в том смысле, что изменение центральной точки повлияет на форму поверхности лишь в центре и не изменит наклоны в граничных точках.

В общем, виде поверхность Безье описывается выражением:

$$Q(u, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i+1, j+1} I_{m,i}(u) I_{n,j}(w),$$

где  $I_{m,i}(u) = \binom{C^j}{m} u^j (1-u)^{m-j}$ ,

$I_{n,i}(w)$  - аналогично.

Характеристический многогранник для этой поверхности имеет размерность  $(m+1) \times (n+1)$ .

## 5.7 В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТИ

В-сплайн поверхности описываются выражением:

$$Q(u, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i+1, j+1} N_{i,k}(u) N_{j,i}(w)$$

где  $N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_i \leq u \leq q_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - q_i) N_{i,k-1}(u)}{q_{i+k-1} - q_i} + \frac{(q_{i+1} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{q_{i+k} - q_{i+1}}$$

$$N_{j,l}(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_1 \leq w \leq q_{l+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(w) = \frac{(w - q_j)N_{j,l-1}(w)}{q_{j+l-1} - q_j} + \frac{(q_{j+1} - w)N_{j+1,l-1}(w)}{q_{j+1} - q_{j+1}}.$$

Здесь характеристический многогранник имеет разность  $(m+1)(n+1)$  с учетом сложных вершин;  $k$  и  $l$  задают порядок в направления  $u$  и  $w$  соответственно.



## Алфавитный указатель

### А

Аксонметрические проекции 40, 41

Аффинная геометрия 39

### В

Восстановление трехмерной информации 52

Вращение 15, 26

Вращение вокруг координатных осей 31

### Д

Двумерное смещение 21

Диметрическая проекция 40, 43, 44, 46

### И

Изменение масштаба 17, 23, 29

    общее изменение масштаба 29, 30

    покоординатное изменение масштаба 25, 29

Изометрическая проекция 46

### К

Композиция преобразований 26

    на плоскости 26

Кривые

    плоские кривые 56, 70

### М

Матричные операции 5

**О**

Однородные координаты 21, 22, 25, 39

Ортогональная проекция 42, 52, 88

Отображение 16

    отображение относительно координатных плоскостей 33

**П**

Перспективная геометрия 39

Перспективная проекция 47, 51, 52

Перспективное преобразование 39, 47, 48

Перспективные преобразования 48

Плоские кривые 56, 70

    гипербола 67

    окружность 58

    парабола 65

    эллипс 63

Поверхности 88

    бикубическая поверхность 97

    билинейные поверхности 94

    В - сплайн поверхности 103

    линейные поверхности Кунса 96

    линейчатые поверхности 95

    поверхности Безье 100

    сферические поверхности 89

Преобразование сдвига 12, 30

Преобразования на плоскости 5

    преобразование единичного квадрата 19

    преобразование пересекающихся линий 14

    преобразование плоских фигур 15

преобразование прямых линий 13

преобразование точек 8

Произвольная матрица вращения  $2 \times 2$  20

Пространственные кривые 70

В-сплайны 81

кривые Безье 77

кубические сплайны 71

цилиндрическая спираль 70

Пространственный перенос 33

## С

Сдвиг 10, 25, 29, 30

## Т

Точки в бесконечности 25

Трехмерное вращение вокруг произвольной оси 33

Трехмерные преобразования 28

## Рекомендуемая литература

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. Пер. с англ./ Дэвид Ф. Роджерс, Дж. Алан Адамс; Пер. П.А.Монахов, Пер. Г.В.Олохтонова, Пер. Д.В.Волков. М.: Мир, 2001. - 605[3] с.:а-ил.
2. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. М.: Мир, 1989 - 512 с.
3. Фоли Дж., Вэн Дем А. Основы интерактивной машинной графики. Кн. 1 и 2. М.: Мир, 1985.
4. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений. М.: Радио и Связь, 1986 - 400 стр.
5. Ростков А.А. Создайте анимацию сами. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1995.
6. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++ /Перевод с англ. М.: БИНОМ, 1997. - 304 с.: ил.
7. Корриган Дж. Компьютерная графика: Секреты и решения. М.: Энтроп, 1995. - 350 с.: ил.
8. Иванов В.П., Батраков А.С. Трехмерная компьютерная графика /Под ред. Г.М.Полищука. М.: Радио и связь, 1995. - 224 с.: ил.
9. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика.Динамика, реалистические изображения. М.: "ДИАЛОГ-МИФИ", 1995. - 288 с.: ил.