

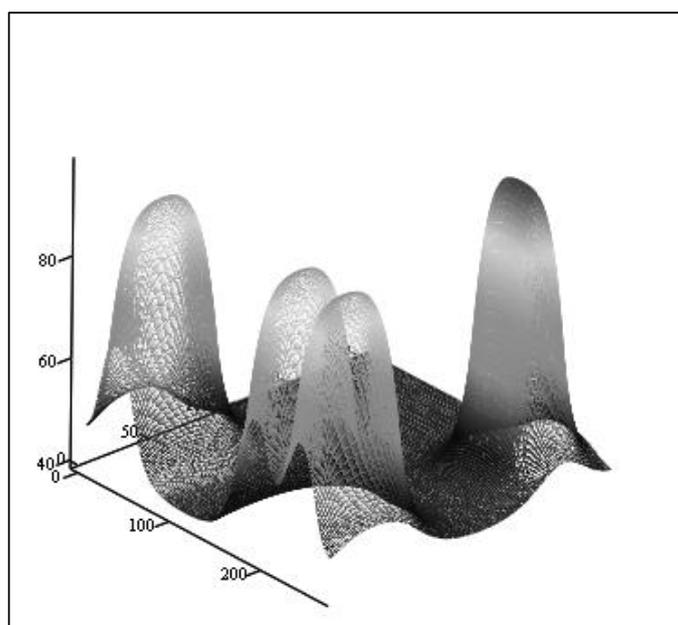


Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

В.П. Алексеев, В.М. Карабан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТИ В КОНСТРУКЦИЯХ РЭС

Учебное пособие по групповому проектному обучению для
студентов специальности 210201 «Проектирование и
технология радиоэлектронных средств»



T

ТОМСК 2012

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

В.П. Алексеев, В.М. Карабан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТИ В КОНСТРУКЦИЯХ РЭС

Учебное пособие по групповому проектному обучению для
студентов специальности 210201 «Проектирование и
технология радиоэлектронных средств»

УДК 6212.396.93 (075.8)

Рецензент: профессор, д.ф.- м.н. Кузнецов Г.В.

Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР, к.т.н. Озёркин Д.В.

Алексеев В.П., Карабан В.М.

Математическое моделирование процессов термоустойчивости в конструкциях РЭС. Учебное пособие по групповому проектному обучению для студентов специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств».

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 152 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов, научных работников и преподавателей, специализирующихся в области проектирования и технологии радиоэлектронных средств (РЭС). В пособии рассмотрены вопросы применения численных методов математического моделирования физических процессов обеспечения термоустойчивости РЭС. Проблема термоустойчивости предполагает решение задач обеспечения нормального теплового режима проектируемых РЭС и температурной стабильности их параметров. В отличие от известных эмпирических методов расчёта тепловых режимов рассматриваются новые подходы к теплофизическому моделированию.

УДК 6212.396.93 (075.8)

© Алексеев В.П., Карабан В.М. 2012
© Кафедра КИПР Томского
государственного университета
систем управления и
радиоэлектроники, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ	8
2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ	11
2.1 Виды передачи тепловой энергии.....	11
2.1.1 Теплопроводность	13
2.1.2 Конвекция.....	15
2.1.3 Тепловое излучение.....	16
3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	19
3.1 Основы метода конечных разностей	19
3.2 Ошибки математического моделирования	21
3.3 Построение сетки. Задание начальных и граничных условий для процессов теплопроводности.....	22
3.4 Аппроксимация уравнения теплопроводности, начальных и граничных условий. Явная разностная схема	25
3.5 Неявная схема. Метод прогонки.....	28
4 ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	33
4.1 Одномерная задача теплопроводности	33
4.2 Решение многомерных задач теплопроводности.....	40
4.2.1 Двумерная задача моделирования нестационарного температурного поля плоского радиатора типа «пластина».....	41
4.2.2 Тестирование математической модели и метода решения плоской задачи теплопереноса.....	58

5 РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ ПО ВНЕЗАПНЫМ ОТКАЗАМ НА ОСНОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЕЧАТНОГО УЗЛА РЭС	63
5.1 Основные понятия и определения теории надёжности.....	63
5.2 Основные сведения о расчёте надёжности	64
5.3 Ориентировочный расчёт надёжности	67
5.4 Окончательный расчёт надёжности невосстанавливаемой РЭС с учётом режимов работы ЭРЭ.....	69
6 ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЭС С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ.....	80
6.1 Математическая модель системы микротермостатирования	80
6.1.1 Микротермостат как электротепловой элемент проектируемого устройства.....	80
6.1.2 Математическая модель МТ.....	85
6.1.3 Адекватность математической модели системы микротермостатирования.....	94
6.2 Выбор оптимальных значений параметров элементов гибридно-пленочных и дискретных МТ.....	104
6.2.1 Выбор оптимальных соотношений конструктивных размеров для минимизации мощности потерь гибридно-пленочных и дискретных МТ	110
6.2.2 Выбор конструктивных параметров дискретных МТ	119
6.2.3 Влияние температурного поля термостатируемого объекта на параметры МТ	123
6.2.4 Пример проектирования МТ для создания прецизионного источника опорного напряжения	134
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	139
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	140

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 – ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ РЭС.....	143
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 – СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЁТА НАДЁЖНОСТИ.....	149

ОТ АВТОРОВ

Теория тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) разработанная профессором Г.Н. Дульневим в начале 60-ых годов, позволила в течение нескольких десятков лет производить расчёты тепловых режимов РЭА эмпирическими и полуэмперическими методами: последовательных приближений, тепловой характеристики, коэффициентный. Погрешность таких расчётов составляла 20...30 %. При проектировании современных РЭС специального назначения такая погрешность тепловых расчётов не устаивает ни разработчиков, ни потребителей. Развитие информационных технологий и методов компьютерного проектирования позволяет в настоящее время моделировать теплофизические процессы РЭС со значительно более высокой точностью.

При изложении материала пособия одновременно рассматриваются вопросы, связанные с построением математической модели соответствующих процессов теплообмена, а также алгоритмов и программ, используемых при их реализации. Такой подход к изложению материала представляется авторам наиболее методически верным. Модели процессов теплообмена подобраны таким образом, чтобы они образовали набор, входящий в профессиональный багаж любого проектировщика термостабильной РЭС. При выборе моделей авторы базировались на материале, входящем в учебники по теплопроводности.

Остановимся на общей структуре пособия. Во введении речь идёт о роли математического моделирования в изучении явлений окружающего мира. Рассматриваются вопросы проведения вычислительного эксперимента, базирующегося на знаменитой триаде «модель – алгоритм – программа». Дается представление о понятиях термоустойчивости РЭС.

Основные понятия и законы переноса энергии изложены во втором разделе. Здесь проводится краткое изложение физических процессов передачи тепла теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением. Приведены основные формулы расчёта.

Третий, четвёртый и пятый разделы полностью посвящены изложению материала, теоретического и прикладного характера, построения разностных схем для решения одномерных и неодномерных задач нестационарного теплообмена и их применения при расчёте показателей надёжности на основании математического моделирования температурных полей плоских конструкций проектируемой РЭС.

Основная часть излагаемого материала посвящена проектированию термоустойчивой РЭС с использованием перспективного метода термостабилизации – микротермостатирования.

1 ВВЕДЕНИЕ

Создание вычислительной техники колоссально расширило и углубило научные исследования, привело к развитию вычислительных методов, появлению методологии математического моделирования как новой, более высокой ступени теоретического изучения явлений.

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютере вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства, как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью даёт возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же самое время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая всё новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Методология математического моделирования в кратком виде выражена знаменитой триадой «модель – алгоритм – программа», сформулированной академиком А. А. Самарским, основоположником отечественного математического моделирования (см. рис. 1.1).

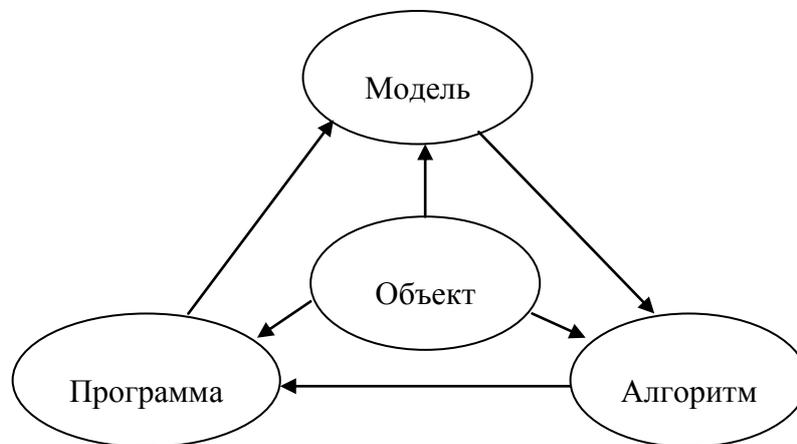


Рис. 1.1

Эта методология получила своё развитие в виде технологии «вычислительного эксперимента» [1] – одной из информационных технологий, предназначенной для изучения явлений окружающего мира, когда натурный эксперимент оказывается слишком дорогим и сложным.

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, то есть его приближенное описание в форме алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений. Такое описание должно отражать в математической форме важнейшие свойства объекта – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д. Математическая модель (или её фрагменты) исследуются теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте. Надо установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи и единственно ли оно.

Второй этап вычислительного эксперимента состоит в выборе или разработке приближенного численного метода решения, другими словами вычислительного алгоритма для реализации модели на компьютере. Под вычислительным алгоритмом понимают последовательность арифметических и логических операций, при помощи которой находится решение математической задачи, сформулированной на первом этапе. Следует помнить, что вычислительные алгоритмы никоим образом не должны искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач.

На третьем этапе осуществляется программирование вычислительного алгоритма, то есть создаются программы, к которым также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта.

Таким образом, создав *триаду* «модель – алгоритм – программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и относительно недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как *адекватность* (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные испытания, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады. Например, может оказаться, что модель слишком груба – результат вычислений не согласуется с экспериментальными данными, или что модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить при более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа, то есть уточнить математическую модель, и снова пройти все этапы.

Вычислительный эксперимент в отличие от натуральных экспериментальных установок позволяет накапливать результаты, полученные при исследовании какого-либо круга задач, а затем быстро и

гибко применять их к решению задач в совершенно других областях. Этим свойством обладают используемые универсальные математические модели. Например, уравнение нелинейной теплопроводности пригодно для описания не только тепловых процессов, но и диффузии вещества, движения грунтовых вод, фильтрации газа в пористых средах. Изменяется только физический смысл величин, входящих в это уравнение.

Еще одна область использования вычислительного эксперимента – это «вычислительная технология» – применение математического моделирования с помощью компьютеров не только для решения фундаментальных научных проблем, но и для разработки технологических процессов в промышленности. Для тех случаев, когда технологические процессы описываются хорошо известными математическими моделями, для расчёта которых предложены эффективные вычислительные алгоритмы, разработаны пакеты прикладных программ, технология вычислительного эксперимента позволяет создавать новые программы и совершенствовать средства общения человека с компьютером.

Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы – от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования.

В данной работе рассмотрены вопросы математического моделирования термостойчивости РЭС.

Термостойчивость обеспечивается заданным нормальным тепловым режимом и термостабильностью. Под *нормальным тепловым режимом* понимается режим, при котором температура всех элетрорадиоэлементов (ЭРЭ) не превышает заданного по техническому заданию значения, при этом надёжность изделия остаётся не ниже заданной.

Термостабильность – это способность РЭС сохранять свои параметры в пределах заданных допусков.

2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

2.1 Виды передачи тепловой энергии

Теплообмен – раздел физики, в котором рассматриваются процессы переноса тепловой энергии (далее по тексту тепла). Явление теплообмена связаны с необратимым переносом тепла из одной части пространства в другую и вызваны разностью температур.

Различают три вида переноса тепла: теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение.

Теплопроводность представляет собой процесс распространения тепла при непосредственном соприкосновении отдельных частиц вещества, имеющих различные температуры. В общем случае теплопроводность является функцией структуры, плотности, влажности, давления и температуры, при которой находится исследуемое вещество. Если оно находится в газообразном состоянии, то согласно элементарной кинетической теории:

$$\lambda = uv \rho c_v / 3,$$

где u – средняя скорость теплового движения молекул; v - средняя длина свободного пробега; ρ – плотность газа; c_v – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме.

В металлах теплопроводность осуществляется в основном за счёт переноса энергии свободными электронами. В классическом приближении идеального электронного газа:

$$\lambda = k u_e n v / 2 ,$$

где k – постоянная Больцмана; u_e – средняя скорость теплового движения электронов; n – число электронов в единичном объёме металла.

В металлических кристаллах механизмом теплопроводности служит передача энергии электронами проводимости. В кристаллических диэлектриках основную роль играет передача энергии связанных колебаний узлов решётки. В первом приближении этот процесс можно представить в виде распространения в кристалле набора гармонических упругих волн. В квантовой теории этим волнам сопоставляются квазичастицы - фононы. Процесс решёточной теплопроводности может быть рассмотрен как перемещение фононов по кристаллу. Средняя длина свободного пробега фононов является кинетической характеристикой, аналогичной средней длине свободного пробега молекулы. Решёточная теплопроводность кристаллов определяется как:

$$\lambda = u_3 v c / 3 ,$$

где u_3 – скорость звука; c – теплоемкость единицы объема.

При исследовании жидкостей и газов необходимо учитывать возможное влияние конвекции и теплового излучения.

Явление конвекции происходит лишь в «текущей» среде, то есть в жидкостях или газах. Под конвекцией понимают процесс переноса тепла при перемещении объемов жидкости или газа в пространстве из области одной температуры в область с другой. При этом перенос тепла неразрывно связан с переносом самой среды. Конвекция обычно сопровождается теплопроводностью.

В зависимости от причин возникновения конвективного движения жидкости или газа различают *свободную* и *вынужденную* конвекции. В первом случае перемещение теплоносителя происходит только под влиянием разности плотностей холодной и горячей области среды в поле тяготения. Нагретые объемы теплоносителя поднимаются вверх, охлажденные опускаются. Около нагретых тел имеет место, как правило, восходящая (подъемная) конвекция, а у холодных – нисходящая (опускная).

При вынужденной конвекции теплоноситель движется за счёт внешних сил (под действием насоса, вентилятора, ветра и т.п.), в связи с чем, теплообмен протекает более интенсивно.

Тепловое излучение – это процесс распространения тепла с помощью электромагнитных волн, возникающих в результате молекулярных и атомных возмущений. При тепловом излучении внутренняя энергия излучающего тела переходит в лучистую, а лучистая энергия, поглощённая другим телом, переходит в тепло.

Распространение тепла посредством теплопроводности, конвекции и теплового излучения очень часто происходят совместно. Теплообмен путём соприкосновения между поверхностью твердого тела и жидкостью или газом, обтекающим это тело, называется *теплоотдачей*, или *конвективным теплообменом*. Конвективный теплообмен – это совместный процесс передачи тепла конвекцией и теплопроводностью. Дело в том, что течение жидкости или газа в непосредственной близости от стенки твердого тела всегда носит ламинарный характер. Через ламинарный пограничный слой тепло передается только путём теплопроводности, а в остальной части потока – конвекцией.

В тех случаях, когда теплообмен между стенкой и окружающей средой происходит путем соприкосновения и излучения, – явление называется *лучисто-конвективным теплообменом*, так как оно включает в себя все три вида переноса тепла.

Теплообмен между жидкими или газообразными средами, разделенными твердой перегородкой, называется *теплопередачей*. Перенос тепла от более нагретого теплоносителя к стенке и от стенки к менее нагретому теплоносителю носит характер теплоотдачи или лучисто-

конвективного теплообмена. Перенос тепла непосредственно через стенку осуществляется за счёт теплопроводности.

Изучение теории теплообмена обычно начинается со знакомства с наиболее простыми способами переноса тепла с тем, чтобы, зная закономерности и расчётные соотношения этих процессов, можно было бы использовать их при освоении сложных явлений теплообмена, которые имеют место в РЭС.

2.1.1 Теплопроводность

Процесс теплопроводности происходит только в условиях, когда температура в различных точках тела или системы тел неодинакова. Совокупностью тел с различными теплофизическими характеристиками и явно выраженными границами раздела называют системой тел или неоднородным телом; каждая часть такой системы будет *однородным* телом. Однородные тела могут быть изотропными и анизотропными. Теплофизические характеристики *изотропного* тела одинаковы во всех направлениях, в *анизотропном* – различны в разных направлениях, но могут быть постоянными в выбранном направлении.

Тепловое состояние тела или системы тел количественно характеризуется его *температурным полем*, т. е. совокупностью числовых значений температуры в различных точках системы в данный момент времени [2]. В том случае, когда температура во всех точках системы не изменяется с течением времени, поле температур называется *стационарным* или *установившимся*. Если же температура в теле с течением времени претерпевает изменения, то это *нестационарное* или *неустановившееся* поле.

Если температуры всех точек некоторого объёма равны между собой в любой момент времени, то это поле температур называют *равномерным*. Температурное поле в частном случае может зависеть только от одной координаты, тогда его называют *одномерным*. Аналогичный смысл имеют термины «*двумерное*» и «*трёхмерное*» температурные поля.

Если тела находятся при различных температурах, то возникает поток тепла, направленный от тела более нагретого к телу менее нагретому. Для количественного описания этого процесса вводят два основных понятия: изотермическая поверхность и градиент температур.

Изотермические поверхности (изотермы) представляют собой геометрические места точек с одинаковой температурой. Эти поверхности располагаются внутри тела, они не пересекаются между собой и не обрываются внутри тела. По определению, через каждую точку внутри тела можно провести в данный момент только одну изотермическую поверхность. В любой другом направлении, не совпадающем с изотермой, температура меняется, причём в направлении нормали к изотермической поверхности

наблюдается наиболее резкое изменение температуры. Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры*, т. е. вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры.

Основным законом аналитической теории теплопроводности является предложенная французским учёным Ж. Фурье гипотеза (1822 г.) о пропорциональности теплового потока температурному градиенту. Согласно этой гипотезе количество тепла ΔQ , проходящее через элемент изотермической поверхности ΔS за промежуток Δt , прямо пропорциональна градиенту температуры, т. е.

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T, \quad (2.1)$$

где q – плотность теплового потока; λ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности или в системе СИ просто «теплопроводностью»; grad , ∇ – математические символы, обозначающие градиент.

В виде векторной суммы составляющих по осям декартовых координат градиент температуры можно представить:

$$\operatorname{grad} T = \nabla T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z},$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – ортогональные между собой единичные векторы, направленные по координатным осям.

За единицу теплопроводности как физической величины принят Ватт на метр-кельвин [Вт/(м·К)], численно равный теплопроводности вещества, в котором при стационарном режиме с поверхностной плотностью теплового потока 1 Вт/м² устанавливается температурный градиент 1 К/м.

Коэффициент теплопроводности величина справочная и определяется опытным путём. Теплопроводность газов находится в пределах 0,005...0,5 Вт/(м·К). С повышением температуры она возрастает; от давления в диапазоне от $2 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^8$ Па практически не зависит. Закон аддитивности здесь неприменим, поэтому для смеси газов теплопроводность достоверно может быть определена только опытным путем.

Теплопроводность капельных жидкостей находится в пределах 0,08...0,7 Вт/(м·К). С повышением температуры для большинства жидкостей она убывает, за исключением воды и глицерина.

Теплопроводность строительных и теплоизоляционных материалов находится в пределах 0,02...3,0 Вт/(м·К). С повышением температуры она возрастает; зависит от структуры, пористости и влажности материала.

Теплопроводность металлов и сплавов находится в пределах 5...400 Вт/(м·К). Для большинства металлов характерно уменьшение теплопроводности с повышением температуры.

Теплопроводность каждого конкретного вещества точно предсказать теоретически невозможно. Поэтому лишь непосредственный опыт является единственным способом определения достоверного значения теплопроводности.

При разработке методов определения λ практический интерес представляют только простейшие внутренние обратные задачи теории теплопроводности, явным образом связывающие λ с тепловым воздействием, температурным полем и геометрией образца. Иными словами, теоретическую основу большинства современных точных методов определения теплопроводности составляют аналитические закономерности одномерных плоских или цилиндрических тепловых и температурных стационарных полей в образцах, которые могут быть отнесены соответственно либо к классу пластины или цилиндра, либо к классу плоского или цилиндрического полупространства.

2.1.2 Конвекция

Как отмечалось выше, различают два вида конвекции: вынужденную и свободную.

Вынужденная конвекция. Процесс теплоотдачи от потока к стенке, или от стенки к потоку, в условиях вынужденной конвекции сводится к прохождению тепла теплопроводностью через пограничный слой. Так как в пограничном слое исключается возможность радиальных переносов тепла, то единственный путь передачи тепла от слоя к слою – теплопроводность. Расчётное уравнение в этом случае имеет вид:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} S(T - T_{\text{вн}}) = \alpha S(T - T_{\text{вн}}), \quad (2.2)$$

где T – температура поверхности твёрдого тела; $T_{\text{вн}}$ – температура внешней среды (жидкости, газа) в удалении от поверхности; S – поверхность теплоотдачи; α – коэффициент теплоотдачи, зависящий от формы и размеров тела; режима движения, скорости и температуры жидкости, её физических свойств $\alpha = \text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$; δ – толщина пограничного слоя.

По физическому смыслу, коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока (q) на поверхности тела, отнесённый к разности температур поверхности тела и внешней среды.

$$\alpha = \frac{\Delta Q}{(T - T_{\text{вн}})\Delta S} = \frac{q}{T - T_{\text{вн}}}. \quad (2.3)$$

Свободная конвекция. Свободная конвекция возникает под влиянием различия удельных плотностей жидкости (газа) в поле тяготения, причём возникновение различий удельных плотностей обусловлено действием самой конвекции (нагрев или охлаждение пограничных слоёв). Решающую роль в определении направления свободной конвекции играет относительная разность удельных объёмов пограничного слоя и внешней среды: около нагретых тел должна наблюдаться подъёмная конвекция, а около холодных – нисходящая. Следует отметить, что возможны и аномалии когда подъёмная конвекция будет около холодных тел, а нисходящая – около нагретых, например, у воды в интервале температур 273...281 К.

Ниже для различных случаев теплообмена приведены значения коэффициентов теплоотдачи [3]:

	α Вт/(м ² · К)
Свободная конвекция:	
в газах.....	2 – 10
в масле и других жидкостях той же плотности.....	200 – 300
в воде.....	200 – 600
Вынужденная конвекция:	
в газах.....	10 – 100
в масле и других жидкостях той же плотности.....	300 – 1000
в воде.....	1000 – 3000

Расчётные соотношения для свободной конвекции формулируются так же, как и в случае вынужденной конвекции (2.2).

2.1.3 Тепловое излучение

Тепловое излучение есть результат превращения внутренней энергии тел в энергию электромагнитных колебаний и характеризуется длиной волны λ и частотой колебаний $\nu=c/\lambda$, где c – скорость света.

Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу, поэтому классификация излучения по длине волн в зависимости от производимого ими эффекта носит лишь условный характер. При температурах, с какими имеют дело в технике, основное количество энергии излучается при $\lambda=0,8...80$ мкм. Эти лучи называют тепловыми (инфракрасными). Меньшую длину имеют волны видимого и ультрафиолетового излучения, большую – радиоволны. Таким образом, в отличие от других механизмов теплообмена лучистая энергия имеет не только количественную, но и качественную (спектральную) характеристику.

Если на пути теплового излучения встречается тело, то тепловая энергия частично поглощается им, частично отражается и частично проходит сквозь него. Обозначим количество падающей на тело энергии Q , поглощённой – Q_a , отражённой – Q_r и прошедшей через вещество – Q_d . Тогда на основании закона сохранения энергии

$$Q = Q_a + Q_r + Q_d. \quad (2.4)$$

Разделим обе части равенства (2.4) на Q

$$\frac{Q_a}{Q} + \frac{Q_r}{Q} + \frac{Q_d}{Q} = 1. \quad (2.5)$$

Первый член равенства (2.5) называется *коэффициентом поглощения* и обозначается a , второй – *коэффициентом отражения* и обозначается r , третий – *коэффициентом пропускания* и обозначается d . Следовательно,

$$a + r + d = 1. \quad (2.6)$$

Каждая из величин a , r , d для различных веществ может принимать значения от 0 до 1. Различают три крайних случая:

1) $a=1$, $r=0$, $d=0$, т. е. падающая лучистая энергия полностью поглощается телом; такие тела называются *чёрными*;

2) $r=1$, $a=0$, $d=0$, т. е. падающая лучистая энергия полностью отражается. В этом случае, когда поверхность шероховатая, лучи отражаются рассеянно (диффузионное отражение) и тело называется *белым*; когда поверхность тела гладкая, то отражения следует законам геометрической оптики и поверхность тела в этом случае называется *зеркальной*;

3) $d=1$, $a=0$, $r=0$, т. е. падающая лучистая энергия полностью проходит через тело: такие тела называются *прозрачными* (диатермичными).

В природе такие крайние случаи не встречаются, т. е. величины a , r , d не принимают значений, равных нулю или единице. Однако анализ этих случаев позволил найти для установления законов излучения реальных тел.

Один из основных законов теплового излучения свидетельствует о том, что количество тепла, излучаемое чёрным телом, пропорционально величине его абсолютной температуры в четвёртой степени. Этот закон впервые экспериментально был установлен И. Стефаном (1879 г.), и теоретически эту же зависимость установил Л. Больцман (1884 г.) на основе применения соотношений термодинамики для полости, заполненной лучистой энергией:

$$Q = \sigma \cdot T^4, \quad (2.7)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана, характеризующая излучение абсолютно чёрного тела, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴).

Для технических расчётов закон (2.7) записывают в следующем виде:

$$Q = \varepsilon_{\text{пр}} S_{\text{пр}} C \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (2.8)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ – приведённый коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды; $S_{\text{пр}}$ – приведённая поверхность излучающего тела и внешней среды; $C = 5,67$ Вт/(м²К⁴) – коэффициент излучения абсолютно чёрного тела.

Приведённый коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{п}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{ср}}} - 1 \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

где $\varepsilon_{\text{п}}$ – коэффициент черноты поверхности тела; $\varepsilon_{\text{ср}}$ – коэффициент черноты внешней среды.

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Применение вычислительной техники и численных методов значительно расширяет классы исследуемых задач теплообмена, позволяя получать приближенные решения многомерных, нелинейных, нестационарных задач, для которых использование точных и приближенных аналитических методов не представляется возможным [1, 4, 5]. При выборе математических моделей, описывающих процессы теплообмена в реальных объектах, границы их допустимой сложности в настоящее время часто определяются не столько возможностями численных методов и вычислительными ресурсами, сколько недостатком достоверной входной информации для этих моделей.

При определении различных пространственно-временных полей необходимо находить решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в заданных областях изменения пространственных и временных интервалах. Отличительной особенностью применения численных методов является дискретизация пространственной и временной областей на первом же этапе решения задачи. Необходимо отметить, что аппроксимация часто делается и при расчёте на основе аналитических решений, однако в этих случаях она проводится на заключительных этапах, реализуемых уже после получения аналитического решения.

Существует два основных численных метода решения уравнений в частных производных: *метод конечных разностей* и *метод конечных элементов*. Они отличаются способами получения системы уравнений для значений искомых функций в узловых точках. Метод конечных разностей базируется непосредственно на дифференциальном уравнении и граничных условиях, а метод конечных элементов – на эквивалентной вариационной постановке задачи.

В данном пособии речь пойдёт именно о применении конечно-разностных схем для решения уравнений теплопроводности.

3.1 Основы метода конечных разностей

Теория численных методов решения уравнений в частных производных представляет собой весьма обширный и достаточно сложный раздел математики, называемый *теорией разностных схем*, с которым читатель может познакомиться самостоятельно. Мы будем уделять основное внимание практическим вопросам построения и программной реализации различных численных методик, а не их теоретическому исследованию и обоснованию.

Как правило, авторы будут ограничиваться лишь объяснением основных понятий, которые понадобятся в дальнейшем, причём некоторые вопросы рассмотрим чуть упрощено с позиций математики.

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Поэтому можно сказать, что полученное дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного множества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо добавить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называют *краевыми условиями* или *условиями однозначности*. Систему краевых условий и дифференциального уравнения теплопроводности, называют *краевой задачей*.

Краевые условия включают в себя:

- *геометрические условия*, характеризующие форму и линейные размеры тела, в котором протекает процесс;
- *физические условия*, характеризующие физические свойства среды и тела. Задаются физические параметры тела (λ , ρ , c_v и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников тепла;
- *временные (начальные) условия*, характеризующие распределение температуры в изучаемом теле в начальный момент времени;
- *граничные условия*, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с внешней средой.

Для приближенного (численного) решения краевых задач теплопроводности широко применяется метод конечных разностей, позволяющий решать сложные уравнения математической физики. Основополагающие идеи метода состоят в следующем [6]:

1. Область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек (узлов) или расчётной сеточной областью;
2. Функции непрерывных аргументов заменяются функциями дискретных аргументов или сеточными функциями, определенными в узлах сетки;
3. Производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) линейной комбинацией значений сеточной функции (разностными соотношениями) в определенных узлах сетки;
4. В результате вышеперечисленных замен краевая задача в частных производных сводится к системе разностных (алгебраических) уравнений, называемых разностной схемой (задачей);

5. Если полученная таким образом система алгебраических уравнений разрешима и при измельчении сетки решение такой системы стремится к решению краевой задачи (то есть сходится), то данное разностное решение принимается за приближенное решение поставленной задачи.

Как правило, число неизвестных в полученной путём аппроксимации системе алгебраических уравнений велико, но её решение с точки зрения математических трудностей более просто, чем исходной краевой задачи.

Таким образом, в [6], сформулированы основные этапы процедуры решения краевых задач:

1. Выбор сеточной области, учитывающей конкретную конфигурацию расчётной области.

2. Проведение на выбранной сетке аппроксимации дифференциальных уравнений и краевых условий, в результате которой строится разностная схема – дискретный аналог исходной краевой задачи.

3. Выбор метода решения полученной линейной или нелинейной разностной задачи, составление вычислительного алгоритма.

4. Составление программы расчёта, её отладка, расчет контрольного варианта, проведение численных экспериментов по выбору рациональных значений шагов дискретизации и проверке условий сходимости, получение приближенного решения.

3.2 Ошибки математического моделирования

Необходимо подчеркнуть, что процесс исследования исходного объекта методом математического моделирования неизбежно носит приближённый характер, потому что на каждом этапе вносятся те или иные погрешности. Так, построение математической модели связано с упрощением исходного явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других входных данных. По отношению к численному методу, реализующему данную математическую модель, указанные погрешности являются *неустраняемыми*, поскольку они неизбежны в рамках данной модели.

При переходе от математической модели к численному методу возникают погрешности, называемые *погрешностями метода*. Они связаны с тем, что всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближённо. Наиболее типичными погрешностями метода являются *погрешность дискретизации* и *погрешность округления*.

Обычно построение численного метода для заданной математической модели разбивается на два этапа: 1) формулировка дискретной задачи; 2) разработка вычислительного алгоритма, позволяющего отыскать решение дискретной задачи. Например, если исходная математическая задача сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений, то для численного решения необходимо заменить её системой конечного, сколь

угодно большого числа линейных или разностных алгебраических уравнений. В этом случае говорят, что проведена *дискретизация* исходной математической задачи. Простейшим примером дискретизации является построение *разностной схемы* путём замены дифференциальных выражений конечно-разностными отношениями. В общем случае дискретную модель дискретную модель можно рассматривать как конечномерный аналог исходной математической задачи. Ясно, что решение дискретизированной задачи отличается от решения исходной задачи. Разность соответствующих решений и называется *погрешностью дискретизации*. Обычно дискретная модель зависит от некоторого параметра (или множества параметров) дискретизации, при стремлении которого к нулю должна стремиться к нулю и погрешность дискретизации. При этом число алгебраических уравнений, составляющих дискретную модель, неограниченно возрастает. В случае разностных методов таким параметром является шаг сетки.

Как уже отмечалось, дискретная модель представляет собой систему большого числа алгебраических уравнений. Невозможно найти решение такой системы точно и в явном виде. Поэтому приходится использовать тот или иной численный алгоритм решения системы алгебраических уравнений. Входные данные этой системы, а именно коэффициенты и правые части, задаются в ЭВМ не точно, а с округлением. В процессе работы алгоритма погрешности округления обычно накапливаются, и в результате полученное на ЭВМ решение будет отличаться от точного решения дискретизированной задачи. Результирующая погрешность называется *погрешностью округления* (иногда её называют *вычислительной погрешностью* или *погрешностью счёта*). Величина этой погрешности определяется двумя факторами: точностью представления вещественных чисел в ЭВМ и чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

Алгоритм называется *устойчивым*, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно, и *неустойчивым* – в противоположном случае. При использовании неустойчивых вычислительных алгоритмов накопление погрешностей округления приводит в процессе счёта к переполнению арифметического устройства ЭВМ.

3.3 Построение сетки. Задание начальных и граничных условий для процессов теплопроводности

Предположим, требуется найти решение T в прямоугольной области $\Omega = 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq t \leq t_{\text{end}}$. Заменяем данную пространственно-временную область непрерывного изменения аргументов искомой функции T некоторым множеством точек, лежащих в этой области. Это множество называется *конечно-разностной сеткой*, сами точки – *узлами сетки*, а функции, определенные на этой сетке – *сеточными функциями*.

Разобьём пространственную ось x на M равных отрезков размером Δx . Значение Δx выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность при минимуме затрат времени. Практически такой выбор осуществляется в ходе численных экспериментов, проводимых на основе составленного алгоритма решения задачи и соответствующих программ для ЭВМ.

Разбив отрезки $[0, L_x]$, $[0, t_{\text{end}}]$ соответственно на M и N равных частей, проведём параллельные координатным осям прямые через точки $x_i = (i-1)\Delta x$, $i = 1, 2, 3, \dots, M$, $\Delta x = L_x / (M-1)$; $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $\Delta t = t_{\text{end}} / N$. Координаты узлов образованных пересечением прямых x_i и t^n , обозначим нижними индексами i (пространственными) и n (временными). Схема сетки показана на рис. 3.1.

Множество узлов (x_i, t^n) образуют равномерную, по каждой из переменных x и t , сетку. Если $\Delta x \neq \Delta t$, то сетка называется прямоугольной, а в случае $\Delta x = \Delta t$ - квадратной. Для неравномерных сеток $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Совокупность сетки лежащей на линии t^n , называют n -м временным слоем.

Обычно вводят такую пространственную сетку, чтобы крайние узлы сетки (самые левые и самые правые) попали на границу пространственной области. Эти узлы являются *граничными* ($i = 1$, $i = M$), а остальные ($i = 2, 3, \dots, M-1$) *внутренними*. Граничные условия задачи задаются именно в этих граничных узлах, а начальные – для нулевого временного слоя t^0 и $i = 1, 2, \dots, M$.

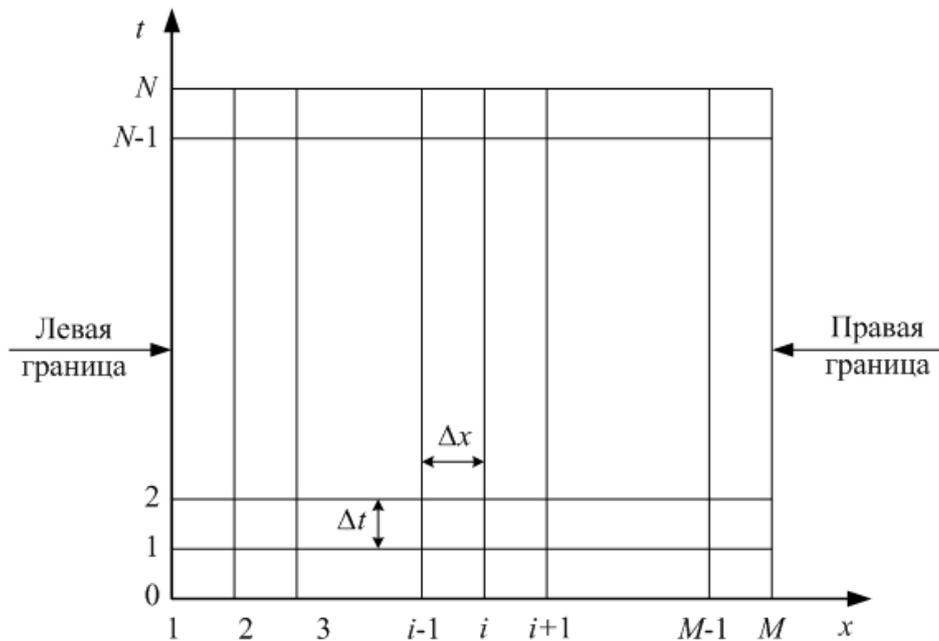


Рис. 3.1 – Сеточная область

Целью приближенного решения краевой задачи является получение такой функции дискретного аргумента T_i^n (сеточная функция), которая была бы близка к функции непрерывного аргумента T , определенной в той же точке, то есть $T_i^n \approx T(x_i, t^n)$.

Начальные условия (НУ) задают значение искомой функции для всей области решения в начальный или в заданный момент времени, то есть значение $T(x, t = t_{\text{нач}})$ должно быть задано и равно $T_{\text{нач}}$. За начальное время $t_{\text{нач}}$ обычно принимают нулевое значение.

При граничных условиях (ГУ) I рода (задача Дирихле) должна быть задана функция (температура) на соответствующей поверхности тела или на соответствующей границе рассматриваемой области:

$$T|_{\text{пов}} = T_{\text{зад}}. \quad (3.1)$$

При ГУ II рода (задача Неймана) должен быть задан тепловой поток q на поверхности тела. В соответствии с законом Фурье:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов}} = q. \quad (3.2)$$

ГУ III рода задают закон теплообмена поверхности тела с внешней жидкой или газообразной средой. Если теплообмен конвективный, то в соответствии с законом Ньютона-Рихмана:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов}} = \alpha (T_{\text{вн}} - T_{\text{пов}}), \quad (3.3)$$

где $T_{\text{вн}}$ – температура внешней среды; α – коэффициент теплоотдачи конвекцией, в общем случае является функцией температуры.

При теплообмене излучением в соответствии с законом Стефана-Больцмана:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов}} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma (T_{\text{вн}}^4 - T_{\text{пов}}^4), \quad (3.4)$$

где $\varepsilon_{\text{пр}}$ – приведённый коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды; σ – постоянная Стефана-Больцмана.

А при совместном лучисто-конвективном (смешанном) теплообмене:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов}} = \alpha T_{\text{пов}} T_{\text{вн}} - T_{\text{пов}} + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T_{\text{пов}}^4 . \quad (3.5)$$

ГУ IV рода задаются в месте контакта тел (сред), в которых определяются поля температур. При идеальном тепловом контакте тепловые потоки и температуры в месте контакта равны:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов1=пов2}} = \lambda_2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов1=пов2}} ; \quad T \Big|_{\text{пов1}} = \Theta \Big|_{\text{пов2}} , \quad (3.6)$$

здесь T , Θ - температуры контактируемых тел 1-го и 2-го, соответственно.

При неидеальном тепловом контакте имеет место скачок температур Δ в месте контакта:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов1=пов2}} = \lambda_2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) \Big|_{\text{пов1=пов2}} ; \quad T - \Theta \Big|_{\text{пов1=пов2}} = \Delta . \quad (3.7)$$

Значение Δ должно быть известно.

3.4 Аппроксимация уравнения теплопроводности, начальных и граничных условий. Явная разностная схема

Рассмотрим обобщенное нестационарное уравнение теплопроводности с внутренним источником тепловыделений для простейшего (одномерного) случая

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + W , \quad (3.8)$$

где W – удельная мощность тепловыделения источника ($W = Q/V$); λ – коэффициент теплопроводности; c_v – удельная теплоемкость; ρ – плотность; Q – мощность источника; V – объем источника.

Аппроксимация дифференциальных операторов (производных) конечно-разностными выражениями основана на разложении в ряд Тейлора гладких функций. Конечно-разностные аналоги первых производных по времени и пространству выглядят следующим образом

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{n,i} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O \Delta t ; \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} + O \Delta x ; \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + O \Delta x ; \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + O \Delta x^2 , \quad (3.12)$$

где O – означает порядок погрешности, получаемой при отбрасывании остаточных членов ряда.

Соотношение (3.9) – (3.12) определяют приближённую формулу для первой производной через конечные разности. При этом соотношение (3.10) называют правой конечной разностью, (3.11) – левой конечной разностью, (3.12) – центральной конечной разностью. Таким образом, как можно заметить, центрально-разностное отношение точнее аппроксимирует первую производную, так как порядок малости остаточного члена выше, чем для левой и правой разности.

Аппроксимацию конечной разностью второй производной по пространству можно записать как

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O \Delta x^2 . \quad (3.13)$$

В соответствии с данными аппроксимациями первой и второй производной перепишем уравнение теплопроводности (3.8):

$$c_v \rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) + W + O(\Delta t, \Delta x^2) . \quad (3.14)$$

Таким образом, пренебрегая погрешностью аппроксимации, можно определить температуру на следующем временном слое ($n+1$) по известному значению температуры предыдущего (n). Такая разностная схема называется **явной**.

Начальные и граничные условия, входящие в краевую задачу, также аппроксимируются разностными отношениями (ГУ II, III, IV рода) или значениями функций (ГУ I рода) на временном слое n .

Аппроксимация НУ имеет вид

$$T(x, t=0) \approx T_i^0 = T_{\text{нач}}. \quad (3.15)$$

На нулевом временном слое ($n = 0$) температуры для каждого пространственного узла i , то есть для $i = 1, 2, \dots, M$, должны быть равны $T_{\text{нач}}$.

При аппроксимации ГУ I рода (3.1) узлы сетки с наименьшим ($i = 1$) и с наибольшим ($i = M$) номерами располагаются на поверхности тела (рис. 3.2).

$$T(x=0, t) \approx T_1^n = T_{\text{зад.лев}}; \quad T(x=L_x, t) \approx T_M^n = T_{\text{зад.пр}}, \quad (3.16)$$

где $T_{\text{зад.лев}}$, $T_{\text{зад.пр}}$ - заданные температуры на левой и правой поверхности тела.

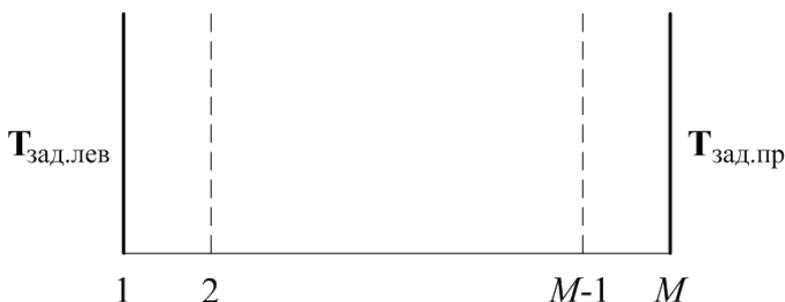


Рис. 3.2 – Фрагмент сетки при задании ГУ I рода

Аппроксимация ГУ II рода (3.2) будет следующей

$$-\lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = q_{\text{лев}}, \quad \lambda \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = q_{\text{пр}}, \quad (3.17)$$

откуда

$$T_1^n = T_2^n + \frac{q_{\text{лев}} \Delta x}{\lambda}, \quad T_M^n = T_{M-1}^n + \frac{q_{\text{пр}} \Delta x}{\lambda}, \quad (3.18)$$

где $q_{\text{лев}}$, $q_{\text{пр}}$ - тепловой поток на левой и правой границах, соответственно.

Исходя из аппроксимации **ГУ III рода** (3.3):

$$-\lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \alpha_{\text{лев}} (T_1^n - T_{\text{вн.лев}}); \quad \lambda \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = \alpha_{\text{пр}} (T_M^n - T_{\text{вн.пр}}), \quad (3.19)$$

определим температуры в граничных узлах:

$$T_1^n = T_2^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_{\text{лев}} (T_1^n - T_{\text{вн.лев}}); \quad T_M^n = T_{M-1}^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_{\text{пр}} (T_M^n - T_{\text{вн.пр}}). \quad (3.20)$$

Температуры для ГУ (3.4), (3.5) получаются аналогичным образом. Но при этом получится нелинейное алгебраическое уравнение относительно температуры в граничных узлах конечно-разностной сетки.

$$-\lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \left[T_{\text{вн.лев}}^4 - T_1^{n 4} \right]; \quad \lambda \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \left[T_{\text{вн.пр}}^4 - T_M^{n 4} \right]. \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} &= \alpha_{\text{лев}} T_1^n \left[T_{\text{вн.лев}} - T_1^{n 4} \right] + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \left[T_{\text{вн.лев}}^4 - T_1^{n 4} \right] \\ \lambda \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} &= \alpha_{\text{пр}} T_M^n \left[T_{\text{вн.пр}} - T_M^{n 4} \right] + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \left[T_{\text{вн.пр}}^4 - T_M^{n 4} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Рассмотрим аппроксимацию **ГУ IV рода** (3.6), (3.7) аппроксимируется аналогично.

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x_1} = \lambda_2 \frac{\Theta_2^n - \Theta_1^n}{\Delta x_2}; \\ \Theta_1^n = T_M^n. \end{cases} \quad (3.23)$$

Введем соотношение $s = \lambda_2 / \lambda_1 \Delta x_1 / \Delta x_2$ и, решая данную систему уравнений относительно температур в граничных узлах

$$\begin{cases} T_M^n = \frac{s}{(1+s)} \Theta_2^n + \frac{1}{(1+s)} T_{M-1}^n; \\ \Theta_1^n = \frac{s}{(1+s)} \Theta_2^n + \frac{1}{(1+s)} T_{M-1}^n. \end{cases} \quad (3.24)$$

Авторы целенаправленно опустили вывод температур в ГУ (3.1) - (3.7) предложив таким образом проделать читателю самостоятельно.

3.5 Неявная схема. Метод прогонки

Рассмотрим ещё одну аппроксимацию конечной разностью второй производной по пространству

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (3.25)$$

в соответствии с которой, уравнение теплопроводности (3.8) примет вид

$$c_v \rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) + W + O(\Delta t, \Delta x^2). \quad (3.26)$$

Отличие аппроксимации уравнения теплопроводности по **неявной разностной схеме** (3.26) от аппроксимации этого же уравнения по явной схеме (3.14) состоит в том, что правую часть уравнения аппроксимировали на временном слое $n+1$, а не на слое n . В случае неявной схемы нельзя сразу же рассчитать неизвестные температуры $T_{i+1}^{n+1}, T_i^{n+1}, T_{i-1}^{n+1}$ ($i = 2, 3, \dots, M-1$) с помощью известных температур с предыдущего временного слоя T_i^n .

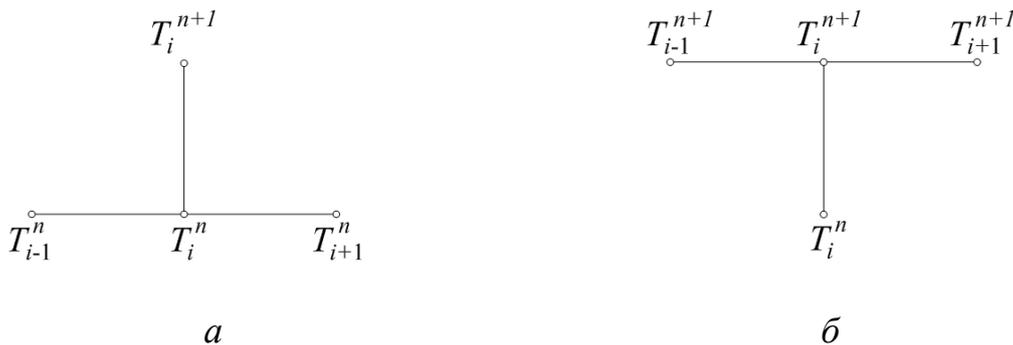


Рис. 3.3 – Шаблон (а) явной и (б) неявной разностной схемы

Для определения температур из полученной системы линейных уравнений (включая температуры в граничных узлах сеточной области) при решении обычно используют один из вариантов метода исключения неизвестных – **метод прогонки** [4...7].

Метод прогонки состоит из двух этапов – **прямой прогонки** (аналог прямого хода метода Гаусса) и **обратной прогонки** (аналог обратного хода метода Гаусса). Прямая прогонка заключается в том, что каждое неизвестное T_i^{n+1} выражается через T_{i+1}^{n+1} с помощью прогоночных коэффициентов p_i, q_i .

Приведем уравнение теплопроводности (3.26) к каноническому виду, сгруппировав предварительно слагаемые, содержащие температуры на разных временных слоях

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i T_{i-1}^{n+1} = -F, \quad (3.27)$$

$$A_i = 1; \quad B_i = 1; \quad C_i = 2 + \frac{\Delta x^2}{a \Delta t}; \quad F_i = \frac{\Delta x^2}{a \Delta t} T_i^n + \frac{\Delta x^2}{\lambda} W.$$

здесь $a = \lambda / (C \rho)$ - коэффициент температуропроводности.

Далее введем вспомогательные коэффициенты p_i, q_i и запишем формулы прямой и обратной прогонок:

$$p_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, M-1; \quad (3.28)$$

$$q_{i+1} = \frac{A_i q_i + F_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, M-1; \quad (3.29)$$

$$T_i^{n+1} = p_{i+1} T_{i+1}^{n+1} + q_{i+1}, \quad i = M-1, M-2, \dots, 1. \quad (3.30)$$

Смысл выше написанного можно пояснить следующим образом. Сначала последовательно рассчитываются коэффициенты p_i и q_i путем прямой прогонки, а затем на их основе, путем обратной прогонки, рассчитывается T_i^{n+1} .

Коэффициенты p_1 , q_1 и T_M^{n+1} определяются с помощью аппроксимации ГУ следующим образом.

Учитывая, что из (3.30) следует $T_1^{n+1} = p_2 T_2^{n+1} + q_2$ для **ГУ I рода**, когда $T_1^{n+1} = T_{\text{зад.лев}}$, имеем

$$p_2 = 0; \quad q_2 = T_{\text{зад.лев}}. \quad (3.31)$$

Для правой границы, то есть для $i = M$, ГУ I рода запишется

$$T_M^{n+1} = T_{\text{зад.пр}} \quad (3.32)$$

Рассмотрим аппроксимацию уравнения **ГУ II рода** (3.2), которая для $i = 1$ имеет вид

$$-\lambda \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} = q_{\text{зад.лев}}.$$

Преобразуем это уравнение

$$T_1^{n+1} = T_2^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.лев}}.$$

Учитывая, что из (3.30) следует $T_1^{n+1} = p_2 T_2^{n+1} + q_2$, получим

$$p_2 = 1; \quad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.лев}}. \quad (3.33)$$

Аппроксимация уравнения (3.2) для $i = M$ выглядит следующим образом

$$\lambda \frac{T_M^{n+1} - T_{M-1}^{n+1}}{\Delta x} = q_{\text{зад.пр}}.$$

Преобразуем это уравнение

$$T_M^{n+1} = T_{M-1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.пр}}.$$

Учитывая, что из (3.30) следует $T_{M-1}^{n+1} = p_M T_M^{n+1} + q_M$ и при условии $1 - p \neq 0$ получим температуру в правом граничном узле:

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.пр}}}{1 - p_M}. \quad (3.34)$$

Точно таким же образом коэффициенты p_1 , q_1 и T_M^{n+1} определяются и для оставшихся ГУ (III, IV рода).

Для ГУ III рода (3.3):

$$p_2 = 1; \quad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_{\text{лев}} T_1^{n+1} T_{\text{вн.лев}} - T_1^{n+1}. \quad (3.35)$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_{\text{пр}} T_M^{n+1} T_{\text{вн.пр}} - T_M^{n+1}}{1 - p_M}. \quad (3.36)$$

Для ГУ III рода (3.4):

$$p_2 = 1; \quad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda} \varepsilon \sigma \left[T_{\text{вн.лев}}^4 - T_1^{n+1 4} \right]. \quad (3.25)$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \frac{\Delta x}{\lambda} \varepsilon \sigma \left[T_{\text{вн.пр}}^4 - T_M^{n+1 4} \right]}{1 - p_M}. \quad (3.26)$$

Для ГУ III рода (3.5):

$$p_2 = 1; \quad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\alpha_{\text{лев}} T_1^{n+1} T_{\text{вн.лев}} - T_1^{n+1} + \varepsilon \sigma T_{\text{вн.лев}}^4 - (T_1^{n+1})^4 \right]. \quad (3.27)$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\alpha_{\text{пр}} T_M^{n+1} T_{\text{вн.пр}} - T_M^{n+1} + \varepsilon \sigma T_{\text{вн.пр}}^4 - (T_M^{n+1})^4 \right]}{1 - p_M}. \quad (3.28)$$

Для ГУ IV рода (3.6):

$$p_2 = \frac{s}{(1+s)}; \quad q_2 = \frac{1}{(1+s)} T_{M-1}^{n+1}. \quad (3.29)$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + s \Theta_2^{n+1}}{1 - p_M + s}. \quad (3.30)$$

При решении методом прогонки задачи, удовлетворяющей условию хорошей обусловленности $C > |A_i| + |B_i| + \delta$, ($\delta > 0$), погрешности, допускаемые в процессе вычислений, не накапливаются и не приводят к возрастающим с ростом N ошибкам в вычисляемых значениях решения. Это замечательное свойство и малое число действий для её реализации (абсолютная устойчивость) – делают прогонку удобным вычислительным алгоритмом.

4 ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1 Одномерная задача теплопроводности

Перейдём непосредственно к методике составления вычислительных программ. Рассмотрим в качестве демонстрационного примера программу расчёта по неявной разностной схеме нестационарного уравнения теплопроводности (3.8) для стержня с внутренним источником тепловыделения, боковым теплообменом (3.4) $\alpha = \text{const}$ и начальным условием (3.1), рис. 4.1.

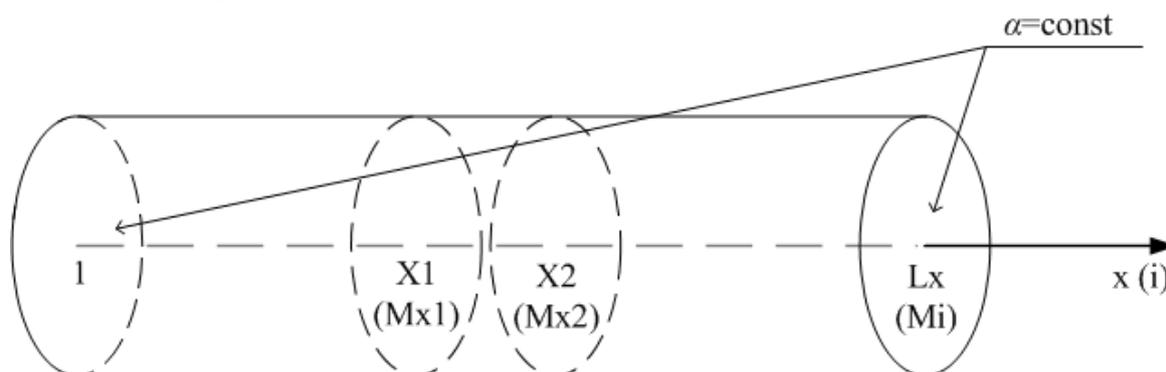


Рис. 4.1 – Геометрия области решения

Ниже приведён листинг программы для решения одномерной задачи и сделаны необходимые пояснения.

- 1 ! Программа для расчёта поля температур стержня по неявной
- 2 ! разностной схеме с заданными граничными условиями III рода и
- 3 ! внутренним источником тепловыделения.
- 4 ! Для расчета используется метод прогонки.
- 5
- 6 ! Исходные данные и параметры
- 7 ! Mi – размер расчётной пространственной сетки
- 8 ! dt – временной шаг
- 9 ! TIME_END – конечное время расчёта
- 10 ! Tvp – температура внешней среды
- 11 ! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
- 12 ! Lx – длина стержня
- 13 ! X1, X2 – координаты размещения левой и правой
- 14 ! границы источника тепловыделения
- 15 ! W – удельная мощность источника тепловыделения
- 16 ! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала стержня
- 17 !(удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
- 18 ! TN, TNP1 – массивы хранения значений температуры на

```

19 ! (n) и (n+1) – временном слое
20 ! AA, BB, CC, FF – массивы вспомогательных коэффициентов
21 ! PP, QQ – массивы прогоночных коэффициентов
22 ! dx – шаг пространственной сетки
23 ! TIME – текущее время расчета
24 ! kappa – коэффициент температуропроводности материала
25 ! i, jk – переменная для организации расчётных циклов и циклов записи
26 ! информации в файл
27 ! Mx1, Mx2 – целочисленные координаты размещения
28 ! источника тепловыделения
29
30 program sterjen      ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
31 implicit none
32 ! Ввод исходных данных
33 integer, parameter :: Mi = 401
34   real, parameter :: dt = 0.005, TIME_END = 10.0
35   real, parameter :: Tvn = 298.0, ALFA = 5.0
36   real, parameter :: Lx = 100.0E-2
37   real, parameter :: X1 = 48.0E-2, X2 = 52.0E-2
38   real, parameter :: C = 380.0, RO = 8930.0, LAMDA = 385.0
39 ! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
40 ! для расчёта
41   real :: TN(Mi), TNP1(Mi), W(Mi)
42   real :: AA(Mi), BB(Mi), CC(Mi), FF(Mi), PP(Mi), QQ(Mi), DEN(Mi)
43   real :: dx, TIME, kappa, Mx1, Mx2
44 integer :: i, jk
45
46 ! Расчёт шага пространственной сетки
47 dx = Lx/(Mi-1)
48
49 ! Пересчет координат источника в целочисленные значения
50 Mx1 = X1/dx + 1.0
51 Mx2 = X2/dx + 1.0
52
53 ! Вычисление коэффициента температуропроводности
54 kappa = LAMDA/(C*RO)
55
56 ! Определение области источника тепловыделения
57 do i = 1, Mi
58   ! Шаг внутри области источника
59   if ((i>=Mx1) .and. (i<=Mx2)) then
60     W(i) = 5.0E+6
61   ! Счёт вне области источника
62   else
63     W(i) = 0.0
64   end do
65
66 ! Задание начального приближения
67 TNP1 = Tvn
68 TIME = 0.0
69

```

```

70 AA = 1.0; BB = 1.0
71
72 ! Вывод текста на экран
73 write(*,*) 'Please, wait ... '
74
75 ! Открытие файла для записи значений по времени
76 open (1,file = 'D:\graph\Ttime.dat')
77
78 ! ----- Организация вычислительного цикла
79 ijk = 0.0
80 DO WHILE (TIME < TIME_END)
81     ijk = ijk + 1.0
82
83     TN = TNP1
84
85     ! ----- Реализация метода прогонки
86
87     ! Задание ГУ III-го рода на границе x=0 (i = 1)
88     PP(2) = 1.0; QQ(2) = dx/LAMDA*(ALFA*(Tvn - TNP1(1)))
89
90     ! Организация цикла прямой прогонки
91     do i = 2, Mi-1
92         CC(i) = 2.0 + dx**2.0/dt/kappa
93         FF(i) = dx**2.0/dt/kappa*TN(i) + dx**2.0/LAMDA*W(i)
94
95         ! Расчёт прогоночных коэффициентов
96         DEN(i) = CC(i) - AA(i)*PP(i) ! Знаменатель
97         PP(i+1) = BB(i)/DEN(i)
98         QQ(i+1) = (AA(i)*QQ(i) + FF(i))/DEN(i)
99     end do
100
101     ! Задание ГУ III-го рода на границе x=Lx (i = Mi)
102     TNP1(Mi) = (QQ(Mi) + dx/LAMDA*(ALFA*(Tvn - TNP1(Mi))))/(1.0 - PP(Mi))
103
104     ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
105     ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
106     do i = Mi-1, 1, -1
107         TNP1(i) = PP(i+1)*TNP1(i+1) + QQ(i+1)
108     end do
109
110     ! Запись значений температуры по времени
111     if (mod(ijk,10)==0) write(1,*) TIME, maxval(TNP1)
112
113     ! Переход на следующий временной слой
114     TIME = TIME + dt
115
116     ! ----- Окончание вычислительного цикла
117     END DO
118
119     ! Закрытие файла записи значений по времени
120     close(1)

```

```

121
122 ! Реализация записи конечного распределения температуры в файл
123 open(2,file = ' D:\graph\Tfin.dat')
124   do i = 1,Mi
125     write(2,*) (i-1)*dx, TNP1(i)
126   end do
127 close(2)
128
129 end program sterjen      ! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ

```

Алгоритм программной реализации поставленной задачи представлен на рис. 4.2.

Ввод исходных данных условно можно разделить на несколько частей (групп). К первой группе исходных данных относятся параметры разностной схемы: число пространственных точек (M_i), шаг по времени (dt), конечное время расчёта ($TIME_END$). Ко второй части можно отнести все постоянные коэффициенты и распределения, входящие в исходную дифференциальную задачу, такие как температура внешней среды (T_{vn}), габаритные размеры тела (L_x), данные об источнике тепловыделения (X_1, X_2, W), теплофизические характеристики материала ($C, RO, LAMDA$), начальные распределения ($T(x,0)$) и др. В третью группу входят данные, характеризующие выходную информацию.

После ввода исходных данных производится первое заполнение массива температур, в который записывается начальное распределение.

Организация вычислений осуществляется операторами, помещенными в конструкцию цикла (строки 80 - 117)

do while (логическое условие)
 операторы
end do

Если перевести дословно то данная конструкция означает выполнение операторов в теле цикла, пока условие истинно.

Схема работы цикла выглядит следующим образом:

1. Проверяется логическое условие работы цикла;
2. Если условие истина, то происходит выполнение операторов тела цикла; если ложно, то цикл завершает работу.

При этом необходимо иметь в виду следующие важные замечания:

- если условия изначально ложно тело цикла может не выполниться ни разу;
- если условие после выполнения цикла не измениться, то это приведёт к заикливанию.

Коэффициенты, которые содержат значения температур с предыдущего временного слоя и должны пересчитываться на каждом временном шаге,

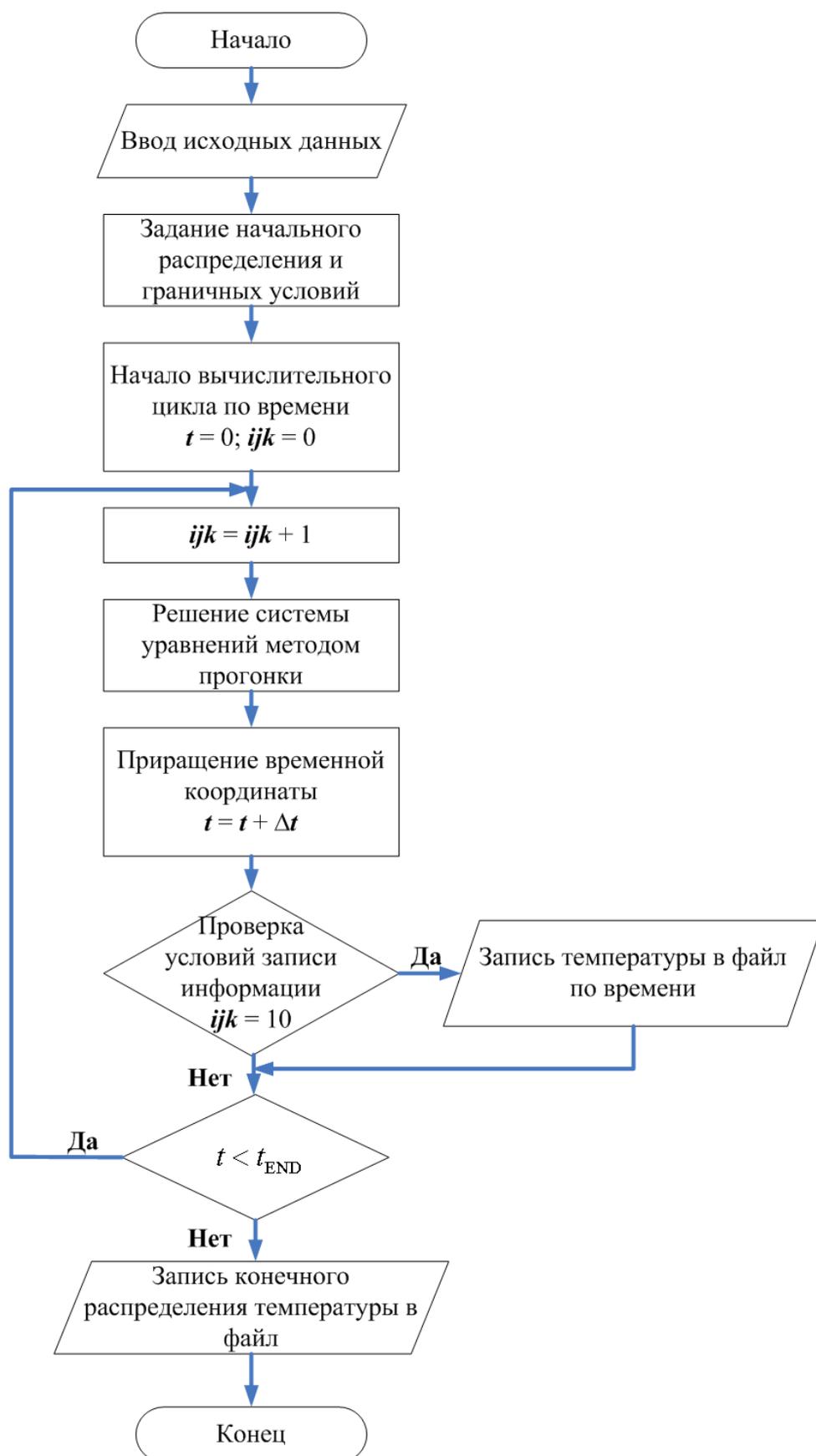


Рис. 4.2 – Алгоритм программной реализации одномерной задачи теплопроводности

обязательно помещают внутри временного цикла. Остальные, в целях сокращения машинного времени, рекомендуется выносить за тело цикла, как это сделано для коэффициентов уравнения канонического вида (3.15) A, B (строка 70).

Следует обратить особое внимание, что граничные условия записываются согласно уравнениям (3.19 – 3.30). При этом ГУ при $x=0$ требуется определить до организации цикла прямой прогонки (строка 88), а ГУ при $x=Lx$ – после расчёта прогоночных коэффициентов и до цикла обратной прогонки (строка 102), то есть следующим образом

ГУ при $x=0$ ($i=1$) (задаются $PP(2)$ и $QQ(2)$)

! Цикл прямой прогонки

do $i = 2, Mi-1$

операторы

end do

ГУ при $x=Lx$ ($i=Mi$) (задаётся $TNP1(Mi)$)

! Цикл обратной прогонки

do $i = Mi-1, 1, -1$

операторы

end do

При составлении программы расчёта для хранения значений температур было выделено два массива ($TN, TNP1$). В первом находятся значения, найденные на предыдущем временном слое, а элементы другого массива – температуры текущего временного слоя – вычисляются. После определения всех «новых» температур их значения переписываются в массив температур предыдущего слоя, и выполняется следующий временной шаг.

В приводимой программе в интересующие расчётчика моменты времени (за это отвечает счётчик ijk) производится запись в файл максимального значения температуры с помощью оператора `ll1`; и запись значений конечного распределения температуры вдоль оси x (строки 123-127). Для этого были организованы два файла с расширениями (*.dat) и указанием пути их размещения ('D:\graph*.dat'), которые можно непосредственно использовать для последующей визуализации результатов.

В простейшем случае запись данных в файл происходит по следующей схеме:

open (1,file = 'имя файла')	! открытие
write (1,формат записи)	! запись
close (1)	! закрытие

Необходимо отметить, что: создание конечной папки для записи файла проводится пользователем вручную до запуска программы; если путь размещения не указан, то файл будет создан в текущей (где был создан проект) директории.

Для графического представления результата расчётов обратимся к пакету математических и инженерных расчётов MathCAD, который имеет широко развитый инструментарий для работы с графикой.

Для этого воспользуемся «Мастером импорта данных» (Insert->Data->Data Import Wizard...), окно которого изображено на рис. 4.3.

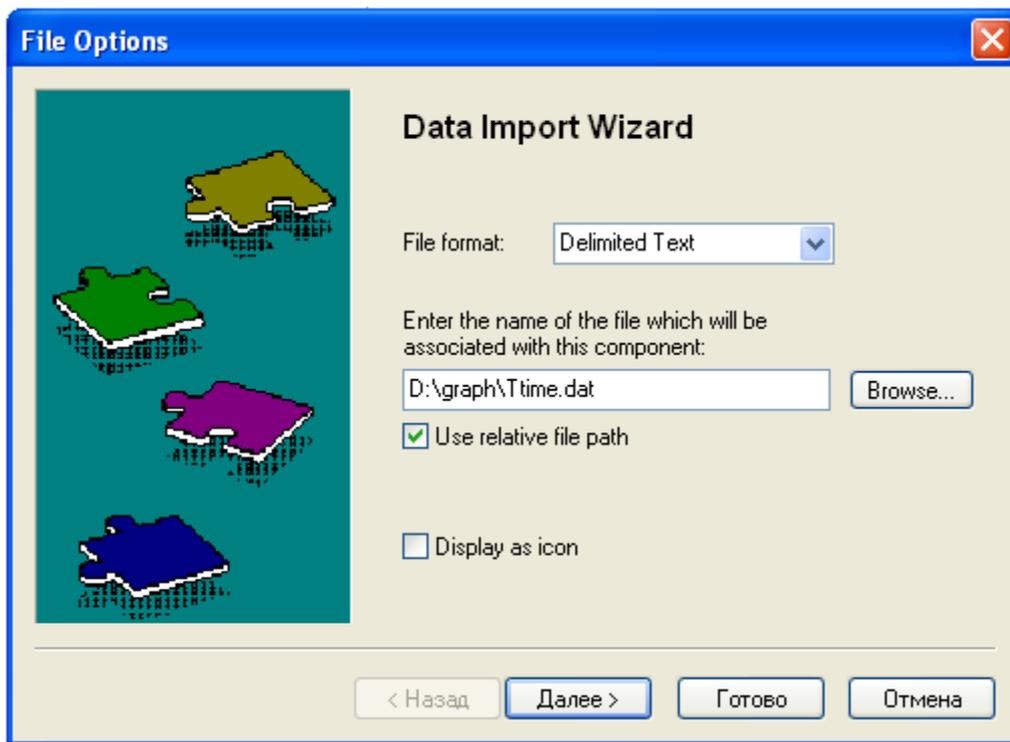


Рис. 4.3 – Использование «Мастера импорта данных»

В поле File format (англ. – «формат файла») из ниспадающего списка выбирается необходимый формат представления данных, в данном случае это Delimited Text (англ. – «Разграниченный текст»), а в поле «Имени» указывается путь к файлу. При этом галочка Use relative file path (англ. – «Использовать родственный путь файла») позволит делать перезапись файла без необходимости каждый раз проделывать одну и ту же процедуру импорта данных, а галочку Display as icon (с англ. – «отображать как иконку») лучше оставить снятой.

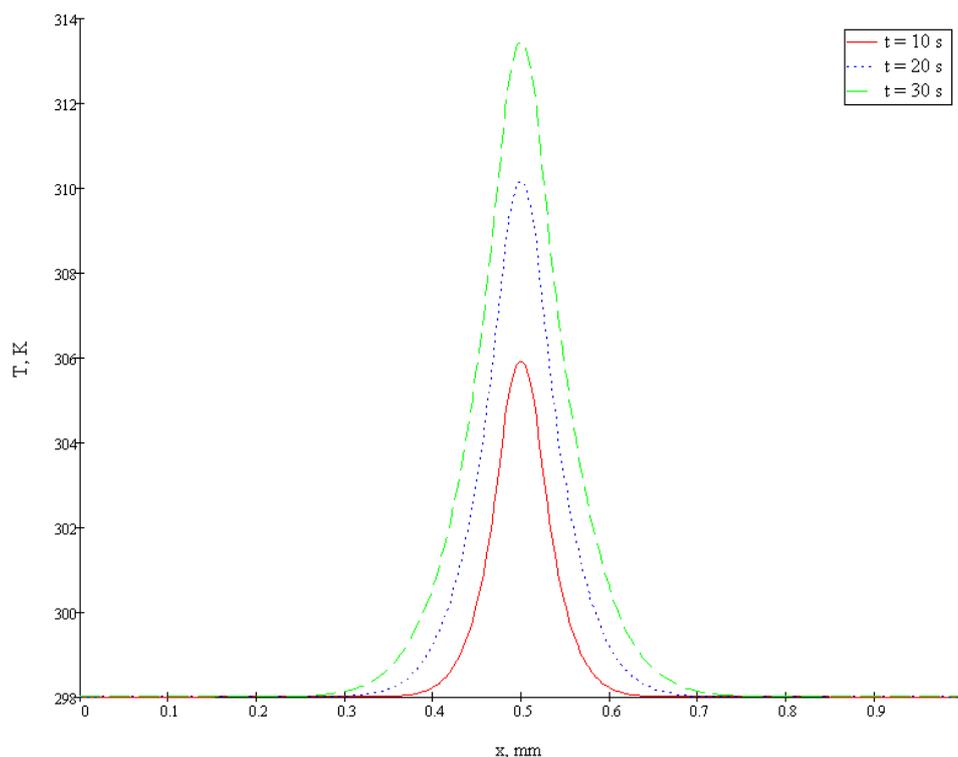


Рис. 4.3 – Результаты численного расчёта в MathCAD

Таким образом, была рассмотрена программная реализация линейной задачи теплопроводности, в которой коэффициенты и правая часть не зависели от решения. Но на самом деле такая зависимость почти всегда имеет место и её надо учитывать. Особенно большое влияние на процессы распространения тепла оказывает температурная зависимость коэффициентов теплоёмкости и теплопроводности в высокотемпературных процессах. Учёт этой зависимости приводит к нелинейным уравнениям теплопроводности. Нелинейными уравнениями описываются и процессы распространения тепла в телах, имеющих нелинейные источники, а также в случаях наличия на границе нелинейных условий теплообмена.

При решении таких задач обычно на каждом шаге по времени строится итерационный процесс для уточнения значений коэффициентов, зависящих от решения. В этих случаях целесообразно контролировать устойчивость вычислительного процесса по числу итераций, необходимых для получения требуемой точности.

На реализации такого итерационного процесса более подробно остановимся позже, при рассмотрении многомерных задач теплопроводности.

4.2 Решение многомерных задач теплопроводности

Процесс распространения тепла в декартовой системе координат описывается уравнением теплопроводности, которое в трёхмерном случае имеет вид

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + W. \quad (4.1)$$

Если в рассматриваемом диапазоне температур и времени теплофизические свойства изменяются незначительно, то коэффициенты c_v , ρ , λ считаются постоянными и уравнение (4.1) упрощается:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + W. \quad (4.2)$$

От такого трёхмерного уравнения можно легко перейти к двумерным и одномерным с помощью отбрасывания соответствующих производных из-за относительной малости градиентов температур по этим направлениям.

4.2.1 Двумерная задача моделирования нестационарного температурного поля плоского радиатора типа «пластина»

Рассмотрим уравнение, которое описывает нестационарное распределение температуры в прямоугольной области

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + W. \quad (4.3)$$

Область изменения аргументов имеет вид: $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq t \leq t_{\text{end}}$.

Аппроксимацию данного уравнения на прямоугольной сетке проведём по аналогии с одномерной неявной схемой (3.26):

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + W + O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2). \quad (4.4)$$

Практическая реализация приведенной абсолютно устойчивой схемы представляет значительные трудности, обусловленные тем, что на верхнем временном слое ($n+1$) эта схема связывает значения искомой функции в пяти соседних узлах на двумерном шаблоне. Соответственно с увеличением числа неизвестных в системе разностных уравнений увеличивается число арифметических операций, необходимых для её решения. В этом случае особую ценность приобретает свойство экономичности разностных схем, то

есть сочетания положительных свойств явных схем (объём вычислений пропорционален числу узлов разностной схемы) и неявных (безусловная или абсолютная устойчивость). Наибольшее распространение приобрели экономичные разностные схемы, основанные на методе дробных шагов по временной переменной [4, 5, 7] - *схема переменных направлений* и *схема расщепления* или *локально-одномерная схема*, в которых многомерная задача сводится к решению последовательности одномерных задач методом прогонки.

Схема переменных направлений. Суть данной схемы можно непосредственно представить из её названия. При реализации двухмерной задачи переход от n к $n+1$ временному слою осуществляется за два полушага, аппроксимация которых имеет вид:

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{0,5\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) + W_{i,j}^n, \quad (4.5)$$

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{0,5\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + W_{i,j}^{n+1/2}. \quad (4.6)$$

На первом этапе уравнение (4.5) для каждого фиксированного j решается с помощью трёхточечной прогонки по индексу i . Аналогично решается уравнение (4.6). Порядок аппроксимации (4.5), (4.6) составляет $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$, схема является абсолютно устойчивой.

Схема расщепления (локально-одномерная). Переход от n к $n+1$ временному слою реализуется с помощью двух «дробных» шагов, причём на первом шаге учитывается в правой части (4.4) только производная по x , а на втором шаге – производная по y

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} W_{i,j}^n, \quad (4.7)$$

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{2} W_{i,j}^n. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.7) есть сеточная аппроксимация предельно анизотропного процесса теплопередачи, при котором распространение тепла происходит лишь в направлении оси x ; аналогичным образом можно истолковать (4.8). Можно предполагать, что попеременное распространение тепла по направлениям осей x и y будет приближать реальный (изотропный) процесс теплопроводности, описываемый уравнением (4.4).

Отметим, что каждая из промежуточных систем разностных уравнений (4.7) и (4.8) в отдельности не обладает свойством аппроксимации. Однако невязка, возникающая на первом полушаге, компенсируется на втором полушаге, так что в целом получается погрешность аппроксимации, стремящаяся к нулю при измельчении пространственно-временной сетки.

Каждое из уравнений (4.7), (4.8) можно реализовать с помощью четырёхточечных прогонок по соответствующему направлению.

Рассмотренная для двумерного случая локально-одномерная схема естественным образом обобщается и на трёхмерные задачи. В этом случае вычисления на каждом шаге по времени проводится в три этапа путём прогонок в направлениях x , y и z . После прогонок в двух направлениях находятся промежуточные распределения температуры, а после третьей прогонки – окончательное решение на данном шаге. Отметим, что мощность источника W при расщеплении уравнения теплопроводности можно распределить с некоторыми весовыми коэффициентами, как это было сделано выше, либо отнести к одному из направлений.

Пример. Решается задача расчёта температурного поля в плоской конструкции радиатора типа «пластина» (далее по тексту пластина) с размерами по осям x и y , равными L_x и L_y (рис. 4.4). В пределах пластины действует локальный источник тепловыделения (транзистор марки КТ837Ф) мощностью 5,6 Вт. На краях пластины заданы граничные условия III рода с излучением (смешанный теплообмен) (3.5), с теплообмен конвекцией с нижней грани пластины ограничен. В качестве материала пластины взят алюминий, теплофизические характеристики которого приведены в Приложении 1. Температура внешней среды 298 К.

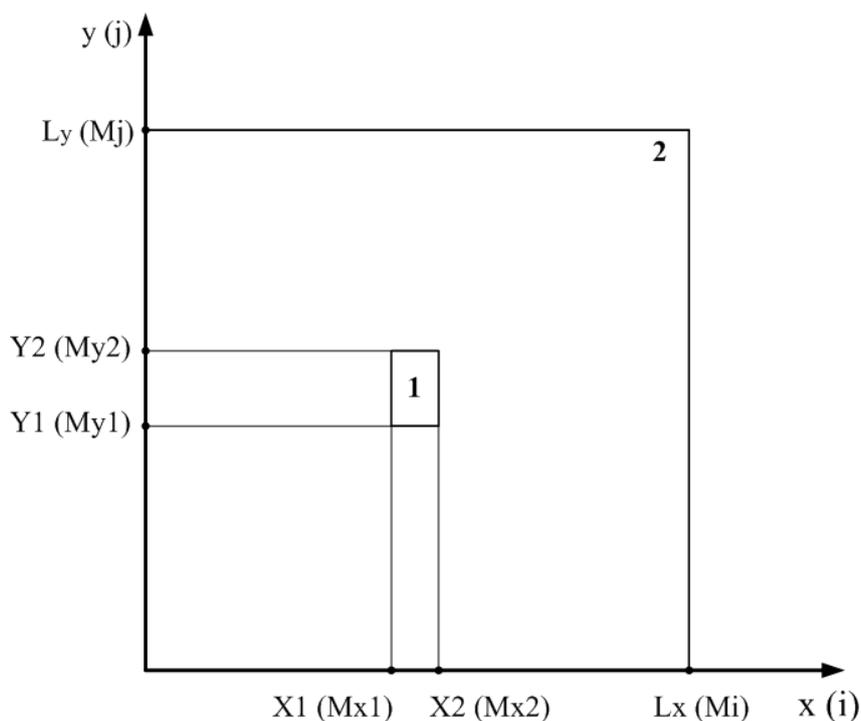


Рис. 4.4 – Геометрия области решения (вид сверху): 1 – источник тепловыделения; 2 – основание (пластина)

Основные допущения, используемые при постановке задачи [8]:

1. Пластина представляет собой однородное изотропное тело, теплофизические параметры которого не зависят от координат и температуры;

2. Тепловой контакт на границах между телами (областями) считается идеальным;

3. Сток тепла с верхней и нижней поверхности пластины во внешнюю среду за счёт механизмов конвекции и радиационного теплообмена учитывается в уравнении теплопроводности дополнительными источниками тепловыделения;

4. Источник тепловыделения в двумерной постановке задачи плоский. Теплообмен с боковых граней источника учитывается в уравнении теплопроводности за счёт увеличения мощности дополнительных источников тепловыделения (см. допущение 3).

В данной постановке задача сводится к решению двумерного нелинейного нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + W(x, y) + k(x, y) \left[\frac{\alpha(T)(T_{\text{вн}} - T)}{h} + \frac{\varepsilon_{\text{пр}}(T_{\text{вн}}^4 - T^4)}{h} \right], \quad (4.9)$$

где h – толщина пластины; k – коэффициент.

Четвёртое слагаемое в правой части учитывает сток тепла во внешнюю среду за счёт механизмов конвективного и радиационного теплообменов.

С помощью коэффициента k учитывается теплообмен с боковых граней источника, его значение определяется функцией [8]:

$$k = \begin{cases} 3, & \text{если } x, y \in [S_{\text{w}}] \\ 2, & \text{если } x, y \notin [S_{\text{w}}] \end{cases}, \quad (4.10)$$

где S_{w} - зона источника тепловыделения.

Область решения ограничивается следующими временными и пространственными условиями

$$t \in [0; t_{\text{end}}], \quad x \in [0; L_x], \quad y \in [0; L_y]; \quad T|_{t=0} = T_0 \quad x, y; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} x = 0, y \in [0; L_y]: \quad & -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T T_{\text{вн}} - T + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4; \\ x = L_x, y \in [0; L_y]: \quad & \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T T_{\text{вн}} - T + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4; \\ y = 0, x \in [0; L_x]: \quad & -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha T T_{\text{вн}} - T + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4; \\ y = L_y, x \in [0; L_x]: \quad & \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha T T_{\text{вн}} - T + \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4. \end{aligned} \quad (4.12)$$

При задании начальных условий считаем, что температура пластины в начальный момент времени распределена равномерно.

Для описания зависимости коэффициента конвективного теплообмена поверхности тела с внешней средой в диапазоне температур 273...403 К и типичных геометрических размеров используем функцию, предложенную Г.Н. Дульневым и уточненную В.П. Алексеевым в [9]:

$$\alpha(T) = N \left[1,503 - 0,044 \left(\frac{T(x, y) + T_{\text{вн}}}{2} \right)^{0,358} \right] \left(\frac{T(x, y) - T_{\text{вн}}}{L} \right)^{0,25}, \quad (4.13)$$

где N – коэффициент, зависящий от ориентации геометрического тела в пространстве и от направления теплообмена с поверхности; L – определяющий размер, также зависит от ориентации тела в пространстве (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1 – Определяющие размеры и значения коэффициента ориентации некоторых геометрических тел

Геометрическое тело	Определяющий размер, L	Коэффициент ориентации, N
Вертикальные пластины	Высота	1,0
Горизонтальные пластины, рассеивающие тепловой поток: - вверх - вниз	Минимальный размер пластины	1,3 0,7

Приведённый коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды вычисляется по формуле (2.9).

Сформулированное дифференциальное уравнение (4.9) с соответствующими начальными (4.11) и граничными условиями (4.12) решено методом конечных разностей (см. раздел 3).

Для решения разностных аналогов исходного дифференциального уравнения использована схема расщепления по координатам (4.7) – (4.8) и уравнение (4.9) заменяется эквивалентной системой уравнений:

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^n + k_{i,j} \left(\frac{\alpha T_{i,j}^{n+1/2} T_{\text{вн}} - T_{i,j}^{n+1/2}}{h} + \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - (T_{i,j}^{n+1/2})^4}{h} \right) \right]; \quad (4.13)$$

$$c_v \rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left[W_{i,j}^n + k_{i,j} \left(\frac{\alpha T_{i,j}^{n+1} T_{\text{вн}} - T_{i,j}^{n+1}}{h} + \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - (T_{i,j}^{n+1})^4}{h} \right) \right]. \quad (4.14)$$

При решении полученных таким образом одномерных разностных уравнений, как уже было отмечено ранее, на каждом шаге по времени строится итерационный процесс для уточнения значений коэффициентов

зависящих от решения (преодоление нелинейности). В этом случае контролируется устойчивость вычислительного процесса по числу итераций, необходимых для получения требуемой точности. Точность итераций контролируется выполнением условия

$$\frac{\max_{i,j} |T_{i,j}^{s+1} - T_{i,j}^n|}{T_{i,j}^{s+1}} \leq \psi, \quad (4.15)$$

где ψ – заданная точность. Если это условие выполнено, то считают, что $T_{i,j}^{s+1} = T_{i,j}^{n+1}$.

Основные особенности конструкции разностного алгоритма для решения нелинейных дифференциальных задач на примере простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности подробно рассмотрены в [5].

Способ решения уравнений (4.13) и (4.14) аналогичен способу, рассмотренному в разделе 3.5.

Алгоритм программной реализации поставленной задачи представлен на рис. 4.5. Ниже приведён листинг программы и сделаны необходимые объяснения.

```

1  ! Программа для расчёта поля температур плоской конструкции радиатора
2  ! типа «пластина» по неявной разностной схеме с заданными граничными
3  ! условиями III рода (смешанный теплообмен) и внутренним источником
4  ! тепловыделения. Для расчёта используется схема расщепления по
5  ! координатам и метод прогонки.
6
7  ! Исходные данные и параметры
8  ! Mi, Mj – размер расчётной пространственной сетки
9  ! Tvn – температура внешней среды
10 ! dt, TIME_END – временной шаг и конечное время расчёта
11 ! psi – заданная точность вычислений
12 ! SIGMA – постоянная Стефана-Больцмана
13 ! L1x, L1y, Q – геометрические размеры и мощность источника
14 ! L2x, L2y, h – длина, ширина и толщина пластины
15 ! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала пластины
16 ! (удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
17 ! TN, TNP12, TNP1, TS – массивы хранения значений температуры на
18 ! (n), (n+1/2) и (n+1) – временном слое и дополнительный массив
19 ! температур для преодоления нелинейности
20 ! EPS – приведенный коэффициент черноты поверхности пластины и
21 ! внешней среды
22 ! k – коэффициент учёта теплообмена с боковых граней
23 ! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
24 ! W – удельная мощность источника тепловыделения
25 ! dx, dy – шаг пространственной сетки
26 ! TIME – текущее время расчёта
27 ! V – объём источника тепловыделения

```

```

28 ! kappa – коэффициент температуропроводности материала
29 ! delta – погрешность вычислений
30 ! Xm, Ym – координаты контрольной точки вычисления
31 ! X1, X2, Y1, Y2 – координаты границ источника тепловыделения
32 ! Mx, My – целочисленные координаты контрольной точки вычисления
33 ! Mx1 Mx2, My1, My2 – целочисленные координаты границ
34 ! источника тепловыделения
35 ! i, j, ijk, it – переменные для организации расчётных циклов, циклов записи
36 ! информации в файл, вывода графики на экран и цикла контроля за
37 ! сходимостью вычислительного процесса, соответственно
38 ! AA, BB, CC, FF – массивы вспомогательных коэффициентов
39 ! PP, QQ – массивы прогоночных коэффициентов
40
41 program plastina      ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
42 implicit none
43 ! Ввод исходных данных
44 integer, parameter :: Mj = 201
45 real(8), parameter :: Tvn = 298.0D0
46 real(8), parameter :: dt = 0.005D0, TIME_END = 200.0D0
47 real(8), parameter :: psi = 0.0005D0, SIGMA = 5.67D-8
48
49 real(8), parameter :: L1x = 10.0D-3, L1y = 15.9D-3, Q = 5.6D0
50 real(8), parameter :: L2x = 115.0D-3, L2y = 115.0D-3, h = 1.5D-3
51 real(8), parameter :: C = 900.0D0, RO = 2700.0D0, LAMDA = 210.0D0
52
53 ! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
54 ! для расчёта
55 real(8) :: TN(:, :), TNP12(:, :), TNP1(:, :), TS(:, :)
56 real(8) :: EPS(:, :), k(:, :), ALFA(:, :), W(:, :)
57 real(8) :: dx, dy, TIME, V, kappa, delta
58 real(8) :: Xm, Ym, X1, X2, Y1, Y2
59 real(8) :: Mx, My, Mx1, Mx2, My1, My2
60 integer :: i, j, ijk, it
61
62  $M_i = L_{2x} * (M_j - 1.0) / L_{2y} + 1.0$ 
63
64 allocate(TN(Mi,Mj), TNP12(Mi,Mj), TNP1(Mi,Mj), TS(Mi,Mj))
65 allocate(EPS(Mi,Mj), k(Mi,Mj), ALFA(Mi,Mj), W(Mi,Mj))
66
67 ! Вычисление пространственных шагов
68  $dx = L_{2x} / (M_i - 1.0)$ 
69  $dy = L_{2y} / (M_j - 1.0)$ 
70
71 ! Установка источника по середине подложки
72  $X_1 = (L_{2x} - L_{1x}) / 2.0$ ;  $X_2 = X_1 + L_{1x}$ 
73  $Y_1 = (L_{2y} - L_{1y}) / 2.0$ ;  $Y_2 = Y_1 + L_{1y}$ 
74
75 ! Привязка координат источника к координатной сетке
76  $M_{x1} = X_1 / dx + 1.0$ ;  $M_{x2} = X_2 / dx + 1.0$ 
77  $M_{y1} = Y_1 / dy + 1.0$ ;  $M_{y2} = Y_2 / dy + 1.0$ 
78

```

```

79 ! Вычисление коэффициента температуропроводности
80 kappa = LAMDA/(C*RO)
81
82 ! Расчёт объёма источника
83 V = L1x*L1y*h
84
85 ! Определение области тепловыделяющего элемента
86 do i = 1,Mi
87   do j = 1,Mj
88     ! Шаг внутри области источника
89     if (((i>=Mx1) .and. (i<=Mx2)) .and. ((j>=My1) .and. (j<=My2))) then
90       W(i,j) = Q/V
91       EPS(i,j) = 0.8
92       k(i,j) = 3.0
93     ! Шаг вне области источника
94     else
95       W(i,j) = 0.0
96       EPS(i,j) = 0.05
97       k(i,j) = 2.0
98     end if
99   end do
100 end do
101
102 ! Задание координат контрольной точки
103 Xm = 85.0D-3; Ym = 85.0D-3
104
105 ! Привязка координат контрольной точки к вычислительной сетке
106 Mx = Xm/dx + 1.0
107 My = Ym/dy + 1.0
108
109 ! Задание начального приближения
110 TNP12 = Tvн
111 TNP1 = Tvн
112 TS = Tvн
113 ALFA = 0.0
114 TIME = 0.0
115
116 ! Открытие файла для записи значений по времени
117 open(1,file = 'D:\graph\Ttime.dat')
118
119 ! ----- Организация вычислительного цикла
120 ijk = 0.0
121 DO WHILE(TIME<TIME_END)
122   ijk = ijk + 1.0
123
124   TN = TNP1
125
126   ! ----- Начало цикла итераций
127   delta = 1.0; it = 0.0
128   do while(delta>=psi)
129     delta = 0.0; it = it + 1.0

```

```

130
131     ! Прогонка вдоль оси ox
132     call prog_ox()
133
134     ! Прогонка вдоль оси oy
135     call prog_oy()
136
137     ! Пересчёт коэффициента теплоотдачи конвекцией
138     call unit_ALFA()
139
140     ! Расчёт погрешности вычислений
141     delta = abs(maxval(TS) – maxval(TN))/maxval(TS)
142
143     ! вывод промежуточных результатов (контроль за сходимостью)
144     ! if (mod(it,1)==0) write(*,*) it, "cxt = ", delta
145
146     ! ----- Окончание цикла итераций
147     end do
148
149     TNP1 = TS
150
151     ! Переход на следующий временной слой
152     TIME = TIME + dt
153
154     ! Вызов подпрограммы графического модуля и запись значений температуры
155     ! в контрольной точке в файл, через определенные промежутки
156     ! времени, соответственно
157     if (mod(ijk,200)==0) call DrawTemperature()
158     if (mod(ijk,10)==0) write(1,*) TIME, TNP1(Mx,My) – 273.0
159
160     END DO
161     ! ----- Окончание цикла вычислений
162
163     ! Закрытие файла для записи значений по времени
164     close(1)
165
166     ! Организация файла для записи массива температуры в конечный
167     ! момент времени
168     open(2,file = 'D:\graph\Tfield.dat')
169     do i = 1,Mi
170         do j = 1,Mj
171             write(2,"(E11.4,\)") TNP1(i,j) – 273.0
172         end do
173     write(2,*)
174     end do
175     close(2)
176
177     contains ! Определяет начало описания подпрограмм
178
179     ! Организация подпрограммы прогонки в направлении оси x
180

```

```

181 subroutine prog_ox()   ! Объявление имени подпрограммы
182 implicit none
183 real(8) :: AA(Mi), BB(Mi), CC(Mi), FF(Mi), PP(Mi), QQ(Mi), DEN(Mi)
184
185 AA = 1.0; BB = 1.0   ! так как ГУ III-го рода
186
187 do j = 1,Mj
188   ! Задание ГУ III-го рода на границе x=0 (i = 1)
189   PP(2) = 1.0
190   QQ(2) = dx/LAMDA*(ALFA(1,j)*(Tvn - TNP12(1,j)) + &
191           & EPS(1,j)*SIGMA*(Tvn**4.0 - TNP12(1,j)**4.0))
192
193   ! Начало цикла прямой прогонки
194   do i = 2,Mi-1
195     CC(i) = 2.0 + dx**2.0/kappa/dt
196     FF(i) = dx**2.0/kappa/dt*TN(i,j) + dx**2.0/LAMDA*0.5*(W(i,j) + &
197             & k(i,j)*(ALFA(i,j)*(Tvn - TNP12(i,j))/h + EPS(i,j)*SIGMA* &
198             & (Tvn**4.0 - TNP12(i,j)**4.0)/h))
199
200     ! Расчёт прогоночных коэффициентов
201     DEN(i) = CC(i) - AA(i)*PP(i)   ! Знаменатель
202     PP(i+1) = BB(i)/DEN(i)
203     QQ(i+1) = (FF(i) + AA(i)*QQ(i))/DEN(i)
204   ! Окончание цикла прямой прогонки
205   end do
206
207   ! Задание ГУ III-го рода на границе x=L2x (i = Mi)
208   TNP12(Mi,j) = (QQ(Mi) + dx/LAMDA*(ALFA(Mi,j)*(Tvn - TNP12(Mi,j)) + &
209               & EPS(Mi,j)*SIGMA*(Tvn**4.0 - TNP12(Mi,j)**4.0)))/(1.0 - PP(Mi))
210
211   ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
212   ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
213   do i = Mi-1,1,-1
214     TNP12(i,j) = PP(i+1)*TNP12(i+1,j) + QQ(i+1)
215   end do
216 end do
217 end subroutine prog_ox   ! Конец подпрограммы
218
219 ! Организация подпрограммы прогонки в направлении оси y
220
221 subroutine prog_oy()
222 implicit none
223 real(8) :: AA(Mj), BB(Mj), CC(Mj), FF(Mj), PP(Mj), QQ(Mj), DEN(Mj)
224
225 AA = 1.0; BB = 1.0   ! так как Г.У. III-го рода
226
227 do i = 1,Mi
228   ! Задание ГУ III-го рода на границе y=0 (j = 1)
229   PP(2) = 1.0
230   QQ(2) = dy/LAMDA*(ALFA(i,1)*(Tvn - TS(i,1)) + &
231           & EPS(i,1)*SIGMA*(Tvn**4.0 - TS(i,1)**4.0))

```

```

232
233 ! Начало цикла прямой прогонки
234 do j = 2,Mj-1
235   CC(j) = 2.0 + dy**2.0/kappa/dt
236   FF(j) = dy**2.0/kappa/dt*TNP12(i,j) + dy**2.0/LAMDA*0.5*(W(i,j) + &
237     & k(i,j)*(ALFA(i,j)*(Tvn - TS(i,j))/h + EPS(i,j)*SIGMA* &
238     & (Tvn**4.0 - TS(i,j)**4.0)/h))
239
240 ! Расчёт прогоночных коэффициентов
241   DEN(j) = CC(j) - AA(j)*PP(j) ! знаменатель
242   PP(j+1) = BB(j)/DEN(j)
243   QQ(j+1) = (FF(j) + AA(j)*QQ(j))/DEN(j)
244 ! Окончание цикла прямой прогонки
245 end do
246
247 ! Задание ГУ III-го рода на границе y=L2y (j = Mj)
248 TS(i,Mj) = (QQ(Mj) + dy/LAMDA*(ALFA(i,Mj)*(Tvn - TS(i,Mj)) + &
249   & EPS(i,Mj)*SIGMA*(Tvn**4.0 - TS(i,Mj)**4.0)))/(1.0 - PP(Mj))
250
251 ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
252 ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
253 do j = Mj-1,1,-1
254   TS(i,j) = PP(j+1)*TS(i,j+1) + QQ(j+1)
255 end do
256 end do
257 end subroutine prog_ou ! Конец подпрограммы
258
259 ! Организация подпрограммы пересчета конвективного
260 ! коэффициента теплоотдачи
261
262 subroutine unit_ALFA()
263 implicit none
264 real(8) :: L, N
265
266 L = 1.3; N = L2x
267
268 do i = 1,Mi
269   do j = 1,Mj
270     if (TS(i,j)<=Tvn) then
271       ALFA(i,j) = 0.0
272     else
273       ALFA(i,j) = N*(1.503 - 0.044*((TS(i,j) + Tvn)/2.0)**0.358)* &
274         & ((TS(i,j) - Tvn)/L)**0.25
275     end if
276   end do
277 end do
278 end subroutine unit_ALFA
279
280 ! Организация подпрограммы графического модуля
281
282 subroutine DrawTemperature()

```

```

283 use msflib
284 integer*2 :: xs, ys, xt, yt, integ2, N, dxt
285 integer*4 :: integ4, color(255)
286 real(8) :: Tmin, Tmax, TS, dT
287 integer :: k, Cmax, Cmin
288 integer :: x1,y1,x2,y2
289 type (xycoord) xy
290 character(3) file
291 character(10) file2, file3
292
293 ! инициализация шрифтов
294 integ2 = INITIALIZEFONTS()
295 integ2 = SETFONT('t"Arial"h12w8')
296
297 ! вывод текущего времени
298 write(file2,"(f10.2)") TIME
299 integ2 = setcolor(0)
300 integ2 = rectangle(3,0,0,200,20)
301 integ2 = setcolor(15)
302 call moveto(5,5,xy)
303 call outgtxt(file2)
304
305 ! вывод показания контрольной точки
306 write(file3,"(f10.3)") TNP1(Mx,My)
307 integ2 = setcolor(0)
308 integ2 = rectangle(100,0,0,200,20)
309 integ2 = setcolor(15)
310 call moveto(100,5,xy)
311 call outgtxt(file3)
312
313 ! формирование таблицы цветов
314 do k=1,51
315   color(k) = RGBToInteger(255-5*k,0,255)
316   color(k+51) = RGBToInteger(0,5*k,255)
317   color(k+51*2) = RGBToInteger(0,255,255-5*k)
318   color(k+51*3) = RGBToInteger(5*k,255,0)
319   color(k+51*4) = RGBToInteger(255,255-5*k,0)
320 end do
321
322 xs = 300; ys = 100 ! исходная точка рисования поля температур
323 Cmin = 1; Cmax = 255; ! миним. и макс. номера цветов
324 Tmin = minval(TNP1); Tmax = maxval(TNP1) ! миним. и макс. температуры
325
326 ! отображение поля температур
327 do i = 1,Mi
328   xt = xs+i
329   do j = 1,Mj
330     yt = ys+j
331     k = (TNP1(i,Mj-j+1)-Tmin)*(Cmax-Cmin)/(Tmax-Tmin)+Cmin
332     integ4 = SetPixelRGB(xt,yt,color(k))
333   end do

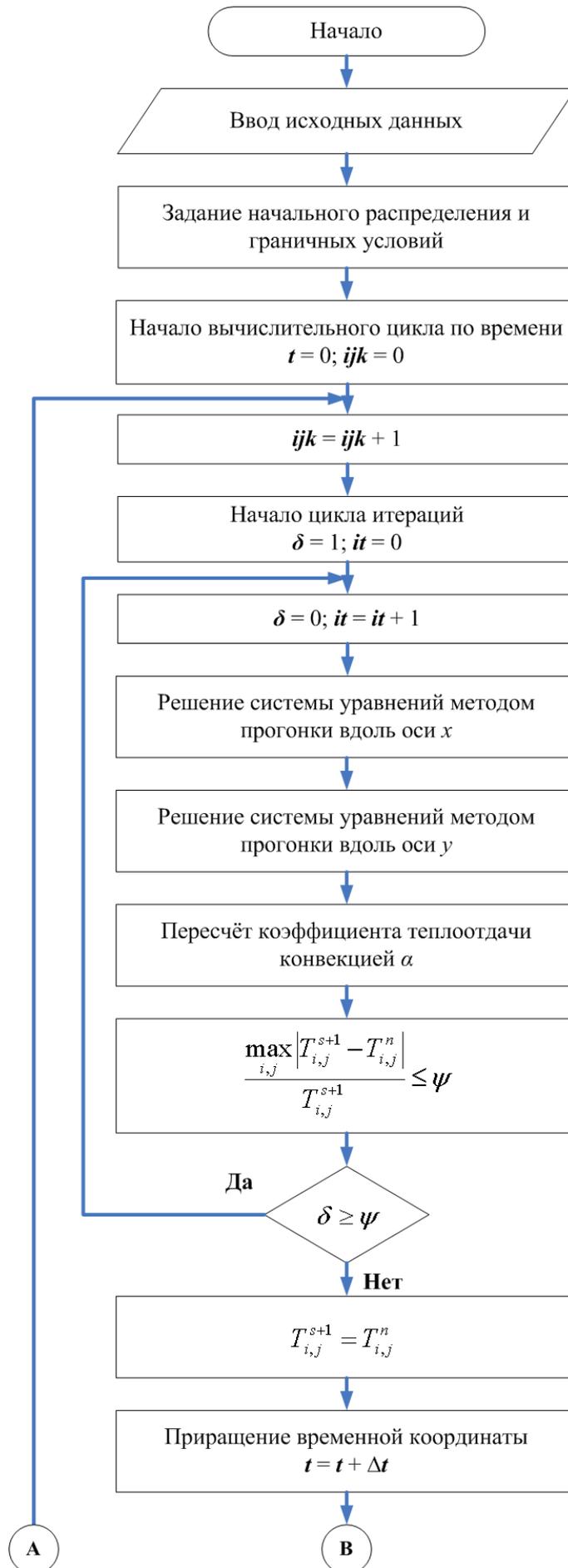
```

```

334  end do
335
336  ! очистка шкалы
337  integ2 = setcolor(0)
338  integ2 = rectangle(3,0,350,1000,400)
339
340  ! отображение шкалы температур
341  x1 = 20; y1 = 350; y2 = y1+20
342  do k = 1,Cmax
343    x2 = x1+3
344    integ4 = setcolorRGB(color(k))
345    integ2 = rectangle(3,x1,y1,x2,y2)
346    x1 = x2
347  end do
348
349  ! отображение значений шкалы
350  N = 15
351  integ2 = setcolor(15)
352  dxt = (3*Cmax-10)/(N-1)
353  dT = (Tmax-Tmin)/(N-1)
354  TS = 0.0
355  xt = x2+10; yt = y2+20
356  do k = 1,N
357    TS = (k-1)*dT+Tmin
358    xt = (k-1)*dxt+20
359    write(file,"(i3)") int2(TS)
360    call moveto(xt,yt,xy)
361    call outgtext(file)
362  end do
363  end subroutine DrawTemperature
364
365  end program plastina          ! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ

```

Главной особенностью данной модели является то, что в соответствии со схемой расщепления протекание многомерного (в данном случае двумерного) процесса распространения тепла на каждом временном шаге представляется как результат последовательной реализации соответствующих одномерных процессов (рис. 4.6). Каждый из этих процессов начинается от распределения температурного поля полученного после окончания предыдущего одномерного процесса.



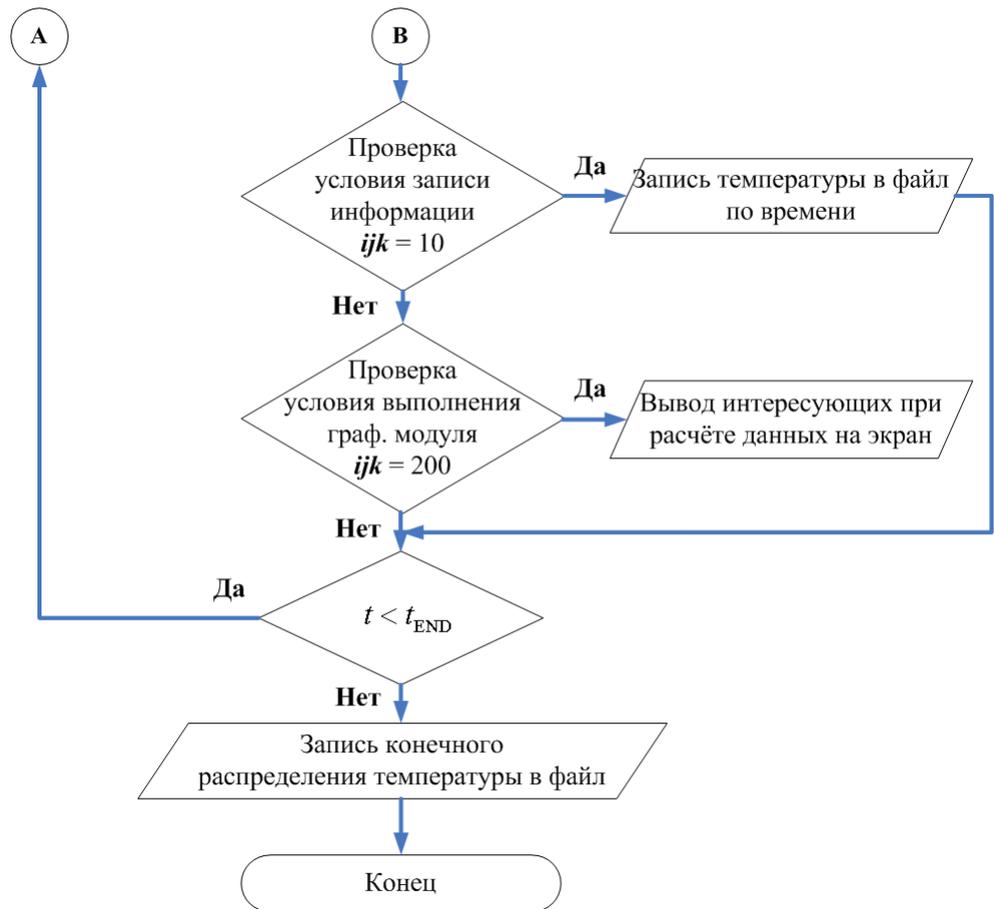


Рис. 4.5 – Алгоритм программной реализации расчёта двумерного поля температур

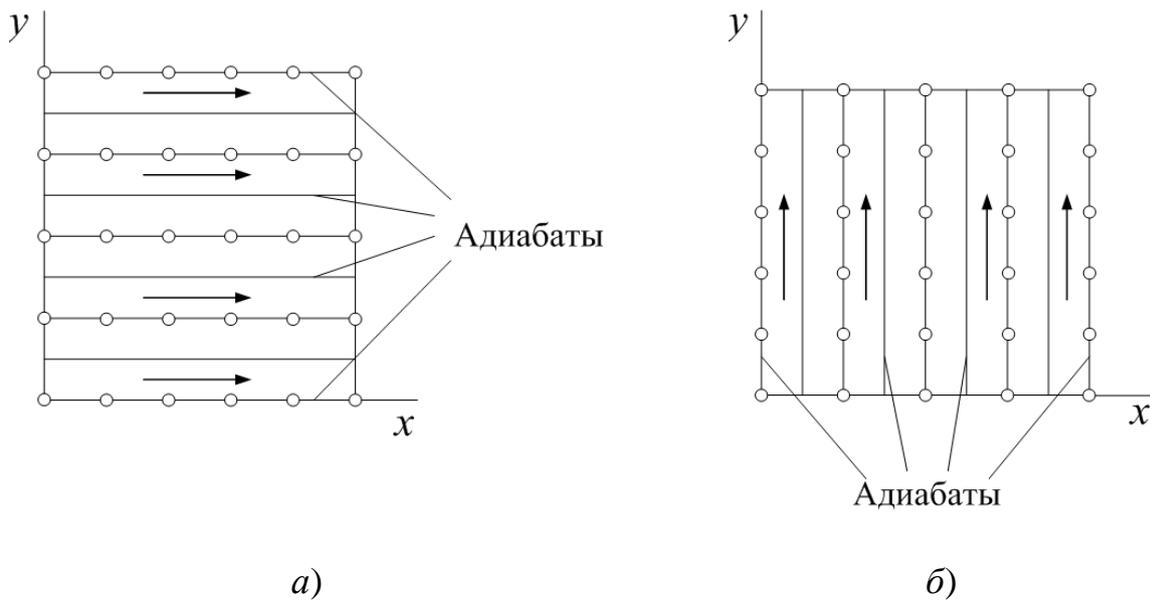


Рис. 4.6 – Визуализация схемы расщепления по координатам (локально-одномерной)

Реализация рассмотренной для двумерного случая локально-одномерной схемы осуществляется при помощи вложенных циклов:

- в направлении оси x

```

! Внешний цикл
do j = 1,Mj

    ! Внутренний (или вложенный) цикл
    do i = 2,Mi-1
    end do
    do i = Mi-1,1,-1
    end do

end do

```

- в направлении оси y

```

! Внешний цикл
do i = 1,Mi

    ! Внутренний цикл
    do j = 2,Mj-1
    end do
    do j = Mj-1,1,-1
    end do

end do

```

Пояснить работу вложенных циклов можно следующим образом. В первом случае, фиксируя направление вдоль оси y (к примеру, $j=1$) «прогоняем» вдоль оси x . Таким образом, определив неизвестные значения температуры на данном пространственном слое, переходим к следующему ($j=2$) слою.

Результат численных расчётов представлен на рис. 4.7.

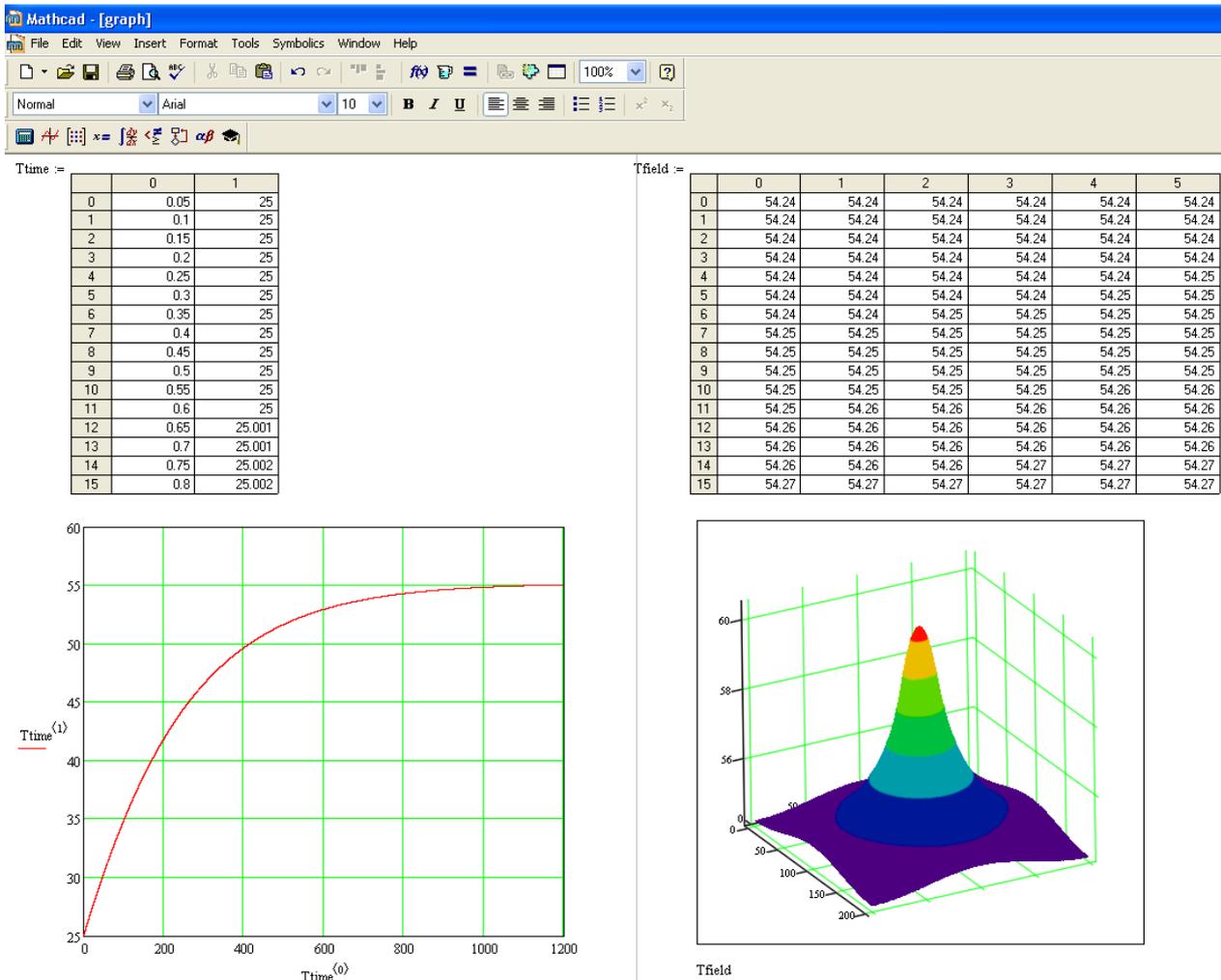


Рис. 4.7 – Результат численных расчётов температурного поля плоского радиатора типа «пластина»

4.2.2 Тестирование математической модели и метода решения плоской задачи теплопереноса

Для проверки адекватности реализованной в п. 4.2.1 математической модели и метода решения использованы полученные нами экспериментальные данные [10]. В ходе ряда экспериментов в течение 200 секунд работы реального узла РЭС в типичных условиях эксплуатации термопарой измерялась температура (обозначим ее T_3) фиксированных точек на его поверхности (согласно рис. 4.8).

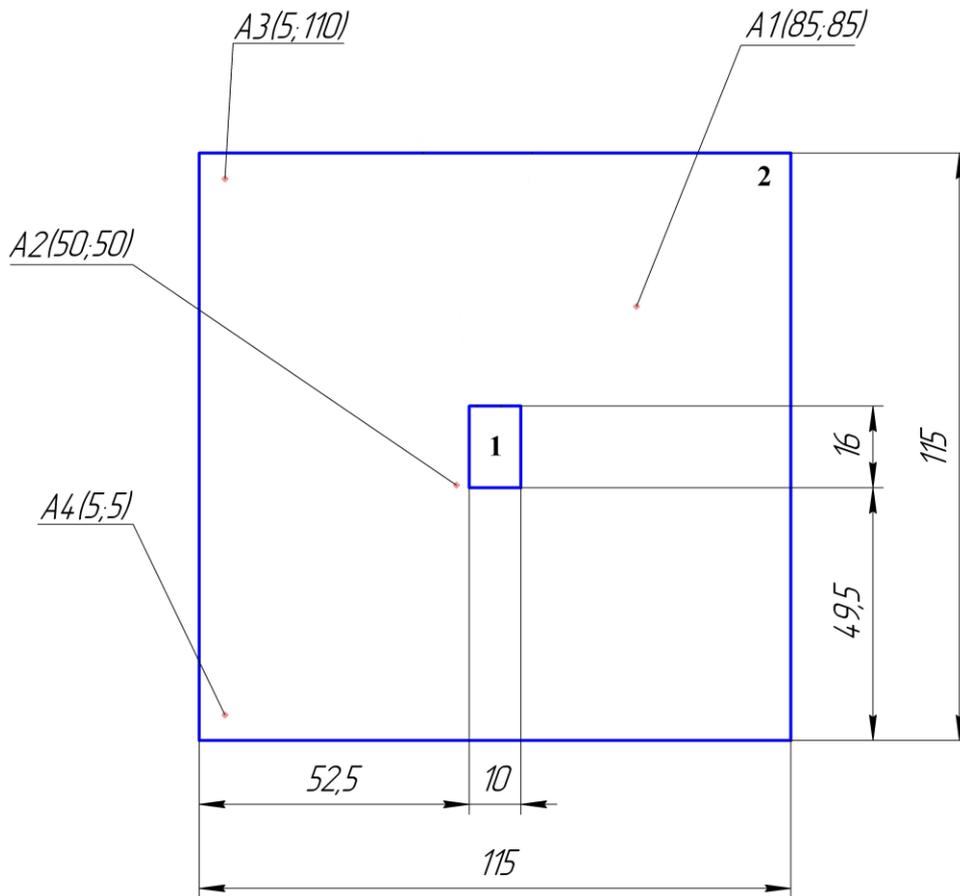


Рис. 4.8 – Геометрия области эксперимента (вид сверху): 1 – источник тепловыделения; 2 – основание (пластина); A1, A2, A3, A4 – точки измерения температуры термопарой

В эксперименте использовался мультиметр цифровой M890F (S-Line) 2006 года выпуска и поставляемая в комплекте термопара, проградуированная под данный измерительный прибор. Для снижения теплового сопротивления: «ЭРЭ-пластина» и «термопара-пластина», применяется термопаста марки АлСил-3.

Результаты измерения температуры и численных расчётов приведены в таблице 4.2 и на графиках (рис. 4.9 – 4.12).

Таблица 4.2 – Экспериментальные значения температуры узла РЭС

Время, с	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
A1(85;85)	25	27	29	30	32	33	34	35	36	37	38
A2(50;50)	25	29	31	33	34	36	37	38	39	40	41
A3(5;110)	25	26	28	30	31	33	34	35	36	37	37
A4(5;5)	25	26	27	28	30	31	32	33	34	34	35

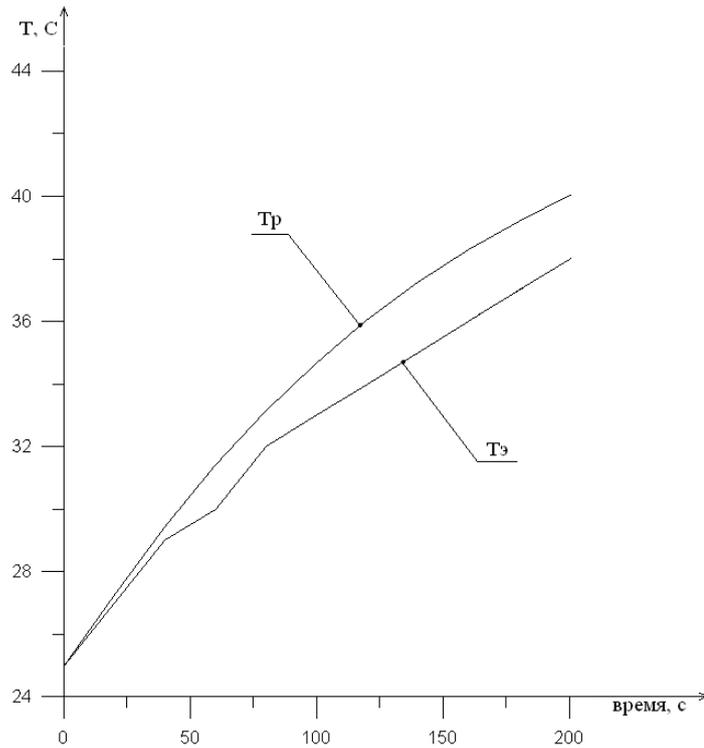


Рис. 4.9 – График экспериментальной и расчётной температур в точке A1: $T_{\text{э}}$ – кривая температуры эксперимента; $T_{\text{р}}$ – кривая температуры вычисленной

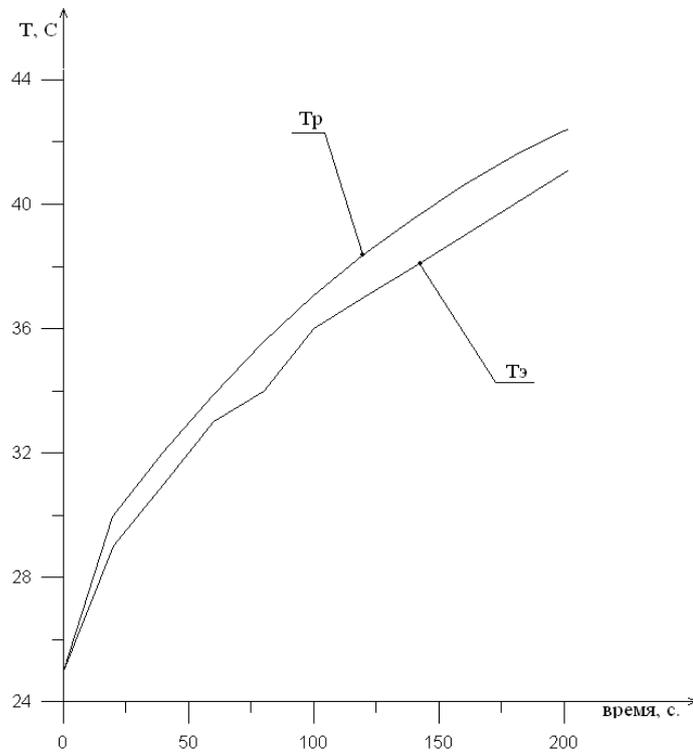


Рис. 4.10 – График экспериментальной и расчётной температур в точке A2: $T_{\text{э}}$ – кривая температуры эксперимента; $T_{\text{р}}$ – кривая температуры вычисленной

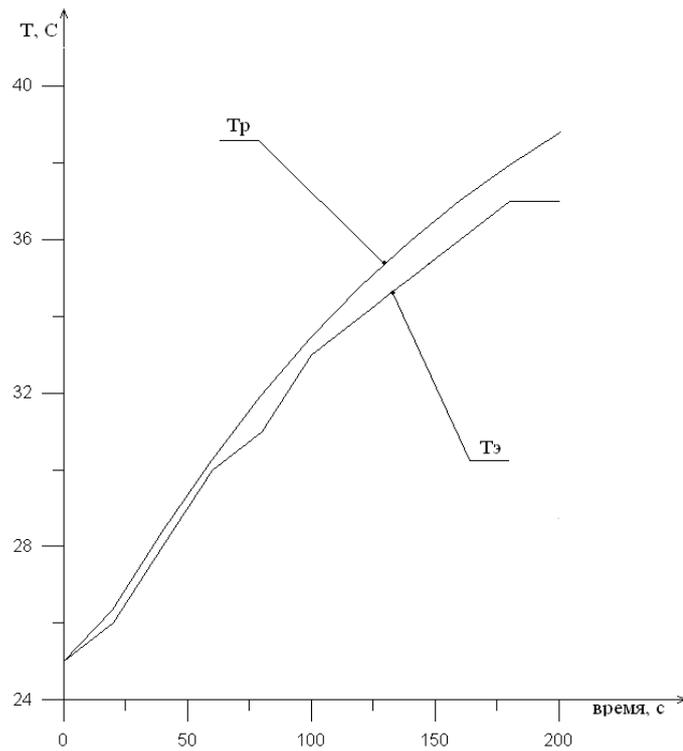


Рис. 4.11 – График экспериментальной и расчётной температур в точке А3: Тэ – кривая температуры эксперимента; Тр – кривая температуры вычисленной

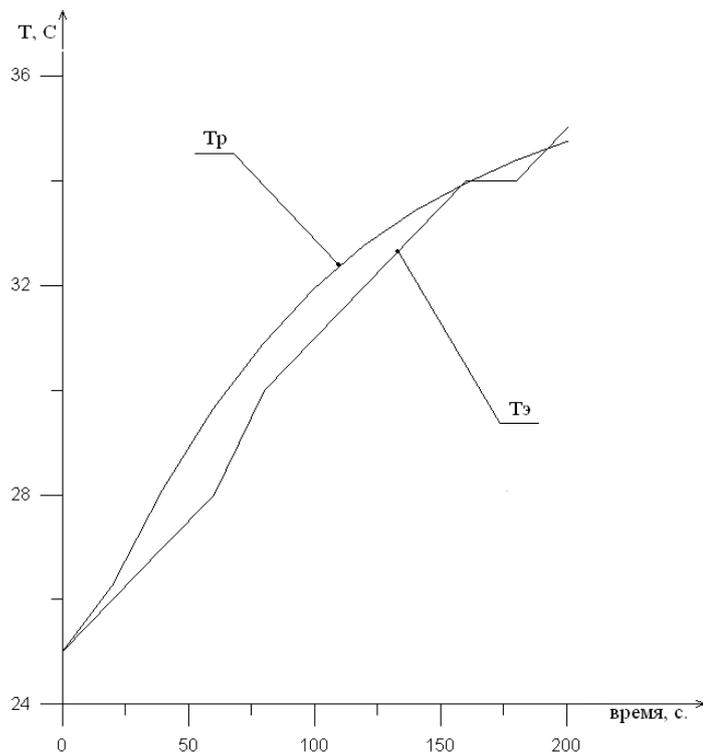


Рис. 4.12 – График экспериментальной и расчётной температур в точке А4: Тэ – кривая температуры эксперимента; Тр – кривая температуры вычисленной

Сопоставление результатов численного моделирования по пространственной модели с экспериментальными данными показало, что их расхождение не превышает плюс-минус 5 °С. Т.е. отклонение теоретических результатов от опытных данных не превышает плюс-минус 10 % или другими словами укладывается в диапазон погрешности (от 10 до 15 %) математической модели.

На основании проделанной работы можно сказать, что:

1. Решена двумерная нестационарная нелинейная задача теплопереноса в плоском радиаторе типа «пластина» с учетом конвективного и лучистого теплообмена с внешней средой;

2. Проведено сравнение полученных результатов по температурам в фиксированных точках области решения и получено хорошее согласование с экспериментальными данными, что свидетельствует о достоверности результатов численного моделирования температурных полей в таких конструкциях;

3. Полученная и апробированная таким образом двумерная математическая модель может быть применена в дальнейших расчётах.

Заметим, что конечной целью математического моделирования температурных полей РЭС является обеспечение нормального теплового режима, при котором выполняются следующие условия:

– температура каждого ЭРЭ не превышает значений, заданных в технических условиях;

– надёжность проектируемого изделия остаётся не ниже заданной в техническом задании.

Вследствие этого, вопросы расчёта надёжности проектируемого изделия являются неотъемлемой частью теплофизического моделирования тепловых режимов РЭС.

5 РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ ПО ВНЕЗАПНЫМ ОТКАЗАМ НА ОСНОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЕЧАТНОГО УЗЛА РЭС

5.1 Основные понятия и определения теории надёжности

Пригодность любого изделия к использованию по назначению определяется качеством изделия, которое оценивается совокупностью свойств, присущих изделию. Одним из таких свойств является надёжность.

Надёжность по ГОСТ 27.002-89 [11] – это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надёжность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость или определенные сочетания этих свойств.

Безотказность называют свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки.

Долговечность называют свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтпригодность называют свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путём технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость называют свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способности объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования.

Уровень надёжности зависит от того, в каком состоянии находится объект. При этом выделяют следующие его состояния:

Исправное состояние (исправность) – это состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации (далее по тексту документации).

Неисправное состояние (неисправность) – это состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований документации.

Работоспособное состояние (работоспособность) – это состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих

способность выполнять заданные функции, соответствует требованиям документации.

Неработоспособное состояние (неработоспособность) – это состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям документации.

Для сложных объектов возможно деление их неработоспособных состояний. Из множества таких состояний выделяют частично неработоспособные состояния, при которых объект способен частично выполнять требуемые функции [12].

Изменение состояния РЭС происходит непрерывно под действием процессов старения, а также при появлении дефектов, повреждений и отказов.

Дефект – это каждое отдельное несоответствие изделия или его элемента установленным требованиям.

Повреждение – это событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении его работоспособного состояния.

Отказ – это событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта. В зависимости от характерных особенностей отказы подразделяют на следующие типы: *ресурсный, независимый, внезапный, постепенный, сбой* и др. отказы. Более подробно остановимся лишь на внезапном отказе.

Внезапный отказ – это отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта. Внезапные отказы являются результатом скрытых недостатков технологии производства или скрытых изменений параметров, накапливающихся во время эксплуатации.

Типичными критериями отказов могут быть [12]:

- прекращение выполнения изделием заданных функций;
- снижение качества функционирования (мощности, точности, чувствительности и других параметров) за пределы допустимого уровня;
- искажения информации (неправильные решения) на выходе изделий, имеющих в своём составе ЭВМ или другие устройства дискретной техники, из-за сбоев (отказов сбойного характера);
- внешние проявления, свидетельствующие о наступлении или предпосылках наступления неработоспособного состояния (шум, стук в механических частях изделия, вибрация, перегрев и прочие).

5.2 Основные сведения о расчёте надёжности

Расчёт надёжности – это процедура определения значений показателей надёжности объекта с использованием методов, основанных на:

- справочных данных о надёжности элементов объекта;

- данных о надёжности объектов – аналогов;
- данных о режиме работы элементов объекта;
- и другой информации, имеющейся к моменту расчёта.

Общие правила расчёта надёжности, требования к методикам этих расчётов и к оформлению их результатов регламентированы ГОСТ 27.301-95 [13].

Расчёт надёжности объекта может иметь своими целями:

- обоснование количественных требований по надёжности;
- проверку выполнимости установленных требований;
- сравнительный анализ надёжности вариантов схемно-конструктивного построения объекта и обоснование выбора рационального варианта;
- определение достигнутого (ожидаемого) уровня надёжности;
- обоснование и проверку эффективности мер по доработке конструкции, технологии изготовления, системы технического обслуживания и ремонта объекта, направленных на повышение его надёжности;
- решение различных оптимизационных задач, в которых показатели надёжности выступают в роли целевых функций, управляемых параметров или граничных условий;
- проверку соответствия достигнутого (ожидаемого) уровня надёжности объекта установленным требованиям (контроль надёжности).

Расчёт надёжности в общем случае представляет собой процедуру последовательного, поэтапного оценок показателей надёжности по мере поступления дополнительной информации о конструкции и технологии изготовления объекта, его эксплуатации, системе технического обслуживания, ремонта и др. и может включать:

- идентификацию объекта;
- определение целей и задач расчёта, номенклатуры и требуемых значений рассчитываемых показателей надёжности;
- выбор метода(ов) расчёта, адекватного(ых) особенностям объекта, целям расчёта, наличию необходимой информации;
- составление расчётных моделей для каждого показателя надёжности;
- получение и предварительную обработку исходных для расчёта данных, вычисление значений показателей надёжности объекта и, при необходимости, их сопоставление с требуемыми показателями;
- оформление, представление и защиту результатов расчёта.

Идентификация объекта включает анализ доступной информации о факторах, определяющих его надёжность. Могут анализироваться:

- назначение, область применения и функции объекта;
- критерии качества функционирования, отказов и предельных состояний, возможные последствия отказов (достижения предельного состояния) объекта;

- состав и структура объекта, взаимодействие и уровни входящих в него элементов, возможность перестройки структуры и (или) алгоритмов функционирования объекта при отказах отдельных его элементов;

- наличие, виды и способы резервирования, используемые в объекте;
- типовые условия эксплуатации объекта;
- система технического обслуживания и ремонта объекта, характеризующаяся видами, периодичностью, организационными уровнями, способами выполнения, техническим оснащением работ по его техническому обслуживанию и ремонту;

- распределение функций между операторами и средствами автоматического диагностирования (контроля) и управления объектом, виды и характеристики человеко-машинных интерфейсов, определяющих параметры работоспособности и надёжности работы операторов;

- уровень квалификации персонала;
- качество программных средств, применяемых в объекте;
- планируемые технология и организация производства при изготовлении объекта.

Методы расчёта надёжности подразделяют по составу рассчитываемых показателей надёжности и по основным принципам расчёта.

По составу рассчитываемых показателей различают методы расчёта:

- безотказности;
- ремонтпригодности;
- долговечности;
- сохраняемости;
- комплексных показателей надёжности (методы расчёта коэффициентов готовности, технического использования, сохранения эффективности и прочие).

По основным принципам расчёта свойств, составляющих надёжность, или комплексных показателей надёжности объектов различают [12]:

- методы прогнозирования;
- структурные методы расчёта;
- физические методы расчёта надёжности.

Исходными данными для расчёта надёжности объекта могут быть:

- априорные данные о надёжности по опыту применения объекта в аналогичных или близких условиях;

- оценки показателей надёжности, полученные экспериментальным или расчётным способом;

- расчётные и (или) экспериментальные оценки параметров нагруженности составных частей и элементов конструкций.

Источниками исходных данных для расчёта надёжности объекта могут стать:

- стандарты и технические условия;
- справочники по надёжности элементов, свойствам материалов и другие информационные материалы;

- статистические данные (базы данных) о надёжности объектов-аналогов, входящих в их состав элементов, о параметрах операций технического обслуживания и ремонта, собранные в процессе их разработки, изготовления, испытаний и эксплуатации;

- результаты иных расчётов объекта и его составных частей, включая расчёты показателей надёжности составных частей объекта.

Степень адекватности моделей и методов расчёта надёжности оценивают путём:

- сопоставления результатов расчёта и экспериментальной оценки показателей надёжности объектов-аналогов, для которых применялись аналогичные модели и методы расчёта;

- исследования чувствительности моделей к нарушениям принятых при их построении допущений и предположений, а также к погрешностям исходных данных для расчёта;

- экспертизы и апробации применяемых моделей и методов.

5.3 Ориентировочный расчёт надёжности

Нормирование надёжности – это установление в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации количественных и качественных требований к надёжности. Оно производится на стадиях составления технического задания и эскизного проектирования и включает [12]:

- выбор номенклатуры нормируемых показателей надёжности;
- технико-экономическое обоснование значений показателей надёжности объекта и его составных частей;
- задание требований к точности и достоверности исходных данных;
- формулирование критериев отказов, повреждений и предельных состояний;
- задание требований к методам контроля надёжности на всех этапах жизненного цикла объекта.

Мы остановимся лишь на нормировании значений величин вероятности безотказной работы и интенсивности отказов. Такое нормирование иногда называют ориентировочным расчётом надёжности. На стадии составления технического задания обоснованные нормы этих показателей надёжности можно задать, опираясь на информацию о достигнутых показателях надёжности у изделий-прототипов. Если прототипы не выявлены, то ориентировочно задают число узлов (блоков и т.п.) N , значения числа элементов n_i в узлах (блоках и т.п.), и их интенсивности отказов λ_j . Вероятность безотказной работы изделия (системы) рассчитывают по формуле

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_C t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i t\right), \quad (5.1)$$

где λ_i – интенсивность отказов i -го узла (блока и т.п.), с числом элементов расчёта надёжности n_i , равная:

$$\lambda_i = \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J, \quad (5.2)$$

а λ_C – интенсивность отказов изделия (системы),

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^N \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J. \quad (5.3)$$

Средняя наработка до отказа изделия определяется:

$$t_{1C} = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J\right)}. \quad (5.4)$$

Тогда

$$P_C(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^N \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J\right). \quad (5.5)$$

Условия эксплуатации учитывают с помощью поправочных коэффициентов следующим образом:

$$\lambda_J = \lambda_{HJ} k_\lambda, \quad (5.6)$$

где λ_{HJ} – интенсивность отказов элементов в лабораторных условиях работы;

$$k_\lambda = k_{\lambda 1} k_{\lambda 2} k_{\lambda 3}. \quad (5.7)$$

Коэффициенты из (5.7) учитывают воздействие на РЭС: $k_{\lambda 1}$ – ударов и вибраций; $k_{\lambda 2}$ – температуры и влажности; $k_{\lambda 3}$ – пониженного атмосферного давления. Их значения приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Значения поправочных коэффициентов $k_{\lambda 1}$, $k_{\lambda 2}$, $k_{\lambda 3}$ для расчёта интенсивности отказов [12]

Условия эксплуатации	$k_{\lambda 1}$	Влажность, %	Температура, °C	$k_{\lambda 2}$	Высота, км	$k_{\lambda 3}$
Лабораторные	1,00	60-70	20 – 40	1,0	0-2	1,0-1,5
Стационарные	1,07				2-5	1,1-1,14
Корабельные	1,37	90-98	20 – 25	2,0	5-8	1,16-1,2
Автофургонные	1,46				8-15	1,25-1,3
Железнодорож.	1,54	90-98	30 – 40	2,5	15-25	1,35-1,38
Самолётные	1,65				25-40	1,4-1,45

5.4 Окончательный расчёт надёжности невосстанавливаемой РЭС с учётом режимов работы ЭРЭ

Окончательный расчёт надёжности с учётом режимов работы ЭРЭ проводится на стадии технического проектирования, когда эти режимы рассчитаны или измерены. В расчёте принимается, что отказ любого элемента приводит к отказу всего изделия. Чаще всего, помимо общих воздействий, учтённых в ориентировочном расчёте надёжности, в окончательном расчёте с помощью поправочного коэффициента a_J учитывают температуру среды T_{CJ} , окружающую каждый элемент, и отличие электрической нагрузки каждого элемента H_J от номинальной H_{HJ} . Отношение H_J к H_{HJ} называют коэффициентом нагрузки:

$$K_J = \frac{H_J}{H_{HJ}}. \quad (5.8)$$

В качестве нагрузки принимается электрический параметр, превышение которого чаще всего является причиной отказа данного элемента. У резисторов – это мощность, у конденсаторов – это напряжение, в моточных изделиях – это может быть плотность тока и т.д. Некоторые элементы могут характеризоваться несколькими коэффициентами нагрузки. Если точные значения коэффициентов нагрузки ЭРЭ получить затруднительно, то из таблицы 5.2 берут рекомендуемые значения коэффициентов электрической нагрузки элементов и используют их в окончательном расчёте надёжности.

Значения поправочных коэффициентов:

$$a_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_{HJ}}, \quad (5.9)$$

для различных ЭРЭ, температур $T_{ср}$ и коэффициентов нагрузки K_J приведены в Приложении 2.

Таблица 5.2 – Рекомендуемые значения коэффициентов электрической нагрузки ЭРЭ [12]

Наименование элемента, режим работы	Рекомендуемое значение K_J	Допустимое значение K_J
Транзисторы, активный режим	0,5-0,6	0,8
Транзисторы, ключевой режим	0,6-0,8	1,0
Резисторы, цепи переменного и постоянного тока	0,2-0,5	0,6
Резисторы, импульсный режим	0,4-0,6	0,8
Конденсаторы	0,2-0,6	0,8
Интегральные схемы	0,5-1,0	1,0
Переключатели (тумблеры, кнопочные, галетные и др.)	0,2-0,4	0,5
Цифровые индикаторы	0,5-0,7	0,8

Методику ориентировочного и окончательного расчётов надёжности невосстанавливаемого объекта покажем на примере некоторого печатного узла РЭС, режим работы элементов которого известны. Под термином **невосстанавливаемый объект** понимается объект, для которого в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния не предусмотрено нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документацией. А под **восстановлением** – процесс перевода объекта в работоспособное состояние из неработоспособного состояния.

Пример. Эксплуатация рассматриваемого печатного узла РЭС происходит на высоте 2 км при температуре внешней среды 40 °С и относительной влажности 60 %. С учётом этого в таблице 5.3 приведён состав элементов, их количество и режим работы. Требуется определить интенсивность отказов λ_c , среднюю наработку до отказа изделия t_{1c} и вероятность безотказной работы изделия $P_c(t)$ в течение наработки $t=100$ ч.

Решение. Для каждого типа элементов из Приложения 2 определим средние значения интенсивностей отказов в номинальном режиме $\lambda_{нл}$ и поместим их в четвёртый столбец таблицы 5.3. Интенсивности отказов ЭРЭ с учётом условий их эксплуатации λ_j определим по формулам (5.6), (5.7). Далее из таблицы 5.1 для рассматриваемого случая определим значения поправочных коэффициентов: $k_{\lambda 1}=1,07$ (он учитывает суммарное воздействие вибраций и ударов на стационарную аппаратуру); $k_{\lambda 2}=1,0$ (эксплуатация при

температуре внешней среды 40 °С и относительной влажности 60 %); $k_{\lambda 3}=1,1$ (для высоты 2 км). Таким образом, запишем:

$$k_{\lambda} = k_{\lambda 1} k_{\lambda 2} k_{\lambda 3} = 1,07 \cdot 1,0 \cdot 1,1 = 1,177 ;$$

$$\lambda_J = \lambda_{HJ} k_{\lambda} = 1,177 \cdot \lambda_{HJ} .$$

Из последнего соотношения, вычислим λ_J для всех типов ЭРЭ и поместим эти данные в пятый столбец таблицы 5.3. По данным третьего и пятого столбцов определим шестой столбец таблицы. Ориентировочное значение интенсивности отказов $\lambda_{C\text{ OP}}$ узла РЭС найдём по формуле (5.3), т. е. суммированием значений величин в шестом столбце сводной таблицы:

$$\lambda_{C\text{ OP}} = \sum_{J=1}^{n_i} n_{iJ} \lambda_J = \sum_{J=1}^5 n_{iJ} \lambda_J = (0,024 + 2,61 + 0,276) \cdot 10^{-6} = 2,91 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч.}$$

В соответствии с формулой (5.4) определим среднее время безотказной работы рассматриваемого узла:

$$t_{1C} = \frac{1}{\lambda_{C\text{ OP}}} = \frac{10^6}{2,91} = 343600 \text{ ч.}$$

Вероятность безотказной работы в течение наработки $t=100$ ч определим по формуле (5.1):

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_{C\text{ OP}} t) = \exp(-2,91 \cdot 10^{-6} \cdot 100) = 0,999709 .$$

Оценим теперь основные показатели надёжности узла РЭС с учётом режима работы его ЭРЭ, приведённых в седьмом и восьмом столбцах таблицы 5.3. Определение температуры элементов проводим на основании расчёта температурного поля рассматриваемой конструкции по методике, изложенной в разделах 3, 4. Значения мощностей тепловыделяющих ЭРЭ необходимо получить предварительно, путём анализа схемы электрической принципиальной в любом доступном пакете схемотехнического моделирования (*Micro-CAP*, *Or-CAD*, *P-Spice* и т. д.). К моменту расчёта температурного поля также необходимо иметь данные о размещении ЭРЭ. Топологию печатного узла РЭА можно провести в *P-CAD*.

На рис. 5.1. представлена геометрия области решения, приводится листинг программы расчёта.

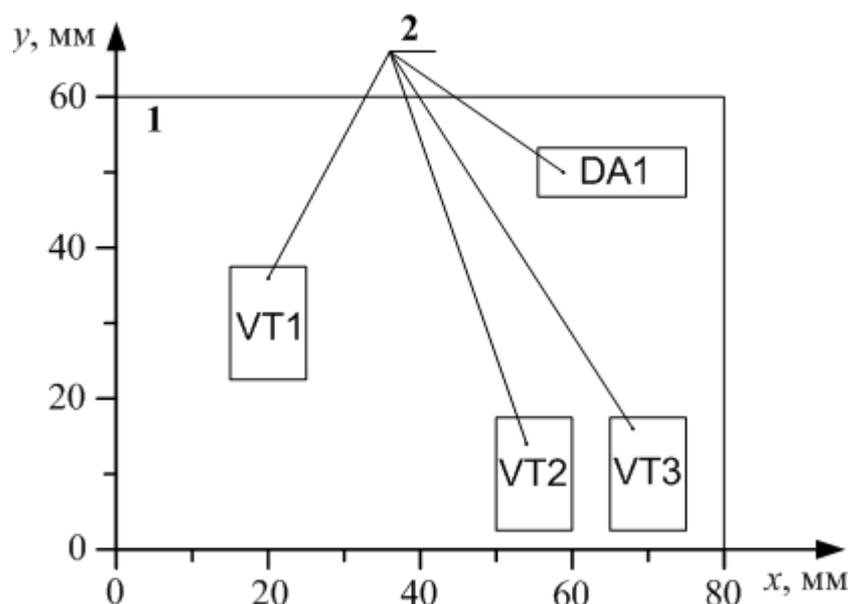


Рис. 5.1 – Геометрия области решения (вид сверху): 1 – основание (печатная плата); 2 – тепловыделяющие ЭРЭ

366 ! Программа расчёта поля температур плоской конструкции узла РЭС
 367 ! по неявной разностной схеме с заданными граничными условиями III рода
 368 ! (смешанный теплообмен) и внутренними источниками тепловыделения.
 369 ! Для расчёта используется схема расщепления по координатам
 370 ! и метод прогонки.
 371
 372 ! Исходные данные и параметры
 373 ! M_i , M_j – размер расчётной пространственной сетки
 374 ! T_{vn} – температура внешней среды
 375 ! TIME_END – конечное время расчёта
 376 ! dt – временной шаг
 377 ! ψ – заданная точность вычислений
 378 ! SIGMA – постоянная Стефана-Больцмана
 379 ! LVT1x, LVT1y, QVT1 – геометрические размеры и мощность элемента VT1
 380 ! LVT2x, LVT2y, QVT2 – геометрические размеры и мощность элемента VT2
 381 ! LVT3x, LVT3y, QVT3 – геометрические размеры и мощность элемента VT3
 382 ! LDA1x, LDA1y, QDA1 – геометрические размеры и мощность элемента DA1
 383 ! L2x, L2y, h – длина, ширина и толщина основания (печатной платы)
 384 ! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала печатной
 385 ! платы (удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
 386 ! TN, TNP12, TNP1, TS – массивы хранения значений температуры на
 387 ! (n), (n+1/2) и (n+1) – временном слое и дополнительный массив
 388 ! температур для преодоления нелинейности
 389 ! W – удельная мощность тепловыделения ЭРЭ
 390 ! K – коэффициент учёта теплообмена с боковых граней
 391 ! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
 392 ! EPS – приведенный коэффициент черноты поверхности пластины и
 393 ! внешней среды
 394 ! XVT11, XVT12, YVT11, YVT12, XVT1, YVT1 – координаты VT1

```

395 ! XVT21, XVT22, YVT21, YVT22, XVT2, YVT2 – координаты VT2
396 ! XVT31, XVT32, YVT31, YVT32, XVT3, YVT3 – координаты VT3
397 ! XDA11, XDA12, YDA11, YDA12, XDA1, YDA1 – координаты DA1
398 ! dx, dy – шаг пространственной сетки
399 ! TIME – текущее время расчёта
400 ! kappa – коэффициент температуропроводности материала печатной платы
401 ! delta – погрешность вычислений
402 ! MXVT11, MXVT12, MYVT11, MYVT12 – целочисленные координаты VT1
403 ! MXVT21, MXVT22, MYVT21, MYVT22 – целочисленные координаты VT2
404 ! MXVT31, MXVT32, MYVT31, MYVT32 – целочисленные координаты VT3
405 ! MXDA11, MXDA12, MYDA11, MYDA12 – целочисленные координаты DA1
406 ! i, j, ijk, it – переменные для организации расчётных циклов, вывода графики
407 ! и цикла контроля за сходимостью вычислительного
408 ! процесса, соответственно
409
410 program uzel_rea           ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
411 implicit none
412
413 ! Ввод исходных данных и параметров
414 integer, parameter :: Mj = 201
415 real(8), parameter :: Tvn = 313.0D0
416 real(8), parameter :: dt = 0.005D0, TIME_END = 200.0D0
417 real(8), parameter :: psi = 0.0005D0, SIGMA = 5.67D-8
418
419 real(8), parameter :: LVT1x = 10.0D-3, LVT1y = 16.0D-3, QVT1 = 0.5D0
420 real(8), parameter :: LVT2x = 10.0D-3, LVT2y = 16.0D-3, QVT2 = 0.5D0
421 real(8), parameter :: LVT3x = 10.0D-3, LVT3y = 16.0D-3, QVT3 = 0.5D0
422 real(8), parameter :: LDA1x = 19.5D-3, LDA1y = 6.5D-3, QDA1 = 0.5D0
423 real(8), parameter :: L2x = 80.0D-3, L2y = 60.0D-3, h = 1.5D-3
424 real(8), parameter :: C = 420.0D0, RO = 1800.0D0, LAMDA = 0.3D0
425
426 ! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
427 ! для расчёта
428 real(8), allocatable :: TN(:,,:), TNP12(:,,:), TNP1(:,,:), TS(:,,:)
429 real(8), allocatable :: W(:,,:), k(:,,:), ALFA(:,,:), EPS(:,,:)
430
431 real(8) :: XVT11, XVT12, YVT11, YVT12, XVT1, YVT1
432 real(8) :: XVT21, XVT22, YVT21, YVT22, XVT2, YVT2
433 real(8) :: XVT31, XVT32, YVT31, YVT32, XVT3, YVT3
434 real(8) :: XDA11, XDA12, YDA11, YDA12, XDA1, YDA1
435 real(8) :: WVT1, WVT2, WVT3, WDA1
436 real(8) :: dx, dy, TIME, kappa, delta
437
438 real(8) :: MXVT11, MXVT12, MYVT11, MYVT12
439 real(8) :: MXVT21, MXVT22, MYVT21, MYVT22
440 real(8) :: MXVT31, MXVT32, MYVT31, MYVT32
441 real(8) :: MXDA11, MXDA12, MYDA11, MYDA12
442 integer :: Mi, i, j, ijk, it
443
444  $Mi = L2x * (Mj - 1.0) / L2y + 1.0$ 
445

```

```

446 allocate(TN(Mi,Mj), TNP1(Mi,Mj), TNP12(Mi,Mj), TS(Mi,Mj))
447 allocate (W(Mi,Mj), k(Mi,Mj), ALFA(Mi,Mj), EPS(Mi,Mj))
448
449 ! Вычисление пространственных шагов
450 dx = L2x/(Mi - 1.0)
451 dy = L2y/(Mj - 1.0)
452
453 ! Вычисление коэффициента температуропроводности
454 kappa = LAMDA/(C*RO)
455
456 ! ----- Размещение ЭРЭ на печатной плате
457 ! Ввод координат
458 XVT1 = 20.0D-3; YVT1 = 30.0D-3
459 XVT2 = 55.0D-3; YVT2 = 10.0D-3
460 XVT3 = 70.0D-3; YVT3 = 10.0D-3
461 XDA1 = 65.0D-3; YDA1 = 50.0D-3
462
463 ! Расчёт размеров локальных областей ЭРЭ на основе их
464 ! габаритных размеров
465 XVT11 = XVT1 - LVT1x/2.0; YVT11 = YVT1 - LVT1y/2.0
466 XVT12 = XVT11 + LVT1x; YVT12 = YVT11 + LVT1y
467 XVT21 = XVT2 - LVT2x/2.0; YVT21 = YVT2 - LVT2y/2.0
468 XVT22 = XVT21 + LVT2x; YVT22 = YVT21 + LVT2y
469 XVT31 = XVT3 - LVT3x/2.0; YVT31 = YVT3 - LVT3y/2.0
470 XVT32 = XVT31 + LVT3x; YVT32 = YVT31 + LVT3y
471 XDA11 = XDA1 - LDA1x/2.0; YDA11 = YDA1 - LDA1y/2.0
472 XDA12 = XDA11 + LDA1x; YDA12 = YDA11 + LDA1y
473
474 ! Привязка к координатной сетке
475 MXVT11 = XVT11/dx + 1.0; MYVT11 = YVT11/dy + 1.0
476 MXVT12 = XVT12/dx + 1.0; MYVT12 = YVT12/dy + 1.0
477 MXVT21 = XVT21/dx + 1.0; MYVT21 = YVT21/dy + 1.0
478 MXVT22 = XVT22/dx + 1.0; MYVT22 = YVT22/dy + 1.0
479 MXVT31 = XVT31/dx + 1.0; MYVT31 = YVT31/dy + 1.0
480 MXVT32 = XVT32/dx + 1.0; MYVT32 = YVT32/dy + 1.0
481 MXDA11 = XDA11/dx + 1.0; MYDA11 = YDA11/dy + 1.0
482 MXDA12 = XDA12/dx + 1.0; MYDA12 = YDA12/dy + 1.0
483 ! -----
484
485 ! Пересчёт мощности ЭРЭ в мощность удельную
486 WVT1 = QVT1/(LVT1x*LVT1y*h)
487 WVT2 = QVT2/(LVT2x*LVT2y*h)
488 WVT3 = QVT3/(LVT3x*LVT3y*h)
489 WDA1 = QDA1/(LDA1x*LDA1y*h)
490
491 do i = 1,Mi
492 do j = 1,Mj
493 if ((i>=MXVT11) .and. (i<=MXVT12) .and. (j>=MYVT11) .and. (j<=MYVT12)) then
494 W(i,j) = WVT1
495 k(i,j) = 3.0
496 EPS(i,j) = 0.8

```

```

497 else
498 if ((i>=MXVT21) .and. (i<=MXVT22) .and. (j>=MYVT21) .and. (j<=MYVT22)) then
499 W(i,j) = WVT2
500 k(i,j) = 3.0
501 EPS(i,j) = 0.8
502 else
503 if ((i>=MXVT31) .and. (i<=MXVT32) .and. (j>=MYVT31) .and. (j<=MYVT32)) then
504 W(i,j) = WVT3
505 k(i,j) = 3.0
506 EPS(i,j) = 0.8
507 else
508 if ((i>=MXDA11) .and. (i<=MXDA12) .and. (j>=MYDA11) .and. (j<=MYDA12)) then
509 W(i,j) = WDA1
510 k(i,j) = 3.0
511 EPS(i,j) = 0.8
512 else
513 W(i,j) = 0.0
514 k(i,j) = 2.0
515 EPS(i,j) = 0.5
516 end if
517 end if
518 end if
519 end if
520 end do
521 end do
522
523 ! Задание начального приближения
524 TNP1 = Tvn
525 TNP12 = Tvn
526 TS = Tvn
527 TIME = 0.0
528
529 ! Открытие файла для записи значений по времени
530 open(1,file = 'D:\graph\Ttime.dat')
531
532 ijk = 0.0
533 DO WHILE(TIME<TIME_END) ! -----
534 ijk = ijk + 1.0
535
536 TN = TNP1
537
538 ! ----- Начало цикла итераций
539 delta = 1.0; it = 0.0
540 do while(delta>=psi)
541     delta = 0.0; it = it + 1.0
542
543     ! Прогонка вдоль оси ox
544     call prog_ox()
545
546     ! Прогонка вдоль оси oy
547     call prog_oy()

```

```
548
549     ! Расчёт коэффициента теплоотдачи конвекцией
550     call unit_ALFA(TS, 2.0, h)
551
552     ! Расчёт погрешности вычислений
553     delta = abs(maxval(TS) - maxval(TN))/maxval(TS)
554
555     ! if (mod(it,1)==0) write(*,*) it, "cxt = ", delta
556
557 end do
558 ! ----- Окончание цикла итераций
559
560 TNP1 = TS
561
562 TIME = TIME + dt
563
564 ! Вызов подпрограммы графического модуля
565 if (mod(ijk,200)==0) call DrawTemperature()
566
567 END DO ! ----- Окончание цикла вычислений
568
569 ! Закрытие файла для записи значений по времени
570 close(1)
571
572 ! Организация файла для записи массива температуры в конечный
573 ! момент времени
574 open(2,file = 'D:\graph\Tfield.dat')
575 do i = 1,Mi
576     do j = 1,Mj
577         write(2,"(E11.4,\)") TNP1(i,j)
578     end do
579     write(2,*)
580 end do
581 close(2)
582
583 contains ! Определяет начало описания подпрограмм
584
585 ... (Организация используемых подпрограмм аналогична рассмотренным в
586 п. 4.2.1.)
587
588 end program uzel_rea
```

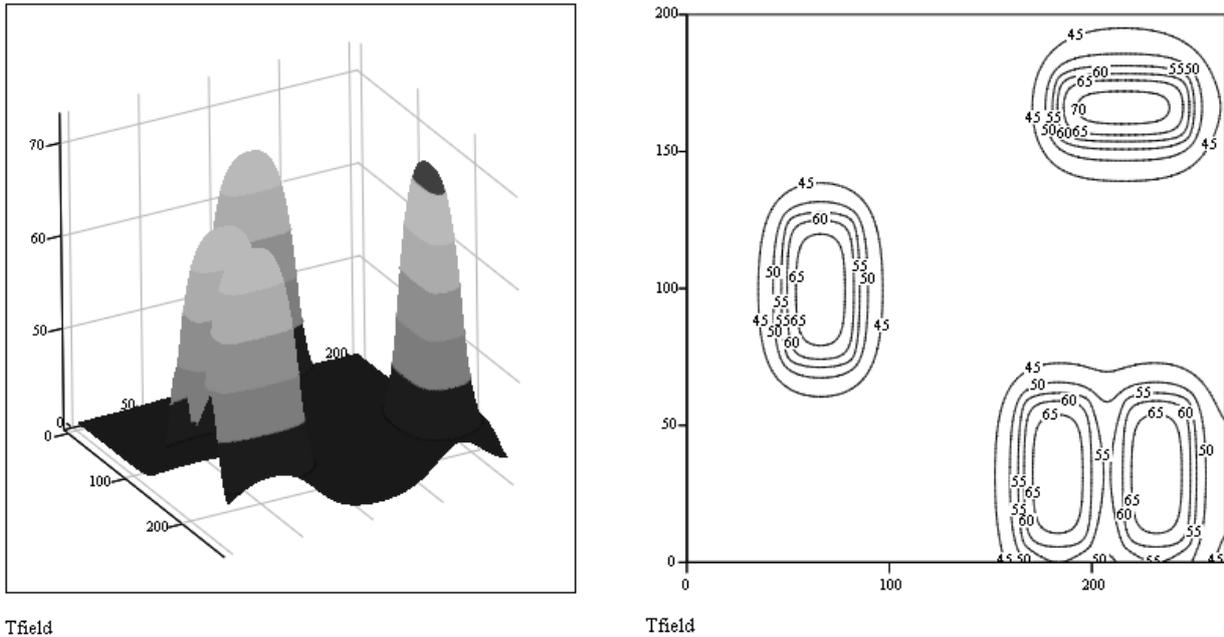


Рис.5.2 – Результат численного расчёта температурного поля печатного узла РЭС

Далее, на основании полученных данных, для каждого типа ЭРЭ и соответствующего ему режима работы из справочной таблицы Приложения 2 выпишем значения поправочных коэффициентов a_j и поместим их в девятый столбец сводной таблицы. Для строк 1 и 3 значения поправочных коэффициентов отсутствуют в справочных таблицах. Поэтому мы принимаем, что для полупроводниковой ИС значение поправочного коэффициента определяется как для транзисторов кремниевых (Приложение 2). Значение поправочного коэффициента для соединений пайкой условно равно единице, как в случае ориентировочного расчёта.

Вычислим произведение $n_i \cdot \lambda_i \cdot a_i$ (перемножением шестого и девятого столбцов таблицы 5.3) и поместим его значения в десятый столбец. Окончательное значение интенсивности отказов узла РЭС найдём по формуле (5.3). Оно равно сумме значений в десятом столбце сводной таблицы.

$$\lambda_{\text{СОК}} = \sum_{j=1}^3 n_{ij} \cdot \lambda_j \cdot a_j = (0,023 + 1,51 + 0,276) \cdot 10^{-6} = 1,81 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч.}$$

В соответствии с формулой (5.4) определим окончательное значение среднего времени безотказной работы устройства:

$$T_{\text{СОК}} = 1/\lambda_{\text{СОК}} = 10^6/1,81 = 552800 \text{ ч.}$$

Окончательное значение вероятности безотказной работы в течение наработки $t=100$ ч определим по формуле (5.1):

$$P_{\text{СОК}} = \exp(-\lambda_{\text{СОК}} \cdot t) = \exp(-1,81 \cdot 10^{-6} \cdot 100) = 0,999819.$$

Таблица 5.3 – Сводная таблица ориентировочного и окончательного расчетов интенсивности отказов невосстанавливаемого объекта (узла РЭА)

Номер группы ЭРЭ J	Тип ЭРЭ	Число ЭРЭ $n_{Э}$	Интенсивность отказов $\lambda_{Э}, 10^{-6} 1/ч$	Интенсивность отказов $\lambda_{Э}, 10^{-6} 1/ч$	$n_{Э} \cdot \lambda_{Э}, 10^{-6} 1/ч$	Коэффициент нагрузки $K_{Э}$	Температура $T_{Э}, ^\circ C$	Поправочный коэффициент $a_{Э}$	$n_{Э} \cdot \lambda_{Э} \cdot a_{Э}, 10^{-6} 1/ч$
1	Полупроводниковые ИС	1	0,02	0,024	0,024	0,8	70	0,97	0,023
2	Транзисторы кремниевые большой мощности	3	0,74	0,87	2,61	0,6	65	0,58	1,51
3	Соединения пайкой	23	0,01	0,012	0,276	-	55	1,00	0,276

На основании вышеизложенного материала приведём алгоритм методики окончательного расчёта надёжности по внезапным отказам невосстанавливаемой РЭС на основании данных математического моделирования температурных полей плоских конструкций.

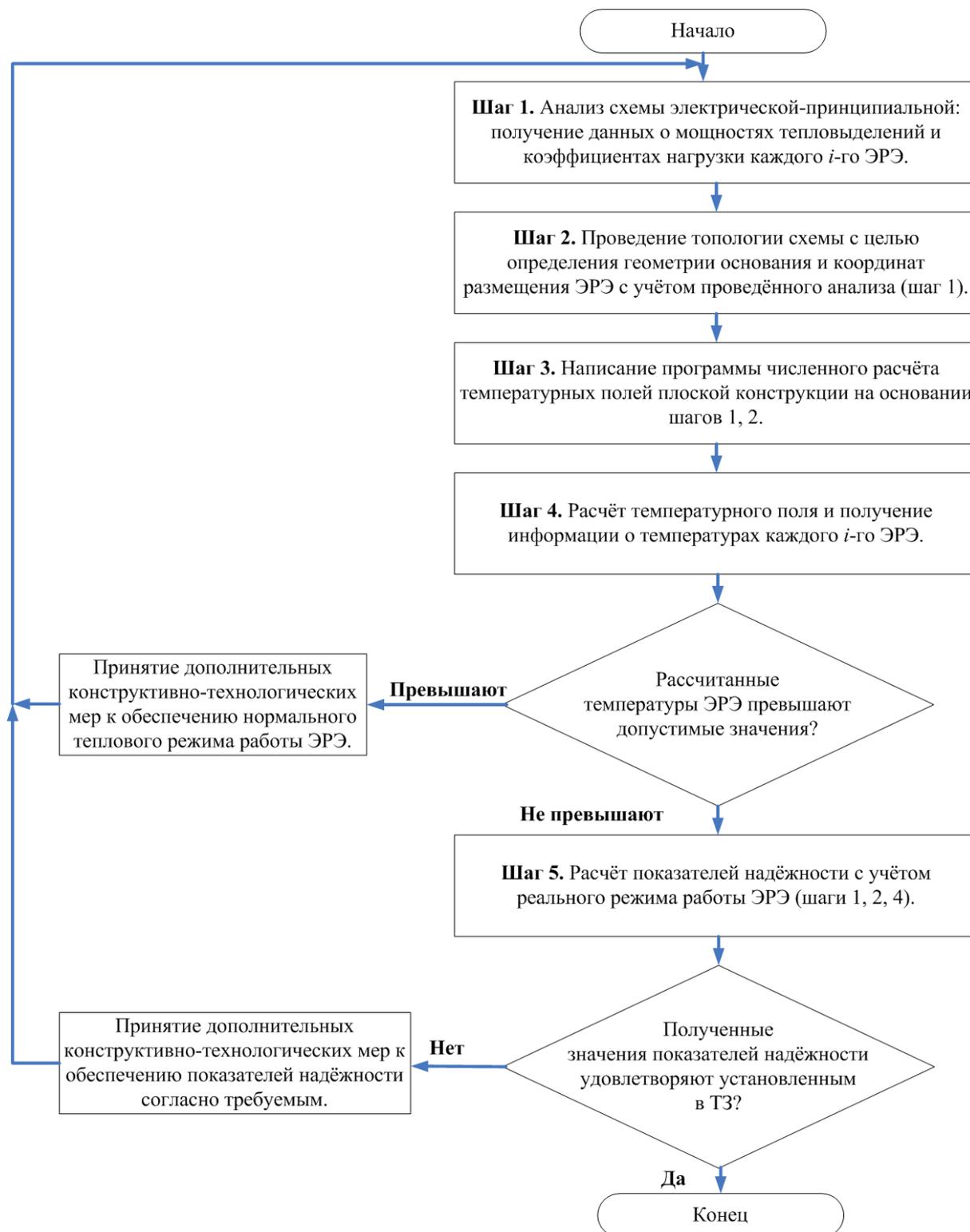


Рис. 5.3 – Алгоритм методики обеспечения нормального теплового режима РЭС

6 ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЭС С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

Микротермостатирование предполагает термостабилизацию проектируемого изделия посредством стабилизации температуры подложки гибридной интегральной схемы или полупроводникового кристалла в заданных пределах, с заданной точностью.

6.1 Математическая модель системы микротермостатирования

6.1.1 Микротермостат как электротепловой элемент проектируемого устройства

Функционируя в составе РЭС, система микротермостатирования, реализованная в виде гибридно-плёночного или дискретного микротермостата (МТ) с подогревом, выполняет функцию регулирования температуры термостатируемого объекта (подложки ГИС или камеры МТ). При этом электрические и тепловые функции тесно связаны между собой, что позволяет классифицировать МТ как электротепловой элемент, а при исследовании системы микротермостатирования использовать принцип электротепловой аналогии [2]. При этом тепловые связи в МТ представим в виде эквивалентной тепловой схемы, а электрические – в виде структурной схемы системы микротермостатирования как системы автоматического регулирования (САР) температуры элементов РЭС.

При составлении эквивалентной тепловой схемы сделаем следующие допущения, обусловленные особенностями исследуемых МТ:

- предположим, что каждый из элементов МТ представляет собой изотермическое тело, т. е. распределением температурного поля нагревателя, датчика, термостатируемого объекта и корпуса можно пренебречь;

- под температурой в МТ будем понимать температуру датчика, так как его теплоёмкость мала по сравнению с теплоёмкостью термостатируемого объекта, а тепловое сопротивление между ними минимально;

- тепловые проводимости «нагреватель-корпус» и «датчик-корпус» пренебрежимо малы по сравнению с проводимостями – «нагреватель-объект» и «датчик-объект», поэтому тепловыми потоками «нагреватель-корпус» и «датчик-корпус» можно пренебречь;

- теплоёмкости всех элементов не зависят от температуры.

Учитывая изложенные выше допущения и используя метод электротепловой аналогии [2], а также теорию подобия [14], построим схему

замещения, отражающую тепловые процессы, происходящие в МТ. При построении схемы, кроме уже рассмотренных, учитывались следующие допущения:

– теплоёмкости всех элементов не зависят от температуры. Такое допущение может быть справедливым в узком диапазоне изменения температур при рассмотрении динамических процессов в зоне температуры статирования;

– выделения тепла датчиком в термостатируемом объекте пренебрежимо малы по сравнению с мощностью, выделяемой нагревателем, т. е. рассматривается класс термостатируемых элементов с рассеиваемой мощностью, по крайней мере, на порядок меньше минимальной мощности потерь.

Электротепловая схема МТ изображена на рис. 6.1, где приняты следующие обозначения:

t_c, t_o, t_d, t_n – температура среды, объекта, датчика, нагревателя соответственно;

$R_{kc}, R_{ko}, R_{do}, R_{no}$ – тепловые сопротивления «корпус-среда», «корпус-объект», «датчик-объект», «нагреватель-объект», соответственно;

C_k, C_o, C_d, C_n – теплоёмкости корпуса, объекта, датчика, нагревателя соответственно, причём $C_k = C_{кож} + C_{из}$, где $C_{кож}$ – теплоёмкость кожуха МТ;

$C_{из}$ – теплоёмкость теплоизоляции МТ, а $C_0 = C_{кам} + \sum_{i=1}^n C_{эл i}$, где $C_{кам}$ – теплоёмкость камеры МТ; $C_{эл i}$ – теплоёмкость термостатируемого элемента; n – число термостатируемых элементов.

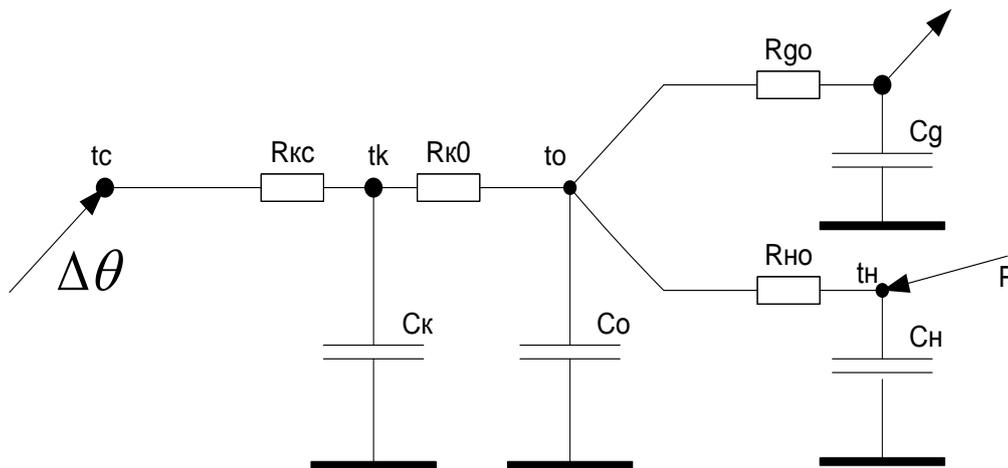


Рис. 6.1 – Эквивалентная тепловая схема МТ

В дальнейшем будем учитывать, что схема регулятора и термостатируемая схема построены таким образом, что удельная мощность,

выделяемая в датчике и термостатируемых элементах, пренебрежимо мала по сравнению с мощностью, выделяемой нагревателем.

На рис. 6.2 и 6.3 приведены возможные схемы включения датчиков температуры и нагревателей. Структурная схема САР температуры в МТ дискретного и гибридно-плёночного типа изображена на рис. 6.4.

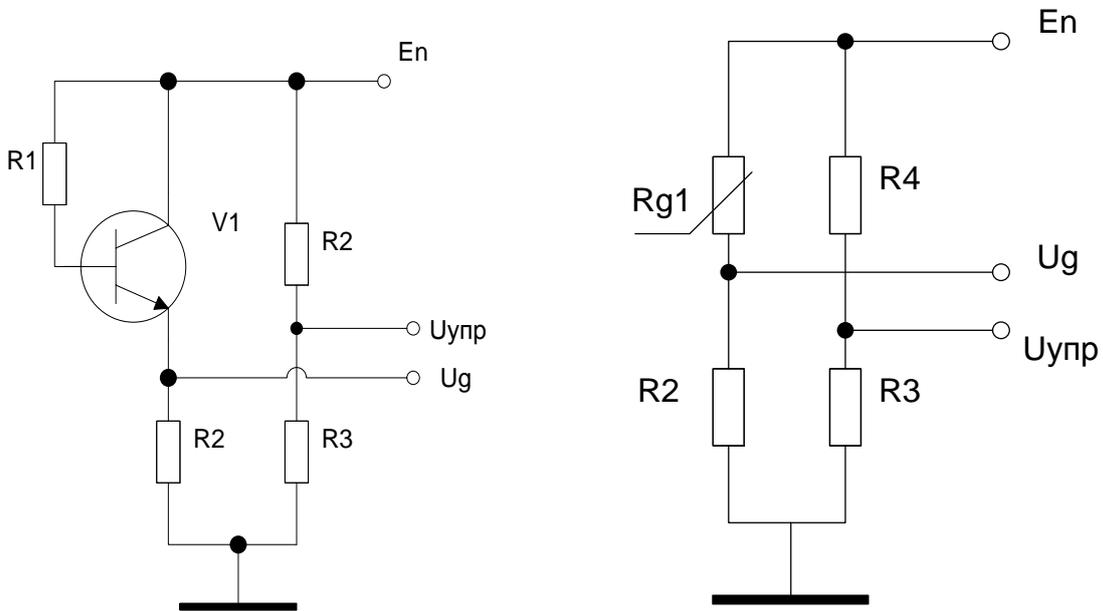
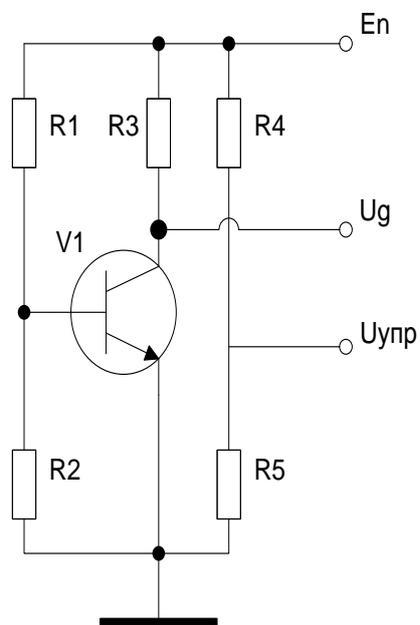
*a**б**в*

Рис. 6.2 – Схемы включения датчика температуры в регуляторе: (а) терморезистора; (б) – транзистора по схеме с ОК; (в) - схема включения датчика температуры по схеме с ОЭ

Для гибридно-плёночных МТ:

$$C_0 = C_n + \sum_{i=1}^n C_{эл i},$$

где C_n – теплоёмкость подложки.

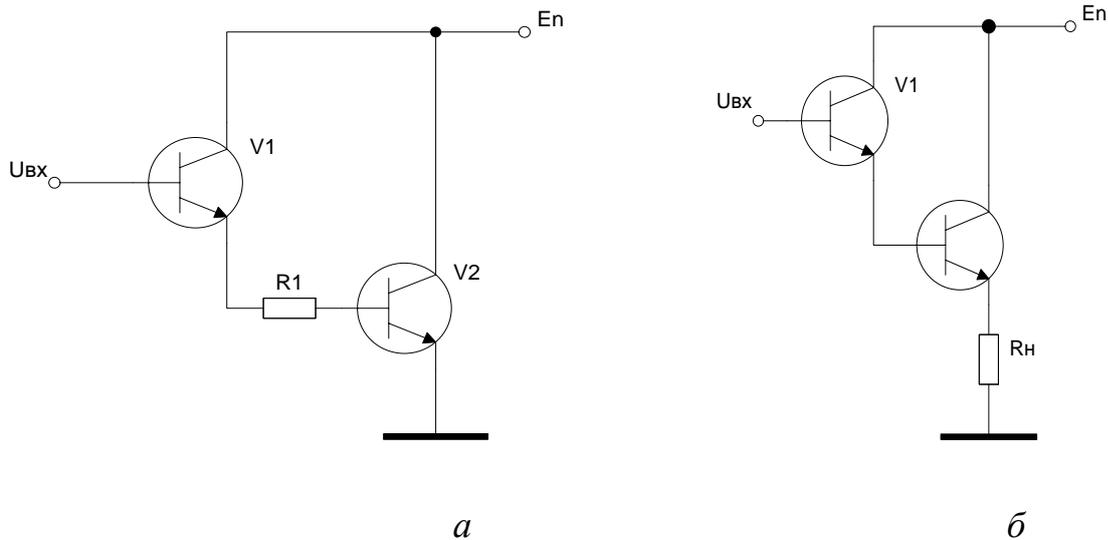


Рис. 6.3 – Схемы включения транзисторного (а) и резистивного (б) пленочного нагревателя в схеме регулирования температуры

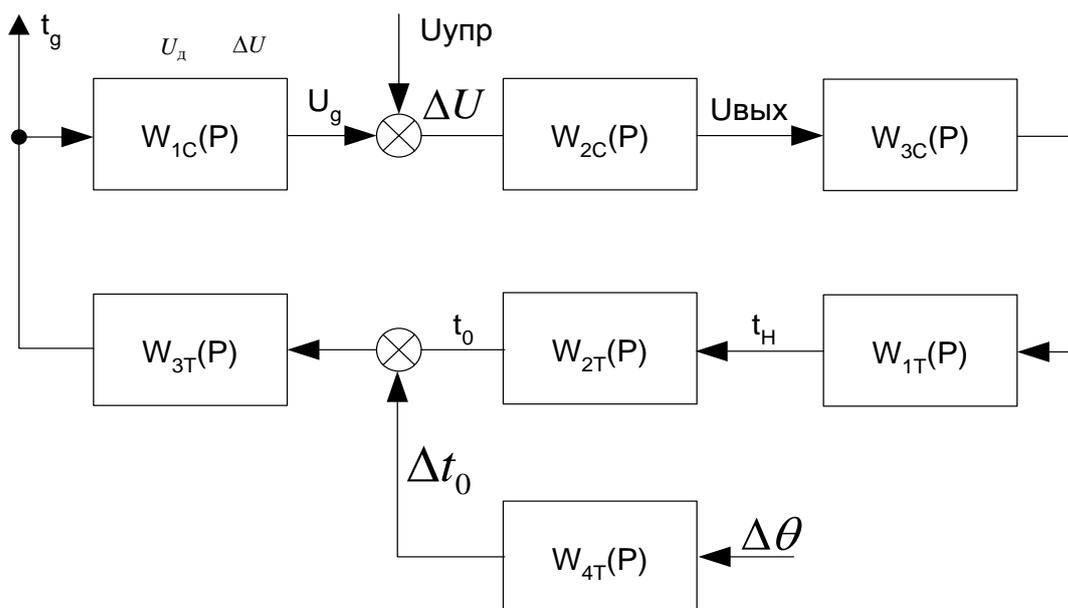


Рис. 6.4 – Структурная схема САР температуры в МТ

На рисунке 6.5 представлена принципиальная схема регулятора температуры пропорционального типа, где датчик температуры условно представлен в виде резистора.

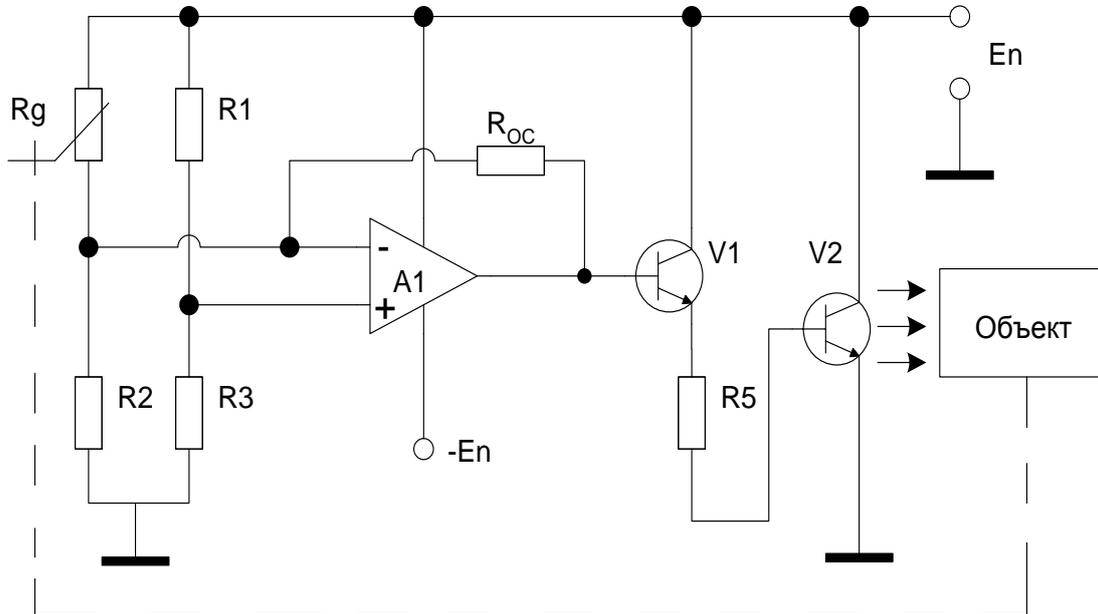


Рис. 6.5 – Принципиальная схема регулятора температуры пропорционального типа

На структурной схеме САР и схеме регулятора приняты следующие обозначения: $W_{ij}(p)$ – передаточные функции i -го элемента j – назначения; $U_{упр}$ – управляющее напряжение, задающее величину температуры регулирования; U_θ – напряжение на выходе датчика R_θ , пропорциональное его температуре; $U_{вых}$ – напряжение на выходе усилителя A_1 ; P_n – мощность, рассеиваемая на нагревателе; $\Delta\theta$ – возмущающее воздействие температуры среды; t_n , t_o , t_θ – температура нагревателя, термостатируемого объекта и датчика соответственно; Δt_o – изменение температуры объекта под действием $\Delta\theta$; ΔU – разностный сигнал на выходе органа сравнения.

Для дальнейшего рассмотрения процесса регулирования температуры в МТ нам необходимо знать передаточные функции всех звеньев рассматриваемой САР. Их можно получить, если рассмотреть тепловую модель МТ и работу схемы регулирования температуры.

Аналитическое исследование систем МТ проведем для регулятора температуры пропорционального типа, как наиболее простого, технологичного и занимающего минимальные габариты. Элементы регулятора температуры и собственно конструкции МТ условно разделим: элементам, выполняющим электрические преобразовательные функции, присвоим индекс «с», инерционным тепловым элементам – индекс «т».

Отметим также, что приведенная на рис. 6.5 схема регулирования температуры является обобщенной и отражает общие электрические связи в системе МТ. Практическая схема может отличаться как типом и схемой включения датчика (см. рис. 6.2), так и нагревателя (см. рис. 6.3).

6.1.2 Математическая модель МТ

На основании тепловой модели МТ путем анализа уравнений теплового баланса для каждого элемента в динамическом режиме определим их передаточные функции. Такие задачи решаются А.А. Фельдбаумом [15] и В.Н. Кейном [16] для «классических» систем регулирования температуры. В нашем случае будем учитывать особенности гибридно-плёночных и дискретных МТ, рассмотренные при составлении структурной схемы САР и тепловой модели МТ.

На основании анализа электротепловой схемы и структурной схемы САР с учётом принятых выше допущений делаем вывод о том, что мы имеем дело с системой автоматического регулирования третьего порядка, так как в системе обратной связи есть три инерционных звена – нагреватель, термостатируемый объект и датчик. С учетом того, что нами используется модель с сосредоточенными параметрами при выводе общих и частных передаточных функций САР, основное внимание уделим доказательству адекватности используемой модели. Такая постановка вопроса представляется нам правомочной в связи с тем, что макросистемы третьего порядка с сосредоточенными параметрами достаточно исследованы, и основным отличием в нашем случае является то, что мы имеем дело с микросистемами.

Система уравнений теплового баланса для рассматриваемой САР в динамическом режиме имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta P_H = C_H \frac{d\varphi_H}{d\tau} + \frac{\varphi_H - \varphi_O}{R_{HO}}; \\ \frac{\varphi_H - \varphi_O}{R_{HO}} = C_O \frac{d\varphi_O}{d\tau} + \frac{\varphi_O - \varphi_g}{R_{go}} + \frac{\varphi_O - \varphi_K}{R_{KO}}; \\ \frac{\varphi_O - \varphi_g}{R_{go}} = C_g \frac{d\varphi_g}{d\tau}. \end{cases} \quad (6.1)$$

В системе (6.1) обозначения теплоёмкостей элементов C_j и тепловых сопротивлений между ними R_{ij} соответствуют электротепловой схеме (см. рис. 6.1). Изменения температуры элементов φ_i во времени отражают динамику изменения температуры элементов при регулировании.

Исходя из того, что постоянная времени нагревателя пренебрежимо мала по сравнению с постоянной времени термостатируемого объекта, будем считать, что малые изменения φ_n не вызовут существенных изменений φ_o , т.е. $\varphi_o = 0$. Кроме того, при выводе передаточных функций тепловых элементов МТ учтём пренебрежимо малую теплоёмкость датчика C_d по сравнению с теплоёмкостью объекта C_o , в связи с чем

$$\varphi_g \approx \varphi_o, \quad \varphi_k \approx 0.$$

После очевидных преобразований получаем передаточные функции в операторной форме:

– нагревателя

$$W_{1T}(P) = \frac{\varphi_n}{\Delta P_n} = \frac{K_{1T}}{1 + pT_n}, \quad (6.2)$$

где

$$K_{1T} = R_{HO}, \quad T_n = R_{HO}C_n;$$

– объекта

$$W_{2T}(P) = \frac{\varphi_o}{\varphi_n} = \frac{K_{2T}}{1 + pT_o}, \quad (6.3)$$

где

$$K_{2T} = \frac{R_{KO}}{R_{KO} + R_{HO}}, \quad T_o = K_{2T}R_{HO}C_o;$$

– датчика

$$W_{3T}(P) = \frac{\varphi_g}{\varphi_o} = \frac{1}{1 + pT_g}, \quad (6.4)$$

где

$$T_g = R_{go}C_g.$$

Кроме преобразования электрической энергии P_n в температуру t_n нагреватель выполняет функцию преобразователя выходного напряжения $U_{вых}$ усилителя A_1 схемы регулирования температуры в мощность P_n . В этом аспекте нагреватель будет безынерционным звеном. Рассмотрим работу схемы (см. рис. 6.3, а), где составной транзистор V_1V_2 является нагревателем.

Величина входного тока транзистора V_1 равна:

$$I_{ex} = \frac{U_{BIX}}{R_{BX}},$$

где R_{ex} – входное сопротивление составного транзистора V_1V_2 .

В [17] показано, что для подобных структур:

$$R_{BX} \cong \beta_1 R_1 + R_{BX2},$$

где β_1 – коэффициент усиления по току V_1 ; R_{BX2} – входное сопротивление транзистора V_2 . Для нашей схемы включения $R_{BX2} \cong R_1$, поэтому $R_{BX} \cong \beta_1 R_1$.

Значение тока базы определяется из выражения

$$I_{\sigma 2} = I_{BX1} \beta_1 = \frac{U_{BВЛX}}{R_1}.$$

$$\text{Ток нагревателя } I_H = I_2 \beta_2 = \frac{U_{BВЛX} \beta_2}{R_1}.$$

Тогда при напряжении питания нагревателя E_n мощность, рассеиваемая на нагревателе, равна

$$P_H = E_n I_H = U_{BВЛX} \frac{E_n \beta_2}{R_1}. \quad (6.5)$$

Передаточная функция нагревателя как элемента схема регулятора имеет вид

$$W_{3C}(P) = \frac{\Delta P_H}{\Delta U_{BВЛX}} = K_{3C} \cong \frac{\beta_2 E_n}{R_1}. \quad (6.6)$$

Для резистивного нагревателя в виде пленочного резистора аналогично получаем $W_{3C}(P)$:

$$R_{BX2} \cong R_H + r_{\sigma 2} \beta_2,$$

где $r_{\sigma 2}$ – сопротивление базового перехода транзистора V_2 ;

$$R_{BX1} \cong \beta_1 [\beta_2 R_H + r_{\sigma 2} + r_{\sigma 1}],$$

где $r_{\sigma 1}$ – сопротивление базового перехода транзистора V_1 ;

$$I_{\sigma 1} \cong \frac{U_{BВЛX}}{\beta_1 [\beta_2 R_H + r_{\sigma 2} + r_{\sigma 1}]},$$

$$I_{\sigma 2} \cong \frac{U_{BВЛX}}{\beta_1 [\beta_2 R_H + r_{\sigma 2} + r_{\sigma 1}]} = \frac{U_{BВЛX}}{\beta_2 R_H + r_{\sigma 2} + r_{\sigma 1}};$$

$$I_H = \frac{U_{BВЛX} \beta_2}{\beta_2 R_H + r_{\sigma 2} + r_{\sigma 1}}.$$

Учитывая, что $r_{\sigma 1} \ll \beta_2 R_H + r_{\sigma 2}$, имеем

$$I_H = \frac{U_{BВЛX}}{R_H + r_{\sigma 2}},$$

окончательно

$$W_{3c}^{\wedge}(P) = \frac{\Delta P_H}{\Delta U_{\text{ВЫХ}}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}} R_H}{R_H + r_{62}}. \quad (6.7)$$

Анализ выражения (6.7) показывает, что в случае применения резистивного нагревателя W_{3c}^{\wedge} имеет нелинейный характер и зависит от величины напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе операционного усилителя A_1 схемы регулирования температуры.

Как было указано ранее, датчик выполняет функцию преобразования температуры в сопротивление, а совместно с мостом, в который он включен – в напряжение U_{δ} . На рис. 6.2 приведены возможные варианты схем включения датчиков температуры. Для дискретных МТ в качестве датчиков чаще всего используются полупроводниковые терморезисторы, для гибридно-пленочных – транзисторы. Как показано в работах И.Б. Фогельсона, например [18], схема, изображенная на рисунке 6.2, б, имеет высокую линейность выходного напряжения от температуры и чувствительность порядка 2...3 мВ/К, что вполне достаточно для её использования в схеме пропорционального регулятора.

Пусть в нашем случае $R_{\delta} = R_0 (1 + \alpha \varphi_{\delta})$, где R_0 – сопротивление датчика при температуре статирования; α – температурный коэффициент; φ_{δ} – изменение температуры датчика в процессе регулирования.

Отметим, что линейная зависимость $R_{\delta} = f t_{\delta}$ в данном случае справедлива для малых значений φ_{δ} при применении терморезистора, что имеет место при регулировании температуры МТ в области заданных значений. При дальнейшем рассмотрении будем считать, что входное сопротивление усилителя A_1 велико, т.е. его влияние на параметры мостовой схемы включения датчика пренебрежимо мало.

Для нашего случая

$$\Delta U_{\delta} = E_n \left(\frac{R_2}{R_0 + R_2 + \Delta R_{\delta}} - \frac{R_2}{R_0 + R_2} \right),$$

где R_2 – сопротивление резистора моста;

$$R_{\delta} = R_0 + \Delta R_{\delta} = R_0 (1 + \alpha \varphi_{\delta}).$$

После преобразований получаем:

$$\Delta U_{\delta} \cong E_n R_2 \frac{\Delta R_{\delta}}{R_0 + R_2}.$$

Но так как $\Delta R_{\delta} = R_0 \alpha \varphi_{\delta}$, а $R_0 = R_4$, то имеем

$$\Delta U_{\delta} \cong E_n R_2 \alpha \varphi_{\delta} \frac{R_4}{R_4 + R_2}.$$

Окончательно

$$W_{1C} = K_{1C} = \frac{\Delta U_{\phi}}{\varphi_{\phi}} = E_n R_2 \alpha \frac{R_4}{R_4 + R_2} \quad (6.8)$$

В случаях, когда требуется более высокая чувствительность датчика, можно использовать схему, приведенную на рис. 6.2, в. В этом случае, если ток делителя в цепи базы $R_1 R_2$ много больше базового тока транзистора V_1 , имеем также практически линейную температурную зависимость коллекторного тока этого транзистора, но значительно большую, чем по схеме на рисунке 6.2, б, так как в схеме с ОЭ имеет место большее усиление по напряжению. Для этого случая нетрудно получить

$$W_{1C} = \frac{\Delta U_{\phi}}{\varphi_{\phi}} = \frac{\alpha_{UBЭ} \beta_1 R_3}{R_{ex1}}, \quad (6.9)$$

где $\alpha_{UBЭ}$ – температурный коэффициент напряжения база-эмиттер (2 мВ/К); β_1 , R_{ex1} – внутренние параметры транзистора-датчика V_1 .

При выводе передаточных функций схемных элементов МТ нами предполагалось, что в схемах используются кремниевые транзисторы, у которых вполне допустимо пренебречь обратным током $I_{ко}$, а также сопротивлением эмиттерного перехода r_e [19].

Передаточная функция усилителя A_1 есть его коэффициент усиления по напряжению, т. е.

$$W_{2C}(P) = K_{2C} = K_{yc} \cong \frac{R_{oc}}{R_3} \quad (6.10)$$

Уравнение теплового баланса для корпуса имеет следующий вид:

$$\frac{\varphi_C - \varphi_K}{R_{KC}} = C_K \frac{\partial \varphi_K}{\partial \tau} + \frac{\varphi_K - \varphi_0}{R_{KO}} \quad (6.11)$$

Расчёт электротепловых постоянных времени нагрева их элементов, в частности, корпуса и термостатируемого объекта и последующее их сравнение показывают, что:

– для гибридно-плёночных МТ, в которых объектом термостатирования является термостабильная подложка, постоянная времени подложки много меньше постоянной времени корпуса, т.е. $\varphi_K \approx \varphi_0$, а $t_K \approx t_0 \approx t_n$, где t_n – температура подложки;

– для дискретных МТ рассматриваемые постоянные времени могут быть сравнимы друг с другом, поэтому при выходе передаточной функции

корпуса необходимо дополнительно рассмотреть процесс теплопередачи между корпусом и термостатируемым объектом.

Из уравнения (6.11), учитывая, что $\varphi_K \cong \varphi_0$, получаем передаточную функцию корпуса гибридно-пленочных МТ:

$$W_{4T}(P) = \frac{\varphi_K}{\varphi_C} = \frac{1}{1 + pT_K},$$

где $T_K = R_{KC} C_K$.

Для дискретных МТ, когда величина T_K сравнима с T_0 , имеем уравнение

$$\frac{t_K - t_0}{R_{K0}} = C_0 \frac{\partial t_0}{\partial t},$$

или

$$\frac{\varphi_K - \varphi_0}{R_{K0}} = C_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}. \quad (6.12)$$

Окончательно

$$W_{4T}^*(P) = \frac{\varphi_0}{\varphi_K} = \frac{1}{1 + pT_{KO}}. \quad (6.13)$$

Тогда для дискретных МТ

$$T_{KO} = C_0 R_{KO};$$

$$W_{4T}(P) = \left(\frac{1}{1 + pT_K} \right) \left(\frac{1}{1 + pT_{KO}} \right) = \frac{1}{T_K T_{KO} P^2 + T_K + T_{KO} P + 1}, \quad (6.14)$$

т. е. для дискретных МТ, когда T_K и T_{KO} сравнимы по величинам, корпус представляет собой инерционное звено II-го порядка. Как показано в [20], такое звено можно представить в виде цепочки из двух инерционных звеньев с постоянными времени T_K и T_{KO} . Переходная характеристика такого звена при определенном соотношении величин T_K и T_{KO} приближенно будет иметь вид переходной характеристики инерционного звена с запаздыванием. Это согласуется с выводами, изложенными в работах Л.В. Венгеровского и А.Х. Вайнштейна [21], что термостаты для возмущающего воздействия являются инерционными элементами с запаздыванием.

Таким образом, нами получены выражения, описывающие передаточные функции исследуемых МТ при пропорциональном регулировании температуры.

Далее рассмотрим передаточные функции системы термостатирования для задающего и возмущающего воздействий. Для структурной схемы С (см. рис. 6.4) регулирующим воздействием является отклонение между задающим

воздействием $U_{упр}$ и величиной напряжения, снимаемого с датчика возмущающим воздействием – изменение температуры окружающей среды.

Имея передаточные функции всех звеньев рассматриваемой САР, рассмотрим процесс регулирования при наличии тепловой обратной связи между нагревателем и датчиком температуры. Укрупненная структурная схема САР по задающему воздействию изображена на рис. 6.6.

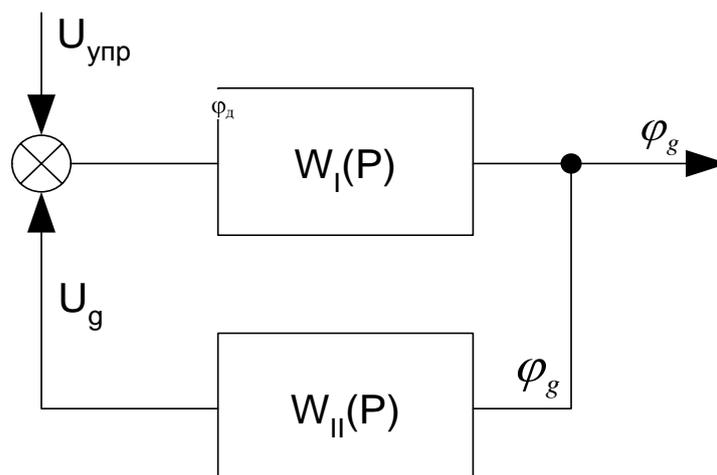


Рис. 6.6 – Укрупненная структурная схема САР по задающему воздействию

На этой схеме

$$W_I(P) = W_{2C}(P)W_{3C}(P)W_{1T}(P)W_{2T}(P)W_{3T}(P),$$

$$W_{II}(P) = W_{1C}(P).$$

Общая передаточная функция по задающему воздействию имеет вид

$$W_{общ.рег.}(P) = \frac{\varphi_d}{\Delta U_{упр}} = \frac{W_I(P)}{1 - W_I(P)W_{II}(P)}. \quad (6.15)$$

Подставляя в (6.15) выражения передаточных функций звеньев САР и проводя преобразования, получаем

$$W_{общ.рег.}(P) = \frac{K1}{\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}, \quad (6.16)$$

где

$$K1 = \frac{K_0}{K_{1C}}; \quad \alpha_3 = T_H T_\delta T_0; \quad \alpha_2 = T_H T_\delta + T_H T_0 + T_\delta T_0; \quad \alpha_1 = T_H + T_\delta + T_0;$$

$$\alpha_0 = 1 - K_0; \quad K_0 = K_{1C} K_{2C} K_{3C} K_{1T} K_{2T} K_{3T}.$$

K_0 имеет отрицательный знак для реализации функции регулирования.

Дифференциальное уравнение регулирования по задающему воздействию имеет вид

$$\alpha_3 \frac{\partial^3 \varphi_\partial}{\partial \tau^3} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_\partial}{\partial \tau^2} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_\partial}{\partial \tau} + \alpha_0 \varphi_\partial = K_1 \Delta U_{\text{упр}}. \quad (6.17)$$

Наличие трех инерционных звеньев в замкнутом контуре регулирования обуславливает третий порядок характеристического уравнения передаточной функции $W_{\text{общ.рег.}}(P)$. Как показано в [20, 22], в зависимости от соотношения коэффициентов α_i , САР может быть неустойчивой. Условие устойчивости по критерию Рауса–Гурвица имеет вид

$$\alpha_2 \alpha_1 \geq \alpha_3 \alpha_0,$$

или, переходя к постоянным времени, получим:

$$T_H T_\partial + T_H T_0 + T_\partial T_0 \quad T_H + T_0 + T_\partial \geq T_H T_\partial T_0 \quad 1 - K_0. \quad (5.18)$$

Таким образом, вариация коэффициентом усиления приводит к изменению качества регулирования, а при достаточно больших значениях K_0 может произойти потеря устойчивости системы регулятора. Это означает изменение метода регулирования, т. е. переход к двухпозиционному регулированию, при котором колебания температуры термостатируемого объекта могут быть недопустимо большими.

Можно предположить, что для рассматриваемых типов МТ, особенно гибридно-плёночных, как имеющих малые значения постоянных времени T_H , T_∂ , T_0 , допускается режим работы, близкий к границе устойчивости, так как качество переходных процессов может удовлетворять заданным требованиям вследствие малого периода колебаний. Для дискретных МТ, имеющих большие размеры и, следовательно, большие значения указанных постоянных времени при достаточно больших значениях K_0 , переходный процесс может протекать неудовлетворительно и значительно увеличить время выхода на режим или время установления заданной температуры. Однако в дискретных МТ при применении датчиков температуры, имеющих малую постоянную времени вследствие малых размеров и малой величины теплового сопротивления $R_{\partial\partial}$, колебательными процессами III порядка можно пренебречь, и поведение САР будет описываться дифференциальным уравнением II, а при малых размерах нагревателя – I порядка.

Изложенные соображения являются предварительными, но они наталкивают на мысль о том, что выражение (6.18) можно использовать для количественных расчётов при проектировании МТ, а также при изучении конкретных особенностей исследуемых САР. Ниже эти особенности будут рассмотрены более подробно.

На рис. 6.7 изображена укрупненная структурная схема САР по возмущающему воздействию.

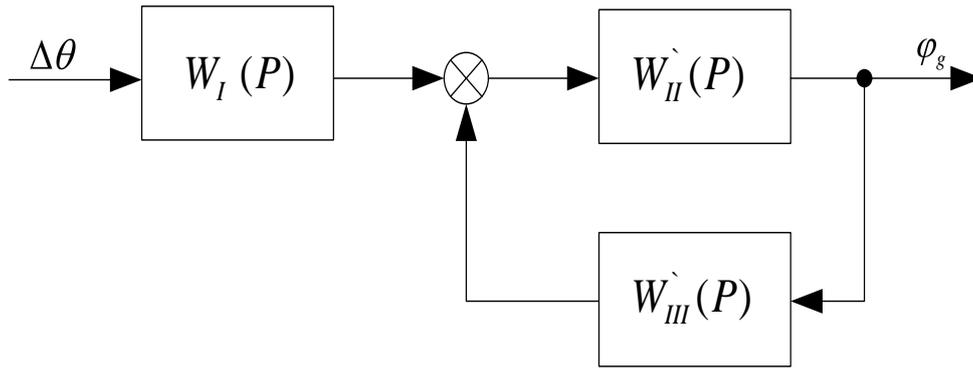


Рис. 6.7 - Передаточные функции

$W_I(P)$, $W_{II}(P)$, $W_{III}(P)$ имеют вид

$$\begin{aligned} W_I(P) &= W_{4T}(P); \quad W_{II}(P) = W_{3T}(P); \\ W_{III}(P) &= W_{1C}(P)W_{2C}(P)W_{3C}(P)W_{1T}(P)W_{2T}(P). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Имеем антипараллельное соединение звеньев $W_{II}(P)$ и $W_{III}(P)$. Для такого соединения

$$W(P) = \frac{W_{II}(P)}{1 - W_{II}(P)W_{III}(P)}.$$

Общая передаточная функция по возмущающему воздействию имеет вид

$$W_{\text{общ.возм.}}(P) = \frac{\varphi_\delta}{\Delta\theta} = W_I(P)W(P) = \frac{W_{3T}(P)W_{4T}(P)}{1 - W_{1C}(P)W_{2C}(P)W_{3C}(P)W_{1T}(P)W_{2T}(P)W_{3T}(P)}. \quad (6.20)$$

Подставляя в (6.20) выражения для передаточных функций, получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{общ.возм.}}(P) &= \frac{\left(\frac{1}{1+pT_\delta}\right)\left(\frac{1}{1+pT_K}\right)}{1 - \frac{K_{1C}K_{2C}K_{3C}K_{1T}K_{2T}K_{3T}}{(1+pT_H)1+pT_01+pT_\delta}} = \\ &= \frac{T_0T_H p^2 + (T_H + T_0)p + 1}{(1+pT_K)\left[T_0T_H T_\delta p^3 + (T_H T_0 + T_0 T_\delta + T_H T_\delta)p^2 + (T_H + T_0 + T_\delta)p + (1 - K_0)\right]} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Нетрудно видеть, что в стационарном режиме при отсутствии колебаний температуры элементов МТ уравнение с учётом знака K_0 (5.21) имеет вид

$$W_{\text{общ.возм.}}(P) = \frac{1}{1 + K_0}. \quad (6.22)$$

Имея (6.22), можно определить величину статической ошибки регулирования $\Delta_{ст}$ при изменении температуры среды $\Delta\theta$:

$$\Delta_{ст} = \frac{\Delta\theta}{1 + K_0}. \quad (6.23)$$

Как видно из (6.23), статическая точность САР при пропорциональном регулировании определяется величиной K_0 , в которую входят параметры как регулятора, так и конструкций МТ.

С учётом конкретных значений постоянных времени выражение (6.21) может быть существенно упрощено для конкретных конструкций МТ. Расчёты величин T_K , T_o , T_H , T_δ показывают, что для гибридно-пленочных МТ имеют место

$$T_K \gg T_o, T_H, T_\delta; T_o \gg T_H, T_\delta.$$

Тогда (6.21) после несложных преобразований имеет вид

$$W_{\text{общ.возм.}}(P) \cong \frac{T_o p + 1}{T_o T_K p^2 + (1 + K_0) T_K p + (1 + K_0)}. \quad (6.24)$$

Для дискретных МТ, имеющих $T_K \approx T_o$, вид передаточной функции $W_{\text{общ.возм.}}(P)$ значительно сложнее и определяется (6.21) и (6.14).

6.1.3 Адекватность математической модели системы микротермостатирования

Предположим, что по конструктивным признакам МТ является одноконтурным в интегральном гибридно-пленочном исполнении (рис. 6.8).

Приведенную ниже алгоритмическую модель проектирования МТ с некоторыми изменениями можно распространить на другие виды термостатов, отличных по данным классификационным признакам.

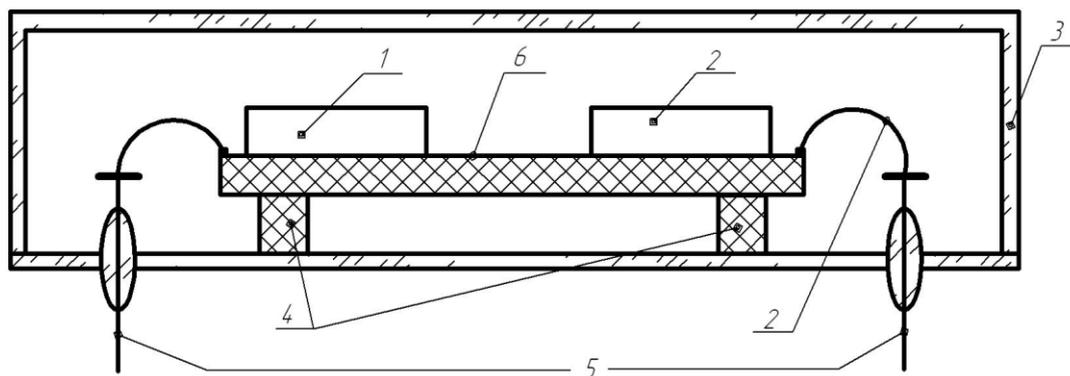


Рис. 6.8 – Гибридно-плёночный МТ: 1) выводы; 2) корпус; 3) термостатируемая подложка; 4) термостатируемые ЭРЭ; 5) теплоизоляция; 6) нагреватель; 7) датчик температуры

Наиболее полная математическая модель термостата [23...26] представляет собой систему алгебро-дифференциальных уравнений, описывающих влияние взаимодействующих ЭРЭ и окружающей среды на корпус термостата, с соответствующими начальными и граничными условиями и дополненную уравнениями для датчика, исполнительного элемента и регулирующего воздействия. На основании анализа уравнений из [25, 26] и с учётом принятых классификационных признаков получим математическую модель МТ в общем виде:

$$c_i(\bar{x}_i, T_i) \rho_i(x) \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \operatorname{div} \left[\lambda_i(\bar{x}_i, T_i) \operatorname{grad} T_i \right] + q_v(\bar{x}_i, T); \quad (6.25)$$

$$-\lambda_i(\bar{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} = \alpha_{ij}(\bar{x}, T_i, T_j) (T_i - T_j) - q_s(\bar{x}, T_i, T_j); \quad (6.26)$$

$$T_i|_{\tau=0} = T_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \bar{x} = (x, y, z); \quad (6.27)$$

$$P_u(\tau) = f(T_d), \quad (6.28)$$

где $P_u(\tau)$ – мощность внутренних тепловыделений исполнительного элемента; T_d – температура датчика.

Совокупность из N уравнений (6.25) описывает нестационарную теплопроводность для ЭРЭ и конструктивных элементов термостата. Граничное условие (6.26) выражает тепловые взаимодействия между термостатируемым объектом и внутренней средой, а также между корпусом и внешней окружающей средой. Уравнение (6.27) представляет собой начальные условия, а (6.28) – закон регулирующего воздействия.

Математическая модель (6.25...6.28) позволяет получить информацию о температурном поле в любой области сложной системы МТ. Однако

реализация подобной математической модели весьма затруднительна даже с применением современных ЭВМ, к тому же большое число параметров модели сильно усложняет процесс проектирования.

Известны различные подходы в проектировании термостатированных РЭС, общей чертой которых является представление объекта исследования с постепенно нарастающей степенью детализации. К числу таких подходов можно отнести аналитические методы расчёта [23, 24, 26], инженерные методы расчёта [21], численные методы расчёта с использованием ЭВМ [27] и относящиеся к ним алгоритмические модели по автоматизированному выбору функциональной схемы термостата [28].

Рассмотрим сложившиеся стадии проектирования термостатированных РЭС. На первой стадии используется модель с сосредоточенными параметрами, с небольшим числом обобщенных характеристик элементов термостата (теплоемкости, тепловые сопротивления, параметры закона регулирования и т. д.). На второй стадии проектирования используется одномерная модель, которая позволяет более детально учесть размеры отдельных элементов, их материалы, локальные тепловые связи, определить среднеповерхностные и максимальные температуры. На третьей стадии проектирования анализируется тепловой режим термостатируемого РЭС путем решения многомерной задачи для системы тел. Число рассматриваемых элементов сокращается по сравнению с одномерной моделью, но их тепловой режим описывается с большей степенью детализации.

Традиционный процесс проектирования термостатированных РЭС может быть существенно модифицирован. Для этого нами предлагается использование метода электротепловой аналогии [14] как начального этапа проектирования и реализуемого с помощью современных программ схемотехнического моделирования (ПСМ). В частности, предлагается разновидность метода электротепловой аналогии, основанная на замене исследуемого объекта с распределенными параметрами электрической цепью с сосредоточенными параметрами. Анализ эквивалентных схем замещения, полученных методом электротепловой аналогии, является принципиально новой областью применения ПСМ. В известных автору источниках [29...31] по разнообразным применениям ПСМ предложенный способ не обнаружен. Наиболее близкая из областей применения состоит в моделировании систем автоматического регулирования [32].

В качестве начального этапа проектирования МТ преимущества предложенного метода электротепловой аналогии, реализуемого с помощью ПСМ, заключаются в следующем:

- 1) возможность объединить первую и вторую стадии традиционного способа проектирования, что ведет к одновременному определению основных электрических и тепловых характеристик термостатируемого РЭС;
- 2) мощные программные комплексы схемотехнического моделирования значительно снижают трудоемкость анализа полученной

эквивалентной схемы;

3) нет необходимости на начальных стадиях проектирования составлять тепловые модели на основе уравнений теплопроводности, как с сосредоточенными параметрами, так и в одномерном виде.

Основной недостаток метода электротепловой аналогии в том, что он дает приближенное представление о поле в задаче (6.25...6.28), поскольку измерения потенциалов возможно провести не для всех точек поля, а для конечного их числа.

Начальное проектирование МТ с помощью метода электротепловой аналогии можно разделить на три основных этапа: составление структурно-функциональной схемы авторегулирования, преобразование структурно-функциональной схемы в эквивалентную электрическую схему и схемотехнический анализ электрической схемы замещения. Рассмотрим наиболее простой случай проектирования МТ, когда объект термостатирования – термочувствительные ЭРЭ – обладают пренебрежимо малыми собственными тепловыделениями, а конструктивные элементы термостата – термостатируемая подложка, датчик, нагреватель – тела с равномерными температурными полями. Указанный случай имеет место, например, при конструктивном исполнении МТ с плёночным нагревателем, распределенным по всей площади термостатируемой подложки.

Структурно-функциональная схема

Структурная схема САР теплового режима МТ (рис. 6.9) представляет собой совокупность электрической и тепловой подсистем.

САР подвержена влиянию внешних воздействий: задающему сигналу по температуре статирования $T_{зад}$ и возмущающему воздействию температуры среды $T_{ср}$. Электрическая подсистема – это схема регулирования температуры, состоящая из трех последовательных звеньев: датчика Д, усилителя УС, нагревателя Н. Тепловая подсистема включает три последовательных звена и параллельное им четвертое звено, которые соответствуют основным конструктивным элементам МТ: датчику Д, термостатируемой подложке П, нагревателю Н, корпусу К. Работа системы направлена на поддержание постоянства температуры подложки T_n (объекта термостатирования).

Найдём передаточную функцию рассматриваемой САР. Для электрической подсистемы передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W_{э}(p) = W_{дэ}(p)W_{ус}(p)W_{нэ}(p),$$

где $W_{дэ}(p)$, $W_{ус}(p)$, $W_{нэ}(p)$ – передаточные функции соответственно для датчика, усилителя, нагревателя в электрической подсистеме.

Для нахождения передаточной функции тепловой подсистемы воспользуемся правилом переноса воздействий из одной точки в другую.

После соответствующего преобразования тепловой подсистемы её передаточная функция равна:

$$W_m(p) = W_{nm}(p)W_n(p)W_{dm}(p) + W_k(p) + W_k(p)W_{dm}(p) + W_k(p)W_{dm}(p)W_n(p),$$

где $W_{nm}(p)$, $W_n(p)$, $W_{dm}(p)$ – передаточные функции соответственно для нагревателя, подложки, датчика в тепловой подсистеме.

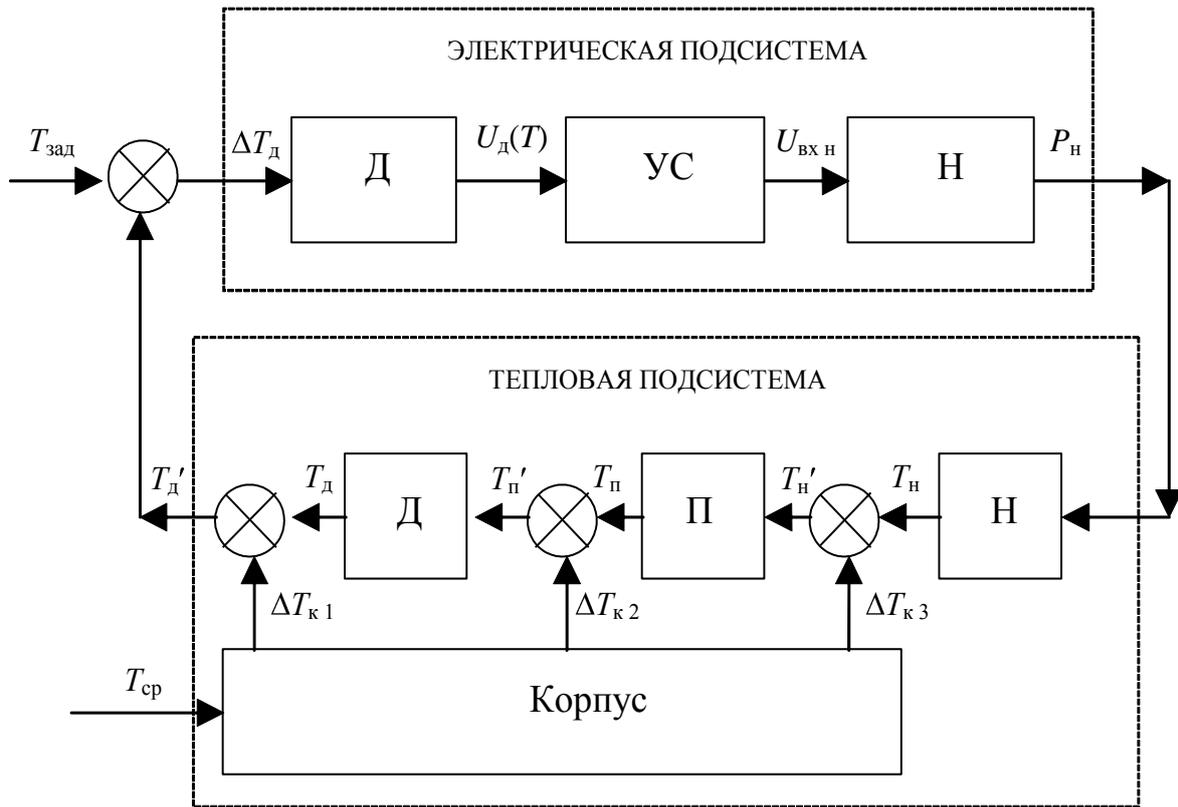


Рис. 6.9 – Структурно-функциональная схема МТ

Результирующая передаточная функция САР равна произведению передаточных функций электрической и тепловой подсистем с учетом того, что тепловая подсистема является контуром обратной связи:

$$W_{общ}(p) = \frac{W_{э}(p)}{1 - W_{э}(p) \cdot W_{т}(p)} = \frac{W_{дэ}(p) \cdot W_{ус}(p) \cdot W_{нэ}(p)}{1 - W_{дэ}(p) \cdot W_{ус}(p) \cdot W_{нэ}(p) \cdot [W_{нт}(p) \cdot W_{п}(p) \cdot W_{нт}(p) + W_{к}(p) + W_{к}(p) \cdot W_{дт}(p) + W_{к}(p) \cdot W_{дт}(p) \cdot W_{д}(p)]}$$

Эквивалентная схема замещения

На основании структурно-функциональной схемы МТ составим эквивалентную электрическую схему замещения тепловой подсистемы и объединим её с электрической подсистемой (рис. 6.10).

Внешние воздействия, оказываемые на МТ, имеют различную природу. Используя метод электротепловой аналогии, задающий сигнал и возмущающее воздействие температуры среды моделируются с помощью источников напряжения:

$$T_{зад}[K] \Rightarrow U_{зад}[B]; \quad U_{зад} = AT_{зад},$$

$$T_{ср}[K] \Rightarrow U_{ср}[B]; \quad U_{ср} = AT_{ср},$$

где A – масштабный коэффициент.

Для детального анализа свойств схемы регулирования необходимо ее полное представление в соответствии с реальной электрической принципиальной схемой.

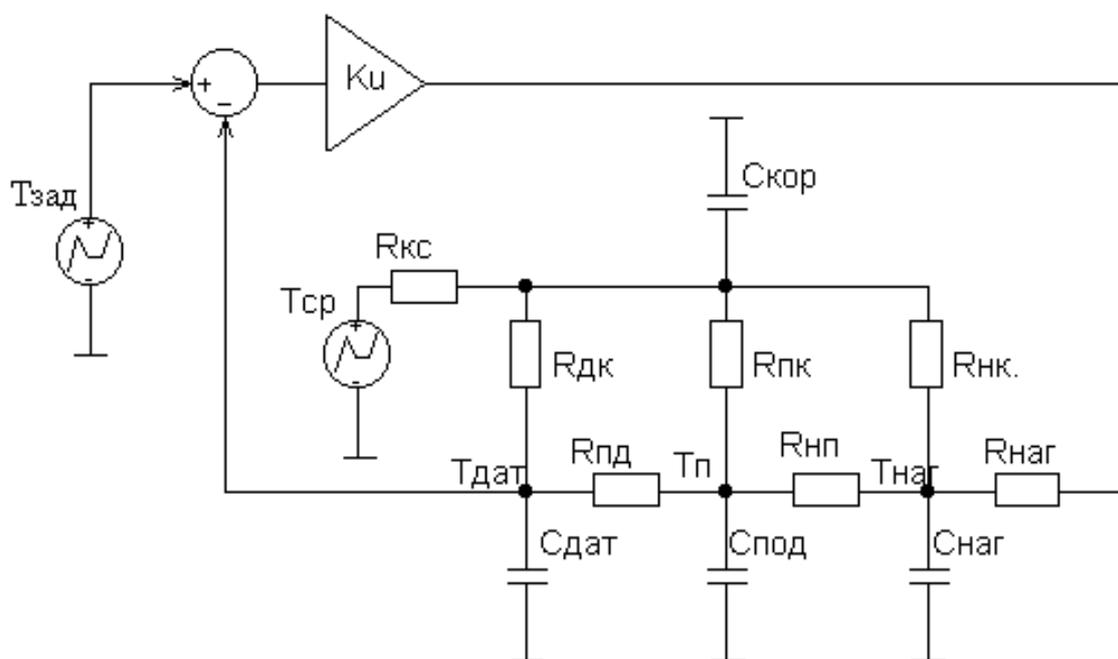


Рис. 6.10 – Эквивалентная электрическая схема замещения МТ

Передаточные функции звеньев контура регулирования температуры можно представить в следующем виде:

– передаточная функция датчика $K_{д} = \frac{\Delta U_{ВХ\ УС}}{\Delta T_{д}}$;

– передаточная функция усилителя $K_{УС} = \frac{\Delta U_{ВЫХ\ УС}}{\Delta U_{ВХ\ УС}}$;

– передаточная функция нагревателя $K_{Н} = \frac{\Delta P_{Н}}{\Delta U_{ВЫХ\ УС}}$,

где $U_{вх ус}$, $U_{вых ус}$ – входное и выходное напряжение усилителя схемы регулирования соответственно; T_{δ} – температура датчика; P_n – мощность нагревателя

На начальных этапах проектирования целесообразно замещать схему регулирования либо идеализированным вариантом операционного усилителя (рис. 6.10), либо стандартной макромоделью операционного усилителя из [32]. В обоих случаях коэффициент усиления операционного усилителя равен передаточной функции всей электрической подсистемы: $K_{oy} = W_{\Delta}(p)$.

Тепловая подсистема содержит конструктивные элементы, обладающие теплофизическими параметрами – тепловым сопротивлением, теплоёмкостью. Процесс преобразования заключается в представлении конструктивных элементов МТ интегрирующими электрическими цепями, соединенными между собой аналогично тепловой подсистеме на рис. 6.9. После преобразования имеем четыре электрических цепи со следующими передаточными функциями:

$$- \text{ для датчика: } W_{дТ}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{д} p}; \tau_{д} = R_{\delta n} C_{\delta};$$

$$- \text{ для подложки: } W_{п}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{п} p}; \tau_{п} = R_{пн} C_{п};$$

$$- \text{ для нагревателя: } W_{нТ}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{н} p}; \tau_{н} = R_{н} C_{н};$$

$$- \text{ для корпуса: } W_{к}(p) = \frac{1}{1 + \tau_{к} p}; \tau_{к} = R_{кc} C_{к};$$

$C_{ЭРЭi} = A_C C_{mi}$; $R_{ЭРЭi} = A_R R_{mi}$; $R_{ЭРЭi} C_{эли} = R_{mi} C_{mi}$, где p – комплексная переменная; τ_{δ} , $\tau_{п}$, $\tau_{н}$, $\tau_{к}$ – постоянные времени; A_C [К·Ф/Дж], A_R [Вт·Ом/К] – масштабные коэффициенты преобразования теплоёмкости в электрическую ёмкость и теплового сопротивления в электрическое сопротивление, соответственно.

Схемотехническое проектирование

При проектировании МТ основной интерес представляет анализ квазистационарного режима [32]. Применение программных комплексов схемотехнического моделирования по отношению к эквивалентной электрической схеме позволяет эффективно провести указанный вид анализа и оценить основные характеристики МТ.

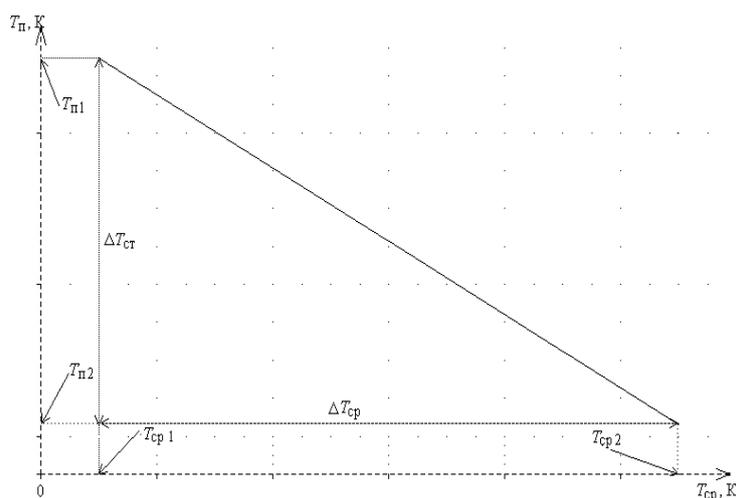


Рис. 6.11 – Зависимость погрешности термостатирования от температуры внешней среды

Анализ квазистационарного режима может быть реализован в виде расчета цепи по постоянному току методом Ньютона–Рафсона [33]. Сущность анализа заключается в нахождении функции температуры подложки от изменения температуры среды:

$$T_n = f(T_{cp}).$$

По результатам анализа (рис. 6.11) оценивается статическая погрешность температуры термостатирования:

$$\Delta T_{ст} = |T_{n\max} - T_{n\min}|.$$

Возможен также качественный анализ пускового режима МТ в частотной и временной областях (AC Sweep и Transient). В частотной области оценивается годограф коэффициента передачи разомкнутой системы, во временной области (рис. 6.12) оценивается отклик эквивалентной схемы на воздействие импульсной функции:

$$U_{BX} = \begin{cases} U_{CP}, & 0 < \tau < \tau_{вкл}; \\ U_{зад}, & \tau > \tau_{вкл}, \end{cases}$$

где $U_{cp} = AT_{cp}$ — преобразованная температура среды; $U_{зад} = AT_{зад}$ — преобразованная задающая температура; $\tau_{вкл}$ — момент времени включения МТ.

На рисунке 6.12 представлены три случая пускового режима в зависимости от соотношений постоянных времени нагревателя T_n и подложки T_n .

Сделанные выше допущения о пренебрежимо малых собственных тепловыделениях объекта термостатирования и о равномерном распределении температурного поля подложки позволяют завершить процесс проектирования на этапе схемотехнического моделирования эквивалентной схемы. В этом случае относительные изменения температуры

термостатируемых ЭРЭ $\Delta T_i/T_i$ равны между собой. Суммарный коэффициент температурной погрешности термостатируемых ЭРЭ определяется статической погрешностью температуры термостатирования:

$$\frac{\Delta N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВЫХ}}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\Delta T_i}{T_i} = \frac{\Delta T_{\text{СТ}}}{T_{\text{СТ}}} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

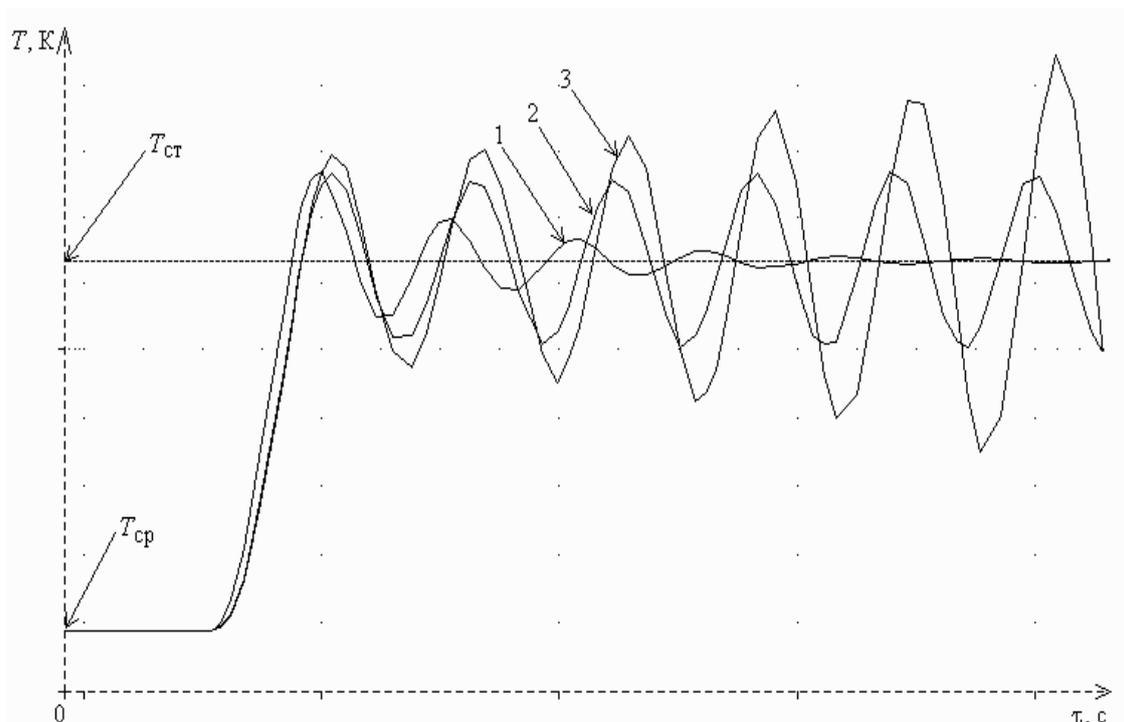


Рис. 6.12 – Анализ пускового режима при различных τ во временной области:

- 1) затухающий процесс ($\tau_n \ll \tau_n$); 2) незатухающий процесс ($\tau_n < \tau_n$); 3) расходящийся процесс ($\tau_n \approx \tau_n$)

Если объект термостатирования имеет значительные собственные тепловыделения и конструктивные элементы термостата обладают неравномерным температурным полем, то необходимо перейти к расчёту температурного поля (см. раздел 3, 4) термостатируемой подложки. Для расчёта температурного поля принимается соответствующая тепловая модель, где диапазон изменения температуры среды равен погрешности температуры статирования:

$$\frac{\Delta N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВЫХ}}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\Delta T_i}{T_i}, \quad \Delta T_{\text{ср}} = \Delta T_{\text{см}}, \quad \Delta T_i = f(\Delta T_{\text{см}}).$$

Очевидно, что наименьшая суммарная температурная погрешность выходного параметра РЭС имеет место при совместном использовании микротермостатирования и других методов термостабилизации, а также при минимизации погрешностей термостатирования.

Предложенная алгоритмическая модель электротеплового моделирования САР МТ апробирована при разработке МТ с позисторным нагревателем [34], обладающего двумя теплоинерционными звеньями и нагревателем, распределенными по всей площади термостатируемой подложки.

Сравнение переходных процессов производилось для одинаковых значений коэффициента передачи усилителя $K_{2c} = W_{2c}(P)$. В процессе экспериментального снятия переходных характеристик на модели и реальных образцах контролировалась величина температуры датчика t_{θ} . Кроме того, как гибридно-пленочный, так и дискретный МТ содержали в первом случае на подложке, а во втором – в камере, т.е. внутри термостатируемого объекта, дополнительный датчик температуры, предварительно проградуированный.

Результаты уравнения переходных характеристик модели и «эталонных» МТ приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Результаты сравнения переходных характеристик модели и «эталонных» МТ

Исследуемый объект Критерий	Модель					Эталон				
	K_{01}	K_{02}	K_{03}	K_{04}	K_{05}	K_{01}	K_{02}	K_{03}	K_{04}	K_{05}
Длительность переходного процесса $T_{пер}, с$	33	33,5	33,5	55	115	33	33,5	33,5	55	113
Количество переходов через нуль за время, N	–	22	44	66	115	–	22	44	66	113
Период колебания, с	–	22	22	22	22,5	–	22	22	22	22
Длительность переходного процесса $T_{пер}, с$			4	6	7	4	6	6		
Количество переходов через нуль за время, N			–	2	6	–	2	6		
Период колебания, с			–	2,5	2	–	3	2,5		

При сравнении приведенных характеристик использовались критерии:

- длительность переходного процесса;
- количество переходов через «нуль» на заданной временном интервале;
- период колебаний при периодическом характере процесса.

Результаты сравнения показывают близость количественных и качественных характеристик исследуемых «эталонных» МТ и построенной модели. Поэтому модель можно считать адекватной и использовать её в дальнейших исследованиях.

Далее будет показано, что несмотря на большие погрешности модели, вносимые допущениями, он позволяет рассмотреть конкретные особенности различных конструкций МТ, а также провести оптимизацию САР по точности при применении регуляторов пропорционального типа.

6.2 Выбор оптимальных значений параметров элементов гибридно-пленочных и дискретных МТ

Характеристическое уравнение исследуемой САР имеет вид

$$T_H T_\partial T_0 p^3 + (T_H T_\partial + T_H T_0 + T_\partial T_0) p^2 + (T_H + T_\partial + T_0) p + (1 + K_0) = 0.$$

Зная условие устойчивости, определим максимальное значение K_0 на границе устойчивости:

$$\begin{aligned} K_{0\max} &= \frac{(T_H T_\partial + T_H T_0 + T_\partial T_0)(T_H + T_\partial + T_0) - T_H T_\partial T_0}{T_H T_\partial T_0} = \\ &= 2 + \frac{T_H}{T_0} + \frac{T_H}{T_\partial} + \frac{T_\partial}{T_0} + \frac{T_\partial}{T_H} + \frac{T_0}{T_\partial} + \frac{T_0}{T_H} \end{aligned} \quad (6.29)$$

С учётом значений T_H, T_∂, T_0 , получаем:

$$\begin{aligned} K_{0\max} &= 2 + \frac{R_{H0} C_H}{\frac{R_{K0}}{R_{K0} + R_{H0}} R_{H0} C_0} + \frac{R_{H0} C_H}{R_{\partial 0} C_\partial} + \frac{R_{\partial 0} C_\partial}{\frac{R_{K0}}{R_{K0} + R_{H0}} R_{H0} C_0} + \\ &+ \frac{R_{\partial 0} C_\partial}{R_{H0} C_0} \frac{\frac{R_{K0}}{R_{K0} + R_{H0}} R_{H0} C_0}{R_{\partial 0} C_\partial} \frac{\frac{R_{K0}}{R_{K0} + R_{H0}} R_{H0} C_0}{R_{H0} C_H} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Имеется также уравнение, описывающее установившийся процесс регулирования:

$$\varphi_g = \frac{\Delta\theta}{1 + K_0} = \Delta sm.$$

Таким образом:

$$\Delta sm = f(K_{0\max}) = f(T_H; T_\partial; T_0) = f(R_{H0}; C_H; R_{K0}; C_\partial; R_{\partial 0}; C_0).$$

Рассмотрим зависимость $K_{0\max} = f(T_H; T_\partial; T_0)$ по (6.29).

Предположим, что величина T_0 неизменна, т.е. возьмем подложку с постоянными размерами. Условно зафиксируем величины тепловых сопротивлений R_{H0} , R_{D0} , R_{K0} считая, что величины T_H , T_D , T_0 зависят только от теплоемкостей этих элементов. В этом случае, варьируя размерами нагревателя и датчика, а следовательно, и теплоемкостями C_H , C_D , можно получить такие соотношения $\alpha = \frac{T_0}{T_H}$ и $\beta = \frac{T_0}{T_D}$, при которых K_{0max} стремится к максимальному значению. Действительно:

$$K_{0max} = 2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} + \beta + \alpha = \frac{\alpha + \beta^2 + \alpha + \beta + 1 + \alpha\beta}{\alpha\beta}. \quad (6.31)$$

Если $\alpha \gg 1$, $\beta \gg 1$ и $\alpha \approx \beta$, то $K_{0max} = 4 + \beta + \alpha$.

На рисунке 6.13 приведены зависимости $K_{0max} = f(\alpha, \beta)$. Анализ указанных зависимостей показывает, что величина K_{0max} существенно зависит от величин α и β , причем, изменяя эти соотношения, можно обеспечить требуемые значения K_0 .

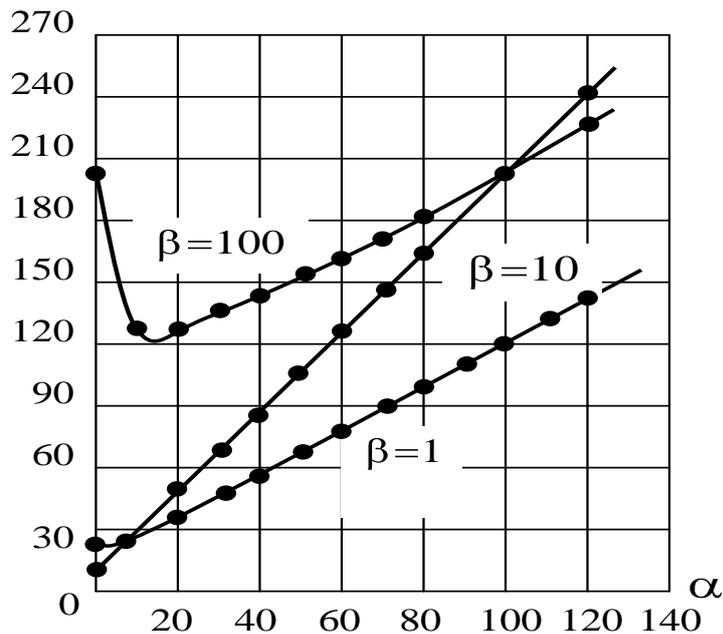


Рис. 6.13 – Расчетные зависимости $\alpha = \frac{T_h}{T_H}$; $\beta = \frac{T_h}{T_g}$

По характеру приведенных на рис. 6.13 зависимостей можно высказать ориентировочные рекомендации по выбору α и β . При $\alpha \gg 1$, $\alpha < 10$ и $\beta \gg 1$ величина K_{0max} увеличивается, поэтому на первом этапе оптимизации зафиксируем случай $C_g \ll C_0$, т.е. $\beta \gg 1$ и в дальнейшем рассмотрим зависимость $K_{0max} = f(R_{H0}; C_H; C_0; R_{K0}; R_{D0})$.

Отметим также, что представленные выше зависимости $K_{0\max} = (\alpha, \beta)$ ещё не дают полного представления о характере влияния каждого из 5 факторов на интересующую нас зависимость, поскольку увеличение $K_{0\max}$ возможно в двух случаях: $\alpha \gg 1$, $\alpha < 10$. Очевидно, что по виду выражения (5.30) довольно трудно сделать выводы о том, как влияет каждый из факторов на величину $K_{0\max}$ и в какую сторону необходимо изменять величины $R_{но}$, $R_{до}$, $R_{ко}$, C_o , C_n , чтобы в интервале их допустимых значений добиться максимальной величины $K_{0\max}$. Поэтому, не ставя задачу представления (6.30) в виде адекватного ему уравнения регрессии, представим его в виде линейной модели:

$$K_{0\max} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5, \quad (6.32)$$

где

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^N X_{ij} K_{0\max}}{N}; \quad B_i = \frac{\sum_{j=1}^N X_{ij} K_{0\max}}{N}; \quad X_{ij} = \frac{\tilde{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij0}}{|\tilde{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij0}|}.$$

Причем i – номер фактора; j – номер опыта; N – число опытов; X_{ij} – кодированное значение i -фактора в j - опыте.

При представлении (6.30) в виде (6.32) будем использовать имитационное моделирование эксперимента, поскольку как таковой эксперимент отсутствует, а используется лишь математический аппарат полного факторного эксперимента (ПФЭ) вида 2^K при $K = 5$. В таблице 6.2 расшифровываются начальные значения интервалов варьирования и условные обозначения факторов. В ней, наряду с кодированными значениями факторов, приведены расчетные значения постоянных времени T_o , T_n , T_d по выражениям (6.2), (6.13), (6.14).

Таблица 6.2 – Начальные значения интервалов варьирования

Фактор	Условное обозначение фактора	Нижний уровень	Основной уровень	Верхний уровень
$R_{но}$	X_1	5	12,5	20
$R_{до}$	X_2	20	35	50
$R_{ко}$	X_3	20	40	60
C_o	X_4	1	2	3
C_n	X_5	0,024	0,102	0,18
Кодированное значение фактора		-1	0	+1

Поскольку мы не ставим задачу представления уравнения (6.30) в виде адекватного ему уравнения регрессии, ограничимся анализом величин и знаков полученных коэффициентов:

$$\begin{array}{lll}
 B_0 = 389,90 & B_{12} = -74,60 & B_{25} = -8,14 \\
 B_1 = 168,48 & B_{13} = 44,15 & B_{34} = 29,47 \\
 B_2 = -150,62 & B_{14} = 76,83 & B_{35} = -3,35 \\
 B_3 = 58,93 & B_{15} = 15,64 & B_{45} = -13,47 \\
 B_4 = 180,80 & B_{23} = -23,40 & B_{123} = 18,78 \\
 B_5 = -7,95 & B_{24} = -70,14 & B_{124} = 34,10 \\
 B_{125} = -4,80 & B_{234} = -11,80 & B_{235} = -0,08 \\
 B_{134} = 22,18 & B_{135} = -1,20 & B_{145} = 2,10 \\
 B_{345} = -1,64 & B_{245} = 0,025 & B_{1234} = -9,08
 \end{array}$$

Легко усмотреть малое влияние величины $C_n(X_5)$ на K_{0max} в заданном интервале варьирования. Поэтому в дальнейшем исключим параметр C_n из числа параметров, подлежащих оптимизации.

Как показали исследования, величина C_n в то же время сильно влияет на динамические свойства САР, а именно, на длительность переходного процесса. Для уточнения этого момента нами был поставлен дополнительный эксперимент по плану 2^{5-2} . Такое решение было принято с учётом того обстоятельства, что в реальных условиях длительность переходного процесса точно измерить практически невозможно, а информация, полученная в ходе эксперимента, является скорее качественной, чем количественной. Эксперимент проводился на аналоговой модели с параметрами «эталонного МТ» (см. таблицу 6.1). При проведении эксперимента была реализована 2/4 реплика с обобщающим определяющим контрастом [35]:

$$1 = X_2 X_4 X_5 = X_1 X_3 X_4 = X_1 X_2 X_3 X_5.$$

Матрица планирования эксперимента, основные результаты и результаты проверки адекватности приведены в таблице 6.3.

Условие адекватности

$$F = \frac{S^2_{ad}}{S^2_{T_{пер}}} \leq Fm$$

для нашего случая имеет вид: $F = 2,8 < 19,5$, т. е. полученное уравнение регрессии

$$T_{пер} = 3,36 + 1,13X_1 + 1,38X_2 + 0,49X_4 - 0,49X_3 + 1,76X_5 \quad (6.33)$$

адекватно описывает исследуемый процесс в области заданных интервалов варьирования факторов.

Таблица 6.3 – План эксперимента $2^{5-2} T_{пер} = f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$

№	Порядок опыта	Уровень фактора					K_0	$K_{0\text{ расч}}$	$T_{пер}$	$T_{пер p}$	$(T_{пер i} - T_{пер ip})^2$
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5					
1	8	–	–	–	+	–	473	440	0,4	0,07	0,1089
2	2	+	–	+	+	–	1420	1360	1,0	1,35	0,1225
3	5	–	+	+	–	–	100	95	1,0	0,87	0,0169
4	4	+	+	–	–	–	150	140,5	4,0	4,11	0,0121
5	1	–	–	+	–	+	175	162	1,6	1,63	0,0169
6	7		–	–	–	+	400	384	5,0	4,87	0,0169
7	3	–	+	–		+	168	160	6,0	6,35	0,1225
8	6	+	+	+	+	+	605	555,6	8,0	7,63	0,1369
		1,13	1,38	–0,49	0,49	1,76			3,36		$\sum_{i=1}^8 = 0,5536$
$S_{AD}^2 = 0,2768 \quad S_{T_{пер}}^2 = 0,1$											$F = 2,8$

Анализ уравнения (6.33) показывает, что величина $C_n(X_5)$ значительно влияет на качество переходного процесса, причём с увеличением C_n увеличивается $T_{пер}$, что, в свою очередь, приводит к увеличению времени выхода на режим и к ухудшению динамических свойств САР.

В таблице 6.3 наряду с величиной $T_{пер}$ приведены значения K_0 на модели и $K_{0\text{ расч}}$, рассчитанные по выражению (6.25).

Учитывая погрешности ЭВМ, имеем их удовлетворительное совпадение. Поскольку ставится задача получения максимальной точности при минимальной длительности переходных процессов, целесообразно проанализировать зависимость

$$K_0 = f(X_1; X_2; X_3; X_4; X_5),$$

где

$$K_0 = \frac{K_0}{T_{пер}}. \quad (6.34)$$

Устремляя величину K_0 к максимуму, реализуем поставленную задачу. Расчёт K_0 для поставленной серии опытов 2^{5-2} даёт следующие величины:

$$\begin{aligned} K_{01} &= 1180 & K_{05} &= 117 \\ K_{02} &= 1420 & K_{06} &= 80 \\ K_{03} &= 100 & K_{07} &= 28 \\ K_{04} &= 37,5 & K_{08} &= 75,6 \end{aligned}$$

Таким образом, для увеличения K_0 необходимо двигаться в следующих направлениях:

$$\begin{aligned} R_{H0} &\rightarrow \max; R_{K0} \rightarrow \max; C_H \rightarrow \max. \\ R_{g0} &\rightarrow \min; C_0 \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Таблица 6.4 – Предельные значения K_{0max} для МТ различных модификаций

Тип МТ	ГПММТ с датчиком	ГПММТ с датчиком ММТ-8	ГПБМТ с датчиком ММТ-6	ГПБМТ с датчиком транзистором	ДМТ
K_{0max}	$50 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^2$	10^3	10^5	10^3

Отметим, что эти рекомендации совпадают со знаками коэффициентов регрессии, полученных при реализации условного эксперимента $K_{0max} = f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ по плану 2^5 .

Воспользуемся методом крутого восхождения и в соответствии с (6.35) зададимся предельными значениями рассматриваемых факторов. Результаты расчета экстремальных значений K_{0max} для МТ трёх рассматриваемых групп и различных их модификаций сведены в таблице 6.4.

Результаты расчета Δ_{cm} для различных условий эксплуатации сведены в таблице 6.5.

Таблица 6.5 – Предельная статистическая ошибка регулирования Δ_{cm} МТ различных модификаций в различных условиях эксплуатации

Тип МТ	ГПММТ с транзисторным датчиком	ГПММТ с датчиком ММТ-6	ГПБМТ с ММТ-6	ГПБМТ с датчиком транзистором	ДМТ
Нормальные условия $\Delta T_{cp} = 20K$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Полевые условия $\Delta T_{cp} = 100K$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$

Жесткие условия

$$\Delta T_{cp} = 150\text{K} \quad 3 \cdot 10^{-3} \quad 3 \cdot 10^{-1} \quad 1,5 \cdot 10^{-3} \quad 1,5 \cdot 10^{-3} \quad 1,5 \cdot 10^{-1}$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что, задавая значения рассматриваемых конструктивных параметров в найденной экстремальной области, можно получить статическую погрешность пропорционального регулятора, пренебрежимо малую по сравнению с погрешностью, задаваемой типом датчика, нестабильностью элементов и т. п. Заведомо уменьшая величину K_{2C} – коэффициента усиления усилителя, можно обеспечить достаточную точность и малое значение T_{nep} .

6.2.1 Выбор оптимальных соотношений конструктивных размеров для минимизации мощности потерь гибридно-пленочных и дискретных МТ

Рассмотрим вопросы улучшения энергетических и массогабаритных показателей для гибридно-пленочных МТ двух исследуемых групп. Как показано в [16], мощность потерь P_{nom} МТ и его габаритные размеры находятся в противоречивых соотношениях. Так, увеличение толщины теплоизоляции δ , с одной стороны, уменьшает тепловые потери МТ, с другой – увеличивает его размеры и, следовательно, рассеяние тепла с поверхности кожуха МТ. В общем случае для МТ имеет место

$$P_{nom} = \frac{t_{cm} - \theta}{R_{K0} + R_{KC}}, \quad (6.36)$$

где t_{cm} – температура статирования; θ – температура среды.

Нетрудно заметить, что $R_{K0} = f(\delta)$, $R_{KC} = f(\delta)$, причем при возрастании δ наблюдается рост R_{K0} и уменьшение R_{KC} .

Для обобщенной конструкции гибридно-пленочного МТ теплоизоляция представляет собой оболочку параллелепипеда с размерами $b \times l \times h$, т.е. с размерами термостатируемой подложки. Известно [2]:

$$R_{об} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{L_x L_y - L_y l_z}{\delta_{x1} \delta_{x2} \ln \frac{L_z l_y}{L_y l_z}} + \frac{L_x l_z - L_z l_x}{\delta_{y1} \delta_{y2} \ln \frac{L_x l_z}{L_z l_x}} + \frac{L_y l_x - L_x l_y}{\delta_{z1} \delta_{z2} \ln \frac{L_y l_x}{L_x l_y}} \right], \quad (6.37)$$

где δ_{xi} , δ_{yi} , δ_{zi} – толщины оболочки по соответствующим осям; L_x , L_y , L_z – внешние размеры оболочки; l_x , l_y , l_z – внутренние размеры оболочки; λ – теплопроводность материала теплоизоляции.

Для нашего случая

$$L_z = H, L_x = L, L_y = B, l_z = h, l_x = l, l_y = b,$$

причём

$$B = b + \delta_{y1} + \delta_{y2}; L = l + \delta_{x1} + \delta_{x2}; H = h + \delta_{z1} + \delta_{z2}..$$

Если $\delta_{y1} = \delta_{y2} = \delta_{x1} = \delta_{x2} = \delta_{z1} = \delta_{z2} = \delta$, получаем

$$R_{K0} = \frac{1}{4\lambda \left[\frac{b-h}{\ln \frac{(h+2\delta)b}{(b+2\delta)h}} \frac{h-l}{\ln \frac{(l+2\delta)h}{(h+2\delta)l}} \frac{l-b}{\ln \frac{(b+2\delta)l}{(l+2\delta)b}} \right]}. \quad (6.38)$$

На практике очень часто толщина теплоизоляции δ неодинакова в верхней, нижней и боковой частях оболочки. Можно предположить, что имеется некоторое оптимальное значение коэффициента

$$K = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad (6.39)$$

где δ_1 – толщина оболочки между торцом подложки и боковой поверхностью кожуха, или

$$\delta_1 = \delta_{y1} = \delta_{y2} = \delta_{x1} = \delta_{x2} = \delta_{z1} = \delta_{z2}, \text{ а } \delta = \delta_{z1} = \delta_{z2}.$$

Конечно, такое предположение может быть справедливым лишь для малых величин h , что имеет место для подложек. В этом случае уменьшение K до определенной величины не должно привести к существенному уменьшению R_{K0} , в то же время величина R_{Kc} может быть увеличена за счёт уменьшения площади кожуха S_K . С учётом (6.39) выражение (6.37) принимает вид

$$R_{K0} = \frac{1}{4\lambda \left[\frac{b-Kh}{K \ln \frac{(h+2\delta)b}{(b+2K\delta)h}} \frac{Kh-l}{K \ln \frac{(l+2K\delta)h}{(h+2\delta)l}} \frac{K(l-b)}{\ln \frac{(b+2K\delta)l}{(l+2\delta)b}} \right]}. \quad (6.40)$$

Расчёт на ЭВМ семейства характеристик $R_{k0} = f(K)$ при различных δ подтвердил предположение о наличии оптимальной величины K . Результаты расчёта приведены на рисунке 6.14. Анализ позволяет сделать следующие выводы:

- для гибридно-плёночных МТ малых размеров оптимальной величиной K следует рекомендовать $K = 0,8$;
- для тех же МТ больших размеров при $K = 0,6$ практически не уменьшается величина R_{k0} .

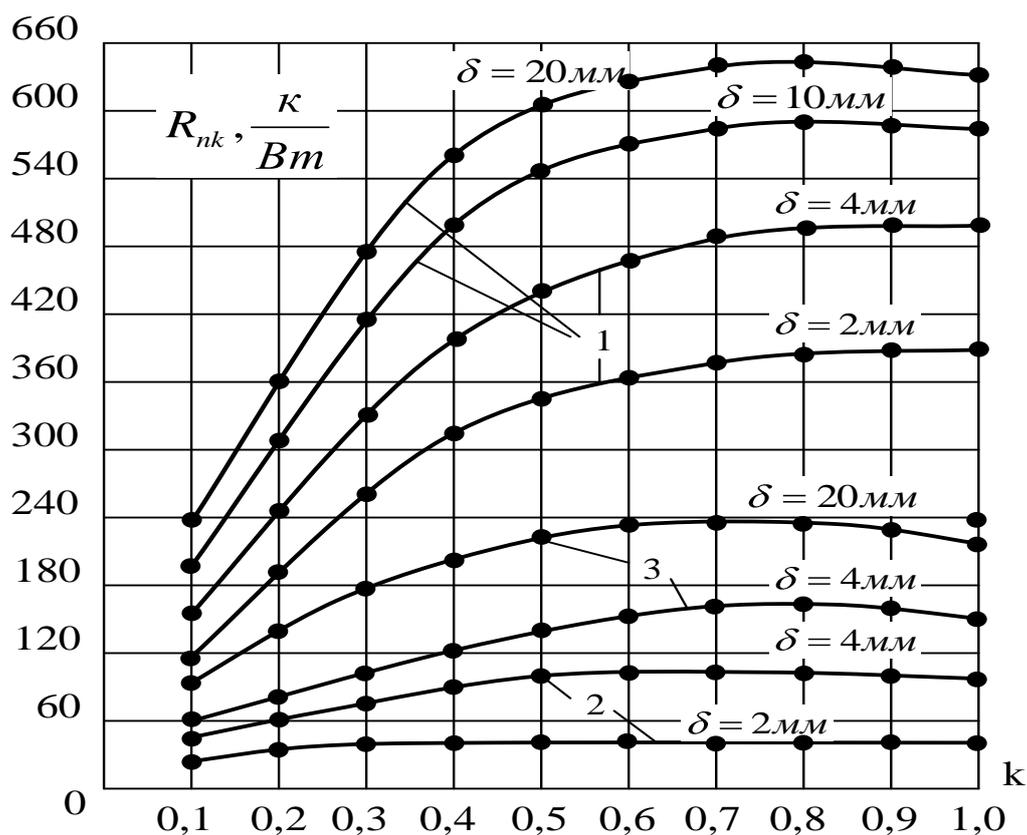


Рис. 6.14 – Расчётные зависимости $R_{nk} = f(k)$ при различных δ .

$$1 - (b \times l \times h) = (3 \times 5 \times 0,6) \text{ мм}^3, \quad 2 - (b \times l \times h) = (20 \times 30 \times 0,6) \text{ мм}^3, \\ 3 - (b \times l \times h) = (10 \times 12 \times 0,6) \text{ мм}^3$$

Расчёты также показывают, что использование рекомендуемых значений K позволяет уменьшить поверхность корпуса МТ на 20...30%.

Далее перейдем к поиску оптимума в зависимости $P_{nom} = f(\delta)$ при оптимальных значениях K .

В общем случае величину P_{nom} можно определить, имея систему уравнений, описывающую теплообмен с поверхности корпуса естественной конвекцией по закону степени 1/4 и излучением [2, 16]:

$$\left. \begin{aligned}
R_{KC} &= \frac{1}{\sigma_{KC}}; \quad \sigma_{KC} = \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\delta} + \sigma_{\alpha H} + \sigma_{\alpha\lambda}; \\
\sigma_{\alpha\beta} &= \alpha_{kb} \times S_b; \quad \sigma_{\alpha\delta} = \alpha_{k\delta} \times S_\delta; \quad \sigma_{\alpha H} = \alpha_{kH} \times S_H; \\
\sigma_{\alpha\lambda} &= \alpha_\lambda \times S_K; \quad S_b = S_H = (b + 2K\delta)(l + 2K\delta); \\
S_\delta &= 2(b + l + 4K\delta)(h + 2\delta); \quad S_K = 2S_b + S_\delta; \\
\alpha_{kb} &= 1,3A_2 \left(\frac{t_k - T_{cp}}{l + 2K\delta} \right)^{0,25}; \quad \alpha_{k\delta} = A_2 \left(\frac{t_k - T_{cp}}{l + 2\delta} \right)^{0,25} \\
\alpha_\lambda &= 5,67 \varepsilon_k \varphi \left[\left(\frac{t_k + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{cp} + 273}{100} \right)^4 \right]; \\
\hat{t}_k &= T_{cp} + \frac{t_{cm} + T_{cp} R_{KC}}{R_{K0} + R_{KC}}; \\
R_{K0} &= \frac{1}{4\lambda \left[\frac{b - Kh}{K \ln \frac{(h + 2\delta)b}{(b + 2K\delta)h}} \frac{Kh - L}{K \ln \frac{(l + 2K\delta)h}{(h + 2\delta)l}} \frac{K(l - b)}{\ln \frac{(b + 2K\delta)l}{(l + 2K\delta)b}} \right]} \\
t_m &= \frac{t_k + T_{cp}}{2}; \quad P_{nom} = \frac{t_{cm} - T_{cp}}{R_{K0} + R_{KC}}; \\
\alpha_{KH} &= 0,7A_2 \left(\frac{t_k - T_{cp}}{l + 2K\delta} \right)^{0,25}; \\
A_2 &= 0,54 \beta g P_r^{0,25} \frac{\lambda_m}{\gamma_m^{0,25}},
\end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

где β , Pr , λ_m , γ_m – теплофизические параметры воздуха; φ – коэффициент облученности; g – ускорение свободного падения; ε_k – степень черноты поверхности корпуса.

Для упрощения расчёта методом аппроксимации было получено

$$\left\{ \begin{aligned}
A_2 &= 1,416 - 0,00108 \cdot \left(\frac{t + t_c}{2} \right), \quad 10^\circ\text{C} < t_m < 70^\circ\text{C}; \\
A_2 &= 1,336 - 0,0006 \cdot \left(\frac{t + t_c}{2} \right), \quad -70^\circ\text{C} < t_m < 150^\circ\text{C}.
\end{aligned} \right. \quad (6.42)$$

В рассматриваемом диапазоне температур (6.42) удовлетворительно совпадает с исходным выражением.

Решая систему (6.41) с учётом (6.42) относительно P_{nom} методом итераций, получаем величину P_{nom} для различных типоразмеров подложки, толщин теплоизоляции, температур среды θ , степеней черноты ε_k . Алгоритм расчета на ЭВМ зависимости $P_{nom} = f(\delta)$ по (6.41) приведен на рисунке 6.15.

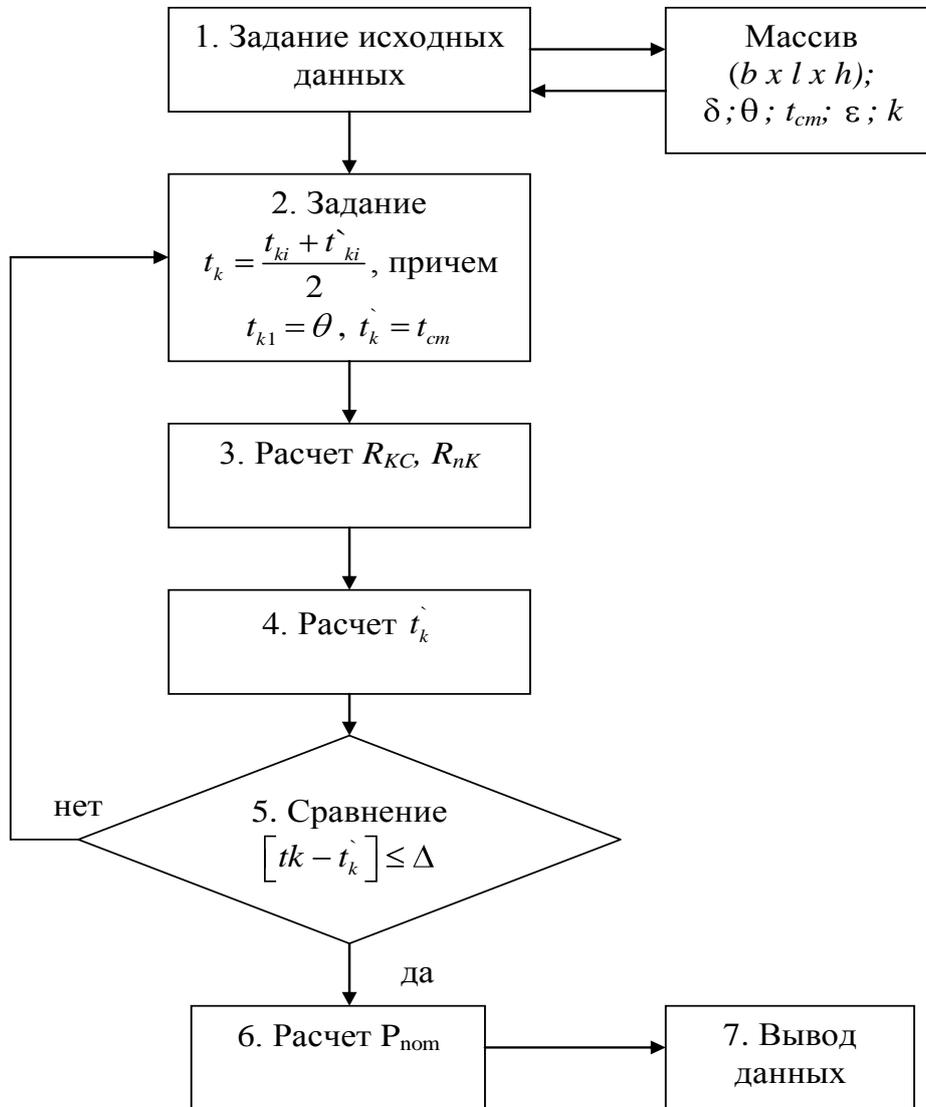


Рис. 6.15 – Укрупненный алгоритм расчёта $P_{nom} = f(\delta)$

На рис. 6.15 приведены наиболее интересные результаты реализации данного алгоритма на ЭВМ, анализ которых позволяет сделать следующие выводы:

- для гибридно-пленочных МТ малых и больших размеров нет чётко выраженной оптимальной толщины теплоизоляции;
- в конструкцию ГПМ МТ слой теплоизоляции вводить нецелесообразно, достаточно прослойки воздуха толщиной 2 мм;

– в конструкции ГПБМТ толщина теплоизоляции должна быть не более 10 мм, это обеспечивает малые тепловые потери и минимальные массогабаритные показатели.

Для подтверждения результатов теоретических исследований были разработаны и изготовлены 2 образца гибридно-плёночных МТ, относящихся к первой и второй группам. Внешний вид ГПБ МТ «эталонного» приведен на рис. 6.16.

Внешний вид ГПМ МТ приведен на рис. 6.17, конструкция выводов – на рис. 6.18.

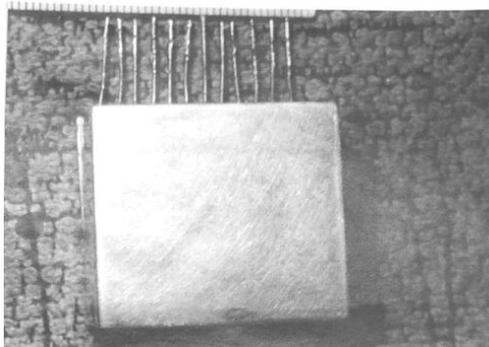


Рис. 6.16 – Внешний вид ГПБМТ

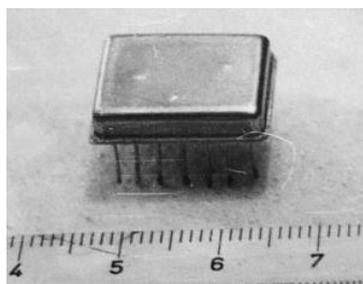


Рис. 6.17 – Внешний вид экспериментального образца ГПММТ

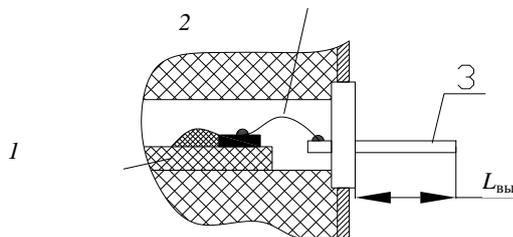


Рис. 6.18 – Конструкция выводов для гибридно-плёночных МТ:
1) подложка; 2) соединительные проводники; 3) выходы

В таблице 6.6 приведены результаты расчётов и экспериментов для указанных МТ (при определении $P_{пот.экс.}$ замерялась величина тока нагревателя I_H при различных температурах среды в установившемся режиме, а $P_{пот} = I_H E_n$).

Таблица 6.6 – Результаты сравнения расчётных и экспериментальных значений

Параметр	ГПМ МТ		ШГПБ МТ	
	$T_{cp} = -60\text{ }^{\circ}\text{C}$	$T_{cp} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$	$T_{cp} = -60\text{ }^{\circ}\text{C}$	$T_{cp} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$
$P_{пот.расч.}$, Вт	0,28	0,075	0,76	0,31
$P_{пот.эксп.}$, Вт	0,32	0,084	0,79	0,34

Результаты сравнения показывают, что наибольшая погрешность имеет место для МТ 1-й группы. Дополнительные исследования позволили установить, что эта погрешность объясняется влиянием выводов на тепловые потери [36, 37].

Оценим это влияние для рассматриваемых групп. На рис. 6.19 приведена эквивалентная схема передачи тепла через выводы для конструкции, изображенной на рисунке 6.18. Схема составлена с учётом допущения о пренебрежимости теплоотдачи конвекцией и излучением с поверхности соединительных проводников.

С поверхности выводов теплоотдача определяется величиной

$$R_{выв.ср.} = \frac{1}{\alpha_k + \alpha_\lambda S_{выв.}}$$

где α_k , α_λ – коэффициенты теплоотдачи; $S_{выв.}$ – площадь поверхности выводов.

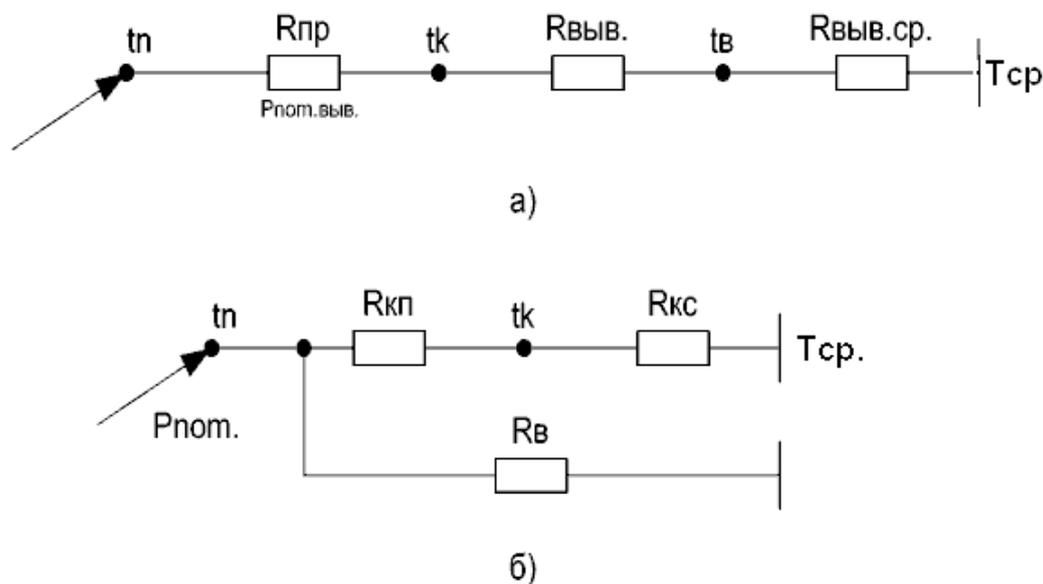


Рис. 6.19 – Эквивалентная схема потерь тепла через выводы (а) и эквивалентная схема МТ с учётом выводов (б)

Тогда для n выводов

$$R_{np} = \frac{4l_{np}}{\lambda_{np} \cdot n \cdot \pi \cdot d_{np}^2} \cong \frac{4K\delta}{\lambda_{np} \cdot n \cdot \pi \cdot d_{np}^2}, \quad (6.43)$$

где $K\delta$ – толщина теплоизоляции; λ_{np} – теплопроводность материала соединительных проводников; d_{np} – диаметр соединительных проводников.

Для определения $R_{\text{выв}} и R_{\text{выв.ср}}$ предположим, что закон убывания температуры вывода соответствует случаю охлаждения полубесконечного стержня, описанному С.Н. Шориным:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot e^{-mx}; \quad m^2 = \frac{4\alpha}{\lambda_g d_g}, \quad (6.44)$$

где φ_1 – перегрев вывода на границе теплоизоляции; α – полный коэффициент теплоотдачи от вывода в среду, $\alpha = \alpha_k + \alpha_\lambda$; λ_g – теплопроводность материала вывода; d_g – диаметр вывода; x – текущая координата.

Определим некоторую длину вывода l_0 , на которой $\varphi = 0,1\varphi_1$:

$$0,1\varphi_1 = \varphi_1 e^{-ml_0} \quad \text{или} \quad e^{ml_0} = 10,$$

т. е.

$$e \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda_g d_g}} = 10.$$

Отсюда

$$l_0 = \frac{\ln 10}{\sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda_g d_g}}} = 2,3 \sqrt{\frac{\lambda_g d_g}{4\alpha}}. \quad (6.45)$$

Оценка l_0 по (6.45) показывает, что для всех конструкций МТ выполняется условие: $l_{\text{выв}} \ll l_0$, отсюда примем $t_g \cong t_k$, т.е. температура выводов приблизительно равна температуре корпуса. С учетом этого на рисунке 6.19, а $R_{\text{выв}} \cong 0$, и окончательно:

$$\left\{ \begin{aligned}
 R_{\text{выб.ср.}} &= \frac{1}{n\alpha S_{\text{выб}}} \approx \frac{1}{n\pi d_{\text{выб}} l_{\text{выб}} (\alpha_k + \alpha_\lambda)}; \\
 \text{где } \alpha_k &= A_2 \left(\frac{tk - T_{\text{ср}}}{l_{\text{выб}}} \right)^{0,25}; \quad A_2 = 1,42 - 0,002t_m; \\
 t_m &= \frac{t_k + T_{\text{ср}}}{2}; \quad \alpha_\lambda = 5,67\varepsilon_{\text{выб}} \cdot f(t_k, T_{\text{ср}}); \\
 f(t_k, T_{\text{ср}}) &= \left[\left(\frac{tk + 273}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_{\text{ср}} + 273}{100} \right)^4 \right]; \\
 R_g = R_{\text{нр}} + R_{\text{выб.ср.}} &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{4K\delta}{\lambda_{\text{нр}} d_{\text{нр}}^2} + \frac{1}{d_{\text{выб}} l_{\text{выб}} (\alpha_k + \alpha_\lambda)} \right].
 \end{aligned} \right. \quad (6.46)$$

Расчёт системы (6.46) на ЭВМ позволил получить зависимости $R_g = f(n)$ для материалов и размеров проводников, широко применяемых при гибридно-плёночной технологии (рис. 6.20 и 6.21). Толщина теплоизоляции δ выбрана в соответствии с описанными выше рекомендациями.

Сравнение полученных данных с данными расчета $R_{KO} = f(K, \delta)$ показывает существенное влияние R_g на R_{KO} . Для гибридно-плёночных МТ малых размеров при $n \geq 10$ величина R_g сравнима по величине с R_{KO} , следовательно, мощность потерь через выводы может составлять более 50% от расчётной по рассмотренной ранее методике. Для МТ II-й группы это влияние значительно меньше и, по предварительной оценке, составляет 10...20%.

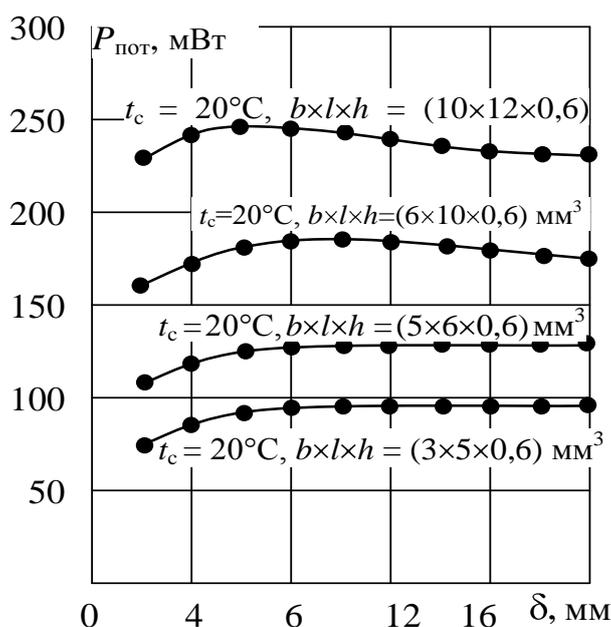


Рис. 6.20 – Расчётные зависимости $R_g = f(n)$ для различных типоразмеров подложек, $t_{cm} = 80$ °C; $\varepsilon = 0,05$

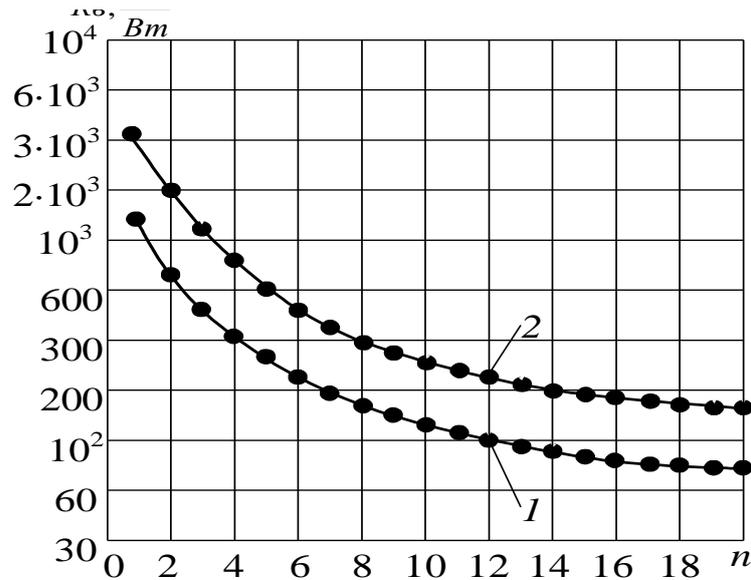


Рис. 6.21 – Расчётные зависимости $R_g = f(n)$: 1) для ГПМ МТ, 2) для ГПБ МТ

Для расчёта R_g при проектировании МТ рекомендуем использовать полученное выражение:

$$R_g = \frac{1}{n\pi} \left[\frac{4\delta K}{\lambda_{np} \cdot d_{np}^2} + \frac{1}{d_{выв.} \cdot l_{выв.} \alpha_k + \alpha_\lambda} \right]. \quad (6.47)$$

6.2.2 Выбор конструктивных параметров дискретных МТ

Обобщенная конструкция исследуемых дискретных МТ отличается от гибридно-плёночных размерами термостатируемого объекта (камеры), что отражается на величине T_o . Как показали экспериментальные и теоретические исследования, это приводит к увеличению K_{0max} . При этом легко показать, что увеличение T_o приводит к улучшению качества переходных процессов САР. Обозначим:

$$\alpha_1 = T_H + T_D + T_{КАМ} = T_{КАМ} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 \right);$$

$$\alpha_1 = T_H T_D + T_{КАМ} T_D + T_{КАМ} T_H = T_{КАМ}^2 \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right); \quad (6.48)$$

$$\alpha_3 = T_H T_D T_{КАМ} = \frac{T_{КАМ}^3}{\alpha\beta}.$$

Предположим, что $\alpha \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \alpha_3 = 0; \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \alpha_2 = 0; \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \alpha_1 = T_{КАМ}. \quad (6.49)$$

При достаточно больших размерах камеры МТ и малых значениях C_D , C_H САР описывается уравнением I порядка и всегда устойчива. Однако эксперименты показали, что данный вывод справедлив только для малых значений $R_{Д-КАМ}$, т. е. при размещении датчика в зоне нагревателя. Если

датчик размещен в камере у термостатируемых элементов, динамические свойства САР значительно ухудшаются, а при определенных соотношениях α и β САР становится неустойчивой. Более того, даже при выполнении условия $\alpha \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$ при достаточно больших значениях K_0 переходный процесс в системе имеет колебательный характер с недопустимо большими колебаниями t_D . Как показано в [20], указанные эффекты имеют место вследствие запаздывания в САР, которое в рассмотренной выше модели не учитывается.

Предположим, что $\alpha \gg 1$, т.е. $T_H \ll T_{КАМ}$. В этом случае САР представляет собой два последовательно соединенных звена, одно из которых инерционное

$$W_1(P) = \frac{K1}{1 + pT_{КАМ}},$$

а другое – звено с запаздыванием, описываемое уравнением $W_{ЗАП} = e^{-p\tau}$, где τ – величина запаздывания. Тогда, согласно [20] условие устойчивости такой САР имеет вид:

$$\tau \leq \left(\frac{-\arctg \sqrt{K_0^2 - 1} + \pi}{\sqrt{K_0^2 - 1}} \right) \cdot T_{КАМ}. \quad (6.50)$$

На рис. 6.22 представлены расчетные зависимости $\tau = f(K_0)$ при фиксированных значениях $T_{КАМ}$ на границе устойчивости согласно (6.50).

Легко видеть, что при больших коэффициентах усиления достаточно небольшого запаздывания и САР первого порядка может быть неустойчивой. Обратим внимание и на то, что кривые на плоскости (K_0) разделяют области устойчивости и неустойчивости. Поэтому, имея переходные характеристики САР, по которым определяется запаздывание τ в системе, можно сравнить τ с

$\tau_{доп}$ и, зная величину $T_{кам}$, определить допустимую величину K_0 , гарантирующую устойчивость САР. Как видно из рис. 6.22, при наличии запаздывания величина K_0 , а следовательно, и статическая точность может быть значительно меньше той, которая была получена при анализе исходной модели САР.

Однако для рассматриваемых дискретных МТ, в которых, как это будет показано ниже, размеры камеры определяют точность регулирования с учетом ее температурного поля, величина $T_{кам}$ выбирается обычно сравнительно небольшой, а в этом случае запаздыванием можно пренебречь.

Экспериментальные исследования дискретных МТ показали, что при размещении датчика на поверхности камеры в зоне нагревателя и при выборе величины K_0 , заведомо обеспечивающей сравнимые по величине $\Delta ст$ и $\Delta_{ТЕМП}$ ($\Delta_{ТЕМП}$ – погрешность за счет температурного поля), запаздыванием в САР можно пренебречь.

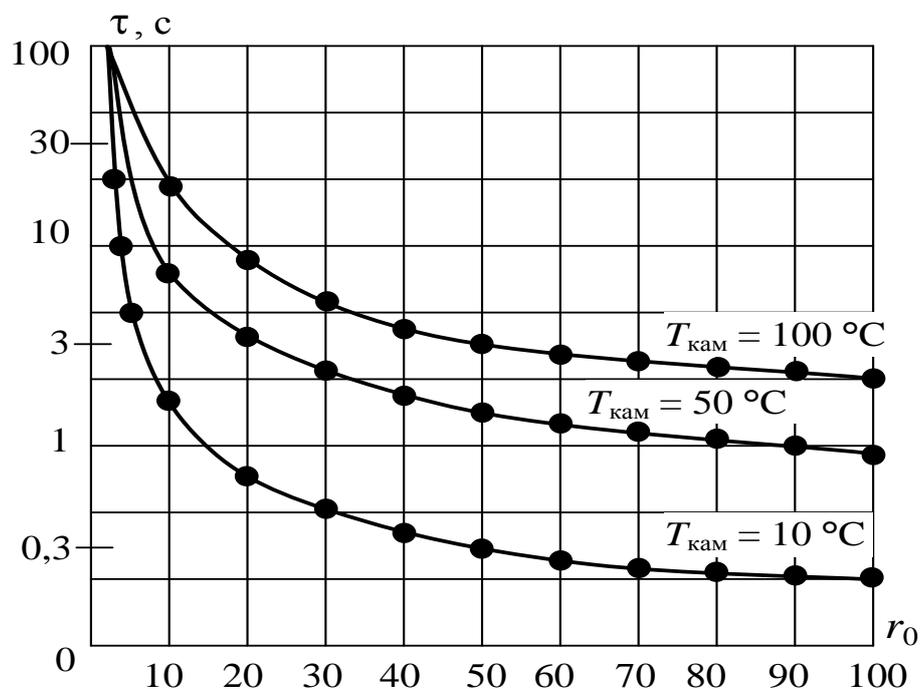


Рис. 6.22 – Расчётные зависимости $\tau = f(k_0)$ при различных $T_{кам}$

Остановимся на вопросах минимизации мощности потерь за счёт рационального выбора толщины и материала теплоизоляции, а также качества поверхности камеры и кожуха.

На рисунке 6.23 приведены результаты расчёта величины $P_{ном} = f(\square)$ ($T_{ср} = 20^\circ\text{C}$) дискретных МТ с размерами камеры $(40 \times 40 \times 40) \text{ мм}^3$ (кривые 1, 2, 3, 4) и $(30 \times 30 \times 30) \text{ мм}^3$ (кривые 5, 6, 7, 8) согласно (6.41). Рассматривались случаи:

а) материал теплоизоляции – твёрдое теплоизолирующее вещество (кривые 1, 2, 5, 6);

б) материал теплоизоляции – воздух (кривые 3, 4, 7, 8).

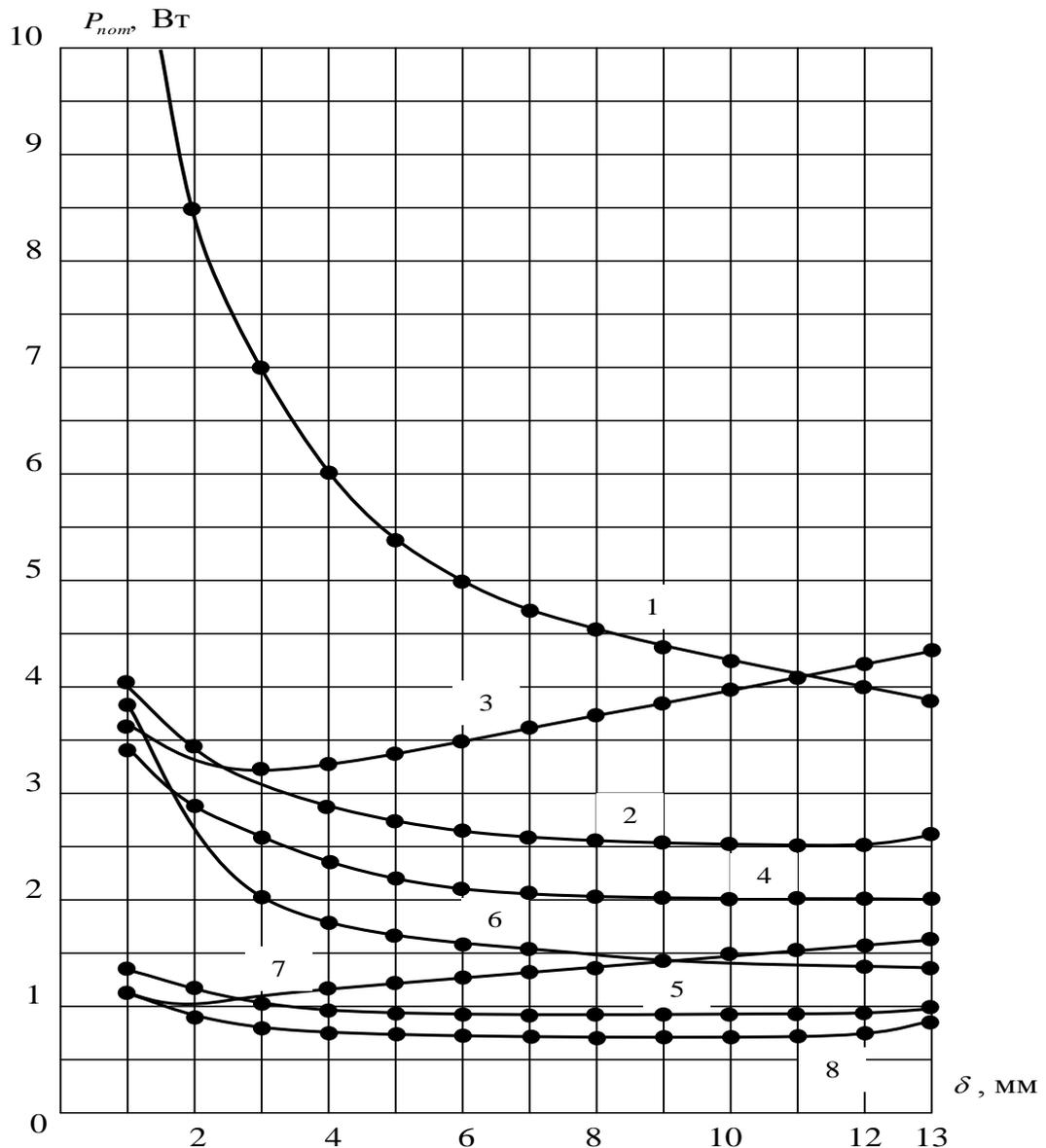


Рис. 6.23 – Расчётные зависимости $P_{nom} = f(\delta)$ для дискретных МТ: 1) материал изоляции пенопласт, корпус окрашен эмалью; 2) то же, корпус полированный; 3) материал изоляции – воздух, камера неполированная, корпус полированный; 4) то же, но камера полированная; 5, 6, 7, 8) те же случаи для меньших размеров камеры

Для случая (а) изменялась величина ε от 0,03 (полированная поверхность, кривые 6, 9) до 0,9 (поверхность покрыта матовой эмалью, кривые 1, 5). Для случая (б) рассматривались варианты с полированными (кривые 4, 8) и неполированными (кривые 3, 7) поверхностями камеры. Анализ результатов расчетов показывает, что для дискретных МТ с размерами камеры до $(50 \times 50 \times 50) \text{ мм}^3$ целесообразно использовать в качестве теплоизоляции воздух, а поверхности камеры и кожуха полировать или применять покрытие с $\varepsilon \ll 1$. Оптимум толщины теплоизоляции имеет место

только в отдельных случаях (кривые 3, 7), но из соображений минимальных габаритных размеров МТ целесообразно выбирать $\delta_{из} = 6 \dots 8$ мм.

6.2.3 Влияние температурного поля термостатируемого объекта на параметры МТ

При анализе динамических свойств исследуемых САР использовалось допущение об изотермичности термостатируемого объекта. Выше показано, что для рассматриваемых МТ такое допущение справедливо при исследовании устойчивости САР и качества переходных процессов, но, как показано в [16, 21, 28], может быть слишком грубым при определении параметров МТ, в частности, точности поддержания температуры по поверхности объекта.

Особенностью исследуемых МТ является применение нагревателей, имеющих малые размеры по сравнению с термостатируемым объектом. В широком диапазоне температур внешней среды это приводит к изменению температурных перепадов в объекте, зависящих от теплопроводности материала, подложки в гибридно-плёночных и камеры в дискретных МТ.

Рассмотрим вопросы расчёта температурного поля подложки в гибридно-плёночных МТ [38]. При расположении датчика температуры в зоне нагревателя (согласно рис. 6.24), максимальное значение статической ошибки регулирования температуры (т.е. $\delta_{СТ.МАХ}$) наблюдается на краях подложки.

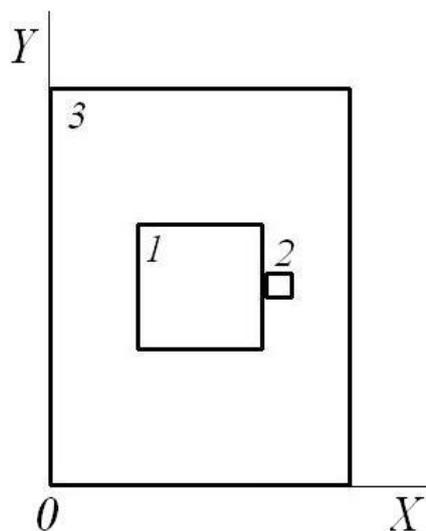


Рис. 6.24 – Геометрия области решения (вид сверху): 1) нагреватель; 2) датчик температуры; 3) термостабильная подложка

Для достижения поставленной цели нами проведено численное моделирование неодномерных нестационарных температурных полей

термостабильной подложки гибридно-интегральных схем с учётом реальных механизмов теплообмена для пропорционального регулятора температуры МТ. Обобщенная физическая модель исследуемого класса МТ приведена на рисунке 6.8.

Основные допущения, используемые при постановке задачи:

1. Тепловыделениями термостатируемых элементов на подложке по сравнению с мощностью нагревателя можно пренебречь;

2. Подложка представляет собой однородное изотропное тело, теплофизические параметры которого не зависят от координат и температуры;

3. Тепловой контакт на границах между телами (областями) считается идеальным;

4. Сток тепла с верхней и нижней поверхности термостабильной подложки во внешнюю среду за счет радиационного теплообмена учитывается в уравнении теплопроводности дополнительными источниками тепловыделения. Сток тепла во внешнюю среду за счет механизмов конвекции отсутствует, это допущение обусловлено расстоянием до поверхности корпуса МТ не более 5 мм [3];

5. Теплообмен с боковых граней учитывается в уравнении теплопроводности за счет увеличения мощности дополнительных источников тепловыделения (см. допущение 4).

Задача в такой постановке сводится к решению двумерного нестационарного уравнения теплопроводности подложки (с соответствующими граничными и начальными условиями) совместно с уравнением пропорционального регулятора (рис. 6.26). В граничных условиях учитывается радиационный теплообмен с поверхности подложки по закону Стефана-Больцмана.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{P_H(x, y, T_D)}{S_H h} + k(x, y) \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4}{h} \\ P_H(T_D) = P_{\text{MAX}}, \text{ при } T_D < T_{\text{СТ}} \\ P_H(T_D) = P_{\text{MAX}} - \frac{1}{\Delta T_{\text{СТ.З}}} P_{\text{MAX}} (T_D - T_{\text{СТ}}), \text{ при } T_D \geq T_{\text{СТ}} \\ P_H(x, y) = P_H(T_D), \text{ при } x, y \in S_H \\ P_H(x, y) = 0, \text{ при } x, y \notin S_H \end{array} \right.$$

$$t \in [0; t_{\text{max}}], \quad x \in [0; L_x], \quad y \in [0; L_y]; \quad T|_{t=0} = T_0(x, y);$$

$$x = 0, y \in [0; L_y]: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4;$$

$$\begin{aligned}
 x = L_x, y \in [0; L_y]: \quad & \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4 ; \\
 y = 0, x \in [0; L_x]: \quad & -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4 ; \\
 y = L_y, x \in [0; L_x]: \quad & \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma T_{\text{вн}}^4 - T^4 ,
 \end{aligned}$$

где x, y – координаты; c_v, ρ, λ – удельная теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала подложки, соответственно; t – время; $S_{\text{Н}}$ – площадь нагревателя; h – толщина подложки; $T, T_{\text{вн}}$ – температура подложки и внешней среды; σ – постоянная Стефана-Больцмана; $\varepsilon_{\text{пр}}$ – приведенный коэффициент черноты поверхности; k – коэффициент, учитывающий теплообмен с боковых граней; $P_{\text{Н}}, P_{\text{МАХ}}$ – текущая и максимальная мощность нагревателя; $\Delta T_{\text{СТ.З.}}$ – заданный диапазон температуры статирования; $T_{\text{Д}}$ – температура датчика; $T_{\text{СТ}}$ – температура статирования; T_0 – начальная температура подложки; L_x, L_y – размеры подложки по осям x и y , соответственно.

Сформулированная краевая задача решена методом конечных разностей с применением схемы расщепления по координатам (локально-одномерной) и метода прогонки, хорошо себя зарекомендовавшим при решении задач теплообмена (см. разделы 3, 4).

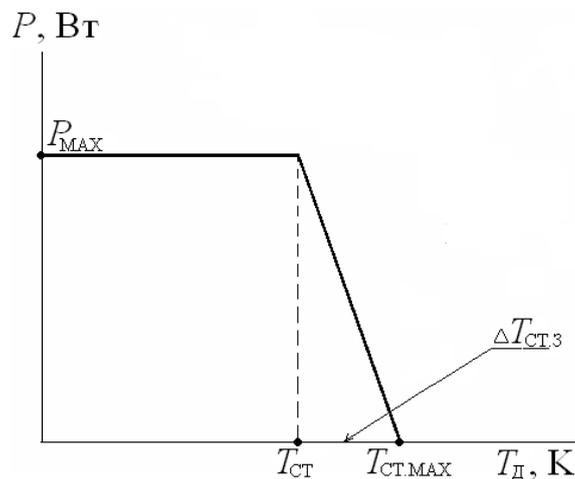


Рис. 6.26 – Модель пропорционального регулятора

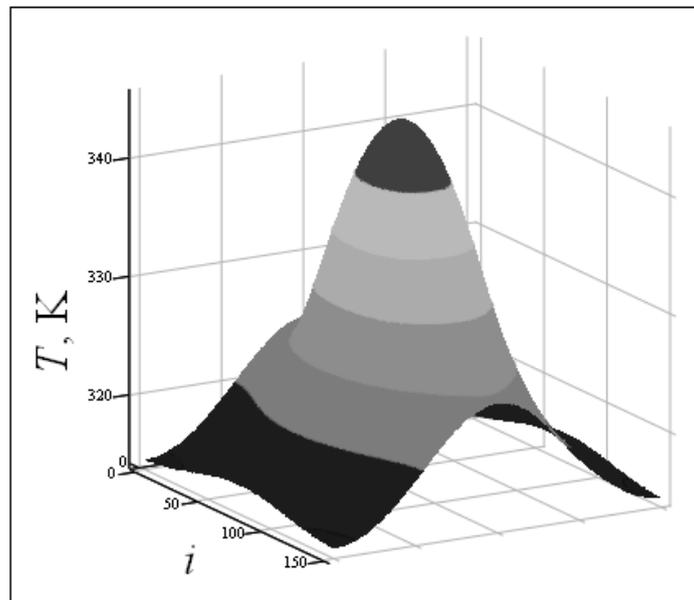
Основные численные результаты приведены при следующих значениях исходных данных и параметров:

- габаритные размеры термостабильной подложки: 12x16x1 мм;

– материал подложки – **керамика марки ВК-94**: $C = 1888$ Дж/(кг·К), $\rho = 3650$ кг/м³, $\lambda = 13.4$ Вт/(м·К); **поликор (ВК-100)**: $C = 1888$ Дж/(кг·К), $\rho = 3980$ кг/м³, $\lambda = 31$ Вт/(м·К); **бериллиевая керамика (ВеО)**: $C = 1900$ Дж/(кг·К), $\rho = 2840$ кг/м³, $\lambda = 131$ Вт/(м·К);

- нагреватель: размерами $5 \times 5 \times 1$ мм и мощностью 2,2 Вт;
- диапазон изменения температуры внешней среды лежит в пределах 223...323 К;
- температура статирования – 333 К;
- заданный диапазон температуры статирования – 1 К;
- датчик температуры МТ имеет размеры 1x1 мм и расположен согласно рис. 6.24.

Пример моделирования двумерного нестационарного температурного поля термостабильной подложки (при $\Delta T_{\text{ВН}} = 100$ К, $T_0 = 223$ К) приведён на рис. 6.27. Анализ результатов математического моделирования (рис. 6.28...6.37) показал, что на поверхности подложки имеется зона минимальной статической ошибки, обусловленная конструктивно-технологическими особенностями МТ. На основании этого предлагается новый подход к проектированию термостабильных РЭС, в которых, по результатам анализа уравнения температурной погрешности проводится топологическое проектирование оптимального варианта его решения.



a

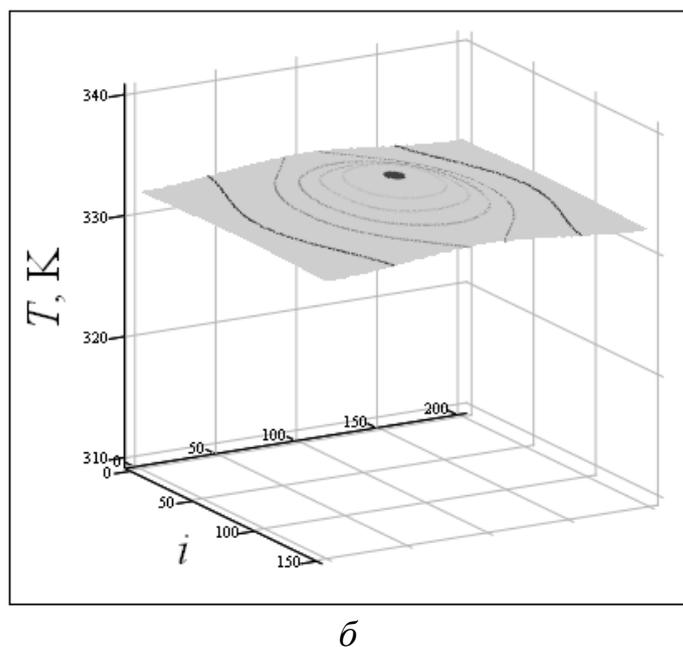


Рис. 6.27 – Пример моделирования температурного поля термостабильной подложки (керамика ВК-94): при достижении отметки термостатирования (*а*) и в установившемся режиме (*б*)

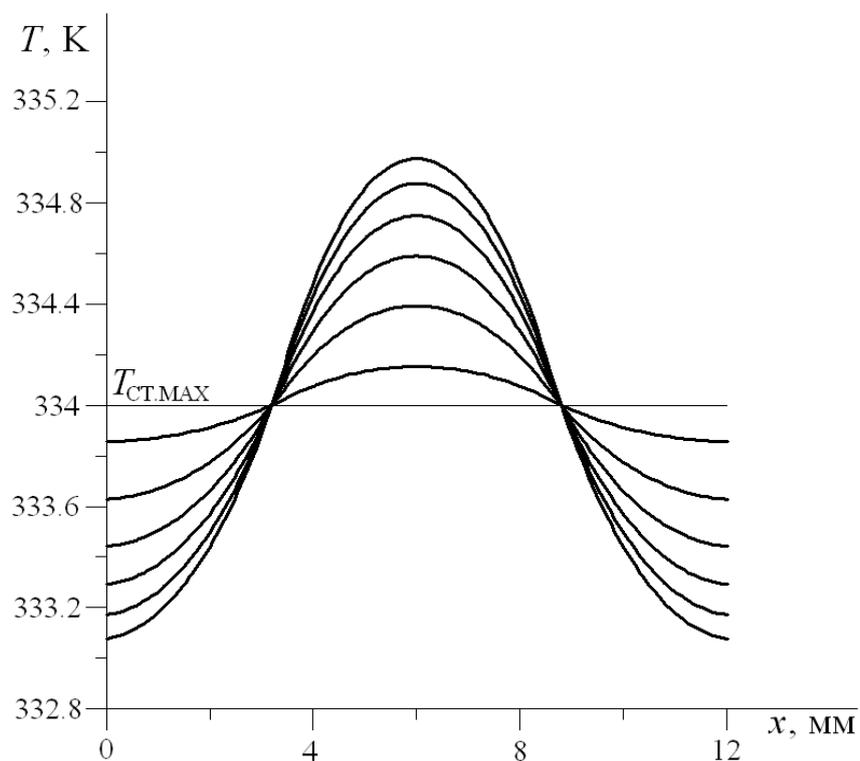


Рис. 6.28 – Распределение температуры подложки (керамика ВК-94) вдоль оси x при $\Delta T_{ВН} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

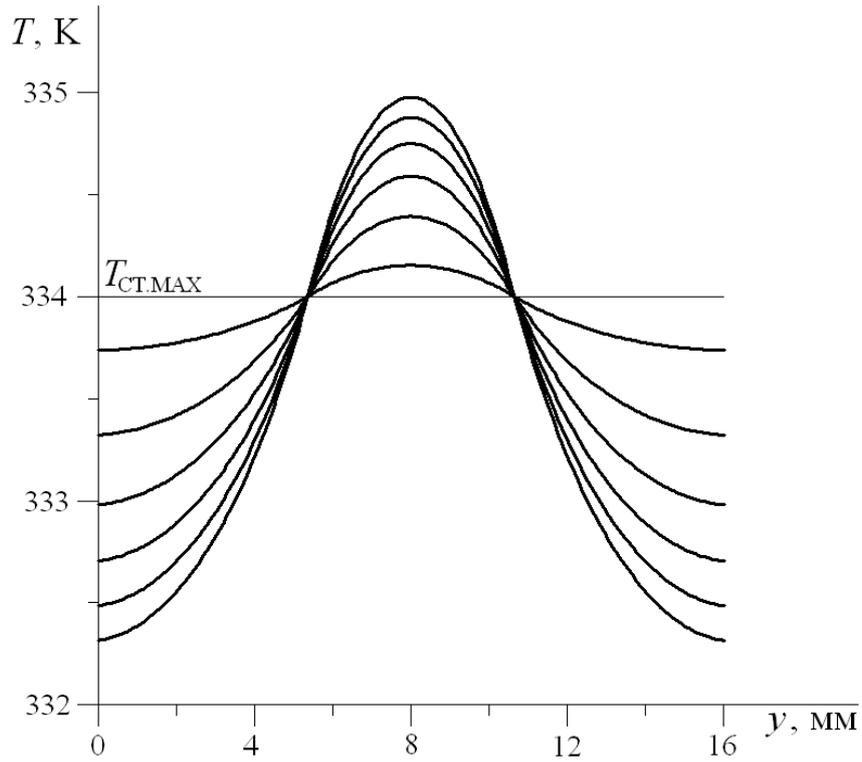


Рис. 6.29 – Распределение температуры подложки (керамика ВК-94) вдоль оси y при $\Delta T_{\text{ВН}} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

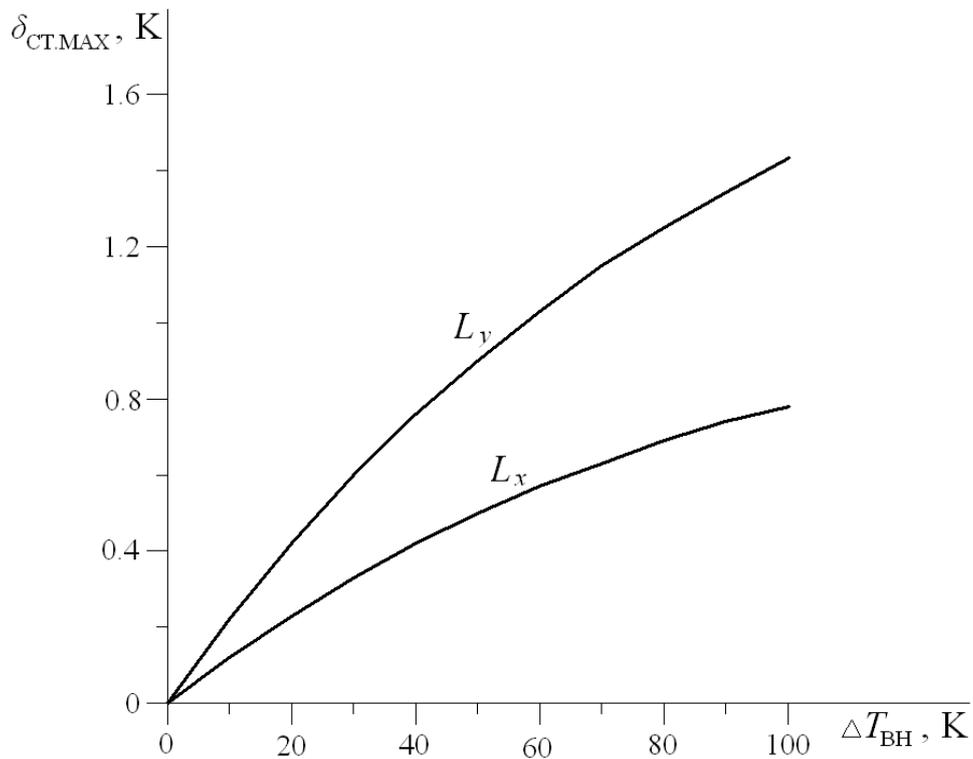


Рис. 6.30 – График зависимости $\delta_{\text{СТ.МAХ}} = f \Delta T_{\text{ВН}}$ термостабильной подложки (ВК-94)

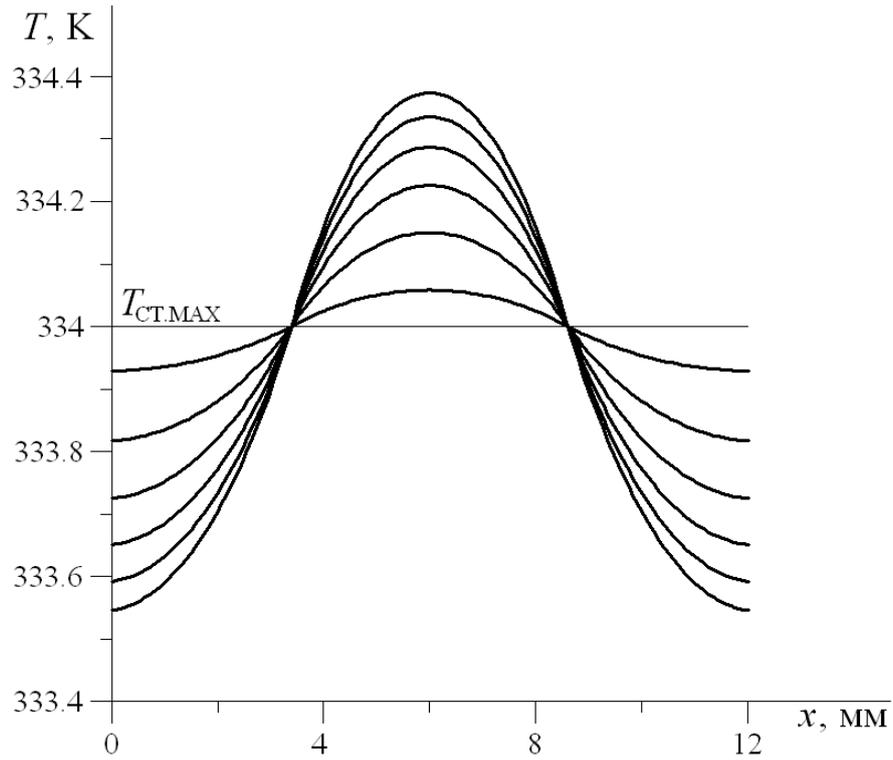


Рис. 6.31 – Распределение температуры подложки (керамика ВК-100) вдоль оси x при $\Delta T_{BH} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

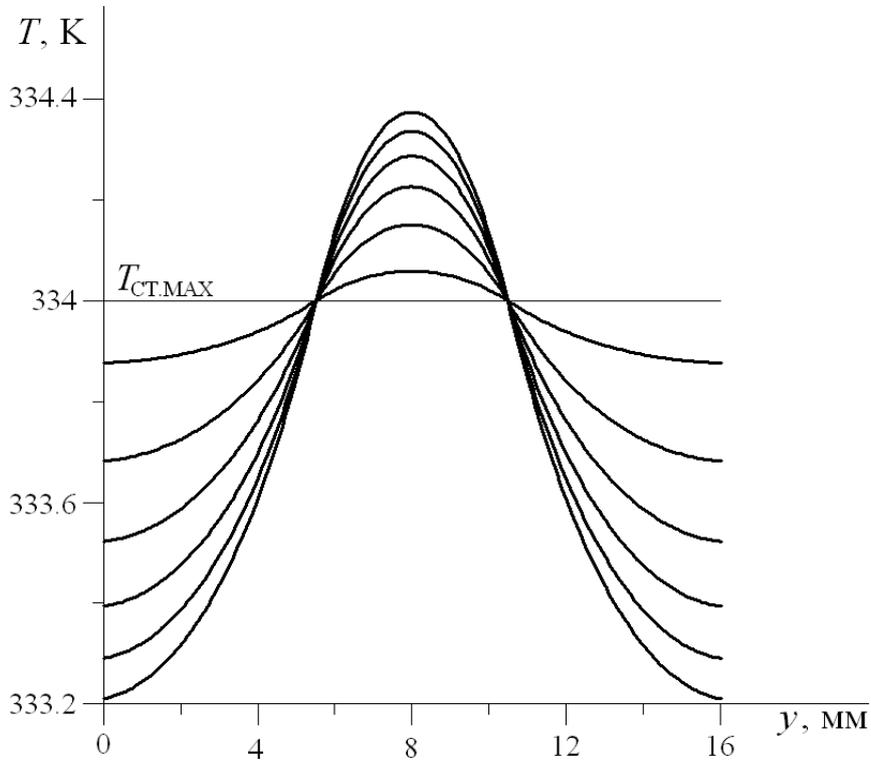


Рис. 6.32 – Распределение температуры подложки (керамика ВК-100) вдоль оси y при $\Delta T_{BH} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

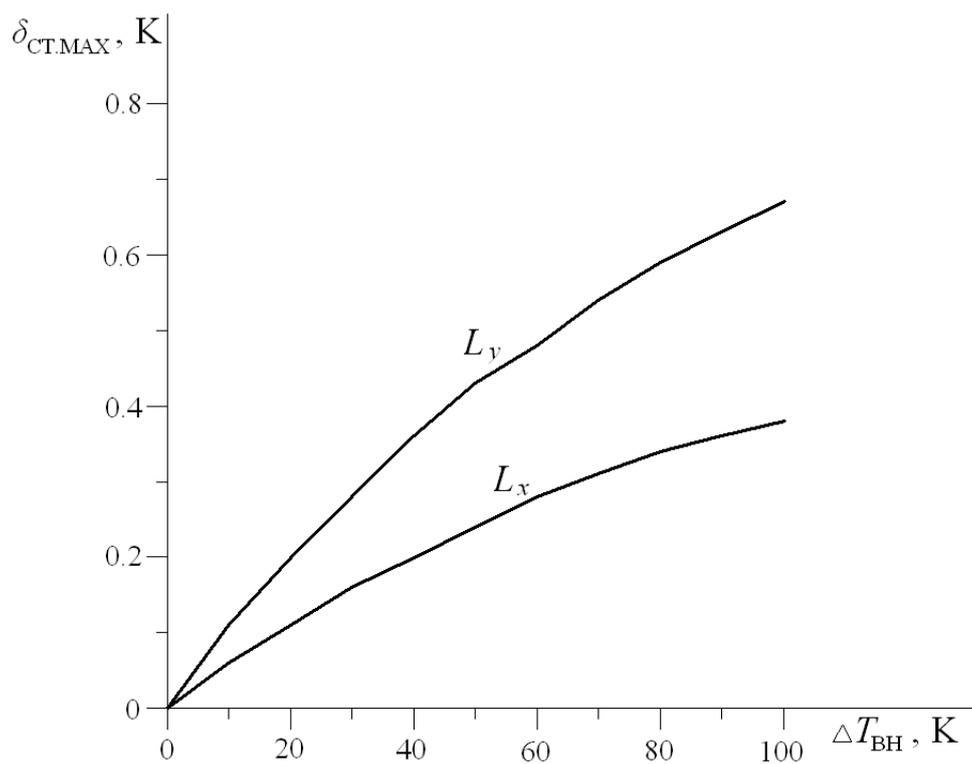


Рис. 6.33 – График зависимости $\delta_{CT.MAX} = f \Delta T_{BH}$ термостабильной подложки (BK-100)

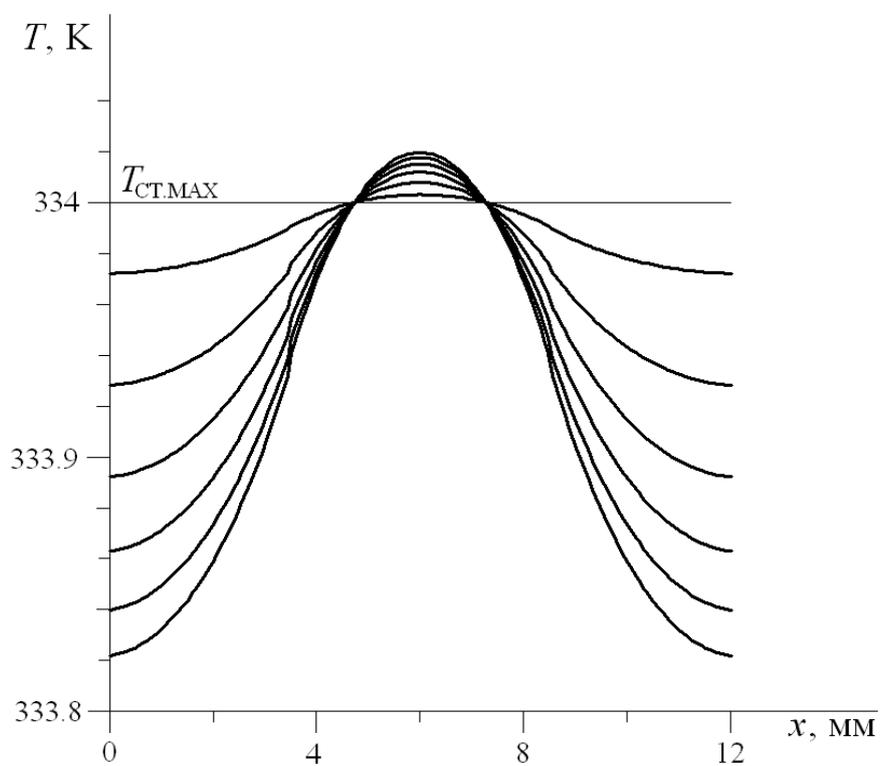


Рис. 6.34 – Распределение температуры термостабильной подложки (BeO) вдоль оси x при $\Delta T_{BH} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

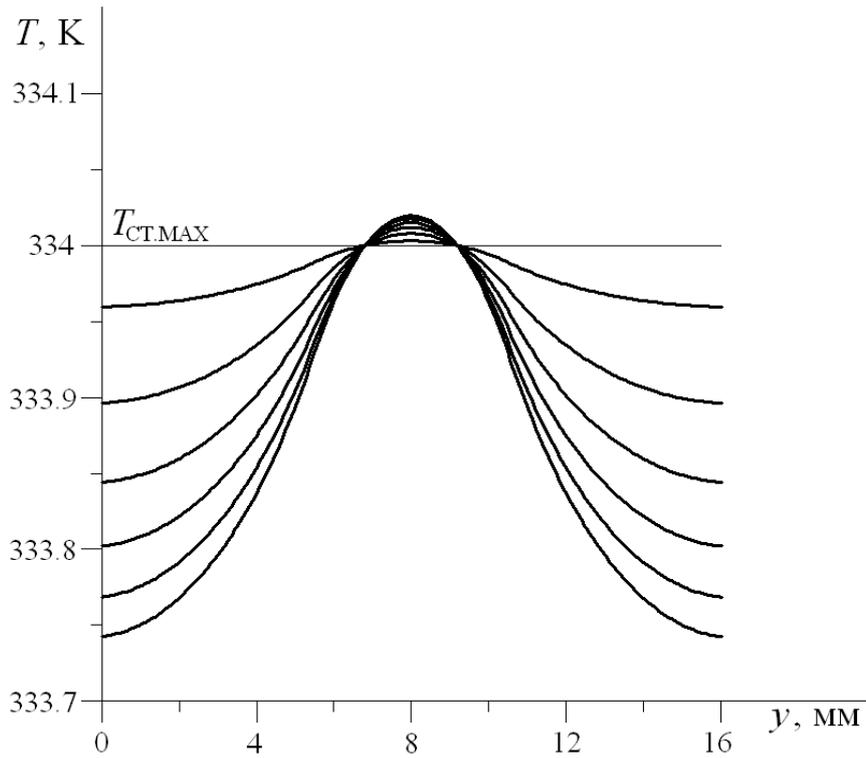


Рис. 6.35 – Распределение температуры термостабильной подложки (BeO) вдоль оси y при $\Delta T_{\text{ВН}} = 0 \dots 100$ К (сверху вниз), с шагом 20 К

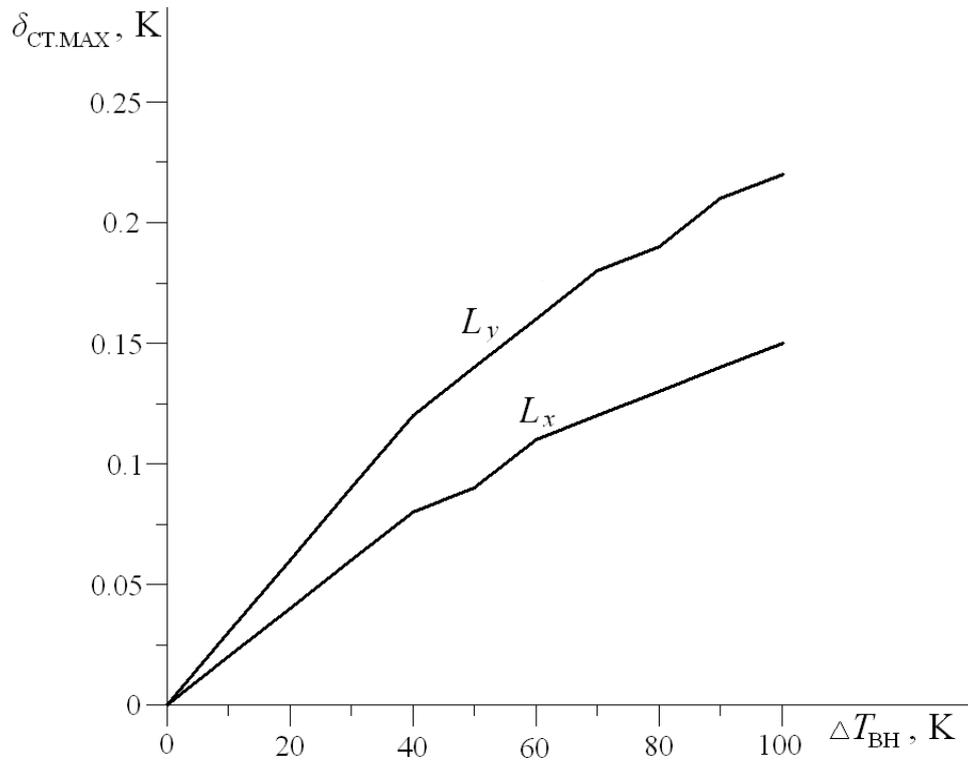


Рис. 6.36 – График зависимости $\delta_{\text{CT,MAX}} = f \Delta T_{\text{ВН}}$ термостабильной подложки (BeO)

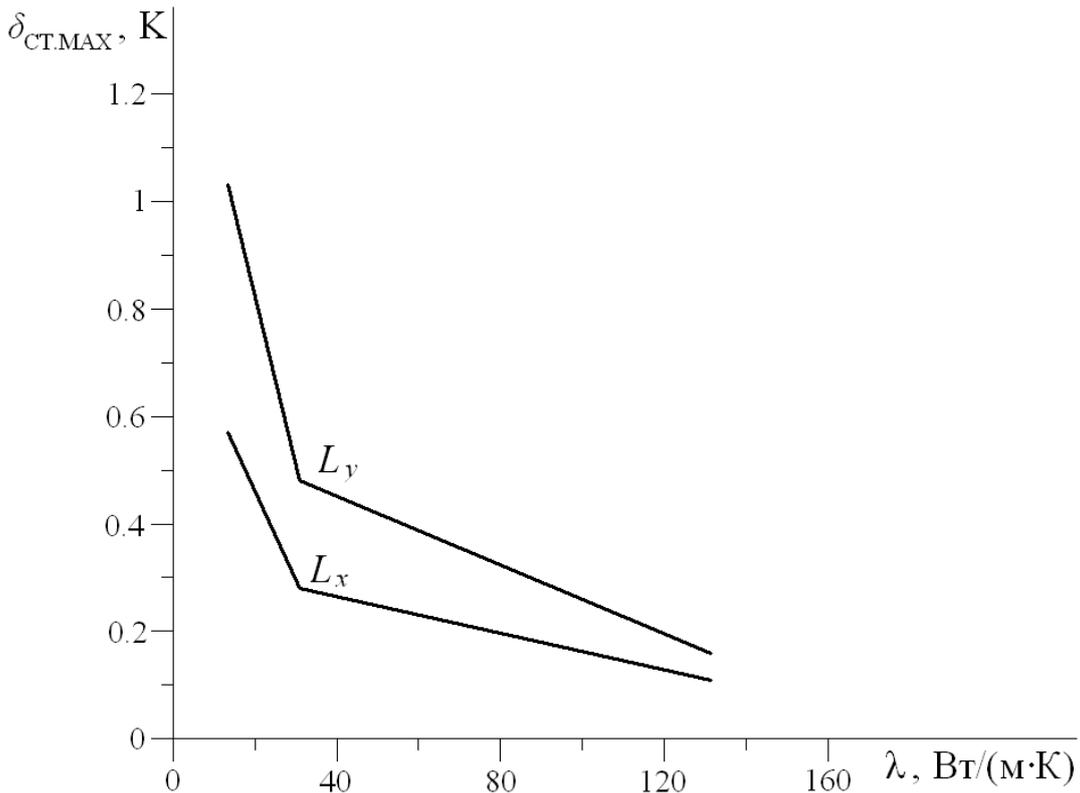


Рис. 6.37 – График зависимости $\delta_{СТ.МАХ} = f \lambda$ подложки при $\Delta T_{ВН} = 60$ К

В широком диапазоне изменения температуры внешней среды применение нагревателей, имеющих малые размеры по сравнению с термостатируемым объектом приводит к изменению температурных перепадов в объекте зависящих от теплопроводности материала и габаритных размеров термостабильной подложки. Так, на краях подложки перепад температуры статирования сравним с заданным диапазоном температуры статирования подложки. Возникает проблема выбора закона регулирования температуры, обеспечивающего более высокую точность регулирования, или оптимального расположения датчика температуры. При рассмотренном расположении датчика температуры точность регулирования температуры подложки не требует выбора схемы регулирования с высоким коэффициентом передачи, так как точность регулирования определяют конструктивно-технологические параметры МТ.

Напрашивается также вывод о нецелесообразности использования сложных схем регуляторов при применении нагревателей малых размеров в гибридно-пленочных МТ.

В дискретных МТ характер температурного поля аналогичным образом влияет на точность регулирования, причем, поскольку математическое описание поля в трехмерном пространстве является довольно сложной задачей, нами проведены экспериментальные исследования температурного поля камеры с целью определения максимальных перепадов температуры в заданном диапазоне ДО. Исследования проводились с

помощью предварительно проградуированных датчиков температуры, размещенных на поверхности и во внутреннем объеме камеры в заданных точках (рис. 6.38).

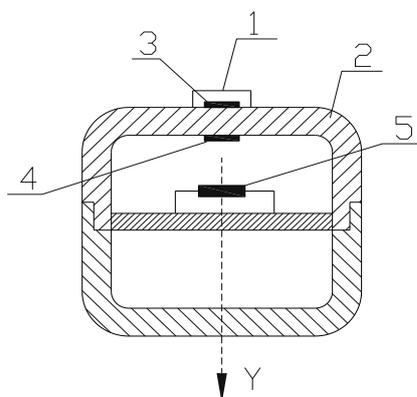


Рис. 6.38 – Расположение датчиков при исследовании температурного поля камеры: 1) нагреватель; 2) камера; 3, 4, 5) датчики ММТ-6

Результаты исследований приведены на рис. 6.39 для максимальных размеров камеры ($50 \times 50 \times 150$) мм³. Здесь видно, что заполнение внутреннего объема камеры теплопроводящей пастой ($\lambda = 5$ Вт/м·К) позволяет в несколько раз уменьшить температурные перепады в диапазоне $\Delta T_{\text{ср}}$. В отличие от гибридно-плёночных в дискретных МТ не рекомендуется размещать датчик во внутреннем объеме регулятора, так как это приводит к неудовлетворительному качеству переходных процессов, что связано с запаздыванием. Вследствие этого в дискретных МТ, при применении регуляторов пропорционального типа и точечных нагревателей, точность поддержания температуры ограничивается характером температурного поля.

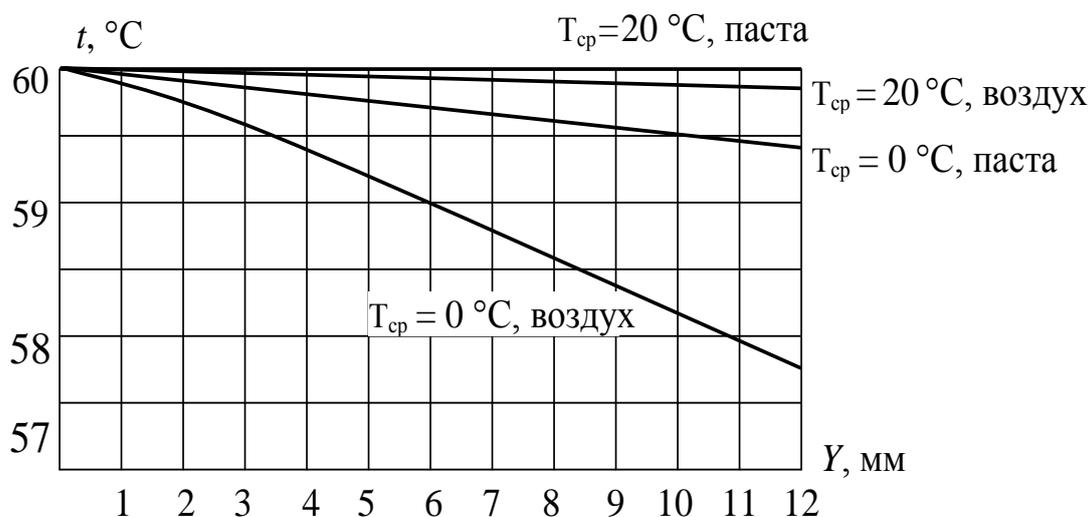


Рис. 6.39 – Результаты экспериментальных исследований температурного поля камеры

6.2.4 Пример проектирования МТ для создания прецизионного источника опорного напряжения

Предполагаемое конструктивное исполнение прецизионного источника опорного напряжения (ПИОН) – в виде МТ, содержащего, кроме собственно источника опорного напряжения, контур регулирования температуры, в который входят три теплоинерционных звена – датчик температуры, термостатируемая подложка, нагреватель. Для уменьшения влияния внешних воздействий на параметры источника опорного напряжения термостатируемая подложка теплоизолируется. Предлагаемое конструктивное исполнение ПИОН – в виде гибридно-интегральной схемы на подложке размерами 18×16×1 мм. Материал подложки – керамика марки ВК-94. Датчик представляет собой полупроводниковый терморезистор МТ57. Нагреватель выполнен в виде толсто пленочного резистора на основе оксида рутения, нанесенного с обратной стороны подложки. Материал теплоизоляции – пенопласт, ориентирующие размеры корпуса МТ равны (30×35×20) мм и изготавливаются из полированного алюминиевого сплава с толщиной стенок около 0,5 мм. Датчик приклеен к подложке теплопроводящим клеем. На термостатируемой подложке (рис. 6.64) размещаются ЭРЭ основной схемы, а также датчик и нагреватель (условно не показаны). К ЭРЭ основной схемы отнесем, в данном случае, не все ЭРЭ ПИОН (см. рис. 6.1), а только со значимыми коэффициентами влияния уравнения (6.2) – R6, R7, VD1, VT6, DA1. Электрическая принципиальная схема регулирования температуры МТ приведена на рис. 6.65.

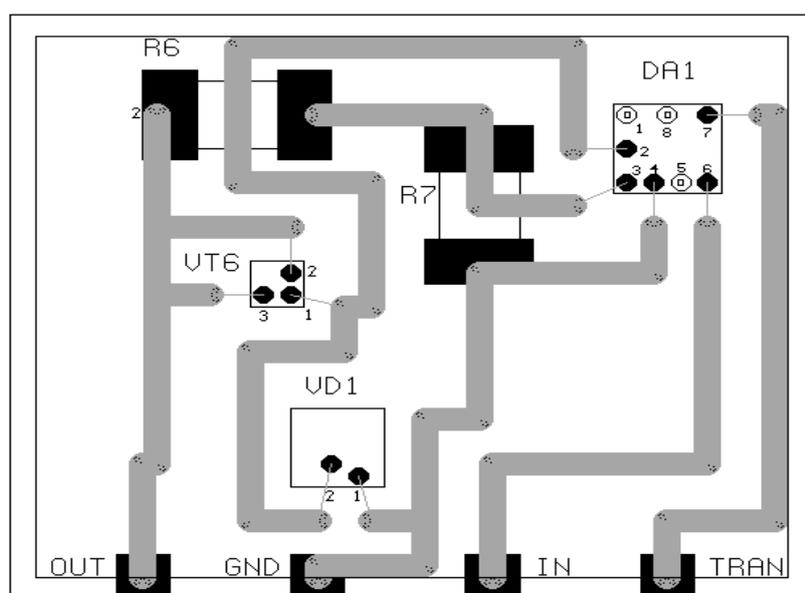


Рис. 6.64 – Топология термостатированной подложки

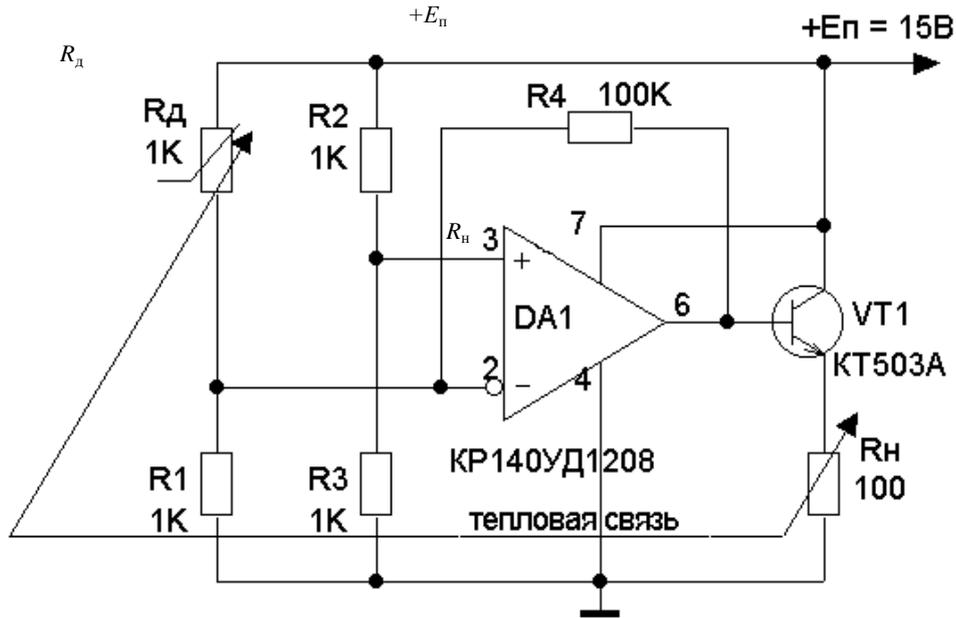


Рис. 6.65 – Электрическая принципиальная схема регулирования температуры МТ

Моделирование контура терморегулирования МТ проводится методом электротепловой аналогии [9].

Значения тепловых сопротивлений и теплоёмкостей основных теплоинерционных звеньев МТ определены расчётным путем. Поскольку величины некоторых тепловых сопротивлений и теплоёмкостей пренебрежимо малы, то исходную эквивалентную схему МТ удалось значительно упростить, сведя её к системе второго порядка (см. рис. 6.7).

Оценку пускового режима МТ проведём в виде анализа отклика системы на импульсную функцию. Из рис. 6.8, а, б следует, что система при выбранных параметрах элементов МТ обладает запасом устойчивости, время полного затухания колебаний составляет около 1 с.

Проведём оценку статической погрешности температуры термостатирования данной системы. Номинальная температура статирования $T_{ст} = 333$ К, диапазон изменения температуры окружающей среды $\Delta T = 10$ К (от 295 до 305 К). Оценка погрешности температуры статирования сводится к нахождению разности температур подложки (узел T_n на рис. 6.66) при граничных значениях температуры окружающей среды (источник $T_{ср}$ на рисунке 6.66):

$$\Delta T_n = \sqrt{T_{n 305K} - T_{n 295K}} \quad (6.51)$$

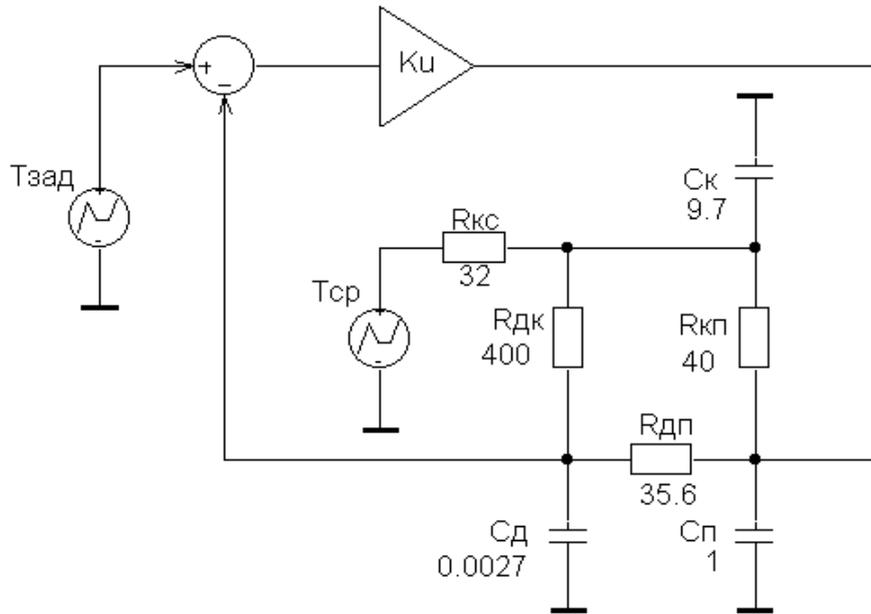


Рис. 6.66 – Эквивалентная схема замещения

Подставив соответствующие значения, полученные в ходе схемотехнического моделирования (рис. 6.32) в (6.51), получим:

$$\Delta T_n = 0,45 \text{ K.}$$

Следовательно, при изменении температуры окружающей среды на 10 К погрешность температуры статирования подложки составляет 0,45 К.

На рисунках 6.67 и 6.68 приведены результаты моделирования динамического и статического режимов регулирования температуры подложки.

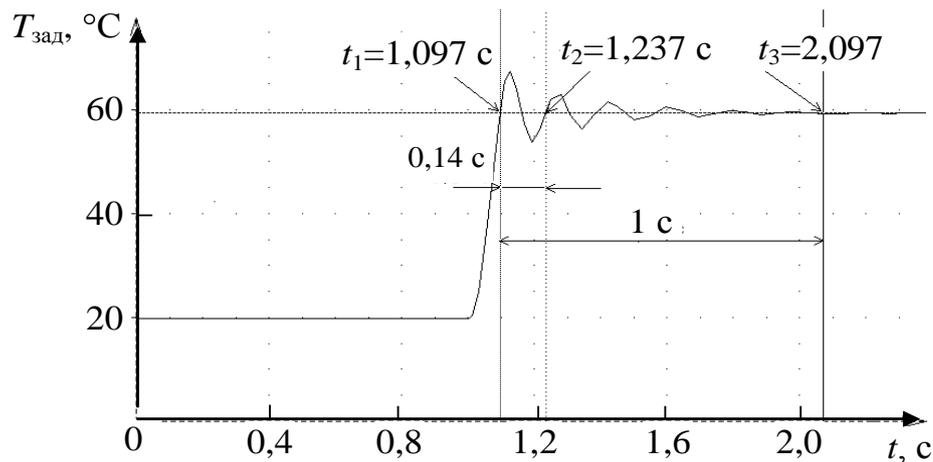


Рис. 6.67 – Временная зависимость пускового режима

В ходе схемотехнического моделирования было выявлено, что ЭРЭ R6, R7, VD1, VT6, DA1, расположенные на термостатируемой подложке, обладают пренебрежимо малыми собственными тепловыделениями ($\forall P_i \approx 5$

мВт). Таким образом, предполагая, что температурное поле подложки однородное, подставим в уравнение температурной погрешности ПИОН (6.2) относительное изменение температуры для каждого ЭРЭ, равное статической погрешности термостатирования:

$$\frac{\Delta T_i}{T_i} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_{\Pi}}{(T_{\text{П323К}} + T_{\text{П313К}})/2};$$

$$\frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВЫХ}}} = 0.02149 \frac{\Delta T_{R6}}{T_{R6}} - 0.02149 \frac{\Delta T_{R7}}{T_{R7}} + 0.00239 \frac{\Delta T_{VD1}}{T_{VD1}} - 0.00293 \frac{\Delta T_{VT6}}{T_{VT6}} - 0.00015 \frac{\Delta T_{DA1}}{T_{DA1}} =$$

$$= \frac{\Delta T_{\Pi}}{(T_{\text{П323К}} + T_{\text{П313К}})/2} (0.02149 - 0.02149 + 0.00239 - 0.00293 - 0.00015).$$

Полученная суммарная температурная погрешность равна:

$$\frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}_T}}{U_{\text{ВЫХ}}} = -0.94 \cdot 10^{-6}.$$

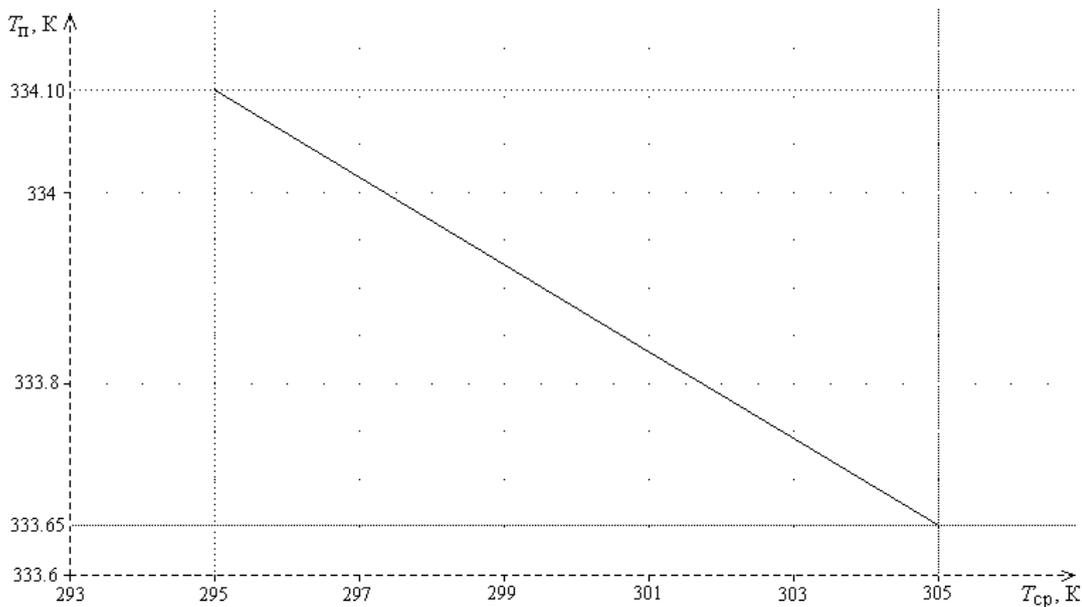


Рис. 6.68 – Статическая погрешность термостатирования

В таблице 6.9 приводятся значения температурной погрешности напряжения стабилизации ПИОН для различных конструктивных вариантов исполнения.

Таблица 6.9 – Температурная погрешность различных конструктивных вариантов исполнения ПИОН

Конструктивный вариант	Температурная погрешность, мкВ	Диапазон изменения температуры окружающей среды, К
Исходный конструктивный вариант	-203	10
Вариант с применением топологической термокомпенсации	-87	10
Вариант с применением микротермостатирования	-9,4	10

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данном пособии рассмотрены вопросы расчёта тепловых режимов РЭС численными методами, приведены алгоритмы и листинги программ. Разработаны рекомендации по расчёту надёжности проектируемых РЭС с учётом условия обеспечения нормального теплового режима.

Изложены вопросы математического моделирования теплофизических процессов в системах микротермостатирования, обеспечивающих температурную стабильность проектируемых РЭС.

В данном методическом пособии использованы результаты научных исследований, проведённых аспирантами Д.В. Озёркиным, С.В. Шлома, В.М. Карабан в рамках работ под руководством В.П. Алексеева.

Авторы надеются, что настоящее пособие позволит перейти от эмпирических методов расчёта тепловых режимов РЭС к численным методам с использованием информационных технологий.

Микротермостатирование как метод термостабилизации основанный на принципах живой природы, позволяет обеспечить заданную температурную стабильность изделий с учётом влияния внешних дестабилизирующих факторов. В пособии рассмотрены оригинальные математические модели анализа и синтеза систем микротермостатирования.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.
2. Дульнев Г.Н., Семяшкин Э.М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. Л.: Энергия, 1968. – 360 с.
3. Дульнев Г.Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре. М.: Высш. школа, 1984. – 247 с.
4. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. – М.: Высшая школа, 1990. – 207с.
5. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. – Минск: изд-во «Наука и техника», 1976.
6. Дорохов А.Р., Заворин А.С., Казанов А.М., Логинов В.С. Моделирование тепловыделяющих систем. – Томск: Изд-во НТЛ, 2000. – 233 с.
7. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
8. Шлома С.В. Теплофизические основы математического моделирования показателей надежности печатных узлов радиоэлектронной аппаратуры: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Томск: ТУСУР, 2003. – 158 с.
9. Алексеев В.П. Системное проектирование термоустойчивых радиотехнических устройств и систем. – Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2004. – 316 с.
10. Карабан В.М. Моделирование нестационарных температурных полей подложки гибридных толстоплёночных ИМС // Тезисы всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2006», Томск, 2006. – С.179-182.
11. ГОСТ 27.002-89. Надёжность в технике. Основные понятия. Термины и определения.
12. Козлов В.Г. Теория надёжности. – Томск: ТУСУР, 2004. – 138 с.
13. ГОСТ 27.301-95. Надёжность в технике. Расчёт надёжности. Основные положения.
14. Коздоба Л.А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. – М.: Энергия, 1972. – 296 с.
15. Туркельтауб Р.М. Методы исследования точности и надёжности схем аппаратуры. – М.: Энергия, 1966.
16. Кейн В.М. Конструирование терморегуляторов. – М.: Сов. радио, 1971. – 152 с.
17. Куталев А.И., Тетерин А.Д. и др. Синтез прецизионных систем термостатирования по заданным точностным характеристикам // Радиоприборостроение. Новосибирск: Изд-во НИСИ и ОМПИ, 1976. Вып. 4.

18. Фольгельсон И.Б. Транзисторные термодатчики. М.: Сов. Радио, 1972.
19. Алексеев В.П., Гольдштейн Е.И., Жилина Л.И. и др. Заключительный отчёт по НИР 125/76А. № госрегистрации 81013399, 1980.
20. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического регулирования. – М.: Наука, 1971.
21. Венгеровский Л.В., Вайнштейн А.Х. Системы термостатирования в радиоэлектронике. – Л.: Энергия, 1969.
22. Попов Е.П. Автоматическое регулирование и управление. – М.: Наука, 1966.
23. Алиев Х. Микротермостат для интегральных схем: Авт. свидетельство СССР, № 514278, 1976.
24. Роткоп Л.Л., Спокойный Ю.Е. Обеспечение тепловых режимов при конструировании радиоэлектронной аппаратуры. – М.: Сов. Радио, 1976.
25. Алексеев В.П., Воробьев Б.А., Гольдштейн Е.И. и др. Заключительный отчет по НИР 10/76. № госрегистрации 76024495. Томск, 1979.
26. Шорин Н.С. Теплопередача. – М.: Высшая школа, 1964.
27. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
28. Алексеев В.П. Стабилизация параметров радиотехнических устройств и систем на основе микротермостатирования // Дисс. канд. техн. наук. Томск, 1985. – 214 с.
29. Удалов Н.Н., Разевиг В.Д. Моделирование радиоэлектронных схем на СМ ЭВМ. – М.: Московский энергетический институт, 1986. – 96 с.
30. Разевиг В.Д. Моделирование аналоговых электронных устройств на персональных ЭВМ. – М.: Изд-во МЭИ, 1993. – 152 с.
31. Разевиг В.Д. Применение программ P-CAD и P-Spice для схемотехнического моделирования на ПЭВМ: В 4 выпусках. – М.: Радио и связь, 1992.
32. Озеркин Д.В. Автоматизация проектирования термостабильных радиотехнических устройств: Депонированная статья №802-В99. ВИНТИ, 1999. – 18 с.
33. Разевиг В.Д. Система схемотехнического моделирования и проектирования печатных плат Design Center (P-Spice). – М.: СК Пресс, 1996. – 272 с.
34. Алексеев В.П., Козлов В.Г., Озеркин Д.В. Микротермостат с позисторным нагревателем. Патент Российской Федерации RU 2164709 С2. Российское агентство по патентам и товарным знакам. Москва, 2001.
35. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
36. Алексеев В.П. Вопросы повышения температурной стабильности УНТ в гибридно-плёночном исполнении // Тезисы Всесоюзной научно-технической конференции «Дальнейшее развитие и внедрение новой техники приемных устройств». Москва–Горький, 1977.
37. Алексеев В.П. Вопросы повышения температурной стабильности гибридных интегральных схем термостатированием подложек // Тезисы

VIII Всесоюзной конференции по микроэлектронике. Зеленоград, МИЭТ, 1978.

38. Алексеев В.П., Карабан В.М. Моделирование нестационарных температурных полей термостабильной подложки для пропорционального регулятора температуры // Российский журнал теплофизики. Новосибирск, 2007, №3.
39. Гольдин В.В., Журавский В.Г., Коваленок В.И. и др. Исследование тепловых характеристик РЭС методами математического моделирования: Монография. // Под ред. Сарафанова А.В. – М.: Радио и связь, 2003. – 456 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 – ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ РЭС

Таблица П1.1 – Теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость некоторых конструкционных материалов РЭС, используемых при разработке печатных узлов и микросборок [39]

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности $\lambda, Вт/(м \cdot К)$	Плотность $\rho, кг/м^3$	Удельная теплоемкость $C, Дж/(кг \cdot м)$
1	2	3	4
Материалы печатных плат:			
Гетинакс	0,15-0,19	1200-1400	-
Текстолит	0,23-0,33	1350	1400
Стеклотекстолит	0,23-0,37	1500-1800	420
Стеклотекстолит (многослойная печатная плата)	0,43-0,50	1750	410
Анодированный алюминий	200-300	2800	850
Алюминий с эпоксидной смолой	50-65	2800	800
Титан покрытый слоем Al_2O_3	29	4800	-
Сталь с эпоксидной смолой	1,1	7800	550
Полиимид 6	0,3	-	-
Полиимид (<i>vlspeI</i>)	0,36	-	-
Фольгированный полистирол	0,03-0,04	-	-
Материалы проводников:			
Медь	380-390	8940	380
Серебро	390-420	10500	234
Золото	219	19300	130
Материалы радиаторов и оснований функциональных ячеек:			
АЛ-7	196	2600	830
АЛ-2	167	2650	840
АЛ-9	151	2660	890
АМЦ	180	2730	1090

Продолжение таблицы П1.1

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности $\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	Плотность $\rho,$ $\text{кг}/\text{м}^3$	Удельная теплоемкость $C,$ $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{м})$
1	2	3	4
АМГ	150	2630	970
АМГ-6	90	2680	970
Алюминий деформируемый (АД, АД-1 и др.)	210-230	2710	900
Дюралюминий	160-180	2750	920
Д 16М	192	2780	-
Д 16Т	121	-	-
Материалы подложек:			
Ситалл СТ-32-1	1,0	3190	-
Ситалл СТ38-1	1,3	2900	-
Ситалл СТ-50-1	1,4-1,5	2200-2700	-
Феррит 10 СЧ-6	2,6	5020	-
Поликор (ВК-100)	30-35	3960-3990	-
22хс (ВК-94-1)	13,4	3750-3850	-
КМ	21-25	-	-
М7	10,0	-	-
ВК-98-1 (сапфирит)	24-26	3880-3940	-
Стекло С41-1	1,0	2500	-
Стекло С48-3	1,2-1,5	2200-2700	-
Плавленый кварц	7,0-15,0	2210	740
Клеи:			
(Т _м – допустимая рабочая температура, °С; t – технологическая толщина клеевого слоя, мкм):			
Д9 (Т _м =150, t=50-250)	0,74	-	-
ЭТА (Т _м =150, t=30-200)	0,80	-	-
ТКЛ-2 (Т _м =125, t=50- 250)	1,60	-	-
ВТ-25-200 (Т _м =200, t=50-250)	0,62	-	-
К-400 (Т _м =250, t=100- 250)	1,0-2,0	-	-
Эластосил 10-01-марка Б	0,65	-	-

Продолжение таблицы П1.1

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м·К)	Плотность ρ , кг/м ³	Удельная теплоемкость C , Дж/(кг·м)
1	2	3	4
Эластосил 137-83 ($T_m=200$, $t=50-250$)	0,97	-	-
Мастика ЛН ($T_m=120$, $t=50-250$)	0,65	-	-
Эпоксидная смола УП-5-201	0,15 1,0	-	-
Паста КПП-8	0,8	-	-
ВК-9 (наполнитель TiO_2)	0,21-0,22	-	-
КВК-68	0,137	-	-
ВК-9 (наполнитель AlN)	0,56-1,62	-	-
КВК-68 (наполнитель AlN)	1,0-1,87	-	-
Компаунды:			
ЭК-16А	0,3-0,35	1350	1200-1400
К-1	2,2	-	-
К-2	1,4	-	-
КТЭ-2	1,3	-	-
КТЭ-4	1,2	-	-
ЭК-16А с кварцевой пылью	0,5-0,8	-	-
Газы:			
Азот (при 0 °С)	0,0243	1250	1030
Аммиак (при 0 °С)	0,021	771	2043
Водород (при 0 °С)	0,1721	899	14192
Водяной пар (при 100 °С)	0,024	598	2135
Воздух, сухой (при 0 °С)	0,0244	1293	1005
Гелий (при 0 °С)	0,143	178	5203
Кислород (при 0 °С)	0,0247	1429	915
Оксид углерода (при 0 °С)	0,0233	1250	1039
Углекислый газ (при 0 °С)	0,0146	1977	815
Прочие материалы			
Пенополиуретан	0,06	1250	-

Окончание таблицы П1.1

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности $\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	Плотность $\rho,$ $\text{кг}/\text{м}^3$	Удельная теплоемкость $C,$ $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{м})$
1	2	3	4
Пластмасса ЭФП-63	0,23	-	-
Пластмасса полихлорвиниловая	0,44	-	-
Плекстиглас	0,19	1180	1420-1550
Полистирол	0,09-0,14	1500	-
Фторопласт-4	0,25	2300	920-1050
Германий	23	5320	314
Кремний	22	2300	733
Латунь	109	8440	376
Титан	22	4500	-
Сталь 10	73	7850	460
Магний	156	1750	1047
Бронза	25	8800	381
Парафин	0,27	920	1000
Картон	0,23	-	-
Слюда	0,45	2600-3200	879
Асбестовая ткань	0,17	-	-
Эбонит	0,16	1200	-
Резина	0,16	1200	1380

Таблица П1.2 – Коэффициенты черноты поверхностей некоторых конструкционных материалов РЭС [39]

Материал и состояние его поверхности	Коэффициент черноты, <i>отн. ед</i>	Температура, °С
1	2	3
Алюминий:		
грубо полированный	0,05	100
тщательно полированный	0,04-0,06	50-500
листовой (коммерческий)	0,09	30-200
сильно окисленный	0,20-0,80	50-500
сплав Д-16	0,37-0,40	50-350
фольга	0,10	100
Медь:		
тщательно полированная	0,02	80-115

Продолжение таблицы П1.2

Материал и состояние его поверхности 1	Коэффициент черноты, <i>отн. ед</i> 2	Температура, °С 3
шлифованная	0,05	20
сильно окисленная	0,79	150
Латунь:		
тщательно полированная	0,02	100
шлифованная	0,05	50
сильно окисленная	0,78	100
пластина тусклая	0,22	200
окисленная	0,60	100
Бронза полированная	0,16	50
Сталь:		
никелированная	0,11	25
окисленная	0,80	25
литьё	0,54	25
листовая, шероховатая	0,96	300
холоднокатаная	0,09	93
Железо:		
шлифованное	0,14	20
листовое, сильно окисленное	0,69	100
Ковар	0,82	23
Золото	0,10	90-600
Никель полированный	0,08	99-370
Титан	0,63	25
Чугунное литьё	0,81	50
Окиси металлов	0,40-0,80	100-400
Кварц плавный	0,93	20
Стекло гладкое	0,94	22
Бумага (картон)	0,93	20-300
Асбестовый картон	0,96	20
Резина	0,86-0,95	24
Фарфор глазурованный	0,92	23
Краски:		
масляные различных цветов	0,92-0,96	100
эмалевые	0,92	20-100
алюминиевые различных цветов	0,27-0,67	100

Окончание таблицы П1.2

Материал и состояние его поверхности 1	Коэффициент черноты, <i>отн. ед</i> 2	Температура, °С 3
защитнозеленая	0,90	40
бронзовая	0,51	50
<i>Лаки:</i>		
чёрный	0,96-0,98	40-100
белый	0,80-0,95	40-95
щёллак чёрный матовый	0,91	25
муар серый, чёрный	0,90	20
<i>Белая эмаль на железной пластине</i>	0,90	25
<i>Алюминиевый лак на шероховатой пластине</i>	0,39	20

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 – СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЁТА НАДЁЖНОСТИ

Таблица П2.1 – Поправочные коэффициенты a_j для расчёта интенсивностей отказов ЭРЭ в зависимости от температуры среды $T_{ср}$ окружающей элемент и коэффициента нагрузки K_j [12]

Наименование, тип элемента	$T_{ср}, K$	Коэффициент нагрузки K_j									
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Транзисторы кремниевые	293	0,16	0,18	0,20	0,35	0,43	0,52	0,63			
	303	0,16	0,19	0,22	0,37	0,46	0,55	0,67			
	313	0,17	0,20	0,23	0,40	0,51	0,59	0,72			
	323	0,18	0,21	0,24	0,45	0,55	0,65	0,78			
	333	0,19	0,22	0,26	0,50	0,61	0,71	0,85			
	343	0,20	0,23	0,27	0,56	0,70	0,81	0,97			
Транзисторы германиевые	293	0,23	0,26	0,35	0,42	0,50	0,70	0,74			
	303	0,27	0,32	0,45	0,52	0,65	0,83	0,95			
	313	0,32	0,40	0,53	0,66	0,81	1,04	1,22			
	323	0,42	0,50	0,68	0,84	1,08	1,31	1,50			
	333	0,52	0,63	0,86	1,10	1,38	1,65	1,90			
	343	0,63	0,80	1,11	1,40	1,73	2,05	2,35			
Диоды кремниевые	293	0,77	0,78	0,79	0,81	0,83	0,85	0,88			
	303	0,85	0,85	0,86	0,88	0,90	0,92	0,97			
	313	0,92	0,92	0,94	0,97	1,00	1,04	1,08			
	323	0,98	1,00	1,02	1,05	1,09	1,13	1,19			
	333	1,04	1,08	1,11	1,16	1,22	1,30	1,39			
	343	1,13	1,18	1,23	1,29	1,37	1,46	1,56			
Диоды германиевые	293	0,15	0,22	0,30	0,39	0,50	0,62	0,74			
	303	0,19	0,26	0,35	0,45	0,55	0,66	0,79			
	313	0,23	0,32	0,41	0,51	0,63	0,76	0,91			
	323	0,32	0,45	0,60	0,76	0,95	1,15	1,41			
	333	0,53	0,66	0,86	1,13	1,40	1,75	2,13			
	343	0,81	1,03	1,34	1,73	2,19	2,72	3,31			
Конденсаторы слюдяные негерметичные	303			0,08	0,11	0,22	0,27				
	313			0,09	0,13	0,28	0,35				
	323			0,10	0,15	0,36	0,46				
	333			0,12	0,20	0,45	0,62				
	343			0,15	0,26	0,60	0,83				
	353			0,22	0,43	0,92	1,46				
363			0,38	0,82	1,70	2,40					
373			0,57	1,36	3,00	3,40					

Продолжение таблицы П2.1

Наименование, тип элемента	$T_{ср}, К$	Коэффициент нагрузки K_f								
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Конденсаторы стеклянные, плёночные, металлобумажные	293			0,36	0,49	0,64	0,80			
	303			0,38	0,50	0,70	0,94			
	313			0,42	0,54	0,80	1,10			
	323			0,49	0,63	0,95	1,43			
	333			0,61	0,75	1,19	2,00			
	343			0,76	0,96	1,58	2,30			
	353			0,97	1,40	2,10	2,80			
	363			1,30	2,80	2,70	3,80			
	373			1,70	4,50	3,50	5,00			
Конденсаторы электролитические с алюминиевым анодом	293			0,48	0,40	0,48	0,82			
	303			0,60	0,48	0,60	1,24			
	313			0,90	0,64	0,90	1,73			
	323			1,40	1,17	1,40	2,30			
	333			2,10	1,80	2,10	4,30			
	343			3,60	2,90	3,60	5,65			
	353			5,60	4,40	5,60	7,00			
	363			8,00	6,50	8,00	11,0			
	373			11,4	9,00	11,4	18,0			
Конденсаторы электролитические с танталовым анодом	293			0,20	0,20	0,20	0,39			
	303			0,22	0,22	0,22	0,41			
	313			0,30	0,30	0,30	0,47			
	323			0,40	0,40	0,40	0,57			
	333			0,50	0,50	0,50	0,70			
	343			0,65	0,65	0,65	0,86			
	353			0,80	0,80	0,80	1,05			
	363			1,00	1,00	1,00	1,30			
	373			1,25	1,25	1,25	1,65			
Резисторы непроволочные	293	0,20	0,26	0,35	0,42	0,50	0,60	0,72	0,84	1,00
	303	0,27	0,34	0,43	0,51	0,62	0,75	0,88	1,07	1,26
	313	0,33	0,42	0,51	0,60	0,76	0,94	1,11	1,38	1,71
	323	0,40	0,50	0,59	0,71	0,92	1,17	1,38	1,76	2,22
	333	0,47	0,57	0,67	0,82	1,08	1,43	1,70	2,17	2,81
	343	0,54	0,64	0,75	0,94	1,26	1,72	2,04	2,69	3,52
	353	0,61	0,71	0,84	1,07	1,46	2,05	2,48	3,31	4,40
	363	0,70	0,79	0,92	1,20	1,66	2,40	2,99	4,04	5,40

Окончание таблицы П2.1

Наименование, тип элемента	$T_{ср}, К$	Коэффициент нагрузки K_f								
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Резисторы проволочные	293	0,02	0,02	0,05	0,10	0,20	0,34	0,51	0,73	1,00
	313	0,06	0,06	0,11	0,19	0,32	0,53	0,69	0,92	1,29
	338	0,11	0,11	0,18	0,32	0,51	0,79	1,04	1,43	2,18
	358	0,16	0,17	0,24	0,43	0,73	1,07	1,50	2,26	3,65
	363	0,18	0,20	0,30	0,52	0,96	1,33	2,00	3,15	5,00

Таблица П2.2 – Средние, максимальные и минимальные значения интенсивностей отказов ЭРЭ [12]

Наименование элемента	Интенсивность отказов λ , (среднее значение)/(максимальное - минимальное), $10^{-6} ч^{-1}$
Интегральные микросхемы	
Гибридные	0,075 / (0,1 – 0,05)
Полупроводниковые	0,02 / (0,03 – 0,01)
Транзисторы кремниевые	
Маломощные (до 150 мВт)	0,84 / (1,44 – 0,45)
Высокочастотные (менее 1 Вт)	0,50 / (1,67 – 0,16)
Средней и большой мощности	0,74 / (0,84 – 0,21)
В ключевом режиме	0,70 / (0,848 – 0,25)
Субминиатюрные двойные	2,6 / (4,31 – 0,87)
Микроволновые	9,66
Диоды	
Кремниевые	0,2 / (0,452 – 0,021)
Кремниевые карбидные	0,1 / (0,55 – 0,002)
Субминиатюрные двойные	0,85 / (1,7 – 0,26)
Конденсаторы	
Керамические	0,15 / (1,64 – 0,042)
Керамические переменные	0,02 / (0,351 – 0,012)
Стеклянные	0,06 / (0,87 – 0,0005)
Танталовые	0,6 / (1,934 – 0,108)
Пластиковые	0,135 / (0,178 – 0,003)
Нейлоновые	0,01 / (0,014 – 0,006)
Электролитические	0,035 / (0,513 – 0,003)

Окончание таблицы П2.2

Наименование элемента	Интенсивность отказов λ , (среднее значение)/(максимальное - минимальное), 10^{-6}ч^{-1}
Резисторы	
Композиционные 0,25 Вт и менее	0,016
Композиционные 0,5 Вт	0,06
Композиционные 2 Вт	0,071
Композиционные переменные	0,053 / (0,533 – 0,007)
Металлоплёночные	0,2 / (0,4 – 0,004)
Плёночные прецизионные	0,004
Потенциометры	0,26 / (0,5 – 0,02)
Проволочные прецизионные	0,073 / (0,114 – 0,032)
Нелинейные	0,11 / (0,153 – 0,047)