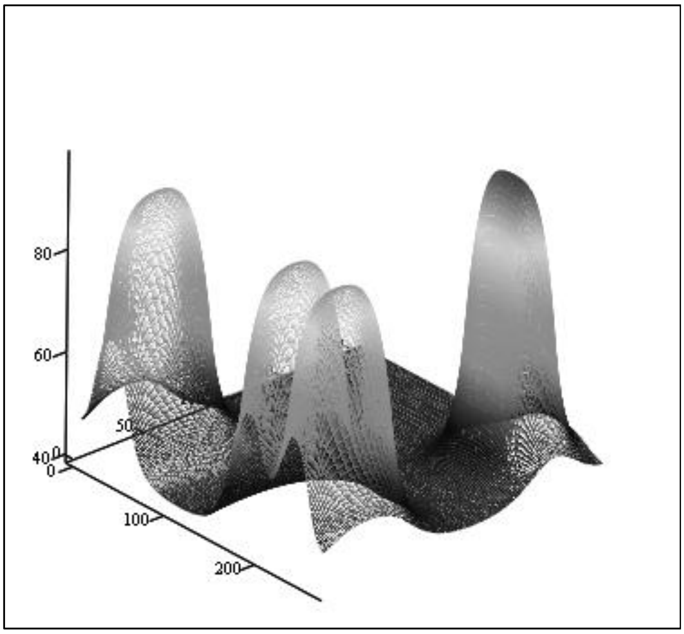
КИПР

ТУСУР

Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТИ РЭС

Учебное пособие по групповому проектному обучению для студентов радиотехнических специальностей



T

ТОМСК 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

В.П. Алексеев, В.М. Карабан

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ РЭА

Учебное пособие для научно-технических работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов инженерно-технических специальностей

2012

УДК 6212.396.93 (075.8)

Рецензент: профессор, д.ф.- м.н. Кузнецов Г.В.

Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР, к.т.н. Озеркин Д.В.

Алексеев В.П., Карабан В.М.
Математическое моделирование физических процессов термоустойчивости РЭС. Учебное пособие по групповому проектному обучению для студентов радиотехнических специальностей.
Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.- 106 стр.

Данное учебное пособие предназначено для студентов обучающихся проектированию радиоэлектронной аппаратуры в рамках специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств». В пособии изложены материалы по вопросам организации и прохождения преддипломной практики, выполнения выпускных квалификационных работ, их представлению и защите. Основой для пособия послужил опыт организации дипломного проектирования на кафедре «Конструирования и производства радиоаппаратуры» в период с 1974 по настоящее время. При подготовке пособия использовались аналогичные материалы других профилирующих кафедр ТУСУРа.

УДК 6212.396.93 (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРОВ

С пожеланиями успехов в учёбе и работе!

_______________________ В.П. Алексеев

_______________________ В.М. Карабан

1 ВВЕДЕНИЕ

Создание вычислительной техники колоссально расширило и углубило научные исследования, привело к развитию вычислительных методов, появлению методологии математического моделирования как новой, более высокой ступени теоретического изучения явлений.

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» - математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютере вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства, как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью даёт возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же самое время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая всё новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Методология математического моделирования в кратком виде выражена знаменитой триадой «модель - алгоритм – программа», сформулированной академиком А. А. Самарским, основоположником отечественного математического моделирования (см. рис. 1.1).

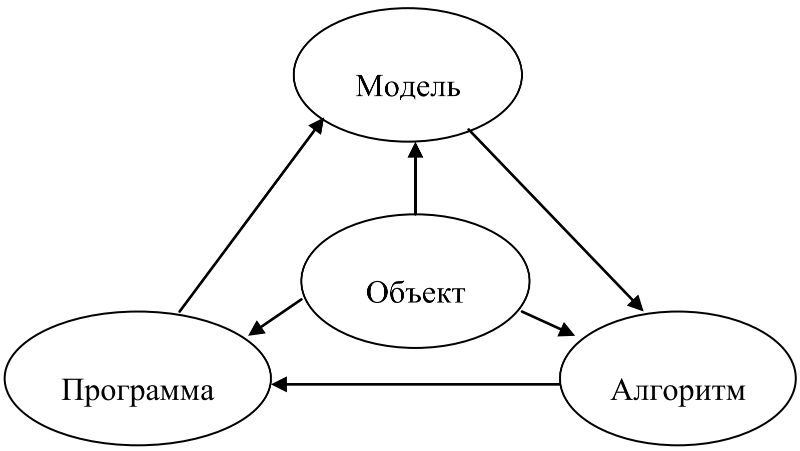


Рис. 1.1

Эта методология получила свое развитие в виде технологии «*вычислительного эксперимента*» – одной из информационных технологий, предназначенной для изучения явлений окружающего мира, когда натурный эксперимент оказывается слишком дорогим и сложным.

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, то есть его приближенное описание в форме алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений. Такое описание должно отражать в математической форме важнейшие свойства объекта – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д. Математическая модель (или её фрагменты) исследуются теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте. Надо установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи и единственно ли оно.

Второй этап вычислительного эксперимента состоит в выборе или разработке приближенного численного метода решения, другими словами вычислительного алгоритма для реализации модели на компьютере. Под вычислительным алгоритмом понимают последовательность арифметических и логических операций, при помощи которой находится решение математической задачи, сформулированной на первом этапе. Следует помнить, что вычислительные алгоритмы никоим образом не должны искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач.

На третьем этапе осуществляется программирование вычислительного алгоритма, то есть создаются программы, к которым также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта.

Таким образом, создав *триаду* «модель – алгоритм – программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и относительно недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как *адекватность* (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные испытания, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады. Например, может оказаться, что модель слишком груба – результат вычислений не согласуется с экспериментальными данными, или что модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить при более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа, то есть уточнить математическую модель, и снова пройти все этапы.

Вычислительный эксперимент в отличие от натурных экспериментальных установок позволяет накапливать результаты, полученные при исследовании какого-либо круга задач, а затем быстро и гибко применять их к решению задач в совершенно других областях. Этим свойством обладают используемые универсальные математические модели. Например, уравнение нелинейной теплопроводности пригодно для описания не только тепловых процессов, но и диффузии вещества, движения грунтовых вод, фильтрации газа в пористых средах. Изменяется только физический смысл величин, входящих в это уравнение.

Еще одна область использования вычислительного эксперимента - это «вычислительная технология» - применение математического моделирования с помощью компьютеров не только для решения фундаментальных научных проблем, но и для разработки технологических процессов в промышленности. Для тех случаев, когда технологические процессы описываются хорошо известными математическими моделями, для расчета которых предложены эффективные вычислительные алгоритмы, разработаны пакеты прикладных программ, технология вычислительного эксперимента позволяет создавать новые программы и совершенствовать средства общения человека с компьютером.

Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы – от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования.

Под термоустойчивостью в дальнейшем будем понимать способность изделия

ГОСТ по термоустойчивости

2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

2.1 Виды передачи теплоты

Теплообмен – раздел физики, в котором рассматриваются процессы переноса теплоты (энергии). Явление теплообмена связаны с необратимым переносом энергии из одной части пространства в другую и вызваны разностью температур.

Различают три вида переноса энергии в виде теплоты: теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение.

Теплопроводность представляет собой процесс распространения теплоты при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела, имеющих различные температуры. Этот вид переноса теплоты может происходить в любых телах, но механизм переноса зависит от агрегатного состояния тела. В жидкостях и твёрдых телах – диэлектриках – перенос теплоты осуществляется путём непосредственной передачи теплового движения молекул и атомов соседним частицам вещества. В газообразных телах распространение теплоты теплопроводностью осуществляется посредством диффузии молекул и атомов, а также за счёт обмена энергией при соударении молекул. В металлах распространение теплоты происходит в основном в результате диффузии свободных электронов и упругих колебаний кристаллической решетки, причем последнее имеет второстепенное значение.

Явление конвекции происходит лишь в «текущей» среде, то есть в жидкостях или газах. Под конвекцией понимают процесс переноса теплоты при перемещении объемов жидкости или газа в пространстве из области одной температуры в область с другой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды. Конвекция обычно сопровождается теплопроводностью.

В зависимости от причин возникновения конвективного движения жидкости или газа различают *свободную* и *вынужденную* конвекции. В первом случае перемещение теплоносителя происходит только под влиянием разности плотностей холодной и горячей области среды в поле тяготения. Нагревшиеся объемы теплоносителя поднимаются вверх, охладившиеся опускаются. Около нагретых тел имеет место, как правило, восходящая (подъемная) конвекция, а у холодных – нисходящая (опускная).

При вынужденной конвекции теплоноситель движется за счёт внешних сил (под действием насоса, вентилятора, ветра и т.п.), в связи с чем, теплообмен протекает более интенсивно.

Тепловое излучение – это процесс распространения теплоты с помощью электромагнитных волн, возникающих в результате молекулярных и атомных возмущений. При тепловом излучении внутренняя энергия излучающего тела переходит в лучистую, а лучистая энергия, поглощенная другим телом, переходит в теплоту.

Распространение теплоты посредством теплопроводности, конвекции и теплового излучения очень часто происходят совместно. Теплообмен путем соприкосновения между поверхностью твердого тела и жидкостью или газом, обтекающим это тело, называется *теплоотдачей*, или *конвективным теплообменом*. Конвективный теплообмен – это совместный процесс передачи теплоты конвекцией и теплопроводностью. Дело в том, что течение жидкости или газа в непосредственной близости от стенки твердого тела всегда носит ламинарный характер. Через ламинарный пограничный слой теплота передается только путем теплопроводности, а в остальной части потока – конвекцией.

В тех случаях, когда теплообмен между стенкой и окружающей средой происходит путем соприкосновения и излучения, - явление называется *лучисто-конвективным теплообменом*, так как оно включает в себя все три вида переноса теплоты.

Теплообмен между жидкими или газообразными средами, разделенными твердой перегородкой, называется *теплопередачей*. Перенос теплоты от более нагретого теплоносителя к стенке и от стенки к менее нагретому теплоносителю носит характер теплоотдачи или лучисто-конвективного теплообмена. Перенос теплоты непосредственно через стенку осуществляется за счет теплопроводности.

Изучение теории теплообмена обычно начинается со знакомства с наиболее простыми способами переноса теплоты с тем, чтобы, зная закономерности и расчетные соотношения этих процессов, можно было бы использовать их при освоении сложных явлений теплообмена, которые имеют место в радиоэлектронной аппаратуре.

2.1.1 Теплопроводность

Явление теплопроводности проявляется при наличии градиента температуры $grad\ T$ и в одномерном стационарном случае описывается уравнением Фурье

$$q = - \lambda\ grad\ T,$$

где q – плотность теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности или в системе СИ просто «теплопроводность».

За единицу теплопроводности как физической величины принят Ватт на метр-кельвин [Вт/(м·К)], численно равный теплопроводности вещества, в котором при стационарном режиме с поверхностной плотностью теплового потока 1 Вт/м^2 устанавливается температурный градиент 1 К/м.

В общем случае теплопроводность является функцией структуры, плотности, влажности, давления и температуры, при которой находится исследуемое вещество. Если оно находится в газообразном состоянии, то согласно элементарной кинетической теории

$$\lambda = u v \rho c_v /3,$$

где u – средняя скорость теплового движения молекул; v - средняя длина свободного пробега; ρ – плотность газа; c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

В металлах теплопроводность осуществляется в основном за счёт переноса энергии свободными электронами. В классическом приближении идеального электронного газа

$$\lambda = k u_e n v/2 ,$$

где k – постоянная Больцмана; u_e – средняя скорость теплового движения электронов; n – число электронов в единичном объеме металла.

В металлических кристаллах механизмом теплопроводности служит передача энергии электронами проводимости. В кристаллических диэлектриках основную роль играет передача энергии связанных колебаний узлов решетки. В первом приближении этот процесс можно представить в виде распространения в кристалле набора гармонических упругих волн. В квантовой теории этим волнам сопоставляются квазичастицы - фононы. Процесс решёточной теплопроводности может быть рассмотрен как перемещение фононов по кристаллу. Средняя длина свободного пробега фононов является кинетической характеристикой, аналогичной средней длине свободного пробега молекулы. Решёточная теплопроводность кристаллов определяется как

$$\lambda = u_з v c/3 ,$$

где $u_з$ – скорость звука; c – теплоемкость единицы объема.

При исследовании жидкостей и газов необходимо учитывать возможное влияние конвекции и теплового излучения.

Теплопроводность газов находится в пределах 0,005…0,5 Вт/(м·К). С повышением температуры она возрастает; от давления в диапазоне от $2 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^8$ Па практически не зависит. Закон аддитивности здесь неприменим, поэтому для смеси газов теплопроводность достоверно может быть определена только опытным путем.

Теплопроводность капельных жидкостей находится в пределах 0,08…0,7 Вт/(м·К). С повышением температуры для большинства жидкостей она убывает, за исключением воды и глицерина.

Теплопроводность строительных и теплоизоляционных материалов находится в пределах 0,02…3,0 Вт/(м·К). С повышением температуры она возрастает; зависит от структуры, пористости и влажности материала.

Теплопроводность металлов и сплавов находится в пределах 5…400 Вт/(м·К). Для большинства металлов характерно уменьшение теплопроводности с повышением температуры.

Теплопроводность каждого конкретного вещества точно предсказать теоретически невозможно. Поэтому лишь непосредственный опыт является единственным способом определения достоверного значения теплопроводности.

При разработке методов определения λ практический интерес представляют только простейшие внутренние обратные задачи теории теплопроводности, явным образом связывающие λ с тепловым воздействием, температурным полем и геометрией образца. Иными словами, теоретическую основу большинства современных точных методов определения теплопроводности составляют аналитические закономерности одномерных плоских или цилиндрических тепловых и температурных стационарных полей в образцах, которые могут быть отнесены соответственно либо к классу пластины или цилиндра, либо к классу плоского или цилиндрического полупространства.

2.1.2 Конвекция

Как отмечалось выше, различают два вида конвекции: вынужденную и свободную.

Вынужденная конвекция. Процесс теплоотдачи от потока к стенке, или от стенки к потоку, в условиях вынужденной конвекции сводится к прохождению теплоты теплопроводностью через пограничный слой. Так как в пограничном слое исключается возможность радиальных переносов теплоты, то единственный путь передачи теплоты от слоя к слою – теплопроводность.

2.1.3 Тепловое излучение

Тепловое излучение есть результат превращения внутренней энергии тел в энергию электромагнитных колебаний и характеризуется длиной волны λ и частотой колебаний $\nu=c/\lambda$, где c – скорость света.

Все виды электромагнитного излучения имеют одинаковую природу, поэтому классификация излучения по длине волн в зависимости от производимого ими эффекта носит лишь условный характер. При температурах, с какими имеют дело в технике, основное количество энергии излучается при λ=0,8…80 мкм. Эти лучи называют тепловыми (инфракрасными). Меньшую длину имеют волны видимого и ультрафиолетового излучения, большую – радиоволны. Таким образом, в отличие от других механизмов теплообмена лучистая энергия имеет не только количественную, но и качественную (спектральную) характеристику.

Если на пути теплового излучения встречается тело, то тепловая энергия частично поглощается им, частично отражается и частично проходит сквозь него. Обозначим количество падающей на тело энергии Q, поглощённой – Q_a, отражённой – Q_r и прошедшей через вещество – Q_d. Тогда на основании закона сохранения энергии

$$Q = Q_a + Q_r + Q_d. \tag{2.1}$$

Разделим обе части равенства (2.1) на Q

$$\frac{Q_a}{Q} + \frac{Q_r}{Q} + \frac{Q_d}{Q} = 1. \tag{2.2}$$

Первый член равенства (2.2) называется *коэффициентом поглощения* и обозначается a, второй – *коэффициентом отражения* и обозначается r, третий – *коэффициентом пропускания* и обозначается d. Следовательно,

$$a + r + d = 1. \tag{2.3}$$

Каждая из величин a, r, d для различных веществ может принимать значения от 0 до 1. Различают три крайних случая:

1) a=1, r=0, d=0, т. е. падающая лучистая энергия полностью поглощается телом; такие тела называются *чёрными*;

2) r=1, a=0, d=0, т. е. падающая лучистая энергия полностью отражается. В этом случае, когда поверхность шероховатая, лучи отражаются рассеянно (диффузионное отражение) и тело называется *белым*; когда поверхность тела гладкая, то отражения следует законам геометрической оптики и поверхность тела в этом случае называется *зеркальной*;

3) d=1, a=0, r=0, т. е. падающая лучистая энергия полностью проходит через тело: такие тела называются *прозрачными* (диатермичными).

В природе такие крайние случаи не встречаются, т. е. величины a, r, d не принимают значений, равных нулю или единице. Однако анализ этих случаев позволил найти для установления законов излучения реальных тел.

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Применение вычислительной техники и численных методов значительно расширяет классы исследуемых задач теплообмена, позволяя получать приближенные решения многомерных, нелинейных, нестационарных задач, для которых использование точных и приближенных аналитических методов не представляется возможным. При выборе математических моделей, описывающих процессы теплообмена в реальных объектах, границы их допустимой сложности в настоящее время часто определяются не столько возможностями численных методов и вычислительными ресурсами, сколько недостатком достоверной входной информации для этих моделей.

При определении различных пространственно-временных полей необходимо находить решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в заданных областях изменения пространственных и временных интервалах. Отличительной особенностью применения численных методов является дискретизация пространственной и временной областей на первом же этапе решения задачи. Необходимо отметить, что аппроксимация часто делается и при расчёте на основе аналитических решений, однако в этих случаях она проводится на заключительных этапах, реализуемых уже после получения аналитического решения.

Существует два основных численных метода решения уравнений в частных производных: *метод конечных разностей* и *метод конечных элементов*. Они отличаются способами получения системы уравнений для значений искомых функций в узловых точках. Метод конечных разностей базируется непосредственно на дифференциальном уравнении и граничных условиях, а метод конечных элементов – на эквивалентной вариационной постановке задачи.

В данном пособии речь пойдёт именно о применении конечно-разностных схем для решения уравнений теплопроводности.

3.1 Основы метода конечных разностей

Теория численных методов решения уравнений в частных производных представляет собой весьма обширный и достаточно сложный раздел математики, называемый ***теорией разностных схем***, с которым читатель может познакомиться самостоятельно. Мы будем уделять основное внимание практическим вопросам построения и программной реализации различных численных методик, а не их теоретическому исследованию и обоснованию.

Как правило, авторы будут ограничиваться лишь объяснением основных понятий, которые понадобятся в дальнейшем, причём некоторые вопросы рассмотрим чуть упрощено с позиций математики.

Для приближенного (численного) решения краевых задач теплопроводности широко применяется метод конечных разностей, позволяющий решать сложные уравнения математической физики. Основополагающие идеи метода состоят в следующем []:

1. Область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек (узлов) или расчётной сеточной областью;
2. Функции непрерывных аргументов заменяются функциями дискретных аргументов или сеточными функциями, определенными в узлах сетки;
3. Производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) линейной комбинацией значений сеточной функции (разностными соотношениями) в определенных узлах сетки;
4. В результате вышеперечисленных замен краевая задача в частных производных сводится к системе разностных (алгебраических) уравнений, называемых разностной схемой (задачей);
5. Если полученная таким образом система алгебраических уравнений разрешима и при измельчении сетки решение такой системы стремится к решению краевой задачи (то есть сходится), то данное разностное решение принимается за приближенное решение поставленной задачи.

Как правило, число неизвестных в полученной путём аппроксимации системе алгебраических уравнений велико, но её решение с точки зрения математических трудностей более просто, чем исходной краевой задачи.

Таким образом, в [], сформулированы основные этапы процедуры решения краевых задач:

1. Выбор сеточной области, учитывающей конкретную конфигурацию расчётной области.
2. Проведение на выбранной сетке аппроксимации дифференциальных уравнений и краевых условий, в результате которой строится разностная схема – дискретный аналог исходной краевой задачи.
3. Выбор метода решения полученной линейной или нелинейной разностной задачи, составление вычислительного алгоритма.
4. Составление программы расчёта, её отладка, расчет контрольного варианта, проведение численных экспериментов по выбору рациональных значений шагов дискретизации и проверке условий сходимости, получение приближенного решения.

3.2 Ошибки математического моделирования

Необходимо подчеркнуть, что процесс исследования исходного объекта методом математического моделирования неизбежно носит приближённый характер, потому что на каждом этапе вносятся те или иные погрешности. Так, построение математической модели связано с упрощением исходного явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других входных данных. По отношению к численному методу, реализующему данную математическую модель, указанные погрешности являются *неустранимыми*, поскольку они неизбежны в рамках данной модели.

При переходе от математической модели к численному методу возникают погрешности, называемые *погрешностями метода*. Они связаны с тем, что всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближённо. Наиболее типичными погрешностями метода являются *погрешность дискретизации* и *погрешность округления*.

Обычно построение численного метода для заданной математической модели разбивается на два этапа: 1) формулировка дискретной задачи; 2) разработка вычислительного алгоритма, позволяющего отыскать решение дискретной задачи. Например, если исходная математическая задача сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений, то для численного решения необходимо заменить её системой конечного, сколь угодно большого числа линейных или разностных алгебраических уравнений. В этом случае говорят, что проведена *дискретизация* исходной математической задачи. Простейшим примером дискретизации является построение *разностной схемы* путём замены дифференциальных выражений конечно-разностными отношениями. В общем случае дискретную модель дискретную модель можно рассматривать как конечномерный аналог исходной математической задачи. Ясно, что решение дискретизированной задачи отличается от решения исходной задачи. Разность соответствующих решений и называется *погрешностью дискретизации*. Обычно дискретная модель зависит от некоторого параметра (или множества параметров) дискретизации, при стремлении которого к нулю должна стремиться к нулю и погрешность дискретизации. При этом число алгебраических уравнений, составляющих дискретную модель, неограниченно возрастает. В случае разностных методов таким параметром является шаг сетки.

Как уже отмечалось, дискретная модель представляет собой систему большого числа алгебраических уравнений. Невозможно найти решение такой системы точно и в явном виде. Поэтому приходится использовать тот или иной численный алгоритм решения системы алгебраических уравнений. Входные данные этой системы, а именно коэффициенты и правые части, задаются в ЭВМ не точно, а с округлением. В процессе работы алгоритма погрешности округления обычно накапливаются, и в результате полученное на ЭВМ решение будет отличаться от точного решения дискретизированной задачи. Результирующая погрешность называется *погрешностью округления* (иногда её называют *вычислительной погрешностью* или *погрешностью счёта*). Величина этой погрешности определяется двумя факторами:

точностью представления вещественных чисел в ЭВМ и чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

Алгоритм называется *устойчивым*, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно, и *неустойчивым* – в противоположном случае. При использовании неустойчивых вычислительных алгоритмов накопление погрешностей округления приводит в процессе счёта к переполнению арифметического устройства ЭВМ.

3.3 Построение сетки. Задание начальных и граничных условий

Предположим, требуется найти решение T в прямоугольной области $\Omega = \{0 \le x \le L_x,\ 0 \le t \le t_{\mathrm{end}}\}$. Заменим данную пространственно-временную область непрерывного изменения аргументов искомой функции T некоторым множеством точек, лежащих в этой области. Это множество называется *конечно-разностной сеткой*, сами точки – *узлами сетки*, а функции, определенные на этой сетке – *сеточными функциями*.

Разобьем пространственную ось x на M равных отрезков размером Δx. Значение Δx выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность при минимуме затрат времени. Практически такой выбор осуществляется в ходе численных экспериментов, проводимых на основе составленного алгоритма решения задачи и соответствующих программ для ЭВМ.

Разбив отрезки $[0,\ L_x]$, $[0,\ t_{\mathrm{end}}]$ соответственно на M и N равных частей, проведём параллельные координатным осям прямые через точки $x_i = (i-1)\Delta x$, $i = 1,2,3,\ldots,M$, $\Delta x = L_x/(M-1)$; $t^n = n\Delta t$, $n = 0,1,2,\ldots,N$, $\Delta t = t_{\mathrm{end}}/N$. Координаты узлов образованных пересечением прямых x_i и t^n, обозначим нижними индексами i (пространственными) и n (временными). Схема сетки показана на рис. 3.1.

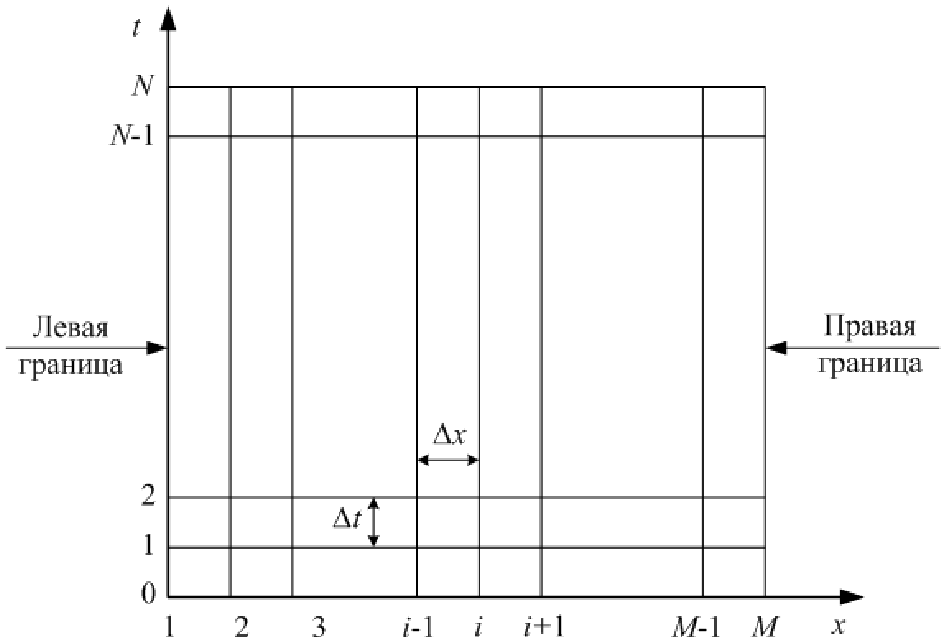


Рис. 3.1 – Сеточная область

Множество узлов (x_i, t^n) образуют равномерную, по каждой из переменных *x* и *t*, сетку. Если $\Delta x \neq \Delta t$, то сетка называется прямоугольной, а в случае $\Delta x = \Delta t$ - квадратной. Для неравномерных сеток $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Совокупность сетки лежащей на линии t^n, называют *n*-м временным слоем.

Обычно вводят такую пространственную сетку, чтобы крайние узлы сетки (самые левые и самые правые) попали на границу пространственной области. Эти узлы являются *граничными* (*i* = 1, *i* = *M*), а остальные (*i* = 2,3,…,*M*-1) *внутренними*. Граничные условия задачи задаются именно в этих граничных узлах, а начальные – для нулевого временного слоя t^0 и *i* = 1,2,…,*M*. Совокупность начального, геометрических и граничных условий называют *краевыми условиями*.

Целью приближенного решения краевой задачи является получение такой функции дискретного аргумента T_i^n (сеточная функция), которая была бы близка к функции непрерывного аргумента *T*, определенной в той же точке, то есть $T_i^n \approx T(x_i, t^n)$.

Начальные условия (НУ) задают значение искомой функции для всей области решения в начальный или в заданный момент времени, то есть значение $T(x, t = t_{нач})$ должно быть задано и равно $T_{нач}$. За начальное время $t_{нач}$ обычно принимают нулевое значение.

При граничных условиях (ГУ) I рода (задача Дирихле) должна быть задана функция (температура) на соответствующей поверхности тела или на соответствующей границе рассматриваемой области

$$T\big|_{\text{пов}} = T_{\text{зад}}. \tag{3.1}$$

При ГУ II рода (задача Неймана) должен быть задан тепловой поток q на поверхности тела. В соответствии с законом Фурье

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов}} = q. \tag{3.2}$$

ГУ III рода задают закон теплообмена поверхности тела с внешней жидкой или газообразной средой. Если теплообмен конвективный, то в соответствии с законом Ньютона-Рихмана

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов}} = \alpha(T_{\text{пов}})(T_{\text{вн}} - T_{\text{пов}}), \tag{3.3}$$

где $T_{\text{вн}}$ – температура внешней среды, α – коэффициент теплоотдачи конвекцией, в общем случае является функцией температуры.

При радиационном теплообмене в соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов}} = \varepsilon\sigma(T_{\text{вн}}^4 - T_{\text{пов}}^4), \tag{3.4}$$

где ε - приведенный коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды, σ - постоянная Стефана-Больцмана.

А при совместном радиационно-конвективном (смешанном) теплообмене

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов}} = \alpha(T_{\text{пов}})(T_{\text{вн}} - T_{\text{пов}}) + \varepsilon\sigma(T_{\text{вн}}^4 - T_{\text{пов}}^4). \tag{3.5}$$

ГУ IV рода задаются в месте контакта тел (сред), в которых определяются поля температур. При идеальном тепловом контакте тепловые потоки и температуры в месте контакта равны

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов1=пов2}} = \lambda_2\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов1=пов2}}; \qquad T\big|_{\text{пов1}} = \Theta\big|_{\text{пов2}}, \tag{3.6}$$

здесь T, Θ - температуры контактируемых тел 1-го и 2-го, соответственно.

При неидеальном тепловом контакте имеет место скачок температур Δ в месте контакта

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов1=пов2}} = \lambda_2\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\bigg|_{\text{пов1=пов2}}; \qquad (T-\Theta)\big|_{\text{пов1=пов2}} = \Delta. \tag{3.7}$$

Значение Δ должно быть известно.

3.4 Аппроксимация уравнения теплопроводности, начальных и граничных условий. Явная разностная схема

Рассмотрим обобщенное нестационарное уравнение теплопроводности с внутренним источником тепловыделений для простейшего (одномерного) случая

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + W, \tag{3.8}$$

где W – удельная мощность тепловыделения источника ($W = Q/V$); λ – коэффициент теплопроводности; C – удельная теплоемкость; ρ – плотность; Q – мощность источника; V – объем источника.

Аппроксимация дифференциальных операторов (производных) конечно-разностными выражениями основана на разложении в ряд Тейлора гладких функций. Конечно-разностные аналоги первых производных по времени и пространству выглядят следующим образом

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{n,i} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t); \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^{n} - T_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x); \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i}^{n} - T_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x); \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^{n} - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \tag{3.12}$$

где O – означает порядок погрешности, получаемой при отбрасывании остаточных членов ряда.

Соотношение (3.9) – (3.12) определяют приближённую формулу для первой производной через конечные разности. При этом соотношение (3.10) называют правой конечной разностью, (3.11) – левой конечной разностью, (3.12) – центральной конечной разностью. Таким образом, как можно заметить, центрально-разностное отношение точнее аппроксимирует первую производную, так как порядок малости остаточного члена выше, чем для левой и правой разности.

Аппроксимацию конечной разностью второй производной по пространству можно записать как

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \tag{3.13}$$

В соответствии с данными аппроксимациями первой и второй производной перепишем уравнение теплопроводности (3.8)

$$C\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \lambda\left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + W + O(\Delta t, \Delta x^2)\,. \tag{3.14}$$

Таким образом, пренебрегая погрешностью аппроксимации, можно определить температуру на следующем временном слое (n+1) по известному значению температуры предыдущего (n). Такая разностная схема называется ***явной***.

Начальные и граничные условия, входящие в краевую задачу, также аппроксимируются разностными отношениями (ГУ II, III, IV рода) или значениями функций (ГУ I рода) на временном слое n.

Аппроксимация НУ имеет вид

$$T(x, t=0) \approx T_i^0 = T_{\text{нач}}\,. \tag{3.15}$$

На нулевом временном слое (n = 0) температуры для каждого пространственного узла i, то есть для i = 1,2,…,M, должны быть равны $T_{\text{нач}}$.

При аппроксимации ГУ I рода (3.1) узлы сетки с наименьшим (i = 1) и с наибольшим (i = M) номерами располагаются на поверхности тела (рис. 3.2).

$$T(x=0, t) \approx T_1^n = T_{\text{зад.лев}}\,; \qquad T(x=L_x, t) \approx T_M^n = T_{\text{зад.пр}}\,, \tag{3.16}$$

где $T_{\text{зад.лев}}$, $T_{\text{зад.пр}}$ - заданные температуры на левой и правой поверхности тела.

Рис. 3.2 – Фрагмент сетки при задании ГУ I рода

Аппроксимация ГУ II рода (3.2) будет следующей

$$-\lambda\frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = q_{лев}, \qquad \lambda\frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = q_{пр}, \tag{3.17}$$

откуда

$$T_1^n = T_2^n + \frac{q_{лев}\Delta x}{\lambda}, \qquad T_M^n = T_{M-1}^n + \frac{q_{пр}\Delta x}{\lambda}, \tag{3.18}$$

где $q_{лев}$, $q_{пр}$ - тепловой поток на левой и правой границах, соответственно.

Исходя из аппроксимации ***ГУ III рода*** (3.3)

$$-\lambda\frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \alpha_{лев}\left(T_{вн.лев} - T_1^n\right); \qquad \lambda\frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = \alpha_{пр}\left(T_{вн.пр} - T_M^n\right) \tag{3.19}$$

определим температуры в граничных узлах

$$T_1^n = T_2^n + \frac{\Delta x}{\lambda}\alpha_{лев}\left(T_{вн.лев} - T_1^n\right); \qquad T_M^n = T_{M-1}^n + \frac{\Delta x}{\lambda}\alpha_{пр}\left(T_{вн.пр} - T_M^n\right). \tag{3.20}$$

Температуры для ГУ (3.4), (3.5) получаются аналогичным образом. Но при этом получится нелинейное алгебраическое уравнение относительно температуры в граничных узлах конечно-разностной сетки.

$$-\lambda\frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \varepsilon\sigma\left[T_{вн.лев}^4 - \left(T_1^n\right)^4\right]; \quad \lambda\frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = \varepsilon\sigma\left[T_{вн.лев}^4 - \left(T_M^n\right)^4\right]. \tag{3.21}$$

$$-\lambda\frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \alpha_{лев}\left[T_{вн.лев} - \left(T_1^n\right)^4\right] + \varepsilon\sigma\left[T_{вн.лев}^4 - \left(T_1^n\right)^4\right]; \tag{3.22}$$

$$\lambda\frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x} = \alpha_{пр}\left[T_{вн.пр} - \left(T_M^n\right)^4\right] + \varepsilon\sigma\left[T_{вн.лев}^4 - \left(T_M^n\right)^4\right].$$

Рассмотрим аппроксимацию ***ГУ IV рода*** (3.6), (3.7) аппроксимируется аналогично.

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x_1} = \lambda_2 \dfrac{\Theta_2^n - \Theta_1^n}{\Delta x_2}; \\ \Theta_1^n = T_M^n. \end{cases} \tag{3.23}$$

Введем соотношение $s = (\lambda_2 / \lambda_1)(\Delta x_1 / \Delta x_2)$ и, решая данную систему уравнений относительно температур в граничных узлах

$$\begin{cases} T_M^n = \dfrac{s}{(1+s)} \Theta_2^n + \dfrac{1}{(1+s)} T_{M-1}^n; \\ \Theta_1^n = \dfrac{s}{(1+s)} \Theta_2^n + \dfrac{1}{(1+s)} T_{M-1}^n. \end{cases} \tag{3.24}$$

Авторы целенаправленно опустили вывод температур в ГУ (3.1) - (3.7) предложив таким образом проделать читателю самостоятельно.

3.5 Неявная схема. Метод прогонки

Рассмотрим ещё одну аппроксимацию конечной разностью второй производной по пространству

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{n,i} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \tag{3.25}$$

в соответствии с которой, уравнение теплопроводности (3.8) примет вид

$$C\rho \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) + W + O(\Delta t, \Delta x^2). \tag{3.26}$$

Отличие аппроксимации уравнения теплопроводности по ***неявной разностной схеме*** (3.26) от аппроксимации этого же уравнения по явной схеме (3.14) состоит в том, что правую часть уравнения аппроксимировали на временном слое *n*+1, а не на слое *n*. В случае неявной схемы нельзя сразу же рассчитать неизвестные температуры $T_{i+1}^{n+1}, T_i^{n+1}, T_{i-1}^{n+1}$ (i = 2,3,…,M-1) с помощью известных температур с предыдущего временного слоя T_i^n.

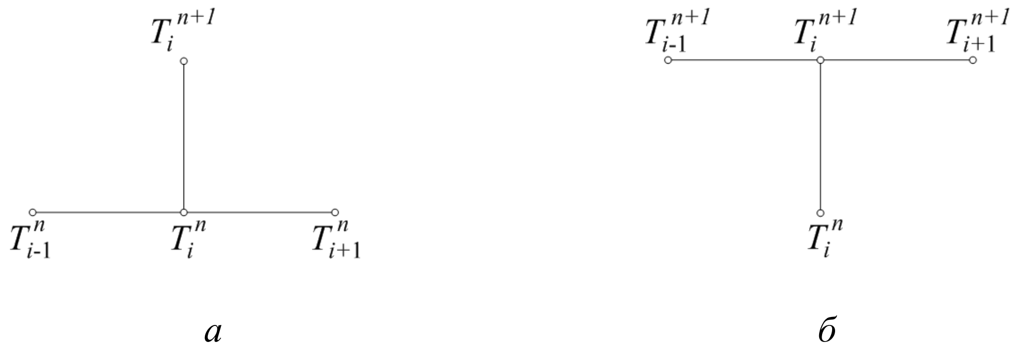


Рис. 3.3 – Шаблон (*а*) явной и (*б*) неявной разностной схемы

Для определения температур из полученной системы линейных уравнений (включая температуры в граничных узлах сеточной области) при решении обычно используют один из вариантов метода исключения неизвестных – ***метод прогонки***.

Метод прогонки состоит из двух этапов – *прямой прогонки* (аналог прямого хода метода Гаусса) и *обратной прогонки* (аналог обратного хода метода Гаусса). Прямая прогонка заключается в том, что каждое неизвестное T_i^{n+1} выражается через T_{i+1}^{n+1} с помощью прогоночных коэффициентов p_i, q_i.

Приведем уравнение теплопроводности (3.26) к каноническому виду, сгруппировав предварительно слагаемые, содержащие температуры на разных временных слоях

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i T_{i-1}^{n+1} = -F\,, \tag{3.27}$$

$$A_i = 1; \quad B = 1; \quad C = 2 + \frac{\Delta x^2}{a\Delta t}; \quad F_i = \frac{\Delta x^2}{a\Delta t} T_i^n + \frac{\Delta x^2}{\lambda} W\,.$$

здесь $a = \lambda/(C\rho)$ - коэффициент температуропроводности.

Далее введем вспомогательные коэффициенты p_i, q_i и запишем формулы прямой и обратной прогонок

$$p_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i p_i}\,, \qquad i = 2, 3, \dots, M\text{-}1; \tag{3.28}$$

$$q_{i+1} = \frac{A_i q_i + F_i}{C_i - A_i p_i}\,, \qquad i = 2, 3, \dots, M\text{-}1; \tag{3.29}$$

$$T_i^{n+1} = p_{i+1} T_{i+1}^{n+1} + q_{i+1}\,, \qquad i = M\text{-}1, M\text{-}2, \dots, 1. \tag{3.30}$$

Смысл выше написанного можно пояснить следующим образом. Сначала последовательно рассчитываются коэффициенты p_i и q_i путем прямой прогонки, а затем на их основе, путем обратной прогонки, рассчитывается T_i^{n+1}.

Коэффициенты p_1, q_1 и T_M^{n+1} определяются с помощью аппроксимации ГУ следующим образом.

Учитывая, что из (3.30) следует $T_1^{n+1} = p_2 T_2^{n+1} + q_2$ для ***ГУ I рода***, когда $T_1^{n+1} = T_{\text{зад.лев}}$, имеем

$$p_2 = 0; \qquad q_2 = T_{\text{зад.лев}}. \tag{3.31}$$

Для правой границы, то есть для $i = M$, ГУ I рода запишется

$$T_M^{n+1} = T_{\text{зад.пр}} \tag{3.32}$$

Рассмотрим аппроксимацию уравнения ***ГУ II рода*** (3.2), которая для i = 1 имеет вид

$$-\lambda \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} = q_{\text{зад.лев}}.$$

Преобразуем это уравнение

$$T_1^{n+1} = T_2^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.лев}}.$$

Учитывая, что из (3.30) следует $T_1^{n+1} = p_2 T_2^{n+1} + q_2$, получим

$$p_2 = 1; \qquad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.лев}}. \tag{3.33}$$

Аппроксимация уравнения (3.2) для i = M выглядит следующим образом

$$\lambda \frac{T_M^{n+1} - T_{M-1}^{n+1}}{\Delta x} = q_{\text{зад.пр}}.$$

Преобразуем это уравнение

$$T_M^{n+1} = T_{M-1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.пр}}.$$

Учитывая, что из (3.30) следует $T_{M-1}^{n+1} = p_M T_M^{n+1} + q_M$ и при условии $(1 - p_M) \neq 0$ получим температуру в правом граничном узле

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \dfrac{\Delta x}{\lambda} q_{\text{зад.пр}}}{1 - p_M}. \tag{3.34}$$

Точно таким же образом коэффициенты p_1, q_1 и T_M^{n+1} определяются и для оставшихся ГУ (III, IV рода).

Для ГУ III рода (3.3)

$$p_2 = 1; \qquad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda}\alpha_{\text{лев}}\left(T_1^{n+1}\right)\left(T_{\text{вн.лев}} - T_1^{n+1}\right). \tag{3.35}$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \dfrac{\Delta x}{\lambda}\alpha_{\text{пр}}\left(T_M^{n+1}\right)\left(T_{\text{вн.пр}} - T_M^{n+1}\right)}{1 - p_M}. \tag{3.36}$$

Для ГУ III рода (3.4)

$$p_2 = 1; \qquad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda}\varepsilon\sigma\left[T_{\text{вн.лев}}^4 - \left(T_1^{n+1}\right)^4\right]. \tag{3.25}$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_N + \dfrac{\Delta x}{\lambda}\varepsilon\sigma\left[T_{\text{вн.пр}}^4 - \left(T_M^{n+1}\right)^4\right]}{1 - p_M}. \tag{3.26}$$

Для ГУ III рода (3.5)

$$p_2 = 1; \qquad q_2 = \frac{\Delta x}{\lambda}\left[\alpha_{\text{лев}}\left(T_1^{n+1}\right)\left(T_{\text{вн.лев}} - T_1^{n+1}\right) + \varepsilon\sigma\left(T_{\text{вн.лев}}^4 - (T_1^{n+1})^4\right)\right]. \tag{3.27}$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + \dfrac{\Delta x}{\lambda}\left[\alpha_{\text{пр}}\left(T_M^{n+1}\right)\left(T_{\text{вн.пр}} - T_M^{n+1}\right) + \varepsilon\sigma\left(T_{\text{вн.пр}}^4 - (T_M^{n+1})^4\right)\right]}{1 - p_M}. \tag{3.28}$$

Для ГУ IV рода (3.6)

$$p_2 = \frac{s}{(1+s)}; \qquad q_2 = \frac{1}{(1+s)}T_{M-1}^{n+1}. \tag{3.29}$$

$$T_M^{n+1} = \frac{q_M + s\Theta_2^{n+1}}{1 - p_M + s}. \tag{3.30}$$

При решении методом прогонки задачи, удовлетворяющей условию хорошей обусловленности $C > |A_i| + |B_i| + \delta$, $(\delta > 0)$, погрешности, допускаемые в процессе вычислений, не накапливаются и не приводят к возрастающим с ростом N ошибкам в вычисляемых значениях решения. Это замечательное свойство и малое число действий для её реализации (абсолютная устойчивость) – делают прогонку удобным вычислительным алгоритмом.

4 ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1 Одномерная задача теплопроводности

Перейдём непосредственно к методике составления вычислительных программ. Рассмотрим в качестве демонстрационного примера программу расчёта по неявной разностной схеме нестационарного уравнения теплопроводности (3.8) для стержня с внутренним источником тепловыделения, боковым теплообменом (3.4) $\alpha = \mathrm{const}$ и начальным условием (3.1), рис. 4.1. Алгоритм программной реализации поставленной задачи представлен на рис. 4.2.

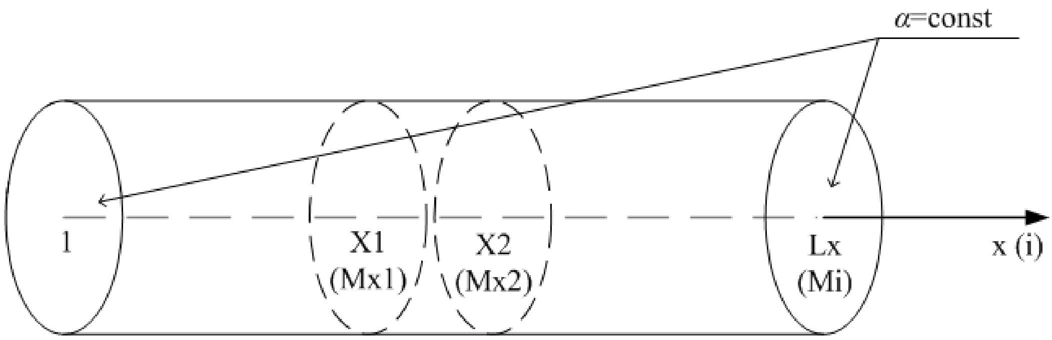


Рис. 4.1 – Геометрия области решения

Рис. 4.2 – Алгоритм программной реализации одномерной задачи теплопроводности

Ниже приведён листинг программы для решения одномерной задачи.

```
! Программа для расчёта поля температур стержня по неявной
! разностной схеме с заданными граничными условиями III рода и
! внутренним источником тепловыделения.
! Для расчета используется метод прогонки.

! Исходные данные и параметры
! Mi – размер расчётной пространственной сетки
! dt – временной шаг
! TIME_END – конечное время расчёта
! Tvn – температура внешней среды
! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
! Lx – длина стержня
! X1, X2 – координаты размещения левой и правой
```

```
! границы источника тепловыделения
! W – удельная мощность источника тепловыделения
! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала стержня
!(удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
! TN, TNP1 – массивы хранения значений температуры на
! (n) и (n+1) – временном слое
! AA, BB, CC, FF – массивы вспомогательных коэффициентов
! PP, QQ – массивы прогоночных коэффициентов
! dx – шаг пространственной сетки
! TIME – текущее время расчета
! kappa – коэффициент температуропроводности материала
! i, ijk – переменная для организации расчётных циклов и циклов записи
! информации в файл
! Mx1, Mx2 – целочисленные координаты размещения
! источника тепловыделения

program sterjen       ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
implicit none
! Ввод исходных данных
integer, parameter :: Mi = 601
    real, parameter :: dt = 0.005, TIME_END = 100.0
    real, parameter :: Tvn = 298.0, ALFA = 5.0
    real, parameter :: Lx = 4.0E-3
    real, parameter :: X1 = 1.9E-3, X2 = 2.1E-3
    real, parameter :: C = 380.0, RO = 8930.0, LAMDA = 385.0
 ! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
 ! для расчёта
    real :: TN(Mi), TNP1(Mi), W(Mi)
    real :: AA(Mi), BB(Mi), CC(Mi), FF(Mi), PP(Mi), QQ(Mi), DEN(Mi)
    real :: dx, TIME, kappa
integer :: i, ijk, Mx1, Mx2

! Расчёт шага пространственной сетки
dx = Lx/(Mi-1)

! Пересчет координат источника в целочисленные значения
Mx1 = X1/dx + 1.0
Mx2 = X2/dx + 1.0

! Вычисление коэффициента температуропроводности
kappa = LAMDA/(C*RO)

! Определение области источника тепловыделения
do i = 1,Mi
   ! Шаг внутри области источника
   if ((i>=Mx1) .and. (i<=Mx2)) then
      W(i) = 1.0E+6
   ! Счёт вне области источника
   else
      W(i) = 0.0
end do
```

```

! Задание начального приближения
TNP1 = Tvn
TIME = 0.0

AA = 1.0; BB = 1.0

! Вывод текста на экран
write(*,*) 'Please, wait ... '

! Открытие файла для записи значений по времени
open (1,file = ‘D:\graph\Ttime.dat’)

! ------------------------------------------------- Организация вычислительного цикла
ijk = 0.0
DO WHILE(TIME<TIME_END)
   ijk = ijk + 1.0

   TN = TNP1

   ! ---------------------- Реализация метода прогонки

   ! Задание ГУ III-го рода на границе x=0 (i = 1)
   PP(2) = 1.0; QQ(2) = dx/LAMDA*(ALFA*(Tvn - TNP1(1)))

   ! Организация цикла прямой прогонки
   do i = 2,Mi-1
      CC(i) = 2.0 + dx**2.0/dt/kappa
      FF(i) = dx**2.0/dt/kappa*TN(i) + dx**2.0/LAMDA*W(i)

     ! Расчёт прогоночных коэффициентов
     DEN(i) = CC(i) - AA(i)*PP(i)    ! Знаменатель
     PP(i+1) = BB(i)/DEN(i)
     QQ(i+1) = (AA(i)*QQ(i) + FF(i))/DEN(i)
   end do

   ! Задание ГУ III-го рода на границе x=Lx (i = Mi)
   TNP1(Mi) = (QQ(Mi) + dx/LAMDA*(ALFA*(Tvn - TNP1(Mi))))/(1.0 - PP(Mi))

   ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
   ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
   do i = Mi-1,1,-1
      TNP1(i) = PP(i+1)*TNP1(i+1) + QQ(i+1)
   end do

   ! Запись значений температуры по времени
   if (mod(ijk,10)==0) write(1,*) TIME, maxval(TNP1)

   ! Переход на следующий временной слой
   TIME = TIME + dt

```

```
116   ! -------------------------------------------- Окончание вычислительного цикла
117   END DO
118
119   ! Закрытие файла записи значений по времени
120   close(1)
121
122 ! Реализация записи конечного распределения температуры в файл
123 open(2,file = ' D:\graph\Tfin.dat')
124    do i = 1,Mi
125       write(2,*) (i-1)*dx, TNP1(i)
126    end do
127 close(2)
128
129 end program sterjen          ! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

Ввод исходных данных условно можно разделить на несколько частей (групп). К первой группе исходных данных относятся параметры разностной схемы: число пространственных точек (Mi), шаг по времени (dt), конечное время расчёта (TIME_END). Ко второй части можно отнести все постоянные коэффициенты и распределения, входящие в исходную дифференциальную задачу, такие как температура внешней среды (Tvn), габаритные размеры тела (Lx), данные об источнике тепловыделения (X1, X2, W), теплофизические характеристики материала (C, RO, LAMDA), начальные распределения (T(x,0)) и др. В третью группу входят данные, характеризующие выходную информацию.

В приводимой программе в интересующие расчётчика моменты времени (за это отвечает счётчик ijk) производится запись в файл максимального значения температуры с помощью оператора 111; и запись значений конечного распределения температуры вдоль оси x (строки 123-127). Для этого были организованы два файла с расширениями (*.dat) и указанием пути их размещения ('D:\graph*.dat), которые можно непосредственно использовать для последующей визуализации результатов.

В простейшем случае запись данных в файл происходит по следующей схеме:

```
open(1,file = 'имя файла')     ! открытие
write(1,формат записи)         ! запись
close(1)                       ! закрытие
```

Необходимо отметить, что: создание конечной папки для записи файла проводится пользователем вручную до запуска программы; если путь размещения не указан, то файл будет создан в текущей (где был создан проект) директории.

После ввода исходных данных производится первое заполнение массива температур, в который записывается начальное распределение.

Организация вычислений осуществляется операторами, помещенными в конструкцию цикла (строки 80 - 117)

```
do while (логическое условие)
   операторы
end do
```

Если перевести дословно то данная конструкция означает выполнение операторов в теле цикла, пока условие истинно.

Схема работы цикла выглядит следующим образом:

1. Проверяется логическое условие работы цикла;
2. Если условие истина, то происходит выполнение операторов тела цикла; если ложно, то цикл завершает работу.

При этом необходимо иметь в виду следующие важные замечания:

- если условия изначально ложно тело цикла может не выполниться ни разу;
- если условие после выполнения цикла не измениться, то это приведёт к зацикливанию.

Коэффициенты, которые содержат значения температур с предыдущего временного слоя и должны пересчитываться на каждом временном шаге, обязательно помещают внутри временного цикла. Остальные, в целях сокращения машинного времени, рекомендуется выносить за тело цикла, как это сделано для коэффициентов уравнения канонического вида (3.15) *A*, *B* (строка 70).

Следует обратить особое внимание, что граничные условия записываются согласно уравнениям (3.19 – 3.30). При этом ГУ при x=0 требуется определить до организации цикла прямой прогонки (строка 88), а ГУ при x=Lx – после расчёта прогоночных коэффициентов и до цикла обратной прогонки (строка 102), то есть следующим образом

```
ГУ при x=0 (i=1) (задаются PP(2) и QQ(2))

! Цикл прямой прогонки
do i = 2,Mi-1
    операторы
end do

ГУ при x=Lx (i=Mi) (задаётся TNP1(Mi))

! Цикл         обратной прогонки
do i = Mi-1,1,-1
    операторы
end do
```

При составлении программы расчёта для хранения значений температур было выделено два массива (TN, TNP1). В первом находятся значения, найденные на предыдущем временном слое, а элементы другого массива – температуры текущего временного слоя – вычисляются. После определения всех «новых» температур их значения переписываются в массив температур предыдущего слоя, и выполняется следующий временной шаг.

Для графического представления результата расчётов обратимся к пакету математических и инженерных расчётов MathCAD, который имеет широко развитый инструментарий для работы с графикой.

Для этого воспользуемся «Мастером импорта данных» (Insert->Data->Data Import Wizard…), окно которого изображено на рис. 4.3.

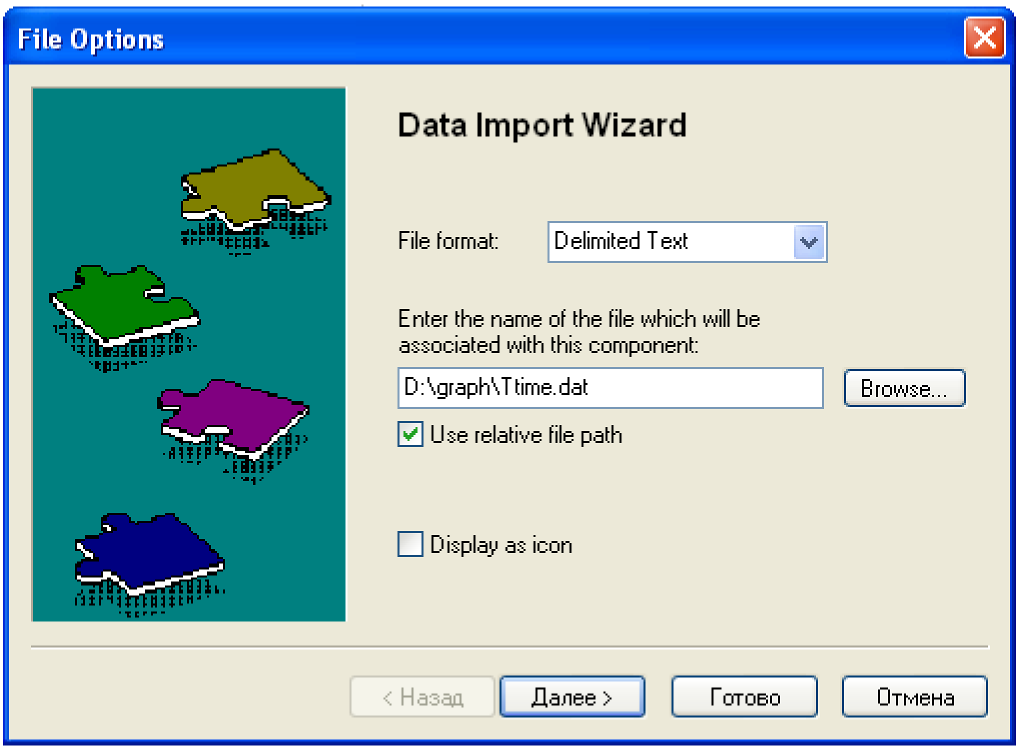


Рис. 4.3

В поле File format (англ. – «формат файла») из ниспадающего списка выбирается необходимый формат представления данных, в данном случае это Delimited Text (англ. – «Разграниченный текст»), а в поле «Имени» указывается путь к файлу. При этом галочка Use relative file path (англ. – «Использовать родственный путь файла») позволит делать перезапись файла без необходимости каждый раз проделывать одну и туже процедуру импорта данных, а галочку Display as icon (с англ. – «отображать как иконку») лучше оставить снятой.

Рис. 4.3 – Результаты численного расчёта в MathCAD

Таким образом, была рассмотрена программная реализация линейной задачи теплопроводности, в которой коэффициенты и правая часть не зависели от решения. Но на самом деле такая зависимость почти всегда имеет место и её надо учитывать. Особенно большое влияние на процессы распространения тепла оказывает температурная зависимость коэффициентов теплоёмкости и теплопроводности в высокотемпературных процессах. Учёт этой зависимости приводит к нелинейным уравнениям теплопроводности. Нелинейными уравнениями описываются и процессы распространения тепла в телах, имеющих нелинейные источники, а также в случаях наличия на границе нелинейных условий теплообмена.

При решении таких задач обычно на каждом шаге по времени строится итерационный процесс для уточнения значений коэффициентов, зависящих от решения. В этих случаях целесообразно контролировать устойчивость вычислительного процесса по числу итераций, необходимых для получения требуемой точности.

На реализации такого итерационного процесса более подробно остановимся позже, при рассмотрении многомерных задач теплопроводности.

4.2 Решение многомерных задач теплопроводности

Процесс распространения тепла в декартовой системе координат описывается уравнением теплопроводности, которое в трёхмерном случае имеет вид

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+W\,. \tag{4.1}$$

Если в рассматриваемом диапазоне температур и времени теплофизические свойства изменяются незначительно, то коэффициенты C, ρ, λ считаются постоянными и уравнение (4.1) упроститься

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+W\,. \tag{4.2}$$

От такого трёхмерного уравнения можно легко перейти к двумерным и одномерным с помощью отбрасывания соответствующих производных из-за относительной малости градиентов температур по этим направлениям.

4.2.1 Двумерная задача моделирования нестационарного нелинейного температурного поля плоского радиатора типа «пластина»

Рассмотрим уравнение, которое описывает нестационарное распределение температуры в прямоугольной области

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+W\ . \tag{4.3}$$

Область изменения аргументов имеет вид: $0\le x\le L_x$, $0\le y\le L_y$, $0\le t\le t_{\text{end}}$.

Аппроксимацию данного уравнения на прямоугольной сетке проведём по аналогии с одномерной неявной схемой (3.26)

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+ \\ +W+O(\Delta t,\Delta x^2,\Delta y^2). \tag{4.4}$$

Практическая реализация приведенной абсолютно устойчивой схемы представляет значительные трудности, обусловленные тем, что на верхнем временном слое (n+1) эта схема связывает значения искомой функции в пяти соседних узлах на двумерном шаблоне. Соответственно с увеличением числа неизвестных в системе разностных уравнений увеличивается число арифметических операций, необходимых для её решения. В этом случае особую ценность приобретает свойство экономичности разностных схем, то есть сочетания положительных свойств явных схем (объём вычислений пропорционален числу узлов разностной схемы) и неявных (безусловная или абсолютная устойчивость). Наибольшее распространение приобрели экономичные разностные схемы, основанные на методе дробных шагов по временной переменной - *схема переменных направлений* и *схема расщепления* или *локально-одномерная схема*, в которых многомерная задача сводится к решению последовательности одномерных задач методом прогонки.

Схема переменных направлений. Суть данной схемы можно непосредственно представить из её названия. При реализации двухмерной задачи переход от n к n+1 временному слою осуществляется за два полушага, аппроксимация которых имеет вид

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1/2}-T_{i,j}^{n}}{0{,}5\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j-1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}\right)+W_{i,j}^{n}\ , \tag{4.5}$$

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n+1/2}}{0{,}5\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j-1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+W_{i,j}^{n+1/2}. \quad (4.6)$$

На первом этапе уравнение (4.5) для каждого фиксированного j решается с помощью трёхточечной прогонки по индексу i. Аналогично решается уравнение (4.6). Порядок аппроксимации (4.5), (4.6) составляет $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$, схема является абсолютно устойчивой.

Схема расщепления (локально-одномерная). Переход от n к n+1 временному слою реализуется с помощью двух «дробных» шагов, причём на первом шаге учитывается в правой части (4.4) только производная по x, а на втором шаге – производная по y

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1/2}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}\right)+\frac{1}{2}W_{i,j}^{n}, \quad (4.7)$$

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i,j-1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+\frac{1}{2}W_{i,j}^{n}. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.7) есть сеточная аппроксимация предельно анизотропного процесса теплопередачи, при котором распространение тепла происходит лишь в направлении оси x; аналогичным образом можно истолковать (4.8). Можно предполагать, что попеременное распространение тепла по направлениям осей x и y будет приближать реальный (изотропный) процесс теплопроводности, описываемый уравнением (4.4).

Отметим, что каждая из промежуточных систем разностных уравнений (4.7) и (4.8) в отдельности не обладает свойством аппроксимации. Однако невязка, возникающая на первом полушаге, компенсируется на втором полушаге, так что в целом получается погрешность аппроксимации, стремящаяся к нулю при измельчении пространственно-временной сетки.

Каждое из уравнений (4.7), (4.8) можно реализовать с помощью четырёхточечных прогонок по соответствующему направлению.

Рассмотренная для двумерного случая локально-одномерная схема естественным образом обобщается и на трёхмерные задачи. В этом случае вычисления на каждом шаге по времени проводится в три этапа путём прогонок в направлениях x, y и z. После прогонок в двух направлениях находятся промежуточные распределения температуры, а после третьей прогонки – окончательное решение на данном шаге. Отметим, что мощность источника W при расщеплении уравнения теплопроводности можно распределить с некоторыми весовыми коэффициентами, как это было сделано выше, либо отнести к одному из направлений.

<u>Пример.</u> Решается задача расчёта температурного поля в плоской конструкции радиатора типа «пластина» (далее по тексту пластина) с размерами по осям *x* и *y*, равными L_x и L_y (рис. 4.4). В пределах пластины действует локальный источник тепловыделения заданной интенсивности $Q(t)$. На краях пластины заданы граничные условия III рода с излучением (смешанный теплообмен) (3.5). В качестве материала пластины взят алюминий, теплофизические характеристики которого приведены в Приложении 1.

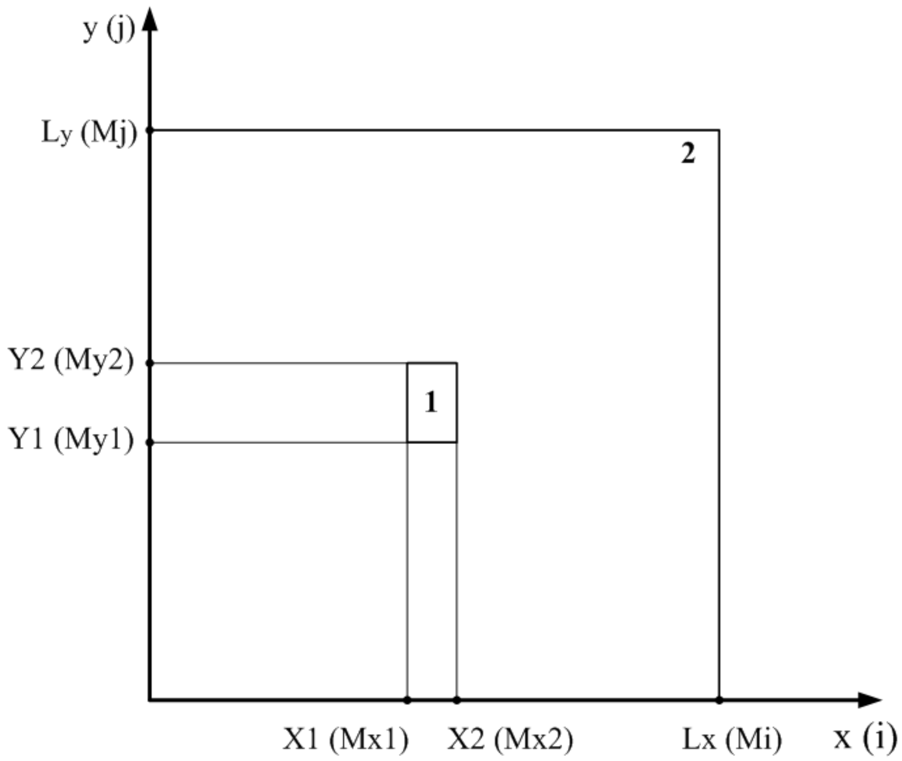


Рис. 4.4 – Геометрия области решения (вид сверху): 1 – источник тепловыделения; 2 – основание (пластина)

Основные допущения, используемые при постановке задачи:

1. Пластина представляет собой однородное изотропное тело, теплофизические параметры которого не зависят от координат и температуры;
2. Тепловой контакт на границах между телами (областями) считается идеальным;
3. Сток тепла с верхней и нижней поверхности пластины во внешнюю среду за счёт механизмов конвекции и радиационного теплообмена учитывается в уравнении теплопроводности дополнительными источниками тепловыделения;

4. Теплообмен с боковых граней учитывается в уравнении теплопроводности за счёт увеличения мощности дополнительных источников тепловыделения (см. допущение 3).

В данной постановке задача сводится к решению двумерного нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности

$$
\begin{gathered}
C\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+W(x,y)+\\
+k(x,y)\left[\frac{\alpha(T)(T_{\text{ВН}}-T)}{h}+\frac{\varepsilon_{ПР}\sigma(T_{\text{ВН}}^4-T^4)}{h}\right]
\end{gathered}
\tag{4.9}
$$

где h – толщина пластины; k – коэффициент.

Четвёртое слагаемое в правой части учитывает сток тепла во внешнюю среду за счёт механизмов конвективного и радиационного теплообменов.

С помощью коэффициента k учитывается теплообмен с боковых граней источника, его значение определяется функцией

$$
k=\begin{cases}3, \text{ если } x,y\in(S_W),\\ 2, \text{ если } x,y\notin(S_W),\end{cases}
\tag{4.10}
$$

где S_W - зона источника тепловыделения.

Область решения ограничивается следующими временными и пространственными условиями

$$
t\in[0;t_{\text{end}}],\quad x\in[0;L_x],\quad y\in[0;L_y];\quad T\big|_{t=0}=T_0(x,y);
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&x=0, y\in[0;L_y]: && -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha(T)(T_{\text{ВН}}-T)+\varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T_{\text{вн}}^4-T^4);\\
&x=L_x, y\in[0;L_y]: && \lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha(T)(T_{\text{ВН}}-T)+\varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T_{\text{вн}}^4-T^4);\\
&y=0, x\in[0;L_x]: && -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha(T)(T_{\text{ВН}}-T)+\varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T_{\text{вн}}^4-T^4);\\
&y=L_y, x\in[0;L_x]: && \lambda\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha(T)(T_{\text{ВН}}-T)+\varepsilon_{\text{пр}}\sigma(T_{\text{вн}}^4-T^4).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

При задании начальных условий считаем, что температура пластины в начальный момент времени распределена равномерно.

Для описания зависимости коэффициента конвективного теплообмена поверхности тела с внешней средой в диапазоне температур 273…403 К и типичных геометрических размеров используем функцию, предложенную Г.Н. Дульневым и уточненную В.П. Алексеевым в []

$$\alpha(T) = N\left[1{,}503 - 0{,}044\left(\frac{T(x,y)+T_{\text{вн}}}{2}\right)^{0{,}358}\right]\left(\frac{T(x,y)-T_{\text{вн}}}{L}\right)^{0{,}25}, \qquad (4.13)$$

где N – коэффициент, зависящий от ориентации геометрического тела в пространстве и от направления теплообмена с поверхности; L – определяющий размер, также зависит от ориентации тела в пространстве (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1 – Определяющие размеры и значения коэффициента ориентации некоторых геометрических тел

Геометрическое тело	**Определяющий размер, *L***	**Коэффициент ориентации, *N***
Вертикальные пластины	Высота	1,0
Горизонтальные пластины, рассеивающие тепловой поток: - вверх - вниз	Минимальный размер пластины	1,3 0,7

Приведённый коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{п}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{ср}}} - 1\right)^{-1}, \qquad (4.13)$$

где $\varepsilon_{\text{п}}$ - коэффициент черноты поверхности тела; $\varepsilon_{\text{ср}}$ - коэффициент черноты внешней среды.

Сформулированное дифференциальное уравнение (4.9) с соответствующими начальными (4.11) и граничными условиями (4.12) решено методом конечных разностей (см. раздел 3).

Для решения разностных аналогов исходного дифференциального уравнения использована схема расщепления по координатам (4.7) – (4.8) и уравнение (4.9) заменяется эквивалентной системой уравнений

$$C\rho\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \lambda\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[W_{i,j}^{n} + k_{i,j}\left(\frac{\alpha\left(T_{i,j}^{n+1/2}\right)\left(T_{\text{ВН}} - T_{i,j}^{n+1/2}\right)}{h} + \frac{\varepsilon_{\text{ПР}}\sigma\left(T_{\text{ВН}}^{4} - (T_{i,j}^{n+1/2})^{4}\right)}{h}\right)\right]; \qquad (4.14)$$

$$C\rho \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \\ + \frac{1}{2}\left[W_{i,j}^{n} + k_{i,j}\left(\frac{\alpha\left(T_{i,j}^{n+1}\right)\left(T_{\text{ВН}} - T_{i,j}^{n+1}\right)}{h} + \frac{\varepsilon_{\text{ПР}}\sigma\left(T_{\text{ВН}}^4 - (T_{i,j}^{n+1})^4\right)}{h} \right) \right]. \tag{4.15}$$

При решении полученных таким образом одномерных разностных уравнений, как уже было отмечено ранее, на каждом шаге по времени строится итерационный процесс для уточнения значений коэффициентов зависящих от решения (преодоление нелинейности). В этом случае контролируется устойчивость вычислительного процесса по числу итераций, необходимых для получения требуемой точности. Точность итераций контролируется выполнением условия

$$\frac{\max\limits_{i,j}\left|T_{i,j}^{s+1} - T_{i,j}^{n}\right|}{T_{i,j}^{s+1}} \le \delta, \tag{4.16}$$

где δ – заданная точность. Если это условие выполнено, то считают, что $T_{i,j}^{s+1} = T_{i,j}^{n+1}$.

Основные особенности конструкции разностного алгоритма для решения нелинейных дифференциальных задач на примере простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности подробно рассмотрены в [].

Способ решения уравнений (4.14) и (4.15) аналогичен способу, рассмотренному в разделе 3.5.

Алгоритм программной реализации поставленной задачи представлен на рис. 4.5.

Рис. 4.5 – Алгоритм программной реализации расчёта двумерного поля температур

Ниже приведён листинг программы и сделаны необходимые объяснения.

```
! Программа для расчёта поля температур плоской конструкции радиатора
! типа «пластина» по неявной разностной схеме с заданными граничными
! условиями III рода (смешанный теплообмен) и внутренним источником
! тепловыделения. Для расчета используется схема расщепления по
! координатам и метод прогонки.

! Исходные данные и параметры
! Mi, Mj – размер расчётной пространственной сетки
! Tvn – температура внешней среды
! dt, TIME_END – временной шаг и конечное время расчёта
! psi – заданная точность вычислений
```

```
! SIGMA – постоянная Стефана-Больцмана
! L1x, L1y, Q – геометрические размеры и мощность источника
! L2x, L2y, h – длина, ширина и толщина пластины
! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала пластины
! (удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
! TN, TNP12, TNP1, TS – массивы хранения значений температуры на
! (n), (n+1/2) и (n+1) – временном слое и дополнительный массив
! температур для преодоления нелинейности
! EPS – приведенный коэффициент черноты поверхности пластины и
! внешней среды
! k – коэффициент учёта теплообмена с боковых граней
! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
! W – удельная мощность источника тепловыделения
! dx, dy – шаг пространственной сетки
! TIME – текущее время расчёта
! V – объём источника тепловыделения
! kappa – коэффициент температуропроводности материала
! delta – погрешность вычислений
! Xm, Ym – координаты контрольной точки вычисления
! X1, X2, Y1, Y2 – координаты границ источника тепловыделения
! Mx, My – целочисленные координаты контрольной точки вычисления
! Mx1 Mx2, My1, My2 – целочисленные координаты границ
! источника тепловыделения
! i, j, ijk, it – переменные для организации расчётных циклов, циклов записи
! информации в файл, вывода графики на экран и цикла контроля за
! сходимостью вычислительного процесса, соответственно
! AA, BB, CC, FF – массивы вспомогательных коэффициентов
! PP, QQ – массивы прогоночных коэффициентов

program plastina        ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
implicit none
! Ввод исходных данных
integer, parameter :: Mi = 201, Mj = 201
 real(8), parameter :: Tvn = 313.0D0
 real(8), parameter :: dt = 0.005D0, TIME_END = 200.0D0
 real(8), parameter :: psi = 0.0005D0, SIGMA = 5.67D-8

real(8), parameter :: L1x = 10.0D-3,  L1y = 15.9D-3,  Q = 5.0D0
real(8), parameter :: L2x = 115.0D-3, L2y = 115.0D-3, h = 0.5D-3
real(8), parameter :: C = 900.0D0,  RO = 2700.0D0, LAMDA = 210.0D0

! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
! для расчёта
real(8) :: TN(Mi,Mj), TNP1(Mi,Mj), TNP12(Mi,Mj), TS(Mi,Mj)
real(8) :: EPS(Mi,Mj), k(Mi,Mj), ALFA(Mi,Mj), W(Mi,Mj)
real(8) :: dx, dy, TIME, V, kappa, delta
real(8) :: Xm, Ym, X1, X2, Y1, Y2
integer :: Mx, My, Mx1, Mx2, My1, My2
integer :: i, j, ijk, it

! Вычисление пространственных шагов
```

```
dx = L2x/(Mi - 1.0)
dy = L2y/(Mj - 1.0)

! Установка источника по середине подложки
X1 = (L2x - L1x)/2.0; X2 = X1 + L1x
Y1 = (L2y - L1y)/2.0; Y2 = Y1 + L1y

! Привязка координат источника к координатной сетке
Mx1 = X1/dx + 1.0;    Mx2 = X2/dx + 1.0
My1 = Y1/dy + 1.0;    My2 = Y2/dy + 1.0

! Вычисление коэффициента температуропроводности
kappa = LAMDA/(C*RO)

! Расчёт объёма источника
V = L1x*L1y*h

! Определение области тепловыделяющего элемента
do i = 1,Mi
  do j = 1,Mj
    ! Шаг внутри области источника
    if (((i>=Mx1) .and. (i<=Mx2)) .and. ((j>=My1) .and. (j<=My2))) then
        W(i,j) = Q/V
        EPS(i,j) = 0.5
        k(i,j) = 3.0
   ! Шаг вне области источника
   else
        W(i,j) = 0.0
        EPS(i,j) = 0.2
        k(i,j) = 2.0
    end if
  end do
end do

! Задание координат контрольной точки
Xm = 85.0D-3; Ym = 85.0D-3

! Привязка координат контрольной точки к вычислительной сетке
Mx = Xm/dx + 1.0
My = Ym/dy + 1.0

! Задание начального приближения
TNP12 = Tsr
  TNP1 = Tsr
      TS = Tsr
   ALFA = 0.0
   TIME = 0.0

! Открытие файла для записи значений по времени
open(1,file = 'D:\graph\Ttime.dat')
```

```
! ------------------------------------------------- Организация вычислительного цикла
ijk = 0.0
DO WHILE(TIME<TIME_END)
  ijk = ijk + 1.0

  TN = TNP1

       ! ---------------------------- Начало цикла итераций
       delta = 1.0; it = 0.0
       do while(delta>=psi)
            delta = 0.0; it = it + 1.0

            ! Прогонка вдоль оси ox
            call prog_ox()

            ! Прогонка вдоль оси oy
            call prog_oy()

            ! Пересчёт коэффициента теплоотдачи конвекцией
            call unit_ALFA(TS, 1.3, L2x)

            ! Расчёт погрешности вычислений
            delta = abs(maxval(TS) – maxval(TN))/maxval(TS)

            ! вывод промежуточных результатов (контроль за сходимостью)
            ! if (mod(it,1)==0) write(*,*) it, "cxt = ", delta

       ! ----------------------------------------- Окончание цикла итераций
       end do

  TNP1 = TS

  ! Переход на следующий временной слой
  TIME = TIME + dt

  ! Вызов подпрограммы графического модуля и запись значений температуры
  ! в контрольной точке по времени в файл, через определенные промежутки
  ! времени, соответственно
  if (mod(ijk,200)==0) call DrawTemperature()
  if (mod(ijk,1)==0) write(1,*) TIME, TNP1(Mx,My)

END DO
! -------------------------------------------- Окончание цикла вычислений

! Закрытие файла для записи значений по времени
close(1)

! Организация файла для записи массива температуры в конечный
! момент времени
open(2,file = 'D:\graph\Tfield.dat')
do i = 1,Mi
```

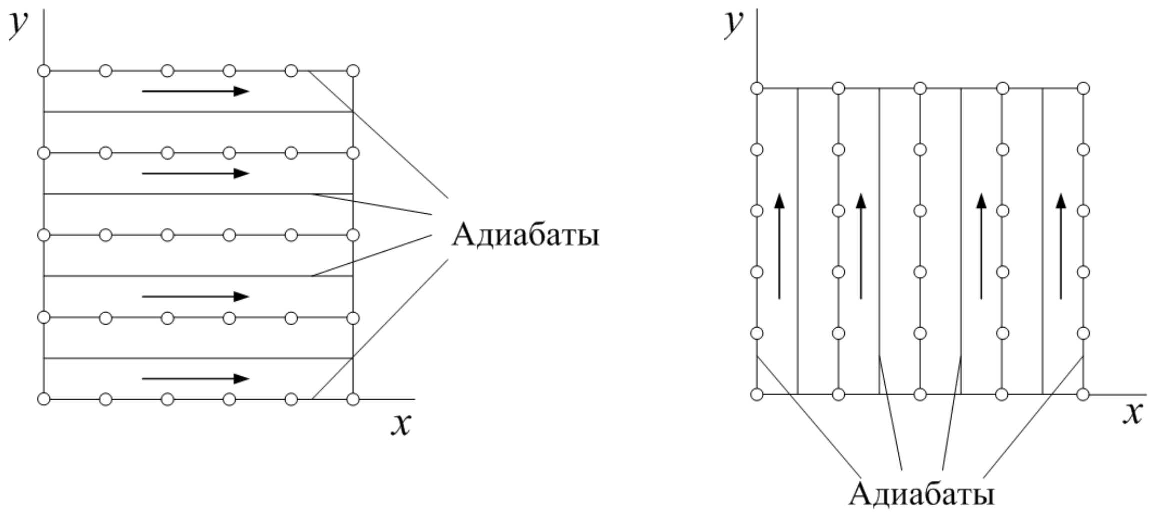
```
   do j = 1,Mj
      write(2,"(E11.4,\)") TNP1(i,j)
   end do
   write(2,*)
end do
close(2)

contains ! Определяет начало описания подпрограмм

! Организация подпрограммы прогонки в направлении оси x

subroutine prog_ox()    ! Объявление имени подпрограммы
implicit none
real(8) :: AA(Mi), BB(Mi), CC(Mi), FF(Mi), PP(Mi), QQ(Mi), DEN(Mi)

AA = 1.0; BB = 1.0    ! так как ГУ III-го рода

do j = 1,Mj
  ! Задание ГУ III-го рода на границе x=0 (i = 1)
  PP(2) = 1.0
  QQ(2) = dx/LAMDA*(ALFA(1,j)*(Tsr - TNP12(1,j)) + &
             & EPS(1,j)*SIGMA*(Tsr**4.0 - TNP12(1,j)**4.0))

  ! Начало цикла прямой прогонки
  do i = 2,Mi-1
      CC(i) = 2.0 + dx**2.0/kappa/dt
       FF(i) = dx**2.0/kappa/dt*TN(i,j) + dx**2.0/LAMDA*0.5*(W(i,j) + k(i,j)*(ALFA(i,j)*&
                      &(Tsr - TNP12(i,j))/h + EPS(i,j)*SIGMA*(Tsr**4.0 - TNP12(i,j)**4.0)/h))

      ! Расчёт прогоночных коэффициентов
       DEN(i) = CC(i) - AA(i)*PP(i)   ! Знаменатель
      PP(i+1) = BB(i)/DEN(i)
      QQ(i+1) = (FF(i) + AA(i)*QQ(i))/DEN(i)
  ! Окончание цикла прямой прогонки
  end do

 ! Задание ГУ III-го рода на границе x=L2x (i = Mi)
 TNP12(Mi,j) = (QQ(Mi) + dx/LAMDA*(ALFA(Mi,j)*(Tsr - TNP12(Mi,j)) + &
                      & EPS(Mi,j)*SIGMA*(Tsr**4.0 - TNP12(Mi,j)**4.0)))/(1.0 - PP(Mi))

  ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
  ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
  do i = Mi-1,1,-1
      TNP12(i,j) = PP(i+1)*TNP12(i+1,j) + QQ(i+1)
  end do
end do
end subroutine prog_ox    ! Конец подпрограммы

! Организация подпрограммы прогонки в направлении оси y
```

```
subroutine prog_oy()
implicit none
real(8) :: AA(Mj), BB(Mj), CC(Mj), FF(Mj), PP(Mj), QQ(Mj), DEN(Mj)

AA = 1.0; BB = 1.0    ! так как Г.У. III-го рода

do i = 1,Mi
  ! Задание ГУ III-го рода на границе y=0 (j = 1)
  PP(2) = 1.0
  QQ(2) = dy/LAMDA*(ALFA(i,1)*(Tsr - TS(i,1)) + &
              & EPS(i,1)*SIGMA*(Tsr**4 - TS(i,1)**4))

  ! Начало цикла прямой прогонки
  do j = 2,Mj-1
    CC(j) = 2.0 + dy**2.0/kappa/dt
    FF(j) = dy**2.0/kappa/dt*TNP12(i,j) + dy**2.0/LAMDA*0.5*(W(i,j) + k(i,j)*(ALFA(i,j)*
                &(Tsr - TS(i,j))/h + EPS(i,j)*SIGMA*(Tsr**4.0 - TS(i,j)**4.0)/h))

    ! Расчёт прогоночных коэффициентов
     DEN(j) = CC(j) - AA(j)*PP(j)      ! знаменатель
    PP(j+1) = BB(j)/DEN(j)
    QQ(j+1) = (FF(j) + AA(j)*QQ(j))/DEN(j)
  ! Окончание цикла прямой прогонки
  end do

  ! Задание ГУ III-го рода на границе y=L2y (j = Mj)
  TS(i,Mj) = (QQ(Mj) + dy/LAMDA*(ALFA(i,Mj)*(Tsr - TS(i,Mj)) + &
               & EPS(i,Mj)*SIGMA*(Tsr**4.0 - TS(i,Mj)**4.0)))/(1.0 - PP(Mj))

  ! Организация цикла обратной прогонки. Вычисление температуры
  ! по известным значениям прогоночных коэффициентов
  do j = Mj-1,1,-1
  TS(i,j) = PP(j+1)*TS(i,j+1) + QQ(j+1)
  end do
end do
end subroutine prog_oy    ! Конец подпрограммы

! Организация подпрограммы пересчета конвективного
! коэффициента теплоотдачи

subroutine unit_ALFA(TT, N, L)
implicit none
real(8) :: TT(Mi,Mj)
real(8) :: L, N

do i = 1,Mi
  do j = 1,Mj
    if (TT(i,j)<=Tsr) then
       ALFA(i,j) = 0.0
```

```
    else
      ALFA(i,j) = N*(1.503 - 0.044*((TT(i,j) + Tsr)/2.0)**0.358)*((TT(i,j) - Tsr)/L)**0.25
    end if
  end do
end do
end subroutine unit_ALFA

! Организация подпрограммы графического модуля

subroutine DrawTemperature()
use msflib
integer*2 :: xs, ys, xt, yt, integ2, N, dxt
integer*4 :: integ4, color(255)
real(8) :: Tmin, Tmax, TS, dT
integer :: k, Cmax, Cmin
integer :: x1,y1,x2,y2
type (xycoord) xy
character(3) file
character(10) file2, file3

! инициализация шрифтов
integ2 = INITIALIZEFONTS()
integ2 = SETFONT('t''Arial''h12w8')

! вывод текущего времени
write(file2,"(f10.2)") TIME
integ2 = setcolor(0)
integ2 = rectangle(3,0,0,200,20)
integ2 = setcolor(15)
call moveto(5,5,xy)
call outgtext(file2)

! вывод показания контрольной точки
write(file3,"(f10.3)") TNP1(Mx,My)
integ2 = setcolor(0)
integ2 = rectangle(100,0,0,200,20)
integ2 = setcolor(15)
call moveto(100,5,xy)
call outgtext(file3)

! формирование таблицы цветов
do k=1,51
  color(k)      = RGBToInteger(255-5*k,0,255)
  color(k+51)   = RGBToInteger(0,5*k,255)
  color(k+51*2) = RGBToInteger(0,255,255-5*k)
  color(k+51*3) = RGBToInteger(5*k,255,0)
  color(k+51*4) = RGBToInteger(255,255-5*k,0)
end do

  xs = 300; ys = 100    ! исходная точка рисования поля температур
```

```
  Cmin = 1; Cmax = 255; ! миним. и макс. номера цветов
  Tmin = minval(TNP1); Tmax = maxval(TNP1)  ! миним. и макс. температуры

  ! отображение поля температур
  do i = 1,Mi
   xt = xs+i
   do j = 1,Mj
     yt = ys+j
     k = (TNP1(i,Mj-j+1)-Tmin)*(Cmax-Cmin)/(Tmax-Tmin)+Cmin
     integ4 = SetPixelRGB(xt,yt,color(k))
   end do
  end do

! очистка шкалы
integ2 = setcolor(0)
integ2 = rectangle(3,0,350,1000,400)

! отображение шкалы температур
x1 = 20; y1 = 350; y2 = y1+20
do k = 1,Cmax
  x2 = x1+3
  integ4 = setcolorRGB(color(k))
  integ2 = rectangle(3,x1,y1,x2,y2)
  x1 = x2
end do

! отображение значений шкалы
N = 15
integ2 = setcolor(15)
dxt = (3*Cmax-10)/(N-1)
dT = (Tmax-Tmin)/(N-1)
TS = 0.0
xt = x2+10; yt = y2+20
do k = 1,N
  TS = (k-1)*dT+Tmin
  xt = (k-1)*dxt+20
  write(file,"(i3)") int2(TS)
  call moveto(xt,yt,xy)
  call outgtext(file)
end do
end subroutine DrawTemperature

end program plastina                    ! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

Главной особенностью данной модели является то, что в соответствии со схемой расщепления протекание многомерного (в данном случае двумерного) процесса распространения тепла на каждом временном шаге представляется как результат последовательной реализации соответствующих одномерных процессов (рис. 4.6). Каждый из этих процессов начинается от распределения температурного поля полученного после окончания предыдущего одномерного процесса.



а) *б*)

Рис. 4.6

Реализация рассмотренной для двумерного случая локально-одномерной схемы осуществляется при помощи вложенных циклов:

– в направлении оси *x*

```
! Внешний цикл
do j = 1,Mj

    ! Внутренний (или вложенный) цикл
    do i = 2,Mi-1
    end do
    do i = Mi-1,1,-1
    end do

end do
```

– в направлении оси *y*

```
! Внешний цикл
do i = 1,Mi

    ! Внутренний цикл
    do j = 2,Mj-1
    end do
    do j = Mj-1,1,-1
    end do
```

end do

Пояснить работу вложенных циклов можно следующим образом. В первом случае, фиксируя направление вдоль оси *y* (к примеру, j=1) «прогоняем» вдоль оси *x*. Таким образом, определив неизвестные значения температуры на данном пространственном слое, переходим к следующему (j=2) слою.

Результат работы программы представлен на рис. 4.7, результат численных расчётов - на рис. 4.8.

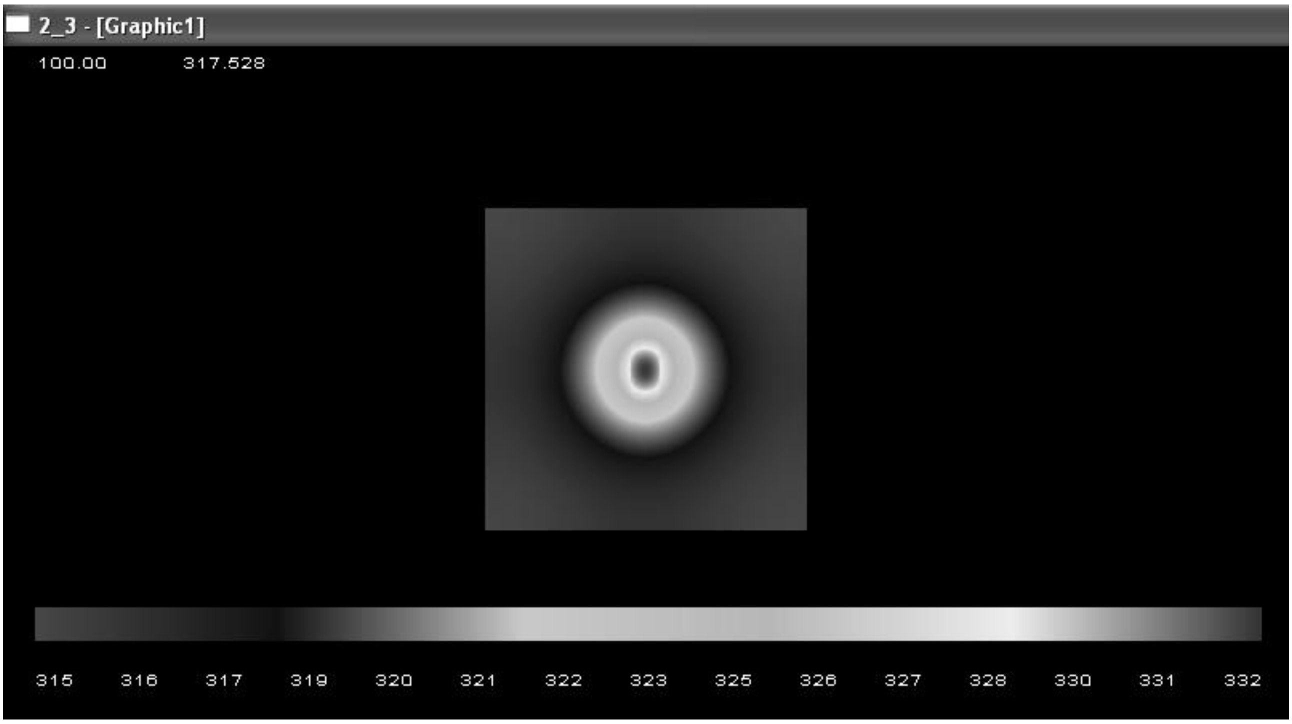


Рис. 4.7 – Графический модуль программы

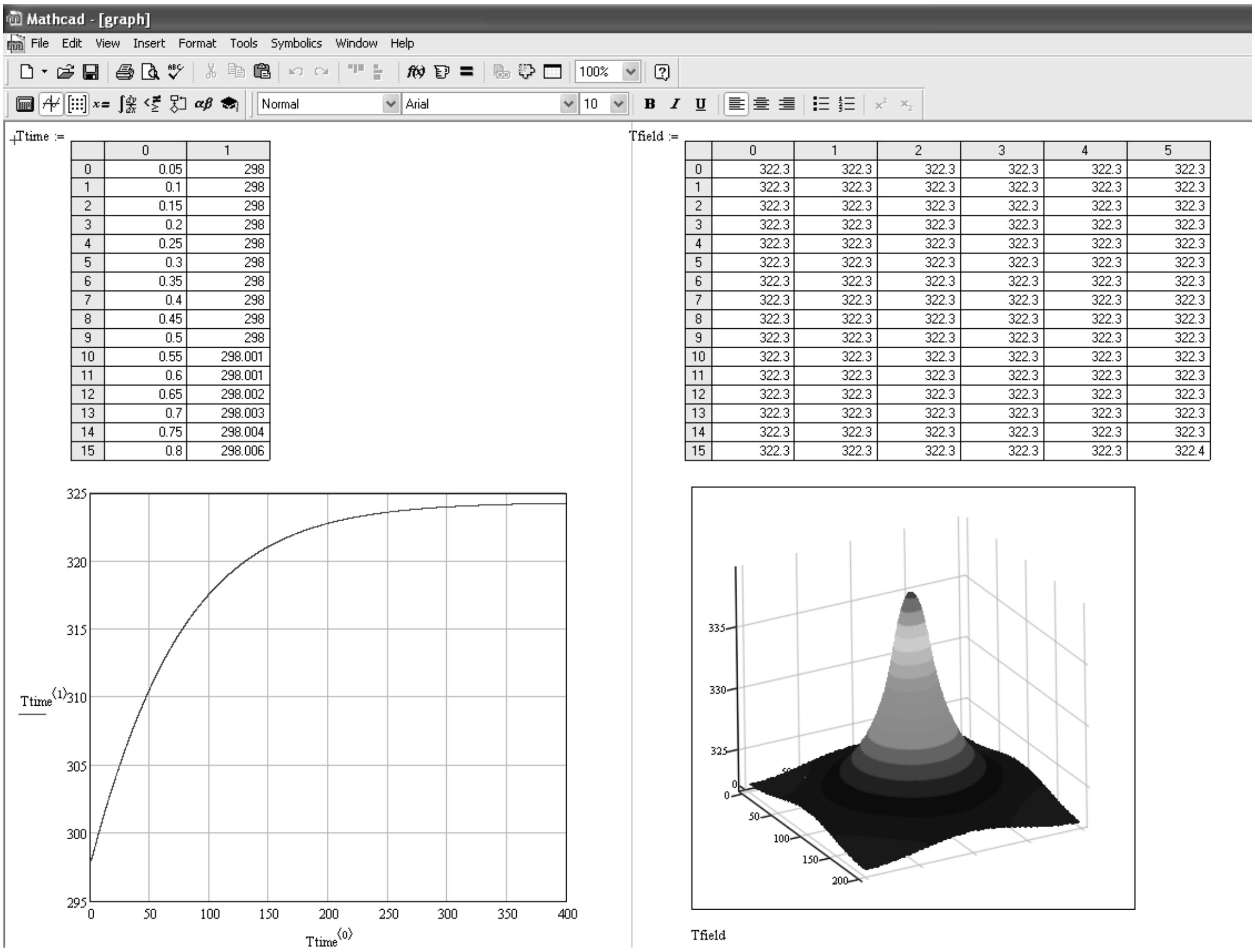


Рис. 4.8 – Результат численных расчётов температурного поля плоского радиатора типа «пластина»

5 РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ ПО ВНЕЗАПНЫМ ОТКАЗАМ НА ОСНОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЕЧАТНОГО УЗЛА РЭС

5.1 Основные понятия и определения теории надёжности

Пригодность любого изделия к использованию по назначению определяется качеством изделия, которое оценивается совокупностью свойств, присущих изделию. Одним из таких свойств является надёжность.

Надёжность по ГОСТ 27.002-89 [] – это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надёжность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость или определенные сочетания этих свойств.

Безотказностью называют свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки.

Долговечностью называют свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодностью называют свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путём технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемостью называют свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способности объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования.

Уровень надёжности зависит от того, в каком состоянии находится объект. При этом выделяют следующие его состояния:

Исправное состояние (исправность) – это состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации (далее по тексту документации).

Неисправное состояние (неисправность) – это состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований документации.

Работоспособное состояние (работоспособность) – это состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствует требованиям документации.

Неработоспособное состояние (неработоспособность) – это состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям документации.

Для сложных объектов возможно деление их неработоспособных состояний. Из множества таких состояний выделяют частично неработоспособные состояния, при которых объект способен частично выполнять требуемые функции [].

Изменение состояния РЭС происходит непрерывно под действием процессов старения, а также при появлении дефектов, повреждений и отказов.

Дефект – это каждое отдельное несоответствие изделия или его элемента установленным требованиям.

Повреждение – это событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении его работоспособного состояния.

Отказ – это событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта. В зависимости от характерных особенностей отказы подразделяют на следующие типы: *ресурсный*, *независимый*, *внезапный*, *постепенный*, *сбой* и др. отказы. Более подробно остановимся лишь на внезапном отказе.

Внезапный отказ – это отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта. Внезапные отказы являются результатом скрытых недостатков технологии производства или скрытых изменений параметров, накапливающихся во время эксплуатации.

Типичными критериями отказов могут быть:

- прекращение выполнения изделием заданных функций;
- снижение качества функционирования (мощности, точности, чувствительности и других параметров) за пределы допустимого уровня;
- искажения информации (неправильные решения) на выходе изделий, имеющих в своём составе ЭВМ или другие устройства дискретной техники, из-за сбоев (отказов сбойного характера);
- внешние проявления, свидетельствующие о наступлении или предпосылках наступления неработоспособного состояния (шум, стук в механических частях изделия, вибрация, перегрев и прочие).

5.2 Основные сведения о расчёте надёжности

Расчёт надёжности – это процедура определения значений показателей надёжности объекта с использованием методов, основанных на:

- справочных данных о надёжности элементов объекта;

− данных о надёжности объектов – аналогов;
− данных о режиме работы элементов объекта;
− и другой информации, имеющейся к моменту расчёта.

Общие правила расчёта надёжности, требования к методикам этих расчётов и к оформлению их результатов регламентированы ГОСТ 27.301-95 [].

Расчёт надёжности объекта может иметь своими целями:
− обоснование количественных требований по надёжности;
− проверку выполнимости установленных требований;
− сравнительный анализ надёжности вариантов схемно-конструктивного построения объекта и обоснование выбора рационального варианта;
− определение достигнутого (ожидаемого) уровня надёжности;
− обоснование и проверку эффективности мер по доработке конструкции, технологии изготовления, системы технического обслуживания и ремонта объекта, направленных на повышение его надёжности;
− решение различных оптимизационных задач, в которых показатели надёжности выступают в роли целевых функций, управляемых параметров или граничных условий;
− проверку соответствия достигнутого (ожидаемого) уровня надёжности объекта установленным требованиям (контроль надёжности).

Расчёт надёжности в общем случае представляет собой процедуру последовательного, поэтапного оценок показателей надёжности по мере поступления дополнительной информации о конструкции и технологии изготовления объекта, его эксплуатации, системе технического обслуживания, ремонта и др. и может включать:
− идентификацию объекта;
− определение целей и задач расчёта, номенклатуры и требуемых значений рассчитываемых показателей надёжности;
− выбор метода(ов) расчёта, адекватного(ых) особенностям объекта, целям расчёта, наличию необходимой информации;
− составление расчётных моделей для каждого показателя надёжности;
− получение и предварительную обработку исходных для расчёта данных, вычисление значений показателей надёжности объекта и, при необходимости, их сопоставление с требуемыми показателями;
− оформление, представление и защиту результатов расчёта.

Идентификация объекта включает анализ доступной информации о факторах, определяющих его надёжность. Могут анализироваться:
− назначение, область применения и функции объекта;
− критерии качества функционирования, отказов и предельных состояний, возможные последствия отказов (достижения предельного состояния) объекта;

- состав и структура объекта, взаимодействие и уровни входящих в него элементов, возможность перестройки структуры и (или) алгоритмов функционирования объекта при отказах отдельных его элементов;
- наличие, виды и способы резервирования, используемые в объекте;
- типовые условия эксплуатации объекта;
- система технического обслуживания и ремонта объекта, характеризуемая видами, периодичностью, организационными уровнями, способами выполнения, техническим оснащением работ по его техническому обслуживанию и ремонту;
- распределение функций между операторами и средствами автоматического диагностирования (контроля) и управления объектом, виды и характеристики человеко-машинных интерфейсов, определяющих параметры работоспособности и надёжности работы операторов;
- уровень квалификации персонала;
- качество программных средств, применяемых в объекте;
- планируемые технология и организация производства при изготовлении объекта.

Методы расчёта надёжности подразделяют по составу рассчитываемых показателей надёжности и по основным принципам расчёта.

По составу рассчитываемых показателей различают методы расчёта:

- безотказности;
- ремонтопригодности;
- долговечности;
- сохраняемости;
- комплексных показателей надёжности (методы расчёта коэффициентов готовности, технического использования, сохранения эффективности и прочие).

По основным принципам расчёта свойств, составляющих надёжность, или комплексных показателей надёжности объектов различают []:

- методы прогнозирования;
- структурные методы расчёта;
- физические методы расчёта надёжности.

Исходными данными для расчёта надёжности объекта могут быть:

- априорные данные о надёжности по опыту применения объекта в аналогичных или близких условиях;
- оценки показателей надёжности, полученные экспериментальным или расчётным способом;
- расчётные и (или) экспериментальные оценки параметров нагруженности составных частей и элементов конструкций.

Источниками исходных данных для расчёта надёжности объекта могут стать:

- стандарты и технические условия;
- справочники по надёжности элементов, свойствам материалов и другие информационные материалы;

− статистические данные (базы данных) о надёжности объектов-аналогов, входящих в их состав элементов, о параметрах операций технического обслуживания и ремонта, собранные в процессе их разработки, изготовления, испытаний и эксплуатации;

− результаты иных расчётов объекта и его составных частей, включая расчёты показателей надёжности составных частей объекта.

Степень адекватности моделей и методов расчёта надёжности оценивают путём:

− сопоставления результатов расчёта и экспериментальной оценки показателей надёжности объектов-аналогов, для которых применялись аналогичные модели и методы расчёта;

− исследования чувствительности моделей к нарушениям принятых при их построении допущений и предположений, а также к погрешностям исходных данных для расчёта;

− экспертизы и апробации применяемых моделей и методов.

5.3 Ориентировочный расчёт надёжности

Нормирование надёжности – это установление в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации количественных и качественных требований к надёжности. Оно производится на стадиях составления технического задания и эскизного проектирования и включает []:

− выбор номенклатуры нормируемых показателей надёжности;

− технико-экономическое обоснование значений показателей надёжности объекта и его составных частей;

− задание требований к точности и достоверности исходных данных;

− формулирование критериев отказов, повреждений и предельных состояний;

− задание требований к методам контроля надёжности на всех этапах жизненного цикла объекта.

Мы остановимся лишь на нормировании значений величин вероятности безотказной работы и интенсивности отказов. Такое нормирование иногда называют ориентировочным расчётом надёжности. На стадии составления технического задания обоснованные нормы этих показателей надёжности можно задать, опираясь на информацию о достигнутых показателях надёжности у изделий-прототипов. Если прототипы не выявлены, то ориентировочно задают число узлов (блоков и т.п.) N, значения числа элементов n_i в узлах (блоках и т.п.), и их интенсивности отказов λ_J. Вероятность безотказной работы изделия (системы) рассчитывают по формуле

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_C t) = \exp(-\sum_{i=1}^{N} \lambda_i t), \qquad (5.1)$$

где λ_i – интенсивность отказов *i*-го узла (блока и т.п.), с числом элементов расчёта надёжности n_i, равная

$$\lambda_i = \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J, \qquad (5.2)$$

а λ_C – интенсивность отказов изделия (системы)

$$\lambda_C = \sum_{i=1}^{N} \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J. \qquad (5.3)$$

Средняя наработка до отказа изделия определяется

$$t_{1C} = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J \right)}. \qquad (5.4)$$

Тогда

$$P_C(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^{N} \sum_{J=1}^{n_i} \lambda_J \right). \qquad (5.5)$$

Условия эксплуатации учитывают с помощью поправочных коэффициентов следующим образом

$$\lambda_J = \lambda_{HJ} k_\lambda, \qquad (5.6)$$

где λ_{HJ} – интенсивность отказов элементов в лабораторных условиях работы;

$$k_\lambda = k_{\lambda 1} k_{\lambda 2} k_{\lambda 3}. \qquad (5.7)$$

Коэффициенты из (5.7) учитывают воздействие на РЭА: $k_{\lambda 1}$ – ударов и вибраций; $k_{\lambda 2}$ – температуры и влажности; $k_{\lambda 3}$ – пониженного атмосферного давления. Их значения приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Значения поправочных коэффициентов $k_{\lambda 1}$, $k_{\lambda 2}$, $k_{\lambda 3}$ для расчёта интенсивности отказов []

<table>
<tr><th>Условия эксплуатации</th><th>$k_{\lambda 1}$</th><th>Влажность, %</th><th>Температура, К</th><th>$k_{\lambda 2}$</th><th>Высота, км</th><th>$k_{\lambda 3}$</th></tr>
<tr><td>Лабораторные</td><td>1,00</td><td rowspan="2">60-70</td><td rowspan="2">293-313</td><td rowspan="2">1,0</td><td>0-2</td><td>1,0-1,5</td></tr>
<tr><td>Стационарные</td><td>1,07</td><td>2-5</td><td>1,1-1,14</td></tr>
<tr><td>Корабельные</td><td>1,37</td><td rowspan="2">90-98</td><td rowspan="2">293-298</td><td rowspan="2">2,0</td><td>5-8</td><td>1,16-1,2</td></tr>
<tr><td>Автофургонные</td><td>1,46</td><td>8-15</td><td>1,25-1,3</td></tr>
<tr><td>Железнодорож.</td><td>1,54</td><td rowspan="2">90-98</td><td rowspan="2">303-313</td><td rowspan="2">2,5</td><td>15-25</td><td>1,35-1,38</td></tr>
<tr><td>Самолётные</td><td>1,65</td><td>25-40</td><td>1,4-1,45</td></tr>
</table>

5.4 Окончательный расчёт надёжности невосстанавливаемой РЭА с учётом режимов работы ЭРЭ

Окончательный расчёт надёжности с учётом режимов работы ЭРЭ проводится на стадии технического проектирования, когда эти режимы рассчитаны или измерены. В расчёте принимается, что отказ любого элемента приводит к отказу всего изделия. Чаще всего, помимо общих воздействий, учтённых в ориентировочном расчёте надёжности, в окончательном расчёте с помощью поправочного коэффициента a_J учитывают температуру среды T_{CJ}, окружающую каждый элемент, и отличие электрической нагрузки каждого элемента H_J от номинальной H_{HJ}. Отношение H_J к H_{HJ} называют коэффициентом нагрузки:

$$K_J = \frac{H_J}{H_{HJ}}. \tag{5.8}$$

В качестве нагрузки принимается электрический параметр, превышение которого чаще всего является причиной отказа данного элемента. У резисторов – это мощность, у конденсаторов – это напряжение, в моточных изделиях – это может быть плотность тока и т.д. Некоторые элементы могут характеризоваться несколькими коэффициентами нагрузки. Если точные значения коэффициентов нагрузки ЭРЭ получить затруднительно, то из таблицы 5.2 берут рекомендуемые значения коэффициентов электрической нагрузки элементов и используют их в окончательном расчёте надёжности.

Значения поправочных коэффициентов

$$a_J = \frac{\lambda_J}{\lambda_{HJ}}, \tag{5.9}$$

для различных ЭРЭ, температур T_{CJ} и коэффициентов нагрузки K_J приведены в Приложении 2.

Таблица 5.2 – Рекомендуемые значения коэффициентов электрической нагрузки ЭРЭ []

Наименование элемента, режим работы	**Рекомендуемое значение K_J**	**Допустимое значение K_J**
Транзисторы, активный режим	0,5-0,6	0,8
Транзисторы, ключевой режим	0,6-0,8	1,0
Резисторы, цепи переменного и постоянного тока	0,2-0,5	0,6
Резисторы, импульсный режим	0,4-0,6	0,8
Конденсаторы	0,2-0,6	0,8
Интегральные схемы	0,5-1,0	1,0
Переключатели (тумблеры, кнопочные, галетные и др.)	0,2-0,4	0,5
Цифровые индикаторы	0,5-0,7	0,8

Методику ориентировочного и окончательного расчётов надёжности невосстанавливаемого объекта покажем на примере некоторого печатного узла РЭА, режим работы элементов которого известны. Под термином ***невосстанавливаемый объект*** понимается объект, для которого в рассматриваемой ситуации проведение восстановления работоспособного состояния не предусмотрено нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документацией. А под ***восстановлением*** – процесс перевода объекта в работоспособное состояние из неработоспособного состояния.

Пример. Эксплуатация рассматриваемого печатного узла РЭА происходит на высоте 2 км при температуре внешней среды 313 К и относительной влажности 60 %. С учётом этого в таблице 5.3 приведён состав элементов, их количество и режим работы. Требуется определить интенсивность отказов λ_C, среднюю наработку до отказа изделия t_{1C} и вероятность безотказной работы изделия $P_C(t)$ в течение наработки t=100 ч.

Решение. Для каждого типа элементов из Приложения 2 определим средние значения интенсивностей отказов в номинальном режиме λ_{HJ} и поместим их в четвёртый столбец таблицы 5.3. Интенсивности отказов ЭРЭ с учётом условий их эксплуатации λ_J определим по формулам (5.6), (5.7). Далее из таблицы 5.1 для рассматриваемого случая определим значения поправочных коэффициентов: $k_{\lambda 1}$=1,07 (он учитывает суммарное воздействие вибраций и ударов на стационарную аппаратуру); $k_{\lambda 2}$=1,0 (эксплуатация при температуре внешней среды 313 К и относительной влажности 60 %); $k_{\lambda 3}$=1,1 (для высоты 2 км). Таким образом, запишем:

$$k_{\lambda} = k_{\lambda 1} k_{\lambda 2} k_{\lambda 3} = 1{,}07 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}1 = 1{,}177\,;$$
$$\lambda_J = \lambda_{HJ} k_{\lambda} = 1{,}177 \cdot \lambda_{HJ}\,.$$

Из последнего соотношения, вычислим λ_J для всех типов ЭРЭ и поместим эти данные в пятый столбец таблицы 5.3. По данным третьего и пятого столбцов определим шестой столбец таблицы. Ориентировочное значение интенсивности отказов $\lambda_{C\ \text{ОР}}$ узла РЭА найдём по формуле (5.3), т. е. суммированием значений величин в шестом столбце сводной таблицы:

$$\lambda_{C\ \text{ОР}} = \sum_{J=1}^{n_i} n_{iJ} \lambda_J = \sum_{J=1}^{5} n_{iJ} \lambda_J = .$$

В соответствии с формулой (5.4) определим среднее время безотказной работы рассматриваемого узла

$$t_{1C} = \frac{1}{\lambda_{C\ \text{ОР}}} = \frac{10^6}{} = .$$

Вероятность безотказной работы в течение наработки t=100 ч определим по формуле (5.1):

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_{C\ \text{ОР}} t) = \exp(- \cdot 10^{-6} \cdot 100) = .$$

Оценим теперь основные показатели надёжности узла РЭА с учётом режима работы его ЭРЭ, приведённых в седьмом и восьмом столбцах таблицы 5.3. Определение температуры элементов проводим на основании расчёта температурного поля рассматриваемой конструкции по методике, изложенной в разделах 3, 4. Значения мощностей тепловыделяющих ЭРЭ необходимо получить предварительно, путём анализа схемы электрической принципиальной в любом доступном пакете схемотехнического моделирования (*Micro-CAP*, *Or-CAD*, *P-Spice* и т. д.). К моменту расчёта температурного поля также рекомендуется иметь данные о размещении ЭРЭ.

На рис. 5.1. представлена геометрия области решения, приводится листинг программы расчёта.

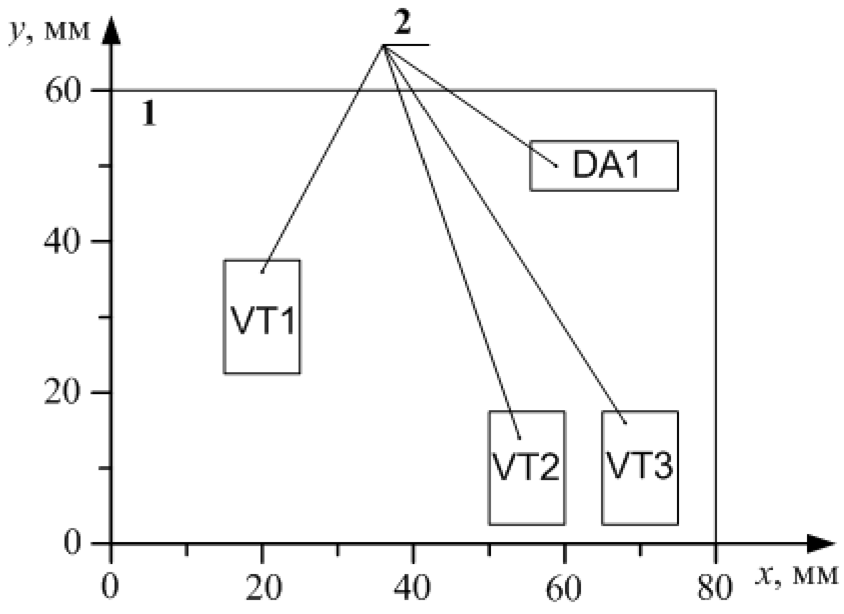


Рис. 5.1 – Геометрия области решения (вид сверху): 1 – основание (печатная плата); 2 – тепловыделяющие ЭРЭ

```
! Программа расчёта поля температур плоской конструкции узла РЭА
! по неявной разностной схеме с заданными граничными условиями III рода
! (смешанный теплообмен) и внутренними источниками тепловыделения.
! Для расчёта используется схема расщепления по координатам
! и метод прогонки.

! Исходные данные и параметры
! Mi, Mj – размер расчётной пространственной сетки
! Tvn – температура внешней среды
! TIME_END – конечное время расчёта
! dt – временной шаг
! psi – заданная точность вычислений
! SIGMA – постоянная Стефана-Больцмана
! LVT1x, LVT1y, QVT1 – геометрические размеры и мощность элемента VT1
! LVT2x, LVT2y, QVT2 – геометрические размеры и мощность элемента VT2
! LVT3x, LVT3y, QVT3 – геометрические размеры и мощность элемента VT3
! LDA1x, LDA1y, QDA1 – геометрические размеры и мощность элемента DA1
! L2x, L2y, h – длина, ширина и толщина основания (печатной платы)
! C, RO, LAMDA – теплофизические характеристики материала печатной
! платы (удельная теплоемкость, плотность, теплопроводность)
! TN, TNP12, TNP1, TS – массивы хранения значений температуры на
! (n), (n+1/2) и (n+1) – временном слое и дополнительный массив
! температур для преодоления нелинейности
! W – удельная мощность тепловыделения ЭРЭ
! K – коэффициент учёта теплообмена с боковых граней
! ALFA – коэффициент конвективного теплообмена с внешней средой
! EPS – приведенный коэффициент черноты поверхности пластины и
! внешней среды
! XVT11, XVT12, YVT11, YVT12, XVT1, YVT1 – координаты VT1
```

```
! XVT21, XVT22, YVT21, YVT22, XVT2, YVT2 – координаты VT2
! XVT31, XVT32, YVT31, YVT32, XVT3, YVT3 – координаты VT3
! XDA11, XDA12, YDA11, YDA12, XDA1, YDA1 – координаты DA1
! dx, dy – шаг пространственной сетки
! TIME – текущее время расчёта
! kappa – коэффициент температуропроводности материала печатной платы
! delta – погрешность вычислений
! MXVT11, MXVT12, MYVT11, MYVT12 – целочисленные координаты VT1
! MXVT21, MXVT22, MYVT21, MYVT22 – целочисленные координаты VT2
! MXVT31, MXVT32, MYVT31, MYVT32  – целочисленные координаты VT3
! MXDA11, MXDA12, MYDA11, MYDA12  – целочисленные координаты DA1
! i, j, ijk, it – переменные для организации расчётных циклов, вывода графики
! и цикла контроля за сходимостью вычислительного
! процесса, соответственно

program uzel_rea              ! НАЧАЛО ПРОГРАММЫ
implicit none

! Ввод исходных данных и параметров
integer, parameter :: Mj = 201
 real(8), parameter :: Tvn = 313.0D0
 real(8), parameter :: dt = 0.005D0, TIME_END = 200.0D0
 real(8), parameter :: psi = 0.0005D0, SIGMA = 5.67D-8

 real(8), parameter :: LVT1x = 10.0D-3, LVT1y = 16.0D-3, QVT1 = 0.5D0
 real(8), parameter :: LVT2x = 10.0D-3, LVT2y = 16.0D-3, QVT2 = 0.5D0
 real(8), parameter :: LVT3x = 10.0D-3, LVT3y = 16.0D-3, QVT3 = 0.5D0
 real(8), parameter :: LDA1x = 19.5D-3, LDA1y = 6.5D-3,  QDA1 = 0.5D0
 real(8), parameter :: L2x = 80.0D-3, L2y = 60.0D-3, h = 1.5D-3
 real(8), parameter :: C = 420.0D0, RO = 1800.0D0, LAMDA = 0.3D0

! Организация дополнительных массивов и переменных, необходимых
! для расчёта
real(8), allocatable :: TN(:,:), TNP12(:,:), TNP1(:,:), TS(:,:)
real(8), allocatable :: W(:,:), k(:,:), ALFA(:,:), EPS(:,:)

real(8) :: XVT11, XVT12, YVT11, YVT12, XVT1, YVT1
real(8) :: XVT21, XVT22, YVT21, YVT22, XVT2, YVT2
real(8) :: XVT31, XVT32, YVT31, YVT32, XVT3, YVT3
real(8) :: XDA11, XDA12, YDA11, YDA12, XDA1, YDA1
real(8) :: WVT1, WVT2, WVT3, WDA1
real(8) :: dx, dy, TIME, kappa, delta

integer :: MXVT11, MXVT12, MYVT11, MYVT12
integer :: MXVT21, MXVT22, MYVT21, MYVT22
integer :: MXVT31, MXVT32, MYVT31, MYVT32
integer :: MXDA11, MXDA12, MYDA11, MYDA12
integer :: Mi, i, j, ijk, it

Mi = L2x*(Mj - 1.0)/L2y + 1.0
```

```
allocate(TN(Mi,Mj), TNP1(Mi,Mj), TNP12(Mi,Mj), TS(Mi,Mj))
allocate (W(Mi,Mj), k(Mi,Mj), ALFA(Mi,Mj), EPS(Mi,Mj))

! Вычисление пространственных шагов
dx = L2x/(Mi - 1.0)
dy = L2y/(Mj - 1.0)

! Вычисление коэффициента температуропроводности
kappa = LAMDA/(C*RO)

! ------------------------- Размещение ЭРЭ на печатной плате
! Ввод координат
XVT1 = 20.0D-3;   YVT1 = 30.0D-3
XVT2 = 55.0D-3;   YVT2 = 10.0D-3
XVT3 = 70.0D-3;   YVT3 = 10.0D-3
XDA1 = 65.0D-3;   YDA1 = 50.0D-3

! Расчёт размеров локальных областей ЭРЭ на основе их
! габаритных размеров
XVT11 = XVT1 - LVT1x/2.0; YVT11 = YVT1 - LVT1y/2.0
XVT12 = XVT11 + LVT1x;    YVT12 = YVT11 + LVT1y
XVT21 = XVT2 - LVT2x/2.0; YVT21 = YVT2 - LVT2y/2.0
XVT22 = XVT21 + LVT2x;    YVT22 = YVT21 + LVT2y
XVT31 = XVT3 - LVT3x/2.0; YVT31 = YVT3 - LVT3y/2.0
XVT32 = XVT31 + LVT3x;    YVT32 = YVT31 + LVT3y
XDA11 = XDA1 - LDA1x/2.0; YDA11 = YDA1 - LDA1y/2.0
XDA12 = XDA11 + LDA1x;    YDA12 = YDA11 + LDA1y

! Привязка к координатной сетке
MXVT11 = XVT11/dx + 1.0;  MYVT11 = YVT11/dy + 1.0
MXVT12 = XVT12/dx + 1.0;  MYVT12 = YVT12/dy + 1.0
MXVT21 = XVT21/dx + 1.0;  MYVT21 = YVT21/dy + 1.0
MXVT22 = XVT22/dx + 1.0;  MYVT22 = YVT22/dy + 1.0
MXVT31 = XVT31/dx + 1.0;  MYVT31 = YVT31/dy + 1.0
MXVT32 = XVT32/dx + 1.0;  MYVT32 = YVT32/dy + 1.0
MXDA11 = XDA11/dx + 1.0;  MYDA11 = YDA11/dy + 1.0
MXDA12 = XDA12/dx + 1.0;  MYDA12 = YDA12/dy + 1.0
! ---------------------------------------------------------------------

! Пересчёт мощности ЭРЭ в мощность удельную
WVT1 = QVT1/(LVT1x*LVT1y*h)
WVT2 = QVT2/(LVT2x*LVT2y*h)
WVT3 = QVT3/(LVT3x*LVT3y*h)
WDA1 = QDA1/(LDA1x*LDA1y*h)

do i = 1,Mi
do j = 1,Mj
if ((i>=MXVT11) .and. (i<=MXVT12) .and. (j>=MYVT11) .and. (j<=MYVT12)) then
W(i,j) = WVT1
k(i,j) = 3.0
EPS(i,j) = 0.8
```

```
else
if ((i>=MXVT21) .and. (i<=MXVT22) .and. (j>=MYVT21) .and. (j<=MYVT22)) then
W(i,j) = WVT2
k(i,j) = 3.0
EPS(i,j) = 0.8
else
if ((i>=MXVT31) .and. (i<=MXVT32) .and. (j>=MYVT31) .and. (j<=MYVT32)) then
W(i,j) = WVT3
k(i,j) = 3.0
EPS(i,j) = 0.8
else
if ((i>=MXDA11) .and. (i<=MXDA12) .and. (j>=MYDA11) .and. (j<=MYDA12)) then
W(i,j) = WDA1
k(i,j) = 3.0
EPS(i,j) = 0.8
else
W(i,j) = 0.0
k(i,j) = 2.0
EPS(i,j) = 0.5
end if
end if
end if
end if
end do
end do

! Задание начального приближения
TNP1 = Tsr
TNP12 = Tsr
TS = Tsr
TIME = 0.0

! Открытие файла для записи значений по времени
open(1,file = 'D:\graph\Ttime.dat')

ijk = 0.0
DO WHILE(TIME<TIME_END)  ! ------------------------------------------------------------
ijk = ijk + 1.0

TN = TNP1

  ! ----------------------------- Начало цикла итераций
 delta = 1.0; it = 0.0
 do while(delta>=psi)
   delta = 0.0; it = it + 1.0

          ! Прогонка вдоль оси ox
          call  prog_ox()

          ! Прогонка вдоль оси oy
          call  prog_oy()
```

```

            ! Расчёт коэффициента теплоотдачи конвекцией
            call unit_ALFA(TS, 2.0, h)

            ! Расчёт погрешности вычислений
            delta = abs(maxval(TS) - maxval(TN))/maxval(TS)

            ! if (mod(it,1)==0) write(*,*) it, "cxt = ", delta

  end do
  ! ----------------------------------------- Окончание цикла итераций

 TNP1 = TS

 TIME = TIME + dt

 ! Вызов подпрограммы графического модуля
 if (mod(ijk,200)==0) call DrawTemperature()

END DO ! ------------------------------------------ Окончание цикла вычислений

! Закрытие файла для записи значений по времени
close(1)

! Организация файла для записи массива температуры в конечный
! момент времени
open(2,file = 'D:\graph\Tfield.dat')
do i = 1,Mi
  do j = 1,Mj
  write(2,"(E11.4,\)") TNP1(i,j)
  end do
  write(2,*)
end do
close(2)

contains  ! Определяет начало описания подпрограмм

… (Организация используемых подпрограмм аналогична рассмотренным в
п. 4.2.1.)

end program uzel_rea
```

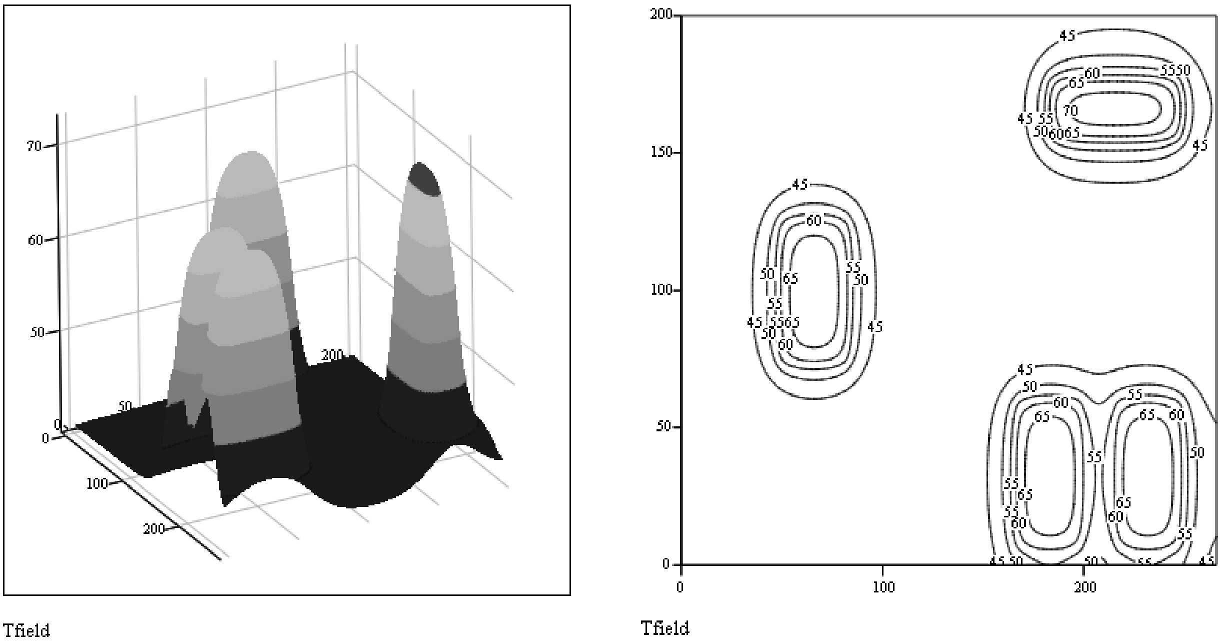


Рис.5.2 – Результат численного расчёта температурного поля печатного узла РЭА **<u>(Температура в К)</u>**

Далее, на основании полученных данных, для каждого типа ЭРЭ и соответствующего ему режима работы из справочной таблицы Приложения 2 выпишем значения поправочных коэффициентов a_J и поместим их в девятый столбец сводной таблицы. Для строк 1 и 3 значения поправочных коэффициентов отсутствуют в справочных таблицах. Поэтому мы принимаем их условно равными единице.

Вычислим произведение $n_i \cdot \lambda_i \cdot a_i$ (перемножением шестого и девятого столбцов таблицы 5.3) и поместим его значения в десятый столбец. Окончательное значение интенсивности отказов узла РЭА найдём по формуле (5.3). Оно равно сумме значений в десятом столбце сводной таблицы.

$$\lambda_{\text{С ОК}} = \sum_{J=1}^{3} n_{iJ} \cdot \lambda_J \cdot a_J = () \cdot 10^{-6} = .$$

В соответствии с формулой (5.4) определим окончательное значение среднего времени безотказной работы устройтсва:

$$T_{1\text{С ОК}} = 1/\lambda_{\text{С ОК}} = 10^6 / = .$$

Окончательное значение вероятности безотказной работы в течение наработки t=100 ч определим по формуле (5.1):

$$P_{\text{С ОК}} = \exp(-\lambda_{\text{С ОК}} \cdot t) = \exp() = \exp() = .$$

Таблица 5.3 – Сводная таблица

Номер группы ЭРЭ	**Тип ЭРЭ**	**Число ЭРЭ**	**Интен-сивность отказов**	**Интен-сивность отказов**		**Коэф-фициент нагрузки**	**Темпе-ратура**	**Попра-вочный коэф-фициент**	
1	Полупровод-никовые ИС	1	0,02	0,024	0,024	0,8	343	1,00	0,024
2	Транзисторы кремниевые большой мощности	3	0,74	0,87	2,61	0,6	338	0,58	1,51
3	Соединения пайкой	23	0,01	0,012	0,276	-	328	1,00	0,276

С учётом вышесказанного, методику окончательного расчёта надёжности по внезапным отказам на основании математического моделирования температурного поля проиллюстрируем следующим алгоритмом.

Рис.5.3 – Алгоритм методики

6 ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ РАБОТЫ РЭС НА ОСНОВЕ МИКРОТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

6.1 Общие сведения

Влияние величины температуры, скорость её изменения, перепады температур между отдельными участками одного ЭРЭ или между несколькими ЭРЭ являются основными факторами, влияющими на стабильность работы, как отдельных элементов, так и устройств в целом. Микроэлектронная элементная база III и IV поколений, выполненная с помощью методов интегрально-групповой технологии, позволяет достигнуть высокой температурной стабильности параметров РЭА, однако в ряде случаев требования к стабильности таковы, что для обеспечения заданной надёжности и режима функционирования требуется применять специальные методы термостабилизации. Одним из перспективных методов термостабилизации является термостатирование [], которое реализуется путём применения специальных устройств для сужения диапазона изменения температуры внешней сред (см. рис. 6.1).

Рис. 6.1 – Классификация термостатов [с. 18]

К основным параметрам термостатов относятся: температура статирования ($T_{СТ}$), мощность потерь ($P_{П}$), время выхода на режим ($t_{ВЫХ}$), конструктивно-технологические показатели (габариты, масса, форма, технология изготовления)

Для термостатов с нагревом: $T_{СТ} > T_{ВН\,MAX}$, где $T_{ВН\,MAX}$ – максимальная температура внешней среды; с охлаждением: $T_{СТ} < T_{ВН\,MIN}$; для реверсивных: $T_{ВН\,MIN} < T_{СТ} < T_{ВН\,MAX}$.

Мощность потерь характеризует экономичность термостата, т. к. условием термостатирования является $P_{П} = P_{УСТ}$, где $P_{УСТ}$ – мощность, потребляемая термостатом в установившемся режиме.

Время выхода на режим зависит от типа термостата, его конструктивно-технологических показателей и может быть от нескольких секунд до нескольких часов.

К точностным параметрам термостатов относится погрешность регулирования температуры ().

В термостатах применяется пропорциональное, позиционное пропорционально-интегрально-дифференциальное регулирование. Каждый из указанных типов регулирования имеет определенные особенности и применяется в зависимости от предъявляемых требований к регулированию: устойчивости к внешним воздействиям, точности термостатирования, времени выхода на режим и др.

6.2 Моделирование нестационарного температурного поля термостабильной подложки гибридно-интегральных схем с тепловой обратной связью

Функционируя в составе РЭА, система микротермостатирования, реализованная в виде гибридно-плёночного микротермостата (ГПМТ) с подогревом, выполняет функцию стабилизации температуры термостатируемого объекта. Обобщённая физическая модель ГПМТ представлена на рис. 6.2.

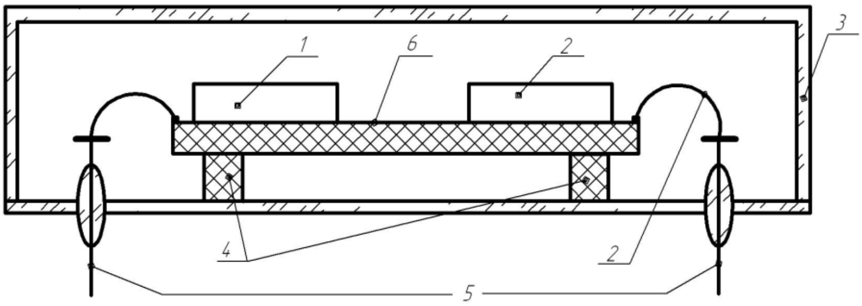


Рис. 6.2 – Обобщённая физическая модель ГПМТ: 1, 2 – термостатируемая схема и схема регулирования температуры, соответственно; 3 – корпус; 4 – теплоизоляция; 5 – выводы; 6 – термостабильная подложка

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поршаков Б.П., Козаченко А.Н. Основы термодинамики и теплопередачи

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 – ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ РЭА

Таблица П1.1 – Теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость некоторых конструкционных материалов РЭА, используемых при разработке печатных узлов и микросборок []

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности λ, $Вт/(м \cdot К)$	Плотность ρ, $кг/м^3$	Удельная теплоемкость C, $Дж/(кг \cdot м)$
1	**2**	**3**	**4**
Материалы печатных плат:			
Гетинакс	0,15-0,19	1200-1400	-
Текстолит	0,23-0,33	1350	1400
Стеклотекстолит	0,23-0,37	1500-1800	420
Стеклотекстолит (многослойная печатная плата)	0,43-0,50	1750	410
Анодированный алюминий	200-300	2800	850
Алюминий с эпоксидной смолой	50-65	2800	800
Титан покрытый слоем Al_2O_3	29	4800	-
Сталь с эпоксидной смолой	1,1	7800	550
Полимид 6	0,3	-	-
Полимид (*vlspel*)	0,36	-	-
Фольгированный полистирол	0,03-0,04	-	-
Материалы проводников:			
Медь	380-390	8940	380
Серебро	390-420	10500	234
Золото	219	19300	130
Материалы радиаторов и оснований функциональных ячеек:			
АЛ-7	196	2600	830
АЛ-2	167	2650	840
АЛ-9	151	2660	890
АМЦ	180	2730	1090

Продолжение таблицы П1.1

Наименование или марка материала	Коэффициент теплопроводности λ, $Вт/(м \cdot К)$	Плотность ρ, $кг/м^3$	Удельная теплоемкость C, $Дж/(кг \cdot м)$
1	**2**	**3**	**4**
АМГ	150	2630	970
АМГ-6	90	2680	970
Алюминий деформируемый (АД, АД-1 и др.)	210-230	2710	900
Дюралюминий	160-180	2750	920
Д 16М	192	2780	-
Д 16Т	121	-	-
Материалы подложек:			
Ситалл *СТ-32-1*	1,0	3190	-
Ситалл *СТ38-1*	1,3	2900	-
Ситалл *СТ-50-1*	1,4-1,5	2200-2700	-
Феррит *10 СЧ-6*	2,6	5020	-
Поликор *(ВК-100)*	30-35	3960-3990	-
22хс (ВК-94-1)	13,4	3750-3850	-
КМ	21-25	-	-
М7	10,0	-	-
ВК-98-1 (сапфирит)	24-26	3880-3940	-
Стекло *С41-1*	1,0	2500	-
Стекло *С48-3*	1,2-1,5	2200-2700	-
Плавленый кварц	7,0-15,0	2210	740
Клеи:			
(*Тм* – допустимая рабочая температура, ^0C; *t* – технологическая толщина клеевого слоя, *мкм*):			
Д9 (*Тм*=150, *t*=50-250)	0,74	-	-
ЭТА (*Тм*=150, *t*=30-200)	0,80	-	-
ТКЛ-2 (*Тм*=125, *t*=50-250)	1,60	-	-
ВТ-25-200 (*Тм*=200, *t*=50-250)	0,62	-	-
К-400 (*Тм*=250, *t*=100-250)	1,0-2,0	-	-
Эластосил *10-01-марка Б*	0,65	-	-

Продолжение таблицы П1.1

Наименование или марка материала	**Коэффициент теплопроводности λ,** $Вт/(м \cdot К)$	**Плотность ρ,** $кг/м^3$	**Удельная теплоемкость C,** $Дж/(кг \cdot м)$
1	**2**	**3**	**4**
Эластосил *137-83* (*Тм*=200, *t*=50-250)	0,97	-	-
Мастика *ЛН* (*Тм*=120, *t*=50-250)	0,65	-	-
Эпоксидная смола	0,15	-	-
УП-5-201	1,0	-	-
Паста *КПТ-8*	0,8	-	-
ВК-9 (наполнитель TiO_2)	0,21-0,22	-	-
КВК-68	0,137	-	-
ВК-9 (наполнитель AlN)	0,56-1,62	-	-
КВК-68 (наполнитель AlN)	1,0-1,87	-	-
Компаунды:			
ЭК-16А	0,3-0,35	1350	1200-1400
К-1	2,2	-	-
К-2	1,4	-	-
КТЭ-2	1,3	-	-
КТЭ-4	1,2	-	-
ЭК-16А с кварцевой пылью	0,5-0,8	-	-
Газы*[]*:			
Азот (при 0 °*С*)	0,0243	1250	1030
Аммиак (при 0 °*С*)	0,021	771	2043
Водород (при 0 °*С*)	0,1721	899	14192
Водяной пар (при 100 °*С*)	0,024	598	2135
Воздух, сухой (при 0 °*С*)	0,0244	1293	1005
Гелий (при 0 °*С*)	0,143	178	5203
Кислород (при 0 °*С*)	0,0247	1429	915
Оксид углерода (при 0 °*С*)	0,0233	1250	1039
Углекислый газ (при 0 °*С*)	0,0146	1977	815
Прочие материалы			
Пенополиуретан	0,06	1250	-

Окончание таблицы П1.1

Наименование или марка материала	**Коэффициент теплопроводности** λ**,** $Вт/(м \cdot К)$	**Плотность** ρ**,** $кг/м^3$	**Удельная теплоемкость** C**,** $Дж/(кг \cdot м)$
1	**2**	**3**	**4**
Пластмасса ЭФП-63	0,23	-	-
Пластмасса полихлорвиниловая	0,44	-	-
Плекстиглас	0,19	1180	1420-1550
Полистирол	0,09-0,14	1500	-
Фторопласт-4	0,25	2300	920-1050
Германий	23	5320	314
Кремний	22	2300	733
Латунь	109	8440	376
Титан	22	4500	-
Сталь 10	73	7850	460
Магний	156	1750	1047
Бронза	25	8800	381
Парафин	0,27	920	1000
Картон	0,23	-	-
Слюда	0,45	2600-3200	879
Асбестовая ткань	0,17	-	-
Эбонит	0,16	1200	-
Резина	0,16	1200	1380

Таблица П1.2 – Коэффициенты черноты поверхностей некоторых конструкционных материалов РЭА

Материал и состояние его поверхности	**Коэффициент черноты,** ***отн. ед***	**Температура,** $°C$
1	**2**	**3**
Алюминий:		
грубо полированный	0,05	100
тщательно полированный	0,04-0,06	50-500
листовой (коммерческий)	0,09	30-200
сильно окисленный	0,20-0,80	50-500
сплав Д-16	0,37-0,40	50-350
фольга	0,10	100
Медь:		
тщательно полированная	0,02	80-115

Продолжение таблицы П1.2

Материал и состояние его поверхности	Коэффициент черноты, *отн. ед*	Температура, °*C*
1	**2**	**3**
шлифованная	0,05	20
сильно окисленная	0,79	150
Латунь:		
тщательно полированная	0,02	100
шлифованная	0,05	50
сильно окисленная	0,78	100
пластина тусклая	0,22	200
окисленная	0,60	100
Бронза полированная	0,16	50
Сталь:		
никелированная	0,11	25
окисленная	0,80	25
литьё	0,54	25
листовая, шероховатая	0,96	300
холоднокатаная	0,09	93
Железо:		
шлифованное	0,14	20
листовое, сильно окисленное	0,69	100
Ковар	0,82	23
Золото	0,10	90-600
Никель полированный	0,08	99-370
Титан	0,63	25
Чугунное литьё	0,81	50
Окиси металлов	0,40-0,80	100-400
Кварц плавленый	0,93	20
Стекло гладкое	0,94	22
Бумага (картон)	0,93	20-300
Асбестовый картон	0,96	20
Резина	0,86-0,95	24
Фарфор глазурованный	0,92	23
Краски:		
масляные различных цветов	0,92-0,96	100
эмалевые	0,92	20-100
алюминиевые различных цветов	0,27-0,67	100

Окончание таблицы П1.2

Материал и состояние его поверхности	Коэффициент черноты, *отн. ед*	Температура, *°C*
1	**2**	**3**
защитнозеленая	0,90	40
бронзовая	0,51	50
Лаки:		
чёрный	0,96-0,98	40-100
белый	0,80-0,95	40-95
щёллак чёрный матовый	0,91	25
муар серый, чёрный	0,90	20
Белая эмаль на железной пластине	0,90	25
Алюминиевый лак на шероховатой пластине	0,39	20

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 – СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЁТА НАДЁЖНОСТИ

Таблица П2.1 – Поправочные коэффициенты a_J для расчёта интенсивностей отказов ЭРЭ в зависимости от температуры среды T_{CJ} окружающей элемент и коэффициента нагрузки K_J

Наименование, тип элемента	Коэффициент нагрузки K_J									
	T_{CJ}, K	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Транзисторы кремниевые	293	0,16	0,18	0,20	0,35	0,43	0,52	0,63		
	303	0,16	0,19	0,22	0,37	0,46	0,55	0,67		
	313	0,17	0,20	0,23	0,40	0,51	0,59	0,72		
	323	0,18	0,21	0,24	0,45	0,55	0,65	0,78		
	333	0,19	0,22	0,26	0,50	0,61	0,71	0,85		
	343	0,20	0,23	0,27	0,56	0,70	0,81	0,97		
Транзисторы германиевые	293	0,23	0,26	0,35	0,42	0,50	0,70	0,74		
	303	0,27	0,32	0,45	0,52	0,65	0,83	0,95		
	313	0,32	0,40	0,53	0,66	0,81	1,04	1,22		
	323	0,42	0,50	0,68	0,84	1,08	1,31	1,50		
	333	0,52	0,63	0,86	1,10	1,38	1,65	1,90		
	343	0,63	0,80	1,11	1,40	1,73	2,05	2,35		
Диоды кремниевые	293	0,77	0,78	0,79	0,81	0,83	0,85	0,88		
	303	0,85	0,85	0,86	0,88	0,90	0,92	0,97		
	313	0,92	0,92	0,94	0,97	1,00	1,04	1,08		
	323	0,98	1,00	1,02	1,05	1,09	1,13	1,19		
	333	1,04	1,08	1,11	1,16	1,22	1,30	1,39		
Диоды германиевые	293	0,15	0,22	0,30	0,39	0,50	0,62	0,74		
	303	0,19	0,26	0,35	0,45	0,55	0,66	0,79		
	313	0,23	0,32	0,41	0,51	0,63	0,76	0,91		
	323	0,32	0,45	0,60	0,76	0,95	1,15	1,41		
	333	0,53	0,66	0,86	1,13	1,40	1,75	2,13		
Конденсаторы слюдяные негерметичные	303			0,08	0,11	0,22	0,27			
	313			0,09	0,13	0,28	0,35			
	323			0,10	0,15	0,36	0,46			
	333			0,12	0,20	0,45	0,62			
	343			0,15	0,26	0,60	0,83			
	353			0,22	0,43	0,92	1,46			
	363			0,38	0,82	1,70	2,40			
	373			0,57	1,36	3,00	3,40			

Продолжение таблицы П2.1

Наименование, тип элемента	Коэффициент нагрузки K_J									
	T_{CJ}, K	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Конденсаторы стеклянные, плёночные, металлобумажные	293			0,36	0,49	0,64	0,80			
	303			0,38	0,50	0,70	0,94			
	313			0,42	0,54	0,80	1,10			
	323			0,49	0,63	0,95	1,43			
	333			0,61	0,75	1,19	2,00			
	343			0,76	0,96	1,58	2,30			
	353			0,97	1,40	2,10	2,80			
	363			1,30	2,80	2,70	3,80			
	373			1,70	4,50	3,50	5,00			
Конденсаторы электролитические с алюминиевым анодом	293			0,48	0,40	0,48	0,82			
	303			0,60	0,48	0,60	1,24			
	313			0,90	0,64	0,90	1,73			
	323			1,40	1,17	1,40	2,30			
	333			2,10	1,80	2,10	4,30			
	343			3,60	2,90	3,60	5,65			
	353			5,60	4,40	5,60	7,00			
	363			8,00	6,50	8,00	11,0			
	373			11,4	9,00	11,4	18,0			
Конденсаторы электролитические с танталовым анодом	293			0,20	0,20	0,20	0,39			
	303			0,22	0,22	0,22	0,41			
	313			0,30	0,30	0,30	0,47			
	323			0,40	0,40	0,40	0,57			
	333			0,50	0,50	0,50	0,70			
	343			0,65	0,65	0,65	0,86			
	353			0,80	0,80	0,80	1,05			
	363			1,00	1,00	1,00	1,30			
	373			1,25	1,25	1,25	1,65			
Резисторы непроволочные	293	0,20	0,26	0,35	0,42	0,50	0,60	0,72	0,84	1,00
	303	0,27	0,34	0,43	0,51	0,62	0,75	0,88	1,07	1,26
	313	0,33	0,42	0,51	0,60	0,76	0,94	1,11	1,38	1,71
	323	0,40	0,50	0,59	0,71	0,92	1,17	1,38	1,76	2,22
	333	0,47	0,57	0,67	0,82	1,08	1,43	1,70	2,17	2,81
	343	0,54	0,64	0,75	0,94	1,26	1,72	2,04	2,69	3,52
	353	0,61	0,71	0,84	1,07	1,46	2,05	2,48	3,31	4,40
	363	0,70	0,79	0,92	1,20	1,66	2,40	2,99	4,04	5,40

Окончание таблицы П2.1

Наименование, тип элемента	**Коэффициент нагрузки K_J**									
	T_{CJ}, K	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
Резисторы проволочные	293	0,02	0,02	0,05	0,10	0,20	0,34	0,51	0,73	1,00
	313	0,06	0,06	0,11	0,19	0,32	0,53	0,69	0,92	1,29
	338	0,11	0,11	0,18	0,32	0,51	0,79	1,04	1,43	2,18
	358	0,16	0,17	0,24	0,43	0,73	1,07	1,50	2,26	3,65
	363	0,18	0,20	0,30	0,52	0,96	1,33	2,00	3,15	5,00

Таблица П2.2 – Средние, максимальные и минимальные значения интенсивностей отказов ЭРЭ

Наименование элемента	**Интенсивность отказов λ, (среднее значение)/(максимальное - минимальное),** 10^{-6} ч$^{-1}$
Интегральные микросхемы	
Гибридные	0,075 / (0,1 – 0,05)
Полупроводниковые	0,02 / (0,03 – 0,01)
Транзисторы кремниевые	
Маломощные (до 150 мВт)	0,84 / (1,44 – 0,45)
Высокочастотные (менее 1 Вт)	0,50 / (1,67 – 0,16)
Средней и большой мощности	0,74 / (0,84 – 0,21)
В ключевом режиме	0,70 / (0,848 – 0,25)
Субминиатюрные двойные	2,6 / (4,31 – 0,87)
Микроволновые	9,66
Диоды	
Кремниевые	0,2 / (0,452 – 0,021)
Кремниевые карбидные	0,1 / (0,55 – 0,002)
Субминиатюрные двойные	0,85 / (1,7 – 0,26)
Конденсаторы	
Керамические	0,15 / (1,64 – 0,042)
Керамические переменные	0,02 / (0,351 – 0,012)
Стеклянные	0,06 / (0,87 – 0,0005)
Танталовые	0,6 / (1,934 – 0,108)
Пластиковые	0,135 / (0,178 – 0,003)
Нейлоновые	0,01 / (0,014 – 0,006)
Электролитические	0,035 / (0,513 – 0,003)

Окончание таблицы П2.2

Наименование элемента	**Интенсивность отказов λ, (среднее значение)/(максимальное - минимальное),** 10^{-6} ч$^{-1}$
Резисторы	
Композиционные 0,25 Вт и менее Композиционные 0,5 Вт Композиционные 2 Вт Композиционные переменные Металлоплёночные Плёночные прецизионные Потенциометры Проволочные прецизионные Нелинейные	0,016 0,06 0,071 0,053 / (0,533 – 0,007) 0,2 / (0,4 – 0,004) 0,004 0,26 / (0,5 – 0,02) 0,073 / (0,114 – 0,032) 0,11 / (0,153 – 0,047)