Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УРАВНЕНИЯ ОПТОФИЗИКИ

Методические указания
к практическим занятиям
для студентов направлений
«Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и наноэлектроника»

2012

Гейко Павел Пантелеевич, Шандаров Станислав Михайлович

Уравнения оптофизики: методические указания к практическим занятиям для студентов направлений «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и наноэлектроника» / П.П. Гейко, С.М. Шандаров; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 38 с.

Пособие посвящено изложению некоторых специальных разделов математики, и предназначено для преподавателей и студентов ТУСУР. Пособие учитывает специфику технического ВУЗа и направления подготовки «Фотоника и информатика» и может быть использовано студентами при подготовке к практическим занятиям, экзаменам и при самостоятельной работе.

Рассматриваются основные понятия и определения, связанные с уравнениями с частными производными и вопросы приведения к каноническому виду линейных уравнений второго порядка. Излагаются вопросы, относящиеся к аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических).

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм, обучающихся по направлениям «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и наноэлектроника» по курсу «Уравнения оптофизики».

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ЭП
_____________С.М. Шандаров

«___»   _____________ 2012 г.

УРАВНЕНИЯ ОПТОФИЗИКИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов направлений
«Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и наноэлектроника»

Разработчики

____________ П.П. Гейко

____________ С.М. Шандаров
«____»______________2012 г.

2012

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Цель преподавания дисциплины: формирование у бакалавров понимания теоретических основ и математического аппарата современной оптической физики для последующего использования этих знаний при разработке, эксплуатации, исследовании физических свойств и технических характеристик элементов и устройств когерентной и нелинейной оптики, нелинейной и волноводной фотоники.

Задачи изучения дисциплины

В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить навыки математического моделирования реальных (в первую очередь физических) процессов на основе краевых задач для уравнений в частных производных.

В результате изучения дисциплины студент должен:

– знать основные преставления об уравнениях с частными производными, законы сохранения как основу модельного описания линейных и нелинейных оптических явлений.

– уметь моделировать реальные (в первую очередь оптические) процессы и явления как краевые задачи для уравнений в частных производных.

– владеть методами решения уравнений в частных производных для решения теоретических и практических задач оптической физики.

Оптическая физика широко использует уравнения математической физики для описания различных линейных и нелинейных явлений. Математическая физика – это математический аппарат изучения физических полей – одного из центральных объектов современной физики и инженерии. Только привлекая рассмотрение физических полей и соответствующий математический аппарат, удается наиболее полно описать многие оптические явления, а в целом ряде случаев без такого привлечения даже не удается сформулировать первоначальные понятия и простейшие утверждения. Поэтому знание тех или иных разделов математической физики оказывается необходимым каждому современному специалисту в области фотоники.

Термин "математическая физика" имеет и более узкий, "классический" смысл. Он относится к уравнениям в частных производных, являющимся теоретическим аппаратом гидромеханики, теории теплопроводности и диффузии, теории упругости, "классической" части теории электромагнитного поля, оптических волноводов, нелинейной оптики. Поля, рассматриваемые в этих классических разделах, оказывается возможным трактовать как системы с бесконечным числом степеней свободы, что и обусловило общность соответствующего математического аппарата.

1. Классификация линейных уравнений второго порядка

Будем рассматривать уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных, т.е. имеющие вид

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \quad (1.1)$$

где a_{11},a_{12},a_{22} являются функциями x и y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y),$$

допускающего обратное преобразование (для этого достаточно потребовать, чтобы функциональный определитель

$$D=\begin{vmatrix}\varphi_x & \psi_x\\ \varphi_y & \psi_y\end{vmatrix}$$

был отличен от нуля), можно получить уравнение, эквивалентное исходному. Нас будет интересовать вопрос: как выбрать новые переменные $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$, чтобы относительно них уравнение имело наиболее простой (канонический) вид.

Перейдя к новым переменным, будем иметь

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\\
&u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx}=(u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x)_\xi\xi_x+(u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x)_\eta\eta_x=u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_\xi(\xi_x)_\xi\xi_x+\\
&+u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x+u_\eta(\eta_x)_\xi\xi_x+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\xi(\xi_x)_\eta\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\eta(\eta_x)_\eta\eta_x=\\
&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\left[(\xi_x)_\xi\xi_x+(\xi_x)_\eta\eta_x\right]+u_\eta\left[(\eta_x)_\xi\xi_x+(\eta_x)_\eta\eta_x\right]=\\
&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}.
\end{aligned} \quad (1.2)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
u_{xy}&=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy}&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned} \quad (1.3)$$

После подстановки полученных производных в (1.1) получим уравнение

$$\bar a_{11}u_{\xi\xi}+2\bar a_{12}u_{\xi\eta}+\bar a_{22}u_{\eta\eta}+F_1(\xi,\eta,u_\xi,u_\eta,u)=0, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar a_{11}&=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
\bar a_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\bar a_{22}&=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2.
\end{aligned} \quad (1.5)$$

Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=b_1u_x+b_2u_y+cu+f,$$

то F_1 имеет вид

$$F_1(\xi,\eta,u_\xi,u_\eta,u)=\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u+\delta.$$

Таким образом, уравнение в этом случае снова получается линейным.

Попытаемся выбрать переменную $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы коэффициент $\overline{a}_{11}$ в уравнении (1.4) был равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $\xi = \varphi(x, y)$ было решением уравнения

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) можно записать в виде произведения

$$\left(\boldsymbol{a}_{11}\xi_x - \left(-\boldsymbol{a}_{12} + \sqrt{\boldsymbol{a}_{12}^2 - \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}}\right)\xi_y\right)\left(\boldsymbol{a}_{11}\xi_x - \left(-\boldsymbol{a}_{12} - \sqrt{\boldsymbol{a}_{12}^2 - \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}}\right)\xi_y\right).$$

Таким образом, решение уравнения (1.6) свелось к решению двух линейных однородных уравнений первого порядка

$$a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\ \xi_y = 0. \qquad (1.7)$$

Из теории следует, что для решения уравнений (1.7) надо найти общий интеграл каждого из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (1.8)$$

На вид решений уравнений (1.8) существенно влияет знак подкоренного выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. По знаку этого выражения определяется тип уравнения (1.1).

Будем называть уравнение (1.6) в точке M

<u>гиперболического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

<u>эллиптического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

<u>параболического типа,</u> если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Можно убедиться в справедливости равенства

$$\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2,$$

из которого следует, что тип уравнения не меняется при преобразовании переменных.

Следует отметить также, что тип уравнения зависит от точки M и в разных точках может быть разным.

<u>Пример 1.1. Рассмотрим уравнение</u>

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \qquad (1.9)$$

здесь $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0$ и $a_{22} = x$, следовательно,

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x.$$

Тем самым при $x < 0$ уравнение (1.9) гиперболического типа, при $x = 0$ – параболического типа, а при $x > 0$ – эллиптического типа.

1.2. Варианты задач для самоподготовки

1. Найдите общие решения следующих уравнений в частных производных:

а) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$, если $U = U(x, y)$;

б) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$;

в) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$;

г) $x\dfrac{\partial U}{\partial x} + y\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0$;

д) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

2. Выяснить, к какому типу (гиперболическому, параболическому или эллиптическому) относятся следующие уравнения в частных производных:

а) волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

б) уравнение Фурье $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

в) уравнение Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

г) уравнение $xU_{xx}+U_{yy}=\sin x$.

3. Какие из следующих уравнений являются линейными?

1) $U_{tt}=e^{-t}U_{xx}+\sin(t)$;
2) $UU_{xx}+U_t=0$;
3) $U_{xx}+yU_{yy}=0$;
4) $xU_x+yU_y+U^2=0$.

2. Дифференциальные операторы и классификация векторных полей

1. Доказать:

1) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ для любого поля $\vec{F}$;

2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u(M) = \vec{0}$;

3) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u(M) = \Delta u$, $\quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Решение.

1) Пусть $\vec{F} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$.

По определению имеем

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

2) Пусть $u(M) = u(x, y, z)$. По определению имеем

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

3) $\operatorname{div}\ \operatorname{grad} u = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) =$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

2. Показать, что поле $\vec{F} = (2x\,y + z)\,\vec{i} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{j} + x\,\vec{k}$ является потенциальным, но не соленоидальным. Найти потенциал $u(x, y, z)$ данного поля.

Решение. Поле $\vec{F}$ называется *потенциальным* или безвихревым, если $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$. Поле $\vec{F}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Находим

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x\,y+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=(0-0)\,\vec{i}-(1-1)\,\vec{j}+(2x-2x)\,\vec{k}=\vec{0},$$

т. е. поле $\vec{F}$ – потенциальное.

Далее имеем

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(2x\,y+z)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-2y\right)+\frac{\partial}{\partial z}(x)=2y-2+0=2y-2\neq 0,$$

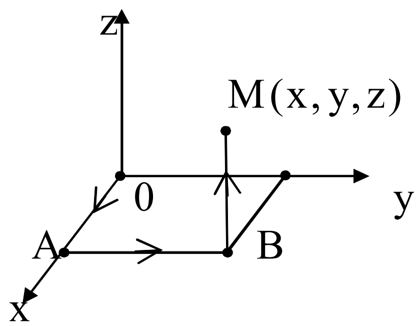
поэтому поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

В потенциальном векторном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и справедлива формула

$$\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=u(B)-u(A).$$

Потенциал $u(x, y, z)$ векторного поля $\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ определяется формулой

$$u(x, y, z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$



где $\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ – фиксированная, $\left(x, y,\, z\right)$ – произвольная текущая точки. Выберем начало координат $O(0,\,0,\,0)$ за фиксированную точку, а в качестве пути интегрирования ломанную $OABM$, тогда

$$u(x, y, z)=\int\limits_{OABM}(2x\,y+z)dx+\left(x^2-2y\right)dy+x\,dz.$$

На отрезке OA имеем: $y=0,\;\; z=0\;\; dy=0,\;\; dz=0,$
на AB: $z=0,\;\; dx=0,\;\; dz=0,$ на BM: $dx=0,\;\; dy=0$.

Тогда

$$\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BM}=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y\left(x^2-2y\right)dy+\int\limits_0^z x\,dz=x^2y-y^2+x\,z.$$

Потенциал $u(x, y, z) = x^2 y - y^2 + x z.$

3. Доказать, что функция $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической, и векторное поле $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ – гармоническое.

Решение. Функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической*. Поле $\vec{F}$ называется *гармоническим*, если оно потенциальное и соленоидальное.

Проверим, справедливо ли для данной функции уравнение Лапласа.

Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + 3\cdot\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Следовательно, данная функция $u = \dfrac{1}{r}$ – гармоническая.

Далее находим

$$\vec{F} = \operatorname{grad} u = -\frac{1}{r^3}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right).$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}$, то одно из условий в определении гармонического поля $\vec{F}$ выполнено. Другое условие $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ также выполняется, поскольку

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = 0\ .$$

2.2. Варианты задач для самоподготовки

1. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, если

а) $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$;	б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}$, если

а) $\vec{F} = x^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$;	б) $\vec{F} = z\,x^2\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + x\,y\,\vec{k}$.

3. Установить потенциальность поля $\vec{F}$ и найти его потенциал $u(x, y, z)$, если

а) $\vec{F} = 2x\,y\,\vec{i} + \left(x^2 - 2y\,z\right)\vec{j} - y^2\,\vec{k}$;

б) $\vec{F} = \left(3x^2\,y - y^3\right)\vec{i} + \left(x^3 - 3x\,y^2\right)\vec{j}$;

в) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k}.$

4. Проверить, является ли гармонической функция $u = \ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{F}$ гармоническим

а) $\vec{F} = x^2\, z\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} - x\, z^2\,\vec{k};$	б) $\vec{F} = y\, z\,\vec{i} + x\, z\,\vec{j} + x\, y\,\vec{k}.$

6. Используя уравнения Максвелла, показать, что поле вектора плотности полного тока является соленоидальным (вихревым).

7. Показать, что электростатическое поле вектора напряженности $\vec{E}(x,y,z) = -\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)$ является потенциальным (безвихревым).

8. Используя общие уравнения для электростатического поля, материальное уравнение, и выражая поле вектора напряженности через электростатический потенциал, $\vec{E}(x,y,z) = -\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)$, получите общее уравнение в частных производных, которому удовлетворяет этот потенциал $\varphi(x,y,z)$.

9. Показать, что поле $\vec{F} = (2x\, y + z)\,\vec{i} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{j} + x\,\vec{k}$ является потенциальным, но не соленоидальным. Найти потенциал $u(x, y, z)$ данного поля.

10. Доказать, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической, и векторное поле $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ – гармоническое.

Ответы

1. а) $\dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
2. а) $6\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}\right)$; б) $2\left(z\,\vec{i} - \vec{j} + x\,\vec{k}\right)$.
3. а) $u = x^2\, y - y^2\, z$; б) $u = x^3\, y - x\, y^3$; в) $u = x\, y + y z + x z$;
4. да. **5.** а) нет; б) да.

3. Краевая задача для однородного уравнения теплопроводности. Диффузия. Дифракция параксиальных пучков

3.1. Дано уравнение $U_t = a^2 U_{xx}$ и условия $U(0,x) = \varphi(x), U(t,0) = U(t,l) = 0.$ Согласно методу Фурье решение записывается в виде $U(t,x) = T(t)X(x).$ Подставляя его в данное уравнение, получим

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2.$$

Для функции $X(x)$ имеем краевую задачу $X''=-\lambda^2X, X(0)=X(l)=0$, решение которой имеет вид $X(x)=X_n(x)=d_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda=\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$.

Для функции $T(t)$ имеем уравнение $T'+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T=0,$ решение которого имеет вид $T(t)=T_n(t)=A_n\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t\right)$.Следовательно, решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

коэффициенты b_n находим из начального условия $U(0,x)=\varphi(x),$ т.е. $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$

Пример 3.1.1. Решить краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$U_t=a^2U_{xx},\ a=1,\ U(0,x)=2\sin^2\frac{\pi n}{2l}x,\ U(t,0)=U(t,l)=0$$

так как $U(x)=2\sin^2\frac{\pi n}{l}x,$ то

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l 2\sin^2\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l(1-\cos\frac{\pi n}{l}x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx-$$

$$-\frac{1}{l}\int_0^l\sin\frac{2\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+\frac{1}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{2}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n}, \textit{если } n-\textit{нечетное},\\ 0, \textit{если } n-\textit{четное}.\end{cases}$$

Ответ: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\exp\left(-\frac{4\pi^2(2k-1)^2}{l^2}t\right)\sin\frac{2\pi(2k-1)}{l}x.$

3.2. Задача Коши для одномерного уравнения диффузии

Рассмотрим задачу Коши для уравнения перераспределения примеси в однородной безграничной среде: требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_t = D\, u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Применив метод Фурье, получим решение уравнения в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4D\,t}}\, ds.$$

<u>Пример 3.2.1.</u> Решить уравнение диффузии $u_t = D\, u_{xx}$ для следующего начального распределения примеси в среде:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x < 1,\ x > 3. \end{cases}$$

Решение. Так как $\varphi(x)$ на отрезке $[1, \ 3]$ задает постоянную концентрацию примеси, а вне отрезка её концентрация равна нулю, то решение принимает вид

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int\limits_{1}^{3} e^{-\frac{(x-s)^2}{4D\,t}}\, ds.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Действительно, выполняя замену

$$\xi = \frac{x-s}{2\sqrt{Dt}}, \qquad s = x - 2\sqrt{Dt}\ \xi, \qquad ds = -2\sqrt{Dt}\ d\xi.$$

$$s = 1, \qquad \xi = \frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}, \qquad s = 3, \qquad \xi = \frac{x-3}{2\sqrt{Dt}},$$

получаем

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x-3}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2}\, d\xi - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x-3}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x,\, t)=u_0\left[\Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{Dt}}\right)-\Phi\left(\frac{x-3}{2\sqrt{Dt}}\right)\right].$$

3.3. Задача Коши для дифракции светового пучка в параксиальном приближении

Параболическое уравнение, описывающее распространение вдоль оси z светового пучка с узким угловым спектром, аналогично уравнению диффузии с мнимым коэффициентом $D=i/(2k)$:

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z}+\Delta_{\perp}A=0,$$

где k – волновое число в среде и $\Delta_{\perp}=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа по поперечным координатам. Общее решение данного уравнения, как и для одномерного уравнения диффузии, может быть получено методом Фурье в следующем виде:

$$A(x,y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{i2z/k}\right]}{\sqrt{i2\pi z/k}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\dfrac{(y-\eta)^2}{i2z/k}\right]}{\sqrt{i2\pi z/k}}A(\xi,\eta,z=0)d\xi d\eta. \quad (3.1)$$

<u>**Пример 3.3.1**</u>. Решить задачу Коши для дифракции параксиального светового пучка, имеющего плоский волновой фронт при z=0 и следующее гауссово начальное распределения амплитуды:

$$A(r,z=0)=A_0\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

где $r^2=x^2+y^2$, a – характерная ширина пучка в плоскости z=0.

Решение. Подставляя начальное распределение амплитуды в (3.1), получаем

$$A(r,z)=\frac{kA_0}{2\pi iz}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2}\right)\exp\left\{\frac{ik}{2z}(x-\xi)^2\right\}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{a^2}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{ik}{2z}(y-\eta)^2\right\}d\eta=\frac{A_0}{1+i2z/(ka^2)}\exp\left\{-\frac{r^2}{a^2\left[1+i2z/(ka^2)\right]}\right\}.$$

3.4. Варианты задач для самоподготовки

1. Покажите, что функция вида

$$u(x,t)=\exp(-\lambda^2\alpha^2 t)\left[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)\right]$$

удовлетворяет уравнению $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ при произвольных A, B и λ.

2. Покажите, что функция вида $\sin(n\pi x)$ и $\sin(m\pi x)$ ортогональны, то есть для них выполняются соотношения

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = 0, m \neq n,$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = 1/2, m = n.$$

3. Решите следующую смешанную задачу для уравнения в частных производных

$$u_t = u_{xx}, 0 < x < 1,$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, 0 < t < \infty, \end{cases}$$

и для начального условия

$$u(x,0) = 1, 0 \le x \le 1.$$

4. Найдите решение предыдущей задачи 3, если начальное условие имеет вид

$$u(x,0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(4\pi x) + \frac{1}{5}\sin(6\pi x).$$

5. Решите задачу **3** для следующего начального условия:

$$u(x,0) = x - x^2, 0 < x < 1.$$

6. В полубесконечном кристалле ниобата лития с непроницаемой для примеси границей x=0 в начальный момент времени t=0 концентрация титана является постоянной и равной C_0=8 мол.% в слое толщиной h=2 мкм, и равна нулю при $x > h$. Найдите распределение концентрации титана в кристалле $C(x)$ после высокотемпературного отжига в течение двух часов, при значении коэффициента диффузии $D = 2 \cdot 10^{-13}$ см^2/с.

7. Световой пучок с длиной волны $\lambda = 532$ нм имеет плоский фазовый фронт при z=0 и однородное распределение амплитуды по прямоугольному поперечному сечению с размерами 100 и 200 мкм вдоль осей координат x и y, соответственно. Найдите распределение амплитуды пучка $A(x, y, z)$ для z >0.

4. Однородное волновое уравнение: Краевая задача. Формула Даламбера решения задачи Коши

4.1. Дано однородное волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x)$, $\partial u(0,x)/\partial t = \psi(x)$ и краевыми условиями $U(t,0) = U(t,l) = 0$.

Данная задача может быть решена методом Фурье, согласно которому решение записывается в виде $U(t,x) = X(x)T(t)$. После подстановки $U(t,x)$ в данное уравнение, получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$.

Решая уравнение $X'' = -\lambda^2 X$ относительно функции $X(x)$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$, получаем

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l}. \qquad (4.1)$$

Решая уравнение $T'' = -\lambda^2 a^2 T$ относительно функции $T(t)$, находим

$$T(t) = T_n(t) = C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t, \qquad (4.2)$$

где A_n, C_n, D_n - некоторые константы. В силу однородности уравнения, можно полагать, что $A_n = 1$. Следовательно, решение данного уравнения записывается в виде

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \quad (4.3)$$

Для нахождения констант C_n, D_n воспользуемся начальными условиями $U(0,x) = \varphi(x), \dfrac{\partial U(0,x)}{\partial x} = \psi(x).$

Тогда получим уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \qquad D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x), \qquad C_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx. \qquad (4.4)$$

<u>Пример 4.1.1.</u> Решить краевую задачу для однородного волнового уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ a = 1{,}5;$$
$$U(0,x) = x(l-x),\ \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = 0,\ U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

Решение записывается в виде

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sin\frac{a\pi n}{l}t + D_n \cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $C_n = 0$, т.к. $\psi(x) = 0$, а $D_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx$, т.к. $\varphi(x) = x(l-x)$. D_n вычислим, воспользовавшись дважды интегрированием по частям:

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{\pi n}{l}x=-\frac{2}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x(l-2x)dx=\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l(l-2x)d\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{2l}{(\pi n)^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{4l}{(\pi n)^2}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\pi n+\frac{4l^2}{(\pi n)^3}=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1-\cos\pi n\right]=$$

$$=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

Ответ: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1,5\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$

Пример 4.1.2. Найти решение краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0)=x(x-1)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$,

и граничным условиям $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$.

Так как $a=\frac{3}{2}$, $l=1$, то согласно формуле (4.3) решение заданного уравнения ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{3\pi n}{2}t+D_n\sin\frac{3\pi n}{2}t\right)\sin\pi nx.$$

Коэффициенты C_n и D_n найдем по формулам (4.4). При вычислении интегралов используем формулу интегрирования по частям.

$$C_n=2\int_0^1\left(x^2-x\right)\sin\pi nxdx=2\left[\left(x^2-x\right)\cdot\frac{-\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{-\cos\pi nx}{\pi n}(2x-1)dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^1(2x-1)\cos\pi nxdx=\frac{2}{\pi n}\left[(2x-1)\cdot\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\cdot 2dx\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2n^2}\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_0^1=\frac{4}{\pi^3n^3}(\cos\pi n-1)=\frac{4\left((-1)^n-1\right)}{\pi^3n^3},\quad n=1,2,3,...$$

$$D_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^1 0\cdot\sin\pi nxdx=0.$$

Итак, искомое решение уравнения имеет вид

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\cos\frac{3\pi n}{2}t\sin\pi nx\,.$$

4.2. Прежде чем решать задачу о колебаниях закрепленной струны, рассмотрим более простую задачу – о колебаниях бесконечной струны. Если представить очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникающие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния.

Рассматривая свободные колебания, мы должны решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u(x,0)=u\big|_{t=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши.

Преобразуем волновое уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2-a^2dt^2=0$$

распадается на два уравнения:

$$dx-adt=0 \quad \text{и} \quad dx+adt=0,$$

интегралами которых служат прямые

$$x-at=C_1,\quad x+at=C_2.$$

Введем новые переменные $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ и запишем волновое уравнение для переменных ξ и η.

Вычисляя производные

$$u_x=u_\xi+u_\eta,\quad u_t=u_\xi\cdot(-a)+u_\eta\cdot a,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt}=(-au_{\xi\xi}+au_{\eta\xi})(-a)+(-au_{\xi\eta}+au_{\eta\eta})a=a^2(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}),$$

и подставляя их в исходное уравнение, видим, что уравнение колебания струны в новых координатах будет

$$u_{\xi\eta}=0\,.$$

Интегрируя полученное равенство по η при фиксированном ξ, придем к равенству $u_\xi = \varphi_1(\xi)$. Интегрируя это равенство по ξ при фиксированном η, получим

$$u(\xi,\eta) = \int \varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где φ и ψ являются функциями только переменных ξ и η соответственно. Следовательно, общим решением исходного уравнения является функция

$$u = \varphi(x-at) + \psi(x+at). \tag{8}$$

Найдем функции φ и ψ так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x).$$

$$u_t(x,t) = -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at),$$

$$u_t(x,0) = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$-a\varphi(x) + a\psi(x) = \int_{x_0}^{x} g(z)dz + C,$$

где x_0 и C – постоянные. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)dz + C \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{2}f(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)dz - \dfrac{C}{2}, \\ \psi(x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)dz + \dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, мы определили функции φ и ψ через заданные функции f и g, причем полученные равенства должны иметь место для любого значения аргумента. Подставляя в (8) найденные значения φ и ψ, будем иметь

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-at) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} g(z)dz - \frac{C}{2} + \frac{1}{2}f(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} g(z)dz + \frac{C}{2}$$

или

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(z)dz\,.$$

Найденное решение называется формулой Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.

<u>Пример 4.2.1.</u> Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\big|_{t=0}=x^2+1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos x$.

Используя формулу Даламбера, сразу получаем

$$u(x,t)=\frac{(x-at)^2+1+(x+at)^2+1}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\cos z dz.$$

4.3. Варианты задач для самоподготовки

1. Найти решение задачи Коши:

а)	$\begin{cases} u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=x. \end{cases}$
б)	$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=-x. \end{cases}$
в)	$\begin{cases} u_{tt}=a^2 u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=x^2, \quad u_t(x,0)=0. \end{cases}$
г)	$\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=1. \end{cases}$

2. Найти форму струны, определяемой уравнением $u_{tt}=u_{xx}$ в момент времени $t=\pi$, если в начальный момент заданы условия: $u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=\cos x$.

Ответы

1. а) $u(x,t)=xt$; б) $u(x,t)=x(1-t)$; в) $u(x,t)=x^2+a^2t^2$; г) $u(x,t)=\sin x\,\cos 3t+t$; **2.** $u(x,t)=-\sin x$.

3. Найти решение уравнения

$u_{tt} = u_{xx}$, если $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 1$.

4. Найти форму струны, определяемой уравнением $u_{tt} = 4u_{xx}$ в момент времени $t = \pi/2$, если в начальный момент заданы условия: $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Из уравнений Максвелла выведите уравнение, которому удовлетворяет векторная амплитуда $\vec{E}_m(x) = \vec{j}E_m(x)$ неоднородной световой волны со следующей пространственно-временной зависимостью:

$$\dot{\vec{E}}(x,z,t) = \vec{j}E_m(x)\exp\left[i\left(\omega t - \beta z\right)\right],$$

распространяющейся в немагнитной изотропной среде с показателем преломления *n.*

6. Найдите общее решение уравнения, полученного в задаче **5**, удовлетворяющее условию конечности на интервалах:

а) $0 < x < h$; б) $h < x < \infty$; в) $x < 0$.

5. Уравнение Шрёдингера

1. Эволюция волновой функции $\Psi(\vec{r},t)$ квантовой частицы во времени и в пространстве описывается уравнением

$$i\hbar\Psi_t = \hat{H}\Psi, \qquad (5.1)$$

где гамильтониан определяется выражением

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}), \qquad (5.2)$$

а $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия частицы во внешнем поле.

Таким образом, волновое уравнение для квантовой частицы во внешнем поле имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z)\Psi. \qquad (5.3)$$

Собственные значения энергии частицы *E* определяются уравнением

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \qquad (5.4)$$

и в результате из этих уравнений следует, что стационарные состояния квантовой системы определяются уравнением

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \left[E - U(x,y,z)\right]\psi = 0. \qquad (5.5)$$

Уравнения (5.3) и (5.5) были установлены в 1926 г. Э. Шрёдингером, являются уравнениями в частных производных и называются *уравнениями Шрёдингера*.

Пример 5.1. Решить уравнение Шрёдингера для свободной частицы, при $U(x,y,z) = 0$.

Воспользуемся уравнением (5.3), полагая в нем $U(x,y,z)=0$:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right). \qquad (5.6)$$

Следуя методу разделения переменных, представим общее решение уравнения (5.6) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от координат, а вторая от времени: $\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)T(t)$. Подставляя это решение в (5.6) и разделяя переменные, получаем

$$i\hbar\frac{\partial T(t)/\partial t}{T(t)}=-\frac{1}{\psi(x,y,z)}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)=E. \quad (5.7)$$

Отсюда находим решение для временной зависимости, как

$$T(t)=\mathrm{const}\cdot\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right), \qquad (5.8)$$

и уравнение, определяющее координатную зависимость волновой функции свободной частицы:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+E\psi=0. \qquad (5.9)$$

Это уравнение имеет конечные во всем пространстве решения при любом положительном значении энергии *E*. В результате общее решение уравнения Шрёдингера для стационарных состояний частицы представляет следующую волновую функцию:

$$\Psi(\vec{r},t)=\mathrm{const}\cdot\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et-\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right], \qquad (5.10)$$

представляющую *плоскую волну де Бройля*, описывающую состояние с определенной энергией *E* и импульсом $\vec{p}$. Частота этой волны $\omega=E/\hbar$, а её волновой вектор $\vec{k}=\vec{p}/\hbar$; соответствующую длину волны $\lambda=2\pi\hbar/p$ называют *дебройлевской длиной волны частицы*.

5.2. Варианты задач для самоподготовки

1. Волновая функция частицы $\Psi(x,t)$, находящейся в одномерной потенциальной яме

$$U(x)=\begin{cases} U_1,\ x\le 0,\\ 0,\ 0\le x\le a,\\ U_2,\ x\ge a,\end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\Psi_t=\hat{H}\Psi,$$

где гамильтониан определяется выражением

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U(x).$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x,t)$, удовлетворяющую условиям однозначности и конечности, а также непрерывности для самой функции и для ее первой производной, на интервале $-\infty \le x \le \infty$, при выполнении условий $E < U_2 < U_1$.

2. Найдите: а) спектр собственных значений энергии частицы E_n для случая, рассмотренного в предыдущей задаче **1** при бесконечно глубокой потенциальной яме ($U_1, U_2 \to \infty$); б) нормированные выражения для волновых функций, соответствующих состояниям частицы с энергией E_1, E_2 и E_3.

3. Волновая функция частицы $\Psi(x,t)$, находящейся в одномерной потенциальной яме

$$U(x) = \begin{cases} U_1, \ x \le 0, \\ 0, \ 0 \le x \le a, \\ U_2, \ x \ge a, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\Psi_t = \hat{H}\Psi \,,$$

где гамильтониан определяется выражением

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) \,.$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x,t)$, удовлетворяющую условиям однозначности и конечности, а также непрерывности для самой функции и для ее первой производной, на интервале $-\infty \le x \le \infty$, при выполнении условий $U_2 < E < U_1$.

4. Из скалярного волнового уравнения

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

для нелинейной немагнитной среды получите волновое уравнение в параксиальном приближении, которому должна удовлетворять амплитуда $A(x,y,z)$ распространяющегося вдоль оси z монохроматического светового пучка

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) = \frac{ik\Delta n_{nl}}{n} A \,,$$

где n – показатель преломления среды в линейном режиме, Δn_{nl} – нелинейная добавка к показателю преломления и k – волновое число для плоской волны, распространяющейся в рассматриваемой среде вдоль оси z.

5. Из волнового уравнения в параксиальном приближении,

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{ik\Delta n_{nl}}{n} A \,,$$

используя решение для амплитуды светового пучка в виде функции с разделяющимися переменными, получите нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$U'' + \left(\frac{2k^2 \Delta n_{нл}}{n} - 2k\gamma\right)U = 0,$$

где $U'' = \partial^2 U / \partial x^2$.

6. Для среды с кубичной нелинейностью Керра, в которой $\Delta n_{nl}^{(\kappa)} = n_{(2)} I(x,z)$, где $n_{(2)}$ – нелинейный показатель преломления, из полученного в Задаче **5** нелинейного уравнения Шрёдингера выведите уравнение

$$U - \frac{1}{2k\gamma} U'' = \frac{\alpha}{\gamma} U^3,$$

решение которого приводит к светлым и темным пространственным солитонам.

7. Покажите, что при $\alpha > 0$ полученное в Задаче **6** нелинейное уравнение Шрёдингера имеет решение в виде светлого пространственного солитона, $U(\xi) = \left(2\gamma/\alpha\right)^{1/2} \operatorname{sch}(\xi)$, где $\xi = \sqrt{2k\gamma}\, x$ – нормированная поперечная координата.

8. Покажите, что при $\alpha < 0$ полученное в Задаче **6** нелинейное уравнение Шрёдингера имеет решение в виде тёмного пространственного солитона, $U(\xi) = \left(\gamma/\alpha\right)^{1/2} \operatorname{th}(\xi/\sqrt{2})$, где $\xi = \sqrt{-2k\gamma}\, x$ – нормированная поперечная координата.

6. Краевые задачи для уравнения Лапласа

6.1. К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т.е. не меняющихся во времени процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Например, если имеется однородная пластина, занимающая область *D*, ограниченную линией *L*, то можно показать, что температура в различных точках пластины должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Если процесс установившийся, т.е. температура не зависит от времени, а зависит только от координат точек пластины, то $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ и, следовательно, температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (6.1)$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. В каждой задаче, связанной с уравнением Лапласа, искомое решение выделяется из множества всех гармонических функций с помощью дополнительного условия, которое чаще всего является краевым. Так, чтобы температура на пластине определялась однозначно, нужно знать температуру на контуре L пластины. Таким образом, требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (6.1) внутри области D и принимающую в каждой точке M кривой L заданные значения:

$$u\big|_L=\varphi(M). \qquad (6.2)$$

Эта задача называется <u>задачей Дирихле</u> или первой краевой задачей для уравнения (6.1).

Если на границе L температура неизвестна, а известен тепловой поток в каждой точке кривой, который пропорционален производной функции u по направлению вектора $\vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор, направленный по нормали к кривой, то вместо условия (6.2) на границе области будем иметь условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L=\varphi(M). \qquad (6.3)$$

Задача нахождения решения уравнения (6.1), удовлетворяющего краевому условию (6.3), называется <u>задачей Неймана</u> или второй краевой задачей.

Если вместо плоской пластины задано однородное тело T, ограниченное поверхностью σ, то функция u будет функцией трех переменных и должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Краевые условия (6.2) или (6.3) в этом случае должны выполняться на поверхности σ.

Заметим, что задача Дирихле решается просто в одномерном случае, т.е. когда в соответствующей системе координат неизвестная функция u зависит только от одной из координат.

В случае декартовых координат одномерное уравнение Лапласа принимает вид $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ и его решением является линейная функция $u=Ax+B$. Задача Дирихле в этом случае имеет решение $u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0$, где $u(0)=u_0$, $u(l)=u_l$.

6.2. Пусть $u(x,y,z)$ – гармоническая функция. Тогда

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, \text{ или } \Delta u=0.$$

Рассмотрим цилиндрические координаты:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z,$$

откуда

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=arctg\frac{y}{x},\quad z=z.$$

Заменяя независимые переменные x, y, z на r, φ и z, придем к функции $u(r,\varphi,z)$. Используя правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных, можно доказать, что найденная функция $u(r,\varphi,z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0.$$

Это и есть уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

Если функция u не зависит от z, а только от x и y, то функция $u(r,\varphi)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0, \tag{6.4}$$

где r и φ – полярные координаты на плоскости.

Найдем решение уравнения Лапласа в области D, ограниченной окружностями L_1: $x^2+y^2=R_1^2$ и L_2: $x^2+y^2=R_2^2$, если это решение принимает следующие граничные значения:

$$u\big|_{L_1}=u_1,\quad u\big|_{L_{21}}=u_2, \tag{6.5}$$

где u_1, u_2 –постоянные.

Решим эту задачу в полярных координатах. Целесообразно искать решение, не зависящее от φ, так как граничные условия от φ не зависят. Уравнение (6.5) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = 0 .$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Интегрируя это уравнение, находим

$$u = C_1 \ln r + C_2 . \qquad (6.6)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (6.5):

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)}, \quad C_2 = \frac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)} .$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу (6.6), окончательно получаем

$$u = \frac{u_2 \ln\left(r/R_1\right) - u_1 \ln\left(r/R_2\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)} .$$

Фактически мы решили следующую задачу: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах): $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$, $z=H$, и следующим граничным условиям:

$$u\big|_{r=R_1} = u_1, \quad u\big|_{r=R_2} = u_2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = 0 ,$$

(задача Дирихле-Неймана).

6.3. Рассмотрим на плоскости xOy круг с центром в начале координат радиуса R. Пусть на его окружности задана некоторая функция $r=f(\varphi)$, где φ – полярный угол. Найдем функцию $u(r,\varphi)$, удовлетворяющую внутри круга уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 , \qquad (6.7)$$

и на окружности принимающую заданные значения

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi) .$$

Решение задачи ищут методом разделения переменных, полагая

$$u = \Phi(\varphi) \cdot R(r) .$$

Подставляя эту функцию в уравнение (6.7), получаем

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r \Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0 ,$$

или

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2 .$$

Левая часть этого равенства не зависит от r, а правая от φ, следовательно, они равны постоянному числу, которое обозначили через $-k^2$. Таким образом, нашли два дифференциальных уравнения

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0 , \qquad (6.8)$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0 . \qquad (6.9)$$

Общее решение первого из этих уравнений будет

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi .$$

Второе уравнение является уравнением Эйлера. Его решение найдем в виде $R(r) = r^m$. Подставив выписанную функцию в уравнение (11.3), найдем два частных линейно независимых решения r^k и r^{-k}. Тогда общее решение уравнения (11.3) запишется в виде

$$R = Cr^k + Dr^{-k} .$$

Итак,

$$u_k = \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)\left(C_k r^k + D_k r^{-k}\right). \qquad (6.10)$$

Полученная функция будет решением данного уравнения при любом значении k, отличном от нуля. Если k=0, то уравнения (6.8) и (6.9) принимают вид

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0 ,$$

откуда получаем:

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r) .$$

Так как решение должно быть периодической функцией от φ с наименьшим положительным периодом 2π, то в найденном выражении для u_0 B_0=0. Далее функция $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной и конечной в круге, поэтому D_0=0 и D_k=0.

Решение исходной задачи будем составлять в виде суммы решений (6.10). Сумма должна быть периодической функцией от φ. Для этого k должно принимать целые значения. Итак,

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\cdot r^n . \qquad (6.11)$$

Постоянные A_n и B_n находят так, чтобы выполнялось краевое условие задачи. Подставляя в выражение для $u(r,\varphi)$ значение r=R, получаем

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)R^n .$$

Найденная сумма является рядом Фурье для функции $f(\varphi)$ на интервале (-π, π). Следовательно, A_n и B_n должны определяться по формулам

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi,\ A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \qquad (6.12)$$

Таким образом, ряд (33) с коэффициентами, определенными по формулам (34), будет решением поставленной задачи, если он допускает почленное двукратное дифференцирование по r и φ.

<u>Пример 6.3.1.</u> Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\le r<2$, принимающее на границе круга значения $u\big|_{r=2}=2\varphi+1$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot r^n .$$

Найдем коэффициенты ряда по формулам (6.12):

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi+1\right)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\varphi^2+\varphi\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=2,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi+1\right)\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi 2^n}\left[\left(2\varphi+1\right)\frac{1}{n}\sin n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\sin n\varphi d\varphi\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi 2^n n^2}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi 2^n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\varphi+1\right)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi 2^n}\left[\left(2\varphi+1\right)\frac{-1}{n}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}2\frac{1}{n}\cos n\varphi d\varphi\right]=$$

$$=\frac{-(-1)^n 4\pi}{\pi 2^n n}+\frac{2}{\pi 2^n n^2}\sin n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}.$$

Итак,

$$u(r,\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}n}\sin n\varphi\right)r^n .$$

6.4. Варианты задач для самоподготовки

1. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и удовлетворяющую на границе круга условию $u\big|_{\rho=R} = f(\Theta)$.

1. $f(\Theta)=\sin^2\Theta$, $R=2$.	2. $f(\Theta)=\cos^3\Theta$, $R=3$.
3. $f(\Theta)=17\sin^3\Theta$, $R=4$.	4. $f(\Theta)=\cos^4\Theta$, $R=1$.
5. $f(\Theta)=3\sin^4\Theta$, $R=2$.	6. $f(\Theta)=\Theta^2-4\Theta+2$, $R=4$.
7. $f(\Theta)=6\Theta^2+3\Theta+1$, $R=2$.	8. $f(\Theta)=-6\Theta^2+\Theta-2$, $R=1$.
9. $f(\Theta)=5\Theta^2-\Theta+\pi$, $R=2$.	10. $f(\Theta)=-\Theta^2+2\pi\Theta$, $R=3$.

Ответы

1. $u(\rho,\Theta)=\frac{1}{2}-\frac{\rho^2}{8}\cos 2\Theta$.

2. $u(\rho,\Theta)=\frac{\rho}{4}\left(\cos\Theta+\frac{\rho^2}{27}\cos 3\Theta\right)$.

3. $u(\rho,\Theta)=\frac{\rho}{16}\left(51\sin\Theta-\frac{17}{16}\rho^2\sin 3\Theta\right)$.

4. $u(\rho,\Theta)=\frac{3}{8}+\frac{\rho^2}{2}\left(\cos 2\Theta+\frac{\rho^2}{4}\cos 4\Theta\right)$.

5. $u(\rho,\Theta)=\frac{9}{8}-\frac{3}{8}\rho^2\left(\cos 2\Theta-\frac{\rho^2}{16}\cos 4\Theta\right)$.

6. $u(\rho,\Theta)=\frac{\pi^2}{3}+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\rho^n}{4^{n-1}n}\left[\frac{\cos n\Theta}{n}+2\sin n\Theta\right]$.

7. $u(\rho,\Theta)=2\pi^2+1+3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\rho^n}{2^{n-1}n}\left[\frac{4\cos n\Theta}{n}-\sin n\Theta\right]$.

8. $u(\rho,\Theta)=-2\pi^2-2+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\rho^n}{n}\left[\frac{12\cos n\Theta}{n}+\sin n\Theta\right]$.

9. $$u(\rho,\Theta)=\frac{5}{3}\pi^2+\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\rho^n}{2^{n-1}n}\left[\frac{10\cos n\Theta}{n}+\sin n\Theta\right].$$

10. $$u(\rho,\Theta)=-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,\rho^n}{3^n n}\left[\frac{\cos n\Theta}{n}+\pi\sin n\Theta\right].$$

2. Найдите распределение электростатического потенциала $\varphi(x,y)$, создаваемого в диэлектрической области $x\geq 0,\ 0\leq y\leq b$ (рис. 6.1) плоскими электродами с размерами $a\gg b,\ l\gg b$ по осям x и z, соответственно. Электрод 1 представляет полосу с шириной, чуть меньшей расстояния b между электродами 2 и 3, расположенную при $x=0$, и имеет потенциал U_1=100 В. Электроды 2 и 3 расположены при y=0 и y=b, и заземлены (U_2= U_3=0).

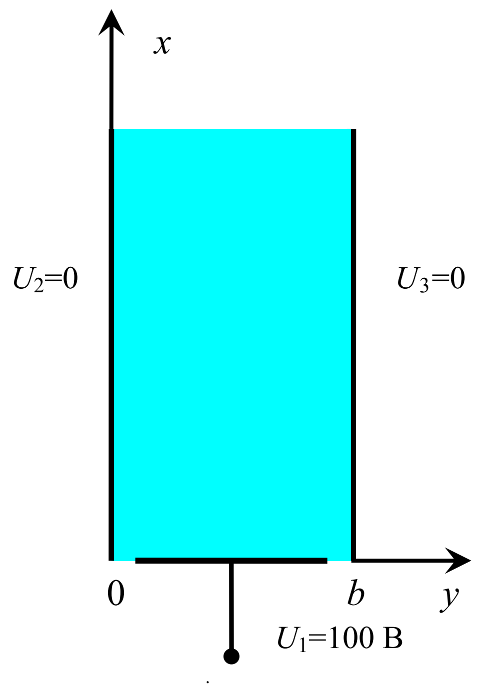


Рис. 6.1. Электродная структура

3. В плоском слое диэлектрика (рис. 6.2) с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r=4$, толщиной d = 4 мм и тонкими напыленными электродами, верхний из которых находится под потенциалом U_0, а нижний заземлен, с помощью электронного пучка создается распределение объемного заряда $\rho(x)=\rho_m\exp(-\alpha x)$.

Найдите распределение напряженности электрического поля в межэлектродном промежутке для $U_0 = 4$ кВ, $\rho_m = 10^{-2}$ Кл/м^3 и $\alpha = 10^3$ м$^{-1}$.

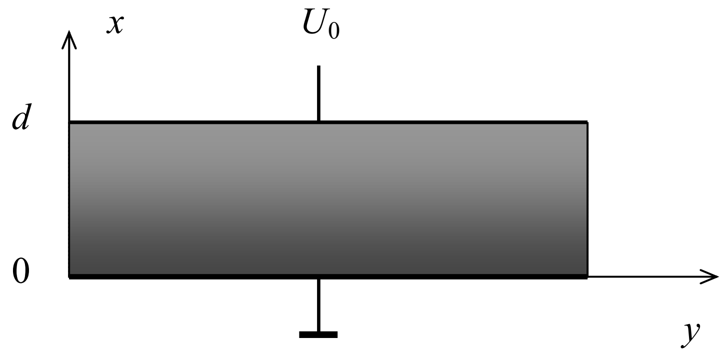


Рис. 6.2.

Задачи к экзамену

1. Найти колебания струны с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = 1$, возбужденной начальным отклонением $f(x) = x$, если начальные скорости точек струны равны нулю.

2. Найти продольные колебания стержня, один конец которого $x = 0$ закреплен жестко, а другой $x = l$ свободен, при начальных условиях $u(x,0) = a = const$, $u_t(x,0) = 0$ при $0 \le x \le l$.

3. Решить методом разделения переменных: $u_{tt} = u_{xx} + xt \quad (0 < x < \pi)$, $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0$, $u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$.

4. Решить смешанную задачу: $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = e^t \cos x \quad (0 < x < \pi/2)$, $u\big|_{x=0} = 2t$, $u\big|_{x=\pi/2} = 0$, $u\big|_{t=0} = \cos x$, $u_t\big|_{t=0} = x$.

5. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ($0 < x < p, 0 < y < q$), закрепленной вдоль контура, если $u\big|_{t=0} = Axy$, $u_t\big|_{t=0} = 0$.

6. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна функции $f(x) = x$.

7. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированными концами, если его начальная температура является функцией $f(x) = x$.

8. Решить следующую смешанную задачу: $u_t = u_{xx}$, $0 < x < l$, $u_x\big|_{x=0} = 4$, $u_x\big|_{x=1} = 0$, $u\big|_{t=0} = 0$.

9. Решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 + 2\cos^2 x$, $0 < x < \pi$, $u\big|_{x=0} = 0$, $u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t$, $u\big|_{t=0} = 0$.

10. Найти решение задачи Коши: $u_t = u_{xx} + 4$, $u\big|_{t=0} = \sin x$.

11. Найти решение внутренней (и внешней) задачи Дирихле для круга радиуса a с центром в начале координат, если $u\big|_{\rho=a} = Ay$, где (ρ, φ) - полярные координаты, (x, y) - прямоугольные.

12. Выяснить, правильно ли поставлена внутренняя (и внешняя) задача Неймана для круга радиуса a с центром в начале координат, если $\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = A\sin\varphi$, где (ρ, φ) - полярные координаты, (x, y) - прямоугольные. Если задача поставлена правильно – решить ее.

13. Найти функцию $u = u(\rho, \varphi)$, гармоническую внутри кольца $a < \rho < b$ и удовлетворяющую граничным условиям $u\big|_{\rho=a} = A$, $u\big|_{\rho=b} = 0$.

14. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -Axy$ в круге радиуса R с центром в начале координат, если $u\big|_{\rho=R} = 0$.

15. Найти функцию, гармоническую в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$, если на границе этого прямоугольника $u(x, y)$ принимает следующие значения: $u\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{b}$, $u\big|_{x=a} = 0$, $u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}$, $u\big|_{y=b} = 0$.

16. Используя уравнения Максвелла, показать, что поле вектора плотности полного тока является соленоидальным.

17. Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения, получите общее уравнение в частных производных, которому удовлетворяет потенциал электростатического поля $\varphi(x, y, z)$ в отсутствие объемных зарядов.

18. В полубесконечном кристалле ниобата лития с непроницаемой для примеси границей x=0 в начальный момент времени t=0 концентрация Fe является постоянной и равной C_0=4 мол.% в слое толщиной h=1 мкм, и равна нулю при $x > h$. Найдите распределение концентрации Fe в кристалле $C(x)$ после высокотемпературного отжига в течение четырех часов, при значении коэффициента диффузии $D = 4 \cdot 10^{-4}$ мкм^2/с.

19. Световой пучок с длиной волны $\lambda = 633$ нм имеет плоский фазовый фронт при z=0 и однородное распределение амплитуды по поперечному сечению ленточного типа с размерами 100 мкм и 3 мм вдоль осей координат x и y, соответственно. Найдите распределение амплитуды пучка $A(x,z)$ для z >0.

20. Из уравнений Максвелла выведите уравнение, которому удовлетворяет векторная амплитуда магнитного поля $\vec{H}_m(x) = \vec{j}H_m(x)$ неоднородной световой волны со следующей пространственно-временной зависимостью:
$\dot{\vec{H}}(x,z,t) = \vec{j}H_m(x)\exp\left[i\left(\omega t - \beta z\right)\right]$,
распространяющейся в немагнитной изотропной среде с показателем преломления n.

21. Волновая функция частицы $\Psi(x,t)$, находящейся в одномерной симметричной потенциальной яме

$$U(x) = \begin{cases} U_1, \ x \le 0, \\ 0, \ 0 \le x \le a, \\ U_1, \ x \ge a, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\Psi_t = \hat{H}\Psi,$$

где гамильтониан определяется выражением

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x).$$

Найдите волновую функцию $\Psi(x,t)$, удовлетворяющую условиям однозначности и конечности, на интервале $-\infty \le x \le \infty$, при $U_1 \to \infty$, и спектр собственных значений энергии частицы.

22. Покажите, что нелинейное уравнение Шрёдингера $U'' + \left(\dfrac{2k^2\Delta n_{нл}}{n} - 2k\gamma\right)U = 0$, где $U'' = \partial^2 U / \partial x^2$, для среды с кубичной нелинейностью Керра, в которой $\Delta n_{nl}^{(\kappa)} = n_{(2)}I(x,z)$, где $n_{(2)}$ – нелинейный показатель преломления, имеет решение в виде светлого

пространственного солитона, $U(\xi)=(2\gamma/\alpha)^{1/2}\operatorname{sch}(\xi)$, где $\xi=\sqrt{2k\gamma}x$ – нормированная поперечная координата.

23. В плоском слое диэлектрика (см. рисунок 6.3) с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r=9$, толщиной d = 6 мм и тонкими напыленными электродами, верхний из которых находится под потенциалом U_0, а нижний заземлен, с помощью электронного пучка создается распределение объемного заряда $\rho(x)=\rho_m\exp\left[-\alpha(d-x)\right]$.

Найдите распределение напряженности электрического поля в межэлектродном промежутке для U_0 = 4 кВ, $\rho_m=10^{-2}$ Кл/м^3 и $\alpha=10^3$ м$^{-1}$.

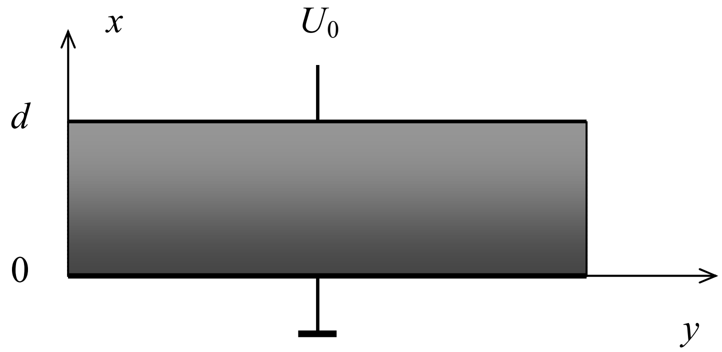


Рис. 6.3.

Рекомендуемая литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – СПб.: Изд-во "Лань", 2009. – 688 с. 6-е изд., испр .ISBN: 978-5-8114-0572-5 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=281

2. Ушаков В. М. Методы математической физики: Курс лекций / В. М. Ушаков, Ю. В. Гриняев, С. В. Тимченко, Л. Л. Миньков. - 1-е изд. - Томск : ТМЦ ДО, 2003. – 144 с.

2. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике: Учебное пособие для вузов / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. - 4-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2004. - 688 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2122

3. Ильин А. М. Уравнения математической физики: Учебное пособие для вузов / А. М. Ильин. - 1-е изд. - М. : Физматлит, 2009. - 192 с. – URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2181

4. Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах : монография / С.М. Шандаров, В.М. Шандаров, А.Е. Мандель, Н.И. Буримов. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и

радиоэлектроники, 2012. – 242 с., http://edu.tusur.ru/training/publications/1553

5. Шандаров В.М. Основы физической и квантовой оптики: учеб. пособие / В.М. Шандаров; Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2012. – 197 с., http://edu.tusur.ru/training/publications/750

6. Шандаров С.М. Введение в оптическую физику : учебное пособие для студентов направления подготовки «Фотоника и оптоинформатика» / С.М. Шандаров; Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2012. – 127 с., http://edu.tusur.ru/training/publications/2196

7. Магазинников Л.И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учебное пособие / Л. И. Магазинников. - 2-е изд. - Томск : ТМЦ ДО, 2002. – URL: http://edu.tusur.ru/training/publications/2258

8. Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. - 1-е изд. - М. : Лань, 2008. - 224 с. – http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=140

9. Решение уравнений в частных производных гиперболического типа: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» (специальность «Электронные приборы и устройства» / П.П. Гейко. - Томск: ТУСУР, 2012. - 11 с. Препринт. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/

10. Моделирование параболических уравнений в частных производных по схеме Кранка–Николсона: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» (специальность «Электронные приборы и устройства» / П.П. Гейко. - Томск: ТУСУР, 2012. - 9 с. Препринт. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/

11. Решение дифференциальных уравнений эллиптического типа: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» (специальность «Электронные приборы и устройства» / П.П. Гейко. - Томск: ТУСУР, 2012. - 12 с. Препринт. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/

12. Пространственные солитоны в керровской среде с насыщением нелинейности: методические указания к лабораторной работе для студентов направления «Фотоника и оптоинформатика» и «Электроника и микроэлектроника» (специальность «Электронные приборы и устройства» / А.Л. Магазинников. - Томск: ТУСУР, 2012. - 21 с. Препринт. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/

Учебное пособие

Гейко Павел Пантелеевич, Шандаров Станислав Михайлович

Уравнения оптофизики

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Уравнения оптофизики»

Усл. печ. л. ______ . Препринт
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
634050, г.Томск, пр.Ленина, 40