

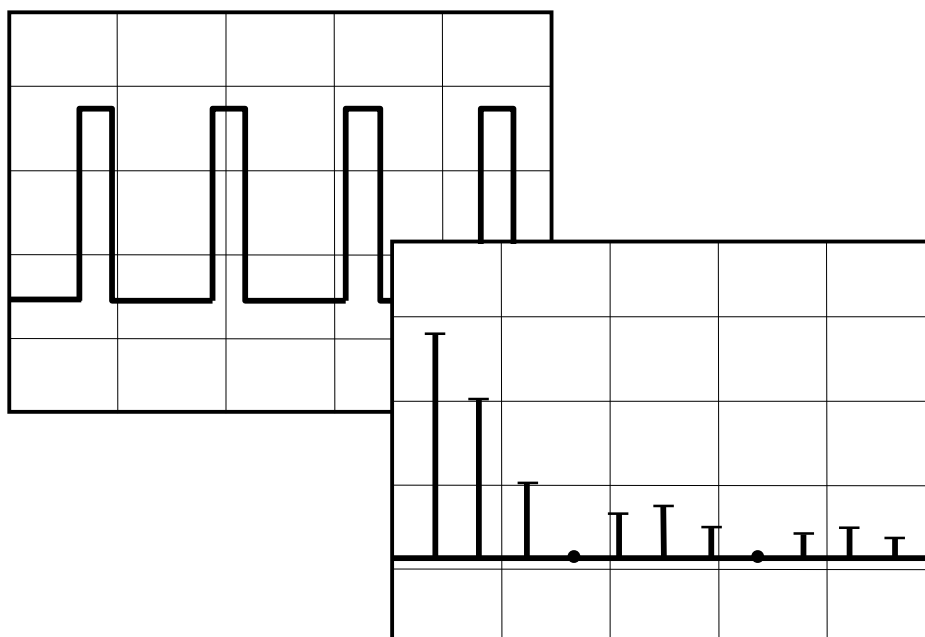
Н.А. Каратаева, П.С. Киселёв

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Часть 1

Теория сигналов и линейные цепи

Учебное методическое пособие



ТОМСК – 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники(ТОР)

Н.А. Каратаева, П.С. Киселёв

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Часть 1

Теория сигналов и линейные цепи

Учебное методическое пособие

2012

Рецензент:
Профессор кафедры ТОР ТУСУР, д.т.н. **А.В. Пуговкин**

Корректор: Красовская Е.Н.

Каратаева Н.А., Киселёв П.С.

Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1: Учебное методическое пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2012. – 33 с.

Изложена программа первой части лекционного курса по дисциплине РТЦиС. Приведены исходные данные и варианты трех расчетно-графических контрольных работ. Дан пример оформления контрольной работы №1. Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов всех форм обучения, изучающих дисциплину РТЦиС.

Разработчик электронной версии: **П.С. Киселёв**

© Каратаева Н.А., Киселёв П.С., 2012
© Факультет дистанционного обучения, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение.....	4
2 Программа лекционного курса дисциплины РТЦиС. Часть 1.....	4
3 Список рекомендуемой литературы.....	6
4 Содержание расчетно-графических контрольных работ.....	7
4.1 Контрольная работа №1. Спектральный анализ периодических и непериодических сигналов.....	7
4.2 Контрольная работа №2. Расчет прохождения периодических и непериодических сигналов через линейные электрические цепи первого порядка.....	8
4.3 Контрольная работа №3. Расчет прохождения непериодического сигнала сложной формы через линейную цепь второго порядка.....	9
5 Шифры и исходные данные к контрольным работам №1, №2, №3.....	10
6 Пример расчета и оформления контрольной работы №1.....	17

1 ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Радиотехнические цепи и сигналы» (РТЦиС) согласно учебному плану проводится в двух семестрах (6,7). В весеннем семестре осваивается первая часть дисциплины (60 часов лекций и 30 часов практических занятий), выполняются три расчетно-графические контрольные работы. По первой части предусмотрены 2 формы отчетности:

- зачет – по контрольным работам;
- экзамен – по теоретическому курсу.

Изучение первой части дисциплины РТЦиС ведется в соответствии с «Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования» (ГОС) по направлению «Радиотехника» и включает в себя следующие темы: детерминированные радиотехнические сигналы, их спектральные и корреляционные характеристики; модулированные сигналы, их временное и спектральное представление; разновидности модулированных сигналов;частотные и временные характеристики электрических цепей; методы анализа прохождения детерминированных сигналов через линейные цепи».

2 ПРОГРАММА ЛЕКЦИОННОГО КУРСА ДИСЦИПЛИНЫ РТЦиС. Часть 1

2.1 Обобщенные линейные представления сигналов

Классификация сигналов, основные определения. Физические характеристики сигналов. Модели сигналов и способы их математического описания. Дельта-функция, функция Хевисайда и их свойства.

Обобщенный ряд Фурье. Погрешность обобщенного аналитического представления. Понятие спектра.

2.2 Гармонический анализ детерминированных сигналов

Гармонический анализ периодических сигналов. Понятие спектра амплитуд и фаз. Свойства спектров периодических сигналов. Гармонический анализ непериодических сигналов. Свойства преобразований Фурье (теоремы о спектрах) и их применение к анализу сигналов и цепей. Спектры некоторых периодических сигналов и их свойства. Спектральная плотность непериодического сигнала. Обобщение преобразований Фурье и Лапласа.

2.3 Корреляционный анализ детерминированных сигналов

Автокорреляционная и взаимно корреляционная функции сигналов. Преобразование Фурье для корреляционных функций. Энергетический спектр. Корреляционные функции типовых радиотехнических сигналов.

2.4 Линейные цепи с постоянными параметрами

Классификация радиотехнических цепей. Дифференциальные уравнения электрического равновесия. Определение, основные свойства линейной цепи. Передаточные функции апериодических и избирательных цепей. Эквивалентные схемы. Частотные и временные характеристики линейных цепей и связь между ними.

2.5 Методы анализа прохождения сигналов через линейные цепи

Методы решения дифференциальных уравнений электрического равновесия. Методы анализа на основе ряда Фурье, преобразований Фурье и преобразований Лапласа. Временные методы анализа. Взаимосвязь различных методов анализа. Условия неискаженной передачи.

2.6 Радиосигналы

Основные свойства и особенности радиосигналов. Радиосигналы с амплитудной модуляцией и их спектры при тональной и сложной модуляции. Угловая модуляция и спектры сигналов при тональной и сложной модуляции. Спектры сигналов с амплитудной и угловой модуляцией. Специальные виды модуляции (ФКМ, КАМ и др.).

Представление радиосигналов в виде узкополосного процесса. Огибающая, частота и фаза узкополосного сигнала. Аналитический сигнал и его свойства.

Корреляционный анализ радиосигналов.

2.7 Методы анализа прохождения радиосигналов через избирательные цепи

Особенности анализа. Приближенный спектральный метод (метод низкочастотного эквивалента). Упрощение метода интеграла наложения. Линейные искажения амплитудно-модулированных сигналов и сигналов с угловой модуляцией при прохождении через избирательные цепи.

3 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Книги по радиотехнике

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988. – 448 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов/ Под ред. К.А.Самойло. - М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
4. Каратаева Н.А. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Теория сигналов и линейные цепи. Учебное пособие. - Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования 2002. – 260 с.

Задачники по радиотехнике

5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. - М.: Высшая школа, 1987. – 208 с.
6. Задачник по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы»/ В.П. Жуков, В.Г. Карташев, А.М. Николаев. - М.: Высшая школа, 1986. – 192 с.
7. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи: Учебное пособие для вузов/ Под ред. И.С. Гоноровского. - М.: Радио и связь, 1989. – 248 с.

Книги по математике

8. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров: Пер. с франц. - М.: Наука, 1965. – 778 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник для инженеров и учащихся ВТУзов. - М.: Наука, 1986. – 544 с.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974. – 542 с.

4 СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1 Контрольная работа №1. Спектральный анализ периодических и непериодических управляющих сигналов

Решение типовых задач, необходимый теоретический материал содержатся в учебном пособии [4]. Исходные данные для периодического видеосигнала, составленного из прямоугольных однополярных или знакопеременных импульсов, согласно варианту (таблица 1) взять из таблицы 3.

Порядок выполнения первой контрольной работы:

1. Выполнить математическое описание заданного периодического сигнала, изобразить графически два-три периода сигнала, указав на рисунке параметры, характеризующие сигнал. Период сигнала равен 10^{-3} с (1000 мкс).

2. Проанализировать временные свойства сигнала, описать заданные виды симметрии и сформулировать обоснованные предположения о свойствах и особенностях спектрального состава сигнала.

3. Вычислить и построить спектры амплитуд и фаз (не менее десяти спектральных составляющих). Выявить характер огибающей спектра амплитуд.

Указание: при медленно сходящемся спектре изобразить характер огибающих спектров амплитуд и фаз в уменьшенном для наглядности масштабе, указав на них наиболее характерные точки по частоте, амплитуде и фазе.

4. Построить оценку сигнала из трех гармонических колебаний с наибольшими амплитудами.

5. Рассчитать относительную погрешность представления сигнала оценкой из трех гармонических колебаний.

6. Определить комплексную спектральную плотность непериодического сигнала, совпадающего с заданным периодическим на протяжении одного периода в симметричных пределах $[-T/2, T/2]$ и равного нулю при других временах.

7. Построить графики модуля спектральной плотности и фазового спектра непериодического сигнала.

8. Сопоставить спектры периодического и непериодического сигнала на основе известного соотношения

$$\dot{S}(n\omega_1)/T = \dot{A}_n/2.$$

Ряд значений A_n совместить с графиком спектральной плотности.

9. Определить энергию и среднюю мощность заданного сигнала на участке цепи с сопротивлением 1 Ом.

10. Сделать выводы по проведенному анализу периодического и непериодического сигналов, сопоставив между собой характер спектров, временное и спектральное представления сигналов.

4.2 Контрольная работа №2. Расчет прохождения периодических и непериодических сигналов через линейные электрические цепи первого порядка

Для расчета использовать следующие исходные данные:

- периодический сигнал $s_1(t)$ согласно варианту (таблица 1) из таблицы 3;
- непериодический импульсный сигнал $s_2(t)$, состоящий из двух соседних униполярных или знакопеременных импульсов, параметры которых заданы в таблице 3;
- электрическая цепь первого порядка в режиме холостого хода; схемы цепей и параметры элементов заданы в таблице 4;
- соотношение параметров цепи и сигнала $\tau_u \approx \tau/2,31$.

Порядок выполнения второй контрольной работы:

1. Рассчитать и построить в масштабе АЧХ и ФЧХ интегрирующей и дифференцирующей цепей в диапазоне от нуля до 10 кГц, полагая $\tau_u \approx \tau/2,31$.

Указание: по шкале абсцисс сделать градуировку частоты в кГц и в безразмерных величинах $\omega\tau_u$.

2. Рассчитать и построить в масштабе переходную и импульсную характеристики цепей от нуля до $t_{\max} = 3\tau$ (мкс).

Указание: по шкале абсцисс сделать градуировку времени в мкс и в безразмерных величинах t/τ_u .

3. Проверить выполнение предельных соотношений между частотными и временными характеристиками.

4. Рассчитать спектр амплитуд и фаз на выходе заданной цепи при действии периодического сигнала $s_1(t)$.

5. Построить с учетом масштаба на общей спектрограмме спектры амплитуд и фаз входного и выходного сигналов при действии сигнала $s_2(t)$.

6. Дать представление входного сигнала $s_2(t)$ с помощью функций Хевисайда.

7. Получить динамическое представление отклика заданной цепи на действие сигнала $s_2(t)$ (с помощью переходных характеристик).

8. Изобразить отклик цепи на интервале времени от нуля до t_{max} , в три раза превышающем длительность воздействия $s_2(t)$ (воздействие и соответствующий отклик цепи изображать на общем рисунке).

9. Сделать выводы по результатам проведенного анализа.

4.3 Контрольная работа №3. Расчет похождения неперiodического сигнала сложной формы через линейную цепь второго порядка

Для расчета использовать, согласно варианту (таблица 2), следующие исходные данные:

- схема электрической цепи задается в таблице 6;
- входной сигнал задается таблице 5;
- соотношение параметров цепи и сигнала: постоянные времени электрических цепей $\tau_u = RC$ и $\tau_y = L/R$ – представлены в таблице 6.

Порядок выполнения третьей контрольной работы:

1. Рассчитать и построить в масштабе АЧХ и ФЧХ цепи.
2. Рассчитать и построить в масштабе переходную и импульсную характеристики цепи.
3. Проверить выполнение предельных соотношений между частотными и временными характеристиками.
4. Дать поинтервальное аналитическое представление сигнала по его графику.
5. Рассчитать операторным методом (или методом временного интегрирования) отклик на выходе линейной цепи и дать его поинтервальное описание.
6. По результатам вычислений (не менее трех точек на каждом интервале описания сигнала) изобразить отклик цепи на отрезке времени от момента включения до t_{max} , в три раза превышающем длительность воздействия; сигнал воздействия и отклика совместить на одном рисунке.
7. Сделать выводы (оценка операторного и временного методов применительно к решаемой задаче, физическая интерпретация полученных результатов).

5 ШИФРЫ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ №1, 2, 3

Таблица 1 – Шифры к контрольным работам №1, №2

Контрольная работа №1			Контрольная работа №2		
Вариант №	Шифр сигнала (таблица 3)	Соотношение между периодом T и длительностью импульса τ	Шифр цепи (таблица 4)	Значения сопротивлений	
				R_1	R_2
1	1	$T = 3\tau$	1	R	R
2	2	$T = 4\tau$	2	R	R
3	3	$T = 5\tau$	3	R	2R
4	4	$T = 6\tau$	4	2R	R
5	5	$T = 7\tau$	5	R	R
6	6	$T = 8\tau$	6	R	R
7	1	$T = 4\tau$	7	R	R
8	2	$T = 5\tau$	8	R	R
9	3	$T = 6\tau$	9	R	R
10	4	$T = 7\tau$	10	R	R
11	5	$T = 8\tau$	1	2R	R
12	6	$T = 3\tau$	2	R	2R
13	1	$T = 5\tau$	3	2R	R
14	2	$T = 6\tau$	4	R	2R
15	3	$T = 7\tau$	5	2R	R
16	4	$T = 8\tau$	6	R	2R
17	5	$T = 3\tau$	7	2R	R
18	6	$T = 4\tau$	8	R	2R
19	1	$T = 6\tau$	9	2R	R
20	2	$T = 7\tau$	10	R	2R
21	3	$T = 8\tau$	1	R	0
22	4	$T = 3\tau$	2	2R	R
23	5	$T = 4\tau$	3	0	2R
24	6	$T = 5\tau$	4	2R	0
25	1	$T = 7\tau$	5	R	2R
26	2	$T = 8\tau$	6	R	0
27	3	$T = 3\tau$	7	2R	R
28	4	$T = 4\tau$	8	2R	R
29	5	$T = 5\tau$	9	R	2R
30	6	$T = 6\tau$	10	0	2R

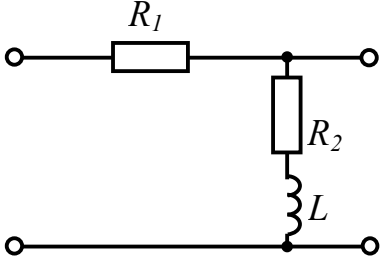
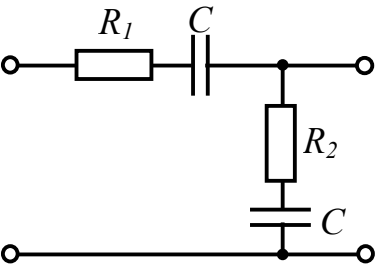
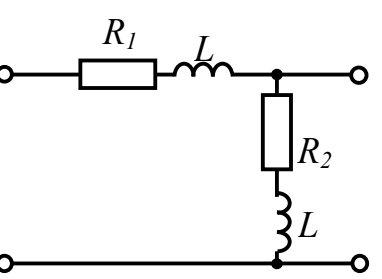
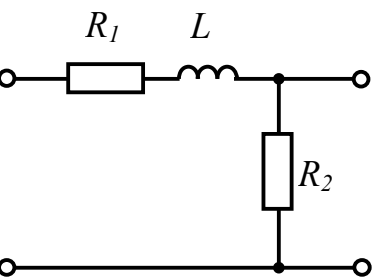
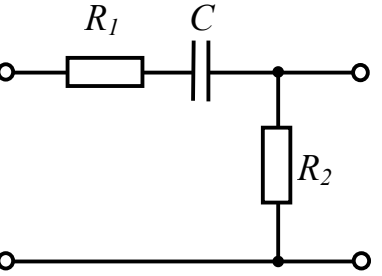
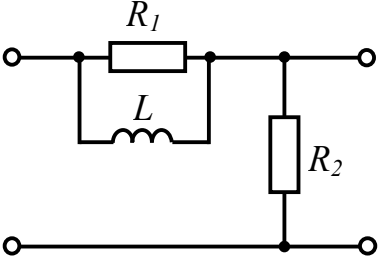
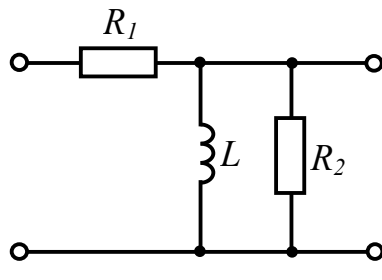
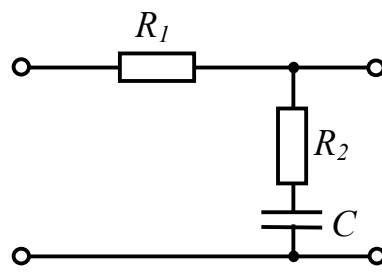
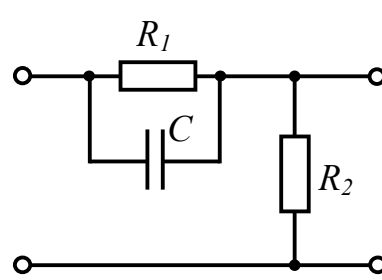
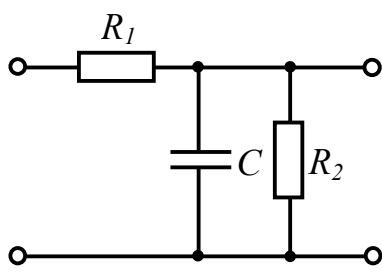
Таблица 2 – Шифры к контрольной работе №3

Вариант №	Шифр сигнала (таблица 5)		Шифр цепи (таблица 6) N ₃ N ₄
	N ₁	N ₂	
1	1	1	11
2	2	1	21
3	3	1	31
4	4	1	41
5	5	1	51
6	6	1	61
7	7	1	12
8	8	1	22
9	9	1	32
10	1	2	42
11	2	2	52
12	3	2	62
13	4	2	13
14	5	2	23
15	6	2	33
16	7	2	43
17	8	2	53
18	9	2	63
19	1	3	14
20	2	3	24
21	3	3	34
22	4	3	44
23	5	3	54
24	6	3	64
25	7	3	15
26	8	3	25
27	9	3	35
28	1	4	45
29	2	4	55
30	3	4	65

Таблица 3 – Модели периодических сигналов к контрольной работе №1

Шифр сигнала	График сигнала
1	
2	
3	
4	
5	
6	
<p>Примечание Период сигнала T равен 0,001 с ($T = 1000$ мкс)</p>	

Таблица 4 – Модели линейных цепей первого порядка к контрольной работе №2

1	
3	
5	
7	
9	
2	
4	
6	
8	
10	

Примечание

Постоянная времени линейной цепи τ_y связана с параметрами элементов (R , L и C) и длительностью импульса τ следующими соотношениями:

$$\tau_y = \frac{1}{\alpha} = \frac{L}{R} = R \cdot C, \quad \tau_y = \frac{\tau}{2,31}$$

Таблица 5 – Модели неперiodических сигналов к контрольной работе №3

Шифр N_1	График сигнала	Шифр N_2	Параметры импульсов t_1 и t_2
1		1	$t_2 = 2t_1$
2		2	$t_2 = 1,75t_1$
3		3	$t_2 = 1,5t_1$
4		4	$t_2 = 1,25t_1$
5		5	$t_2 = 3t_1$
6		6	$t_2 = 3,75t_1$
7		7	$t_2 = 3,5t_1$
8		8	$t_2 = 3.25t_1$
9		9	$t_2 = 4t_1$
Примечание			
$t_1 = \tau_u = 100 \text{ мкс.}$			

Таблица 6 – Модели линейных электрических цепей второго порядка (шифр N₃ N₄) к контрольной работе №3

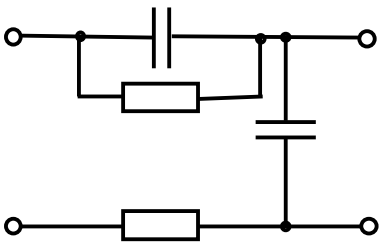
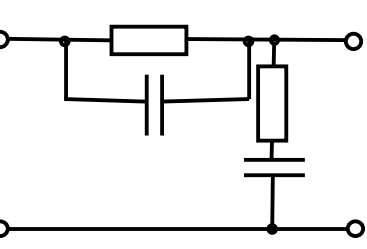
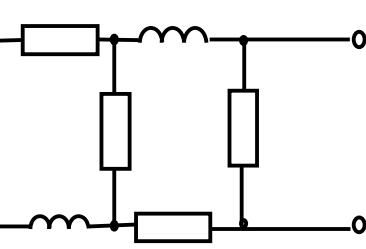
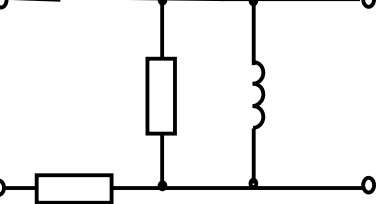
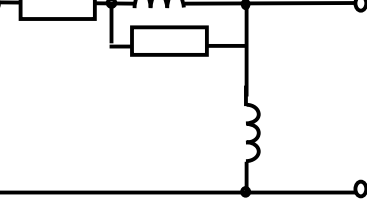
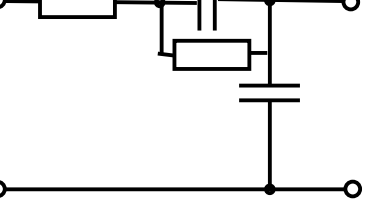
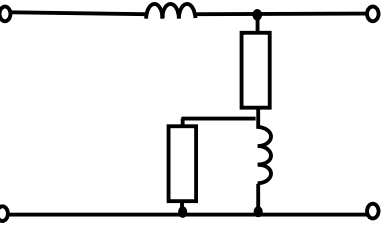
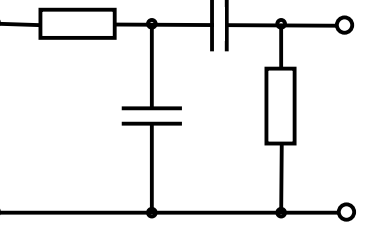
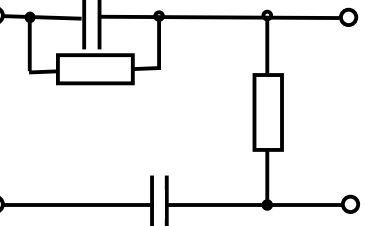
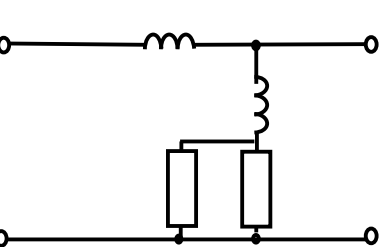
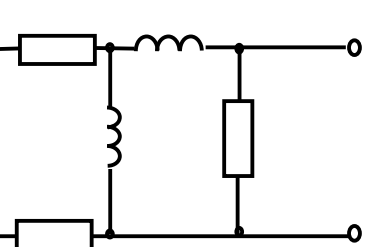
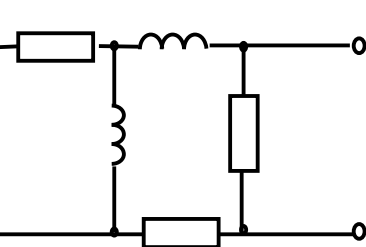
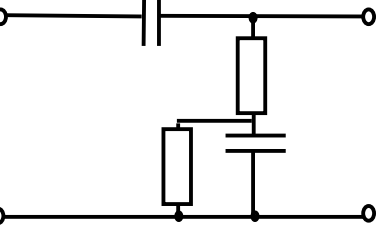
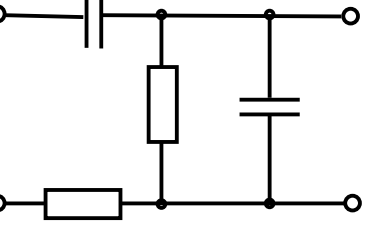
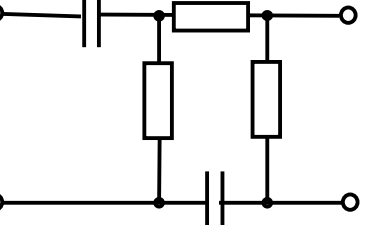
<p>11</p> 	<p>21</p> 	<p>31</p> 
<p>41</p> 	<p>51</p> 	<p>61</p> 
<p>12</p> 	<p>22</p> 	<p>32</p> 
<p>42</p> 	<p>52</p> 	<p>62</p> 
<p>13</p> 	<p>23</p> 	<p>33</p> 

Таблица 6 (продолжение)

43 	53 	63
14 	24 	34
44 	54 	64
15 	25 	35
45 	55 	65

Примечание

Все электрические цепи составлены из сопротивлений R , индуктивностей L , емкостей C .

$$\tau_{\text{ч}} = 1/\alpha = L/R = R \cdot C, \quad \tau_{\text{ч}} = 100 \text{ мкс.}$$

6 ПРИМЕР РАСЧЕТА И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1 ПО ТЕМЕ: «СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ»

Исходные данные (параметры видеосигнала, изображенного на рисунке 6.1):

- период сигнала $T = 1000$ мкс;
- длительность импульса $\tau = 375$ мкс;
- амплитуда импульса $E = 3,2$ В;
- временные свойства сигнала:
четная симметрия относительно $t = 0$

$$s(t) = s(-t),$$

нечетная симметрия относительно $t = T/4$

$$s\left(\frac{T}{4} + t\right) = -s\left(\frac{T}{4} - t\right).$$

6.1 Математическое описание заданного периодического сигнала

Периодический сигнал представляет собой знакопеременную последовательность импульсов прямоугольной формы. Математическое описание проведем, используя графическую модель сигнала, изображенную на рисунке 6.1.

Скважность, определяемая отношением периода сигнала к длительности прямоугольного импульса, равна

$$q = \frac{T}{\tau} = \frac{1000 \text{ мкс}}{375 \text{ мкс}} = 2\frac{2}{3}.$$

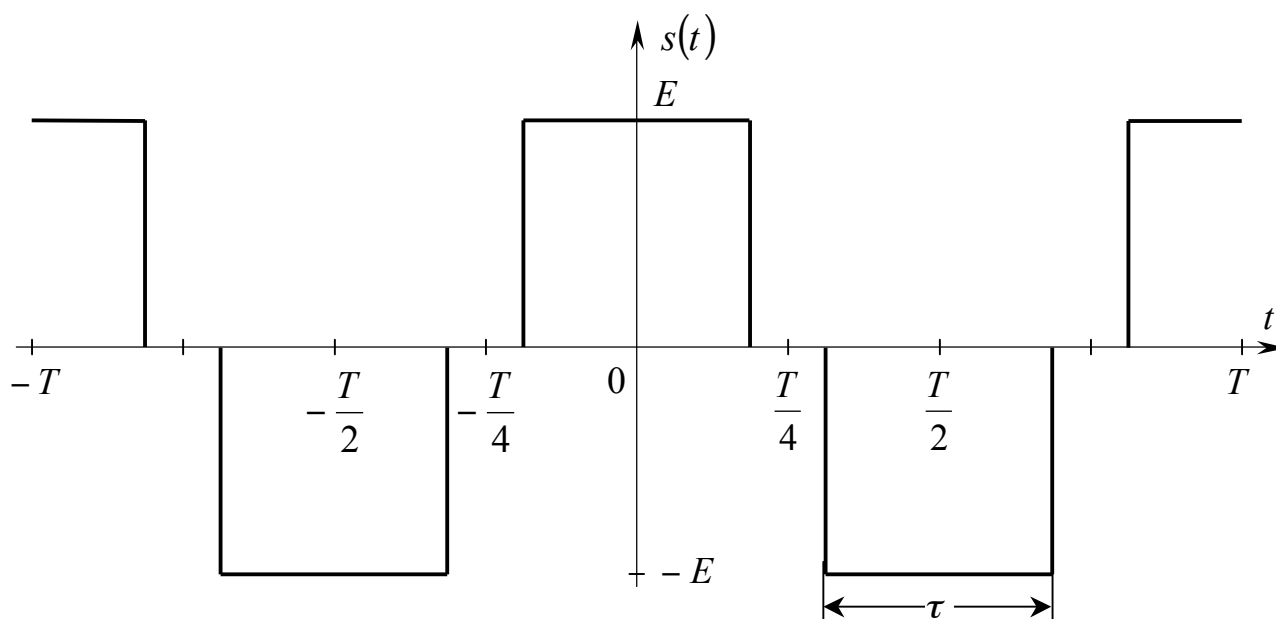


Рисунок 6.1 – Временное представление сигнала

6.2 Анализ временных свойств сигнала и формулировка обоснованных предположений о свойствах и особенностях спектрального состава сигнала

Анализируя временное представление сигнала, видим:

- 1) $s(t) = s(-t)$ – сигнал является четной функцией времени;
- 2) сигнал представляет собой знакопеременную последовательность импульсов, и в этом случае постоянная составляющая равна нулю:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt = 0.$$

На основании изложенных свойств предполагаем, что в разложении сигнала будут присутствовать только косинусоидальные элементарные гармонические составляющие, то есть

$$a_n \neq 0, b_n = 0, \frac{a_0}{2} = 0.$$

И, следовательно, ряд Фурье можно преобразовать следующим образом:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t.$$

6.3 Вычисление спектров амплитуд и фаз. Характер огибающей спектра амплитуд

Проведем расчет весовых коэффициентов a_n , используя при этом формулу

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt.$$

Заданный сигнал является четной функцией времени. Произведение двух четных функций $s(t)$ и $\cos n\omega_1 t$ образует четную функцию времени. Интеграл от четной функции на симметричном интервале равен удвоенному значению интеграла за половину интервала интегрирования:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

Обращаясь к графической модели сигнала (рисунок 6.1), производим вычисления:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} E \cos(n\omega_1 t) dt + \frac{4}{T} \int_{T/2-\tau/2}^{T/2} (-E) \cos(n\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{4E}{Tn\omega_1} \sin(n\omega_1 t) \Big|_0^{\tau/2} - \frac{4E}{Tn\omega_1} \sin(n\omega_1 t) \Big|_{T/2-\tau/2}^{T/2} = \\ &= \frac{4E}{Tn\omega_1} \left[\sin \frac{n\omega_1 \tau}{2} - \sin \frac{n\omega_1 T}{2} + \sin n\omega_1 \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для проведения дальнейших упрощений воспользуемся очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} q = \frac{T}{\tau} &\Rightarrow \tau = \frac{T}{q}, \\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T} &\Rightarrow \omega_1 T = 2\pi. \end{aligned}$$

В условиях конкретного примера $q = 2\frac{2}{3}$. Таким образом, последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2E}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi}{q} - \sin n\pi + \sin \frac{n\pi(q-1)}{q} \right] = \frac{2E}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi}{q} + \sin \frac{n\pi(q-1)}{q} \right] = \\ &= \frac{2E}{n\pi} \cdot 2 \sin \frac{n\pi + n\pi(q-1)}{2q} \cdot \cos \frac{n\pi - n\pi(q-1)}{2q} = \frac{4E}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{8}. \end{aligned}$$

При выполнении преобразований были использованы следующие соотношения между тригонометрическими функциями:

$$\sin n\pi = 0;$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Систематизируем полученные выражения

$$\frac{a_0}{2} = 0, \quad a_n = \frac{4E}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{8}, \quad b_n = 0;$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n|;$$

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} = -\operatorname{arctg} \frac{0}{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n > 0, \\ -\pi, & \text{если } a_n < 0. \end{cases}$$

Результаты расчетов оформляем в виде таблицы 7.

Таблица 7 – Спектры амплитуд и фаз

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	$\frac{a_0}{2} = 0$	3,764	0	-0,52	0	-0,312	0	0,538	0	-0,418
b_n		0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_n	$\frac{a_0}{2} = 0$	3,764	0	0,52	0	0,312	0	0,538	0	0,418
φ_n		0	–	$-\pi$	–	$-\pi$	–	$-\pi$	–	$-\pi$

На основании данных таблицы приступаем к построению спектральных диаграмм. На рисунке 6.2 показано спектральное представление рассматриваемого сигнала.

6.4 Построение оценки сигнала

Произведем аналитическое восстановление сигнала по его спектру. Восстановление по Фурье имеет следующие формы записи:

$$\begin{aligned} s_N(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + a_N \cos N\omega_1 t = \\ &= \frac{a_0}{2} + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \dots + A_N \cos(N\omega_1 t + \varphi_N) = \\ &= \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Воспользуемся наиболее удобной в данном случае формулировкой:

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + a_3 \cos 3\omega_1 t + \dots + a_N \cos N\omega_1 t$$

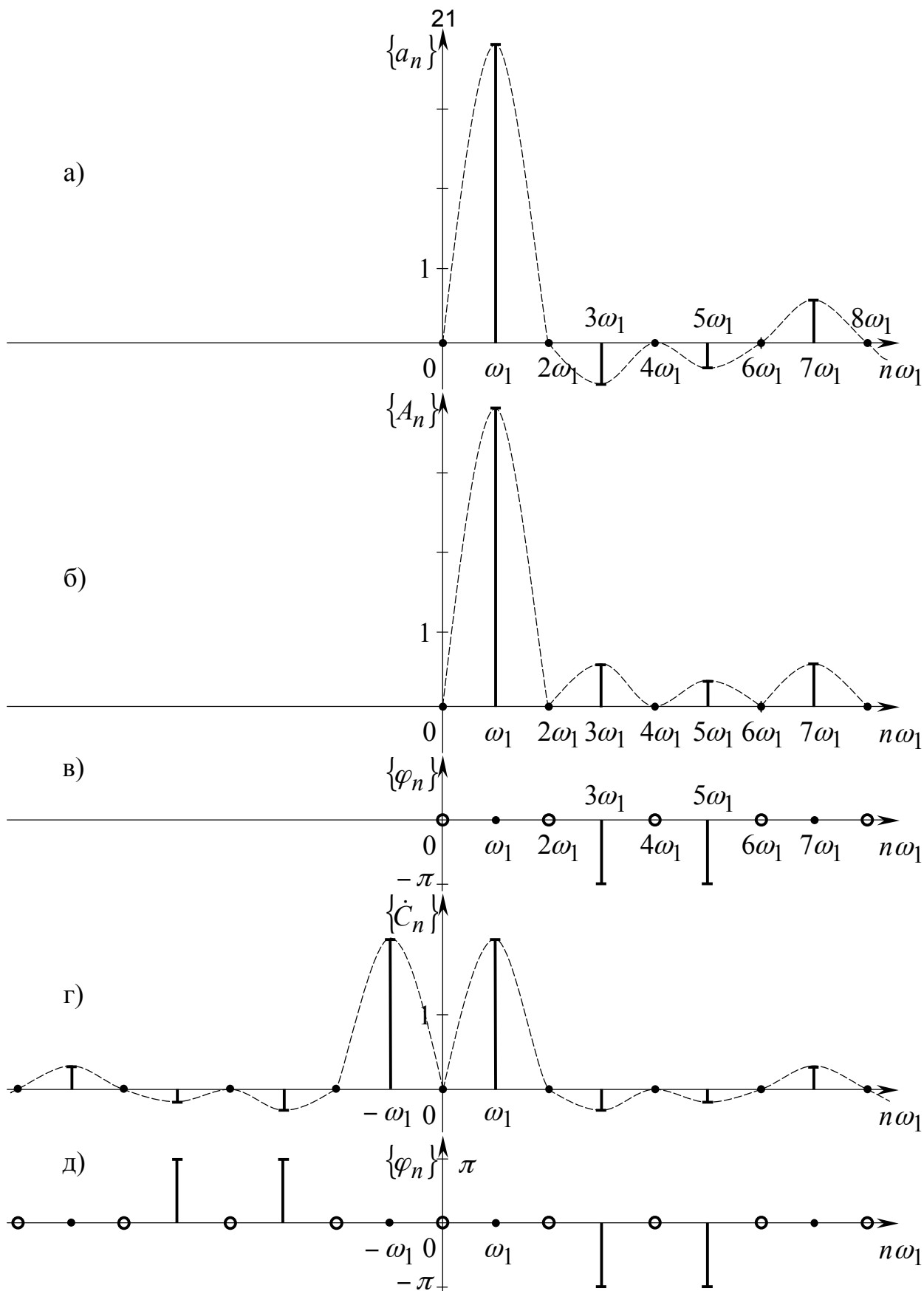


Рисунок 6.2 – Спектральное представление периодического сигнала:
 а) спектр коэффициентов a_n ; б) спектр амплитуд A_n ; в) спектр фаз φ_n ; г) и
 д) спектр коэффициентов \dot{C}_n и φ_n комплексного ряда Фурье

при $N = 5$, тогда

$$s_5(t) = 3,76 \cdot \cos \omega_1 t + (-0,52) \cdot \cos 3\omega_1 t + (-0,31) \cdot \cos 5\omega_1 t,$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – угловая частота.

В соответствии с последней формулой производим расчет компонент оценки и их суммы. Всю необходимую информацию включает таблица 8.

Таблица 8 – Поведение оценки в интервале времени $\left[0, \frac{T}{4}\right]$

t	0	$\frac{T}{16}$	$\frac{T}{8}$	$3 \cdot \frac{T}{16}$	$\frac{T}{4}$
$3,764 \cdot \cos \omega_1 t$	3,764	3,477	2,662	1,44	0
$-0,52 \cdot \cos 3\omega_1 t$	-0,52	-0,199	0,368	0,48	0
$-0,312 \cdot \cos 5\omega_1 t$	-0,312	0,119	0,221	-0,288	0
$s_5(t)$	2,932	3,397	3,251	1,632	0

Дальнейшую зависимость графика функции $s_5(t)$ от времени можно определить, используя свойство четности сигнала $s(t)$ относительно нуля и нечетности относительно точки $\frac{T}{4}$. Это нашло отражение на рисунке 6.3.

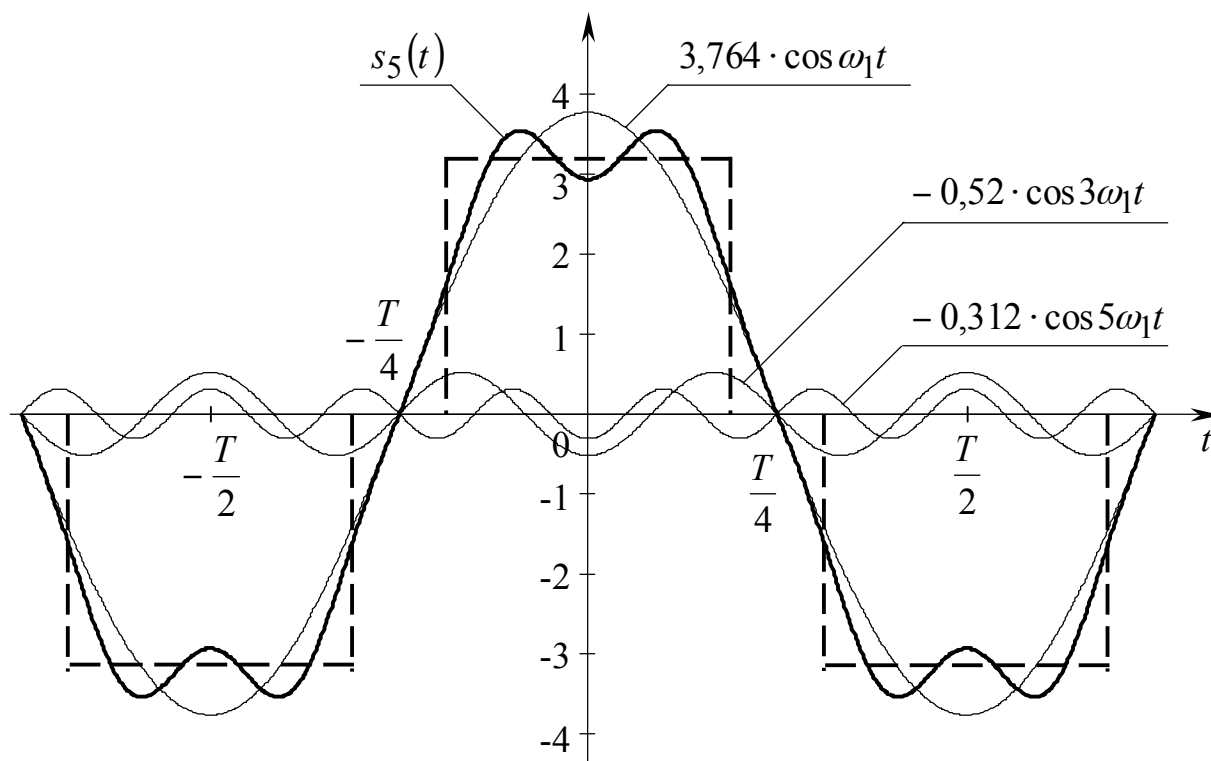


Рисунок 6.3 – Оценка сигнала из трех гармонических колебаний

6.5 Расчет относительного значения квадрата среднеквадратической погрешности представления сигнала оценкой из трех гармонических колебаний

Если $s(t)$ представляет собой напряжение или ток, тогда квадрат сигнала $s^2(t)$ численно равен мгновенной мощности $p(t)$, рассеиваемой на сопротивление нагрузки 1 Ом. Средняя мощность сигнала прямо пропорциональна энергии, запасаемой за период, и обратно пропорциональна периоду:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2+\tau/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2-\tau/2}^{T/2+\tau/2} E^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T} E^2 \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} + \frac{T}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{T}{2} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{2E^2\tau}{T} = \frac{2E^2}{q} = \frac{2 \cdot 3,2^2}{8/3} \approx 7,68 \text{ (Вт)}.$$

Аналогично определяется средняя мощность n -го гармонического сигнала, однако можно произвести существенное упрощение общей формулы:

$$P_n = \frac{\mathcal{E}_n}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s_n^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} A_n^2 \cos^2(n\omega_1 t + \varphi_n) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{A_n^2}{2} [1 + \cos 2(n\omega_1 t + \varphi_n)] dt = \frac{A_n^2}{2}.$$

Уравнение погрешности (относительное значение квадрата среднеквадратической погрешности представления периодического сигнала усеченным рядом Фурье) имеет вид:

$$\delta = \frac{P - P_N}{P},$$

где $P_N = \sum_{n=0}^N P_n$, причем в виду отсутствия постоянной составляющей можно полагать, что $P_0 = 0$.

В таблице 9 представлены результаты численного расчета, исходным для которого можно считать спектр амплитуд, полученный при выполнении предыдущих пунктов задания.

На основании анализа данных таблицы 9 и рисунка 6.4 можно сделать несколько замечаний. При $n = 0$ погрешность равна 100 %, что является следствием отсутствия постоянной составляющей в спектральном описании процесса. В интервалах между соседними значениями n погрешность либо не изменяется, либо падает скачкообразно, причем величина каждого скачка определяется мощностью новой гармоники как составляющей общей оценки

сигнала. По мере увеличения n относительная погрешность представления сигнала суммой гармоник уменьшается до нуля.

Таблица 9 – Результаты расчета погрешности

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_n, В$	$\frac{a_0}{2} = 0$	3,76	0	0,52	0	0,31	0	0,54	0	0,42
$P_n, Вт$	0	7,084	0	0,135	0	0,05	0	0,146	0	0,088
$P_N, Вт$	0	7,084		7,219		7,269		7,415		7,503
$\delta, \%$	100	7,76	7,76	6	6	5,35	5,35	3,45	3,45	2,3

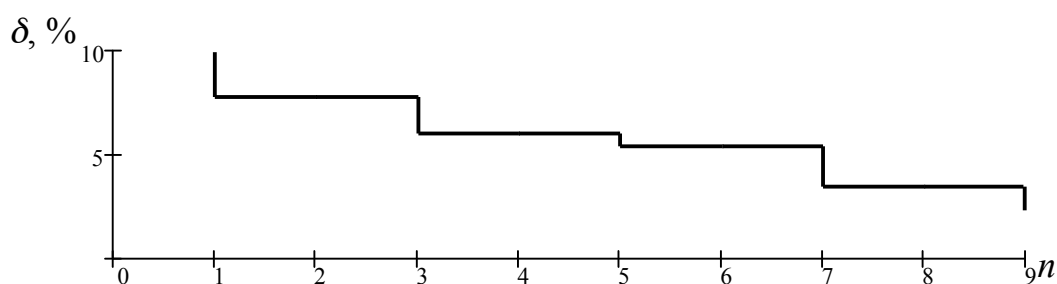


Рисунок 6.4 – График зависимости величины погрешности от количества слагаемых ряда Фурье

6.6 Определение комплексной спектральной плотности неперiodического сигнала, совпадающего с заданным периодическим на протяжении одного периода в симметричных пределах $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ и равного нулю при других временах

Проведем расчет спектральной плотности сигнала, изображенного на рисунке 6.5.

Решаем задачу, используя теоремы о спектрах. Для этого рассмотрим несколько простейших импульсных неперiodических сигналов, а затем представим искомую спектральную плотность как сумму.

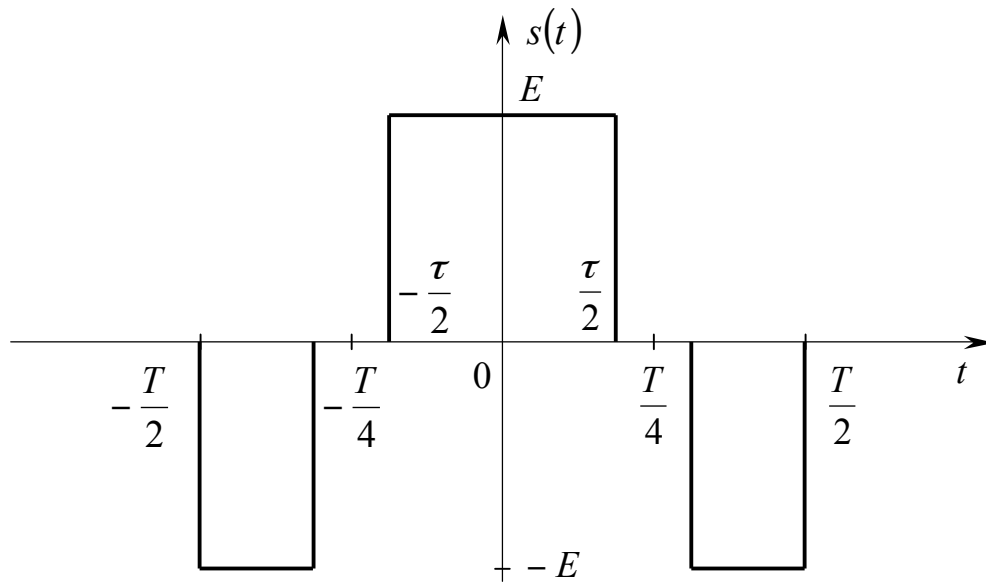


Рисунок 6.5 – Анализируемый неперiodический сигнал

Спектральная плотность сигнала $s_1(t)$, изображенного на рисунке 6.6,а, известна:

$$\dot{S}_1(\omega) = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}}.$$

По аналогии можно записать спектральную плотность сигнала $s_2(t)$, изображенного на рисунке 6.6,б. Произведем ее преобразование с помощью формулы $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$:

$$\dot{S}_2(\omega) = E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} = 2E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4} \cdot \cos \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{2}} = E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \cos \omega \frac{\tau}{4}.$$

Этот же результат можно получить, воспользовавшись другой технологией, примененной для спектрального анализа сигнала $s_3(t)$.

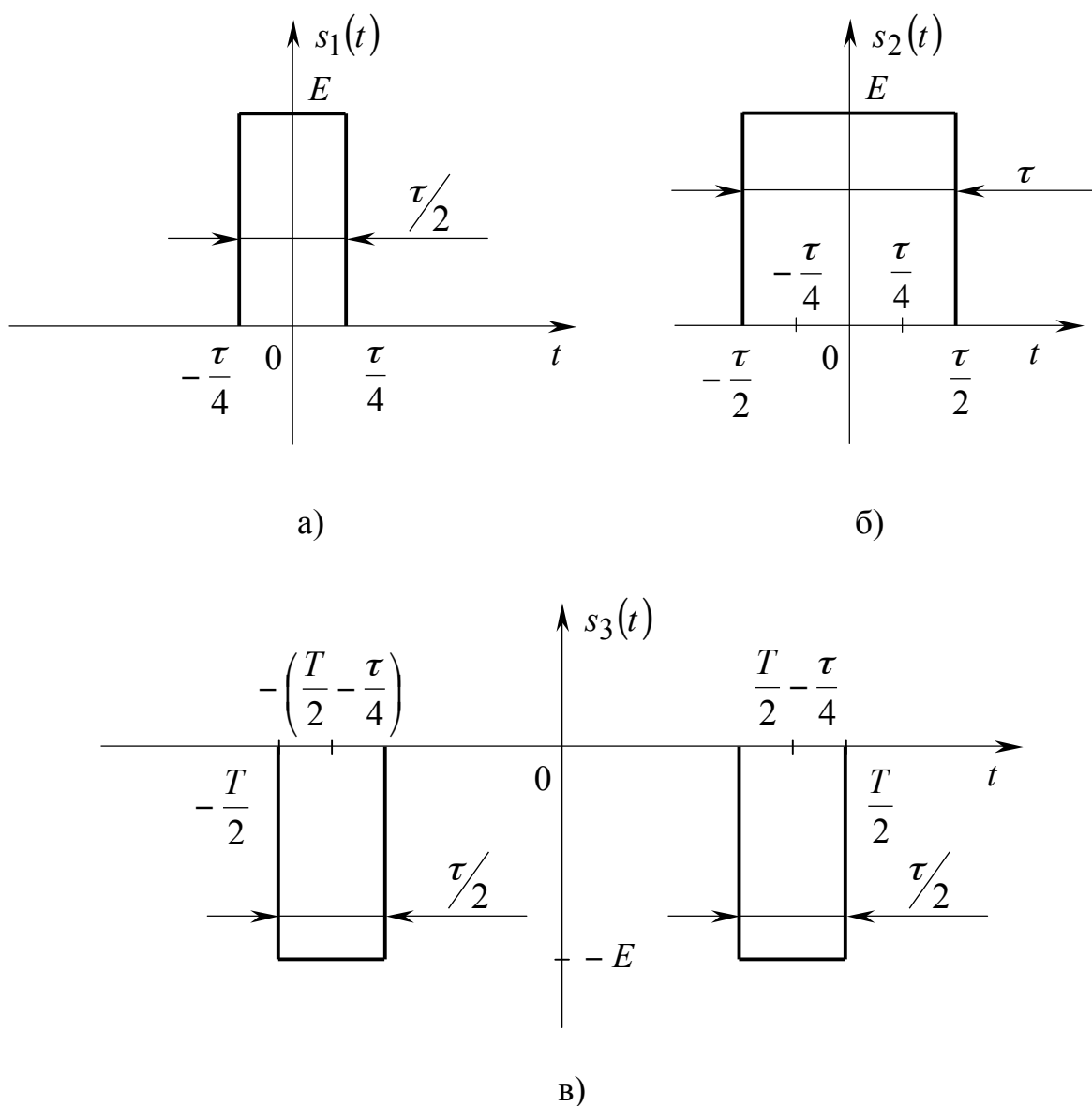


Рисунок 6.6 – Элементарные составляющие сигнала $s(t) = s_2(t) + s_3(t)$

Сигнал $s_3(t)$ образован суммой двух сигналов вида $s_1(t)$, один из которых сдвинут вправо, а другой – влево на величину $t = \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{4}\right)$, что ясно видно на рисунке 6.6,в. Применяя теорему сдвига и теорему о взвешенном суммировании, получим

$$\dot{S}_3(\omega) = -\frac{E\tau}{2} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \left[e^{j\omega\left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{4}\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{4}\right)} \right] = -E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \cos \omega\left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{4}\right).$$

Таким образом, сигнал $s(t)$ имеет спектральную плотность:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_2(\omega) + \dot{S}_3(\omega) = E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \left[\cos \omega \frac{\tau}{4} - \cos \omega \left(\frac{T}{2} - \frac{\tau}{4} \right) \right].$$

Воспользовавшись формулой $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$, получим

$$\dot{S}(\omega) = 2E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \sin \omega \frac{T}{4} \cdot \sin \omega \left(\frac{T - \tau}{4} \right).$$

Проведем проверку полученного результата:

1. Спектральная плотность – действительная функция частоты, т.к. мнимая составляющая равна нулю.
2. $\dot{S}(\omega = 0) = 0$ (структура сигнала такова, что суммарная площадь под его временным графиком равна нулю).
3. Размерность $[\dot{S}(\omega)] = \text{В} \cdot \text{с}$.

6.7 Построение графика модуля спектральной плотности и фазового спектра непериодического сигнала

Приведем выражение спектральной плотности к виду, удобному для построения графика:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= 2E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \sin \omega \frac{T}{4} \cdot \sin \omega \left(\frac{T - \tau}{4} \right) = 2E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \sin \omega \tau \frac{q}{4} \cdot \sin \omega \tau \left(\frac{q-1}{4} \right) = \\ &= 2E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \cdot \sin \left(\frac{2}{3} \omega \tau \right) \cdot \sin \left(\frac{5}{12} \omega \tau \right). \end{aligned}$$

Анализируя полученное выражение с учетом $\sin n\pi = 0$ для $n = 0, 1, 2, \dots$, получаем точки, в которых график функции $\dot{S}(\omega)$ пересекает частотную ось (нули функции): $\frac{2}{3} \omega \tau = n\pi \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{2\tau} n$; $\frac{5}{12} \omega \tau = n\pi \Rightarrow \omega = \frac{12\pi}{5\tau} n$. К тому же на нулевой частоте $\dot{S}(\omega) = 0$.

Необходимо выбрать шаг, с которым будет производиться изменение аргумента функции. Для этого подходит половина интервала между двумя

нулями, которые находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Используем следующие значения частоты:

$$\omega' = \frac{3\pi}{2\tau} \cdot 2 = \frac{6\pi}{2\tau}; \quad \omega'' = \frac{12\pi}{5\tau}.$$

Тогда шаг равен: $h = \frac{\omega' - \omega''}{2} = \frac{6\pi/2\tau - 12\pi/5\tau}{2} = 0,3 \frac{\pi}{\tau}.$

Перед построением результаты расчета удобно представить в виде таблицы 10.

Таблица 10

$\frac{\omega\tau}{\pi}$	$\frac{\dot{S}(\omega)}{2E\tau}$	$\frac{\omega\tau}{\pi}$	$\frac{\dot{S}(\omega)}{2E\tau}$	$\frac{\omega\tau}{\pi}$	$\frac{\dot{S}(\omega)}{2E\tau}$
0,3	0,22	2,7	0,09	5,1	0,07
0,6	0,65	3	0	5,4	0,14
0,9	0,81	3,3	-0,11	5,7	0,12
1,2	0,5	3,6	-0,1	6	0
1,5	0	3,9	0	6,3	-0,11
1,8	-0,29	4,2	0,02	6,6	-0,12
2,1	-0,22	4,5	0	6,9	-0,05
2,4	0	4,8	0	7,2	0

На рисунке 6.7,а изображена спектральная плотность исследуемого непрерывного непериодического сигнала $\dot{S}(\omega) = A(\omega)$. На рисунке 6.7,б и в показаны модуль (амплитудно-частотная характеристика спектра) и аргумент (фазо-частотная характеристика спектра) комплексной спектральной плотности.

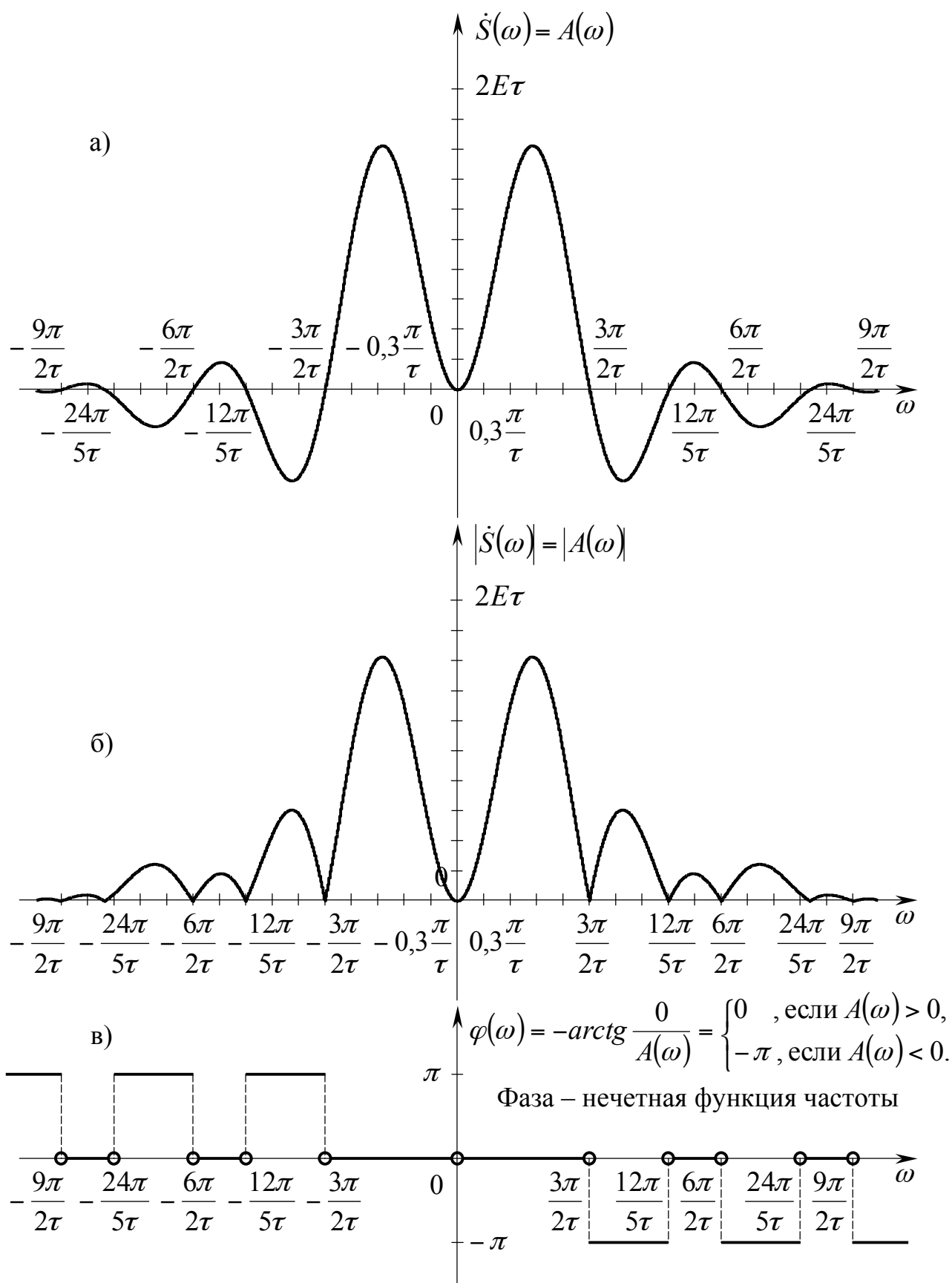


Рисунок 6.7 – Зависимость спектральной плотности (а) модуля спектральной плотности (б) и фазового спектра (в) непериодического сигнала от частоты

В таблице 10 представлены значения спектральной характеристики исследуемого сигнала при $\omega > 0$. Для построения графика на отрицательной оси частот используем свойство четности $A(\omega)$.

6.8 Сопоставление спектров периодического и непериодического сигналов

Сопоставление спектров периодического и непериодического сигналов проведем на основе известного соотношения

$$\frac{S(n\omega_1)}{T} = \frac{A_n}{2}.$$

Для дальнейшего анализа следует определить частоту первой гармоники спектра периодического сигнала на непрерывной частотной оси спектра непериодического сигнала:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{q\tau} = \frac{3\pi}{4\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2\tau}.$$

Проведен достаточный анализ, чтобы на рисунке 6.8 совместить ряд значений $C_n = \frac{A_n}{2}$, расположенных на частотах $n\omega_1$, с графиком спектральной плотности.

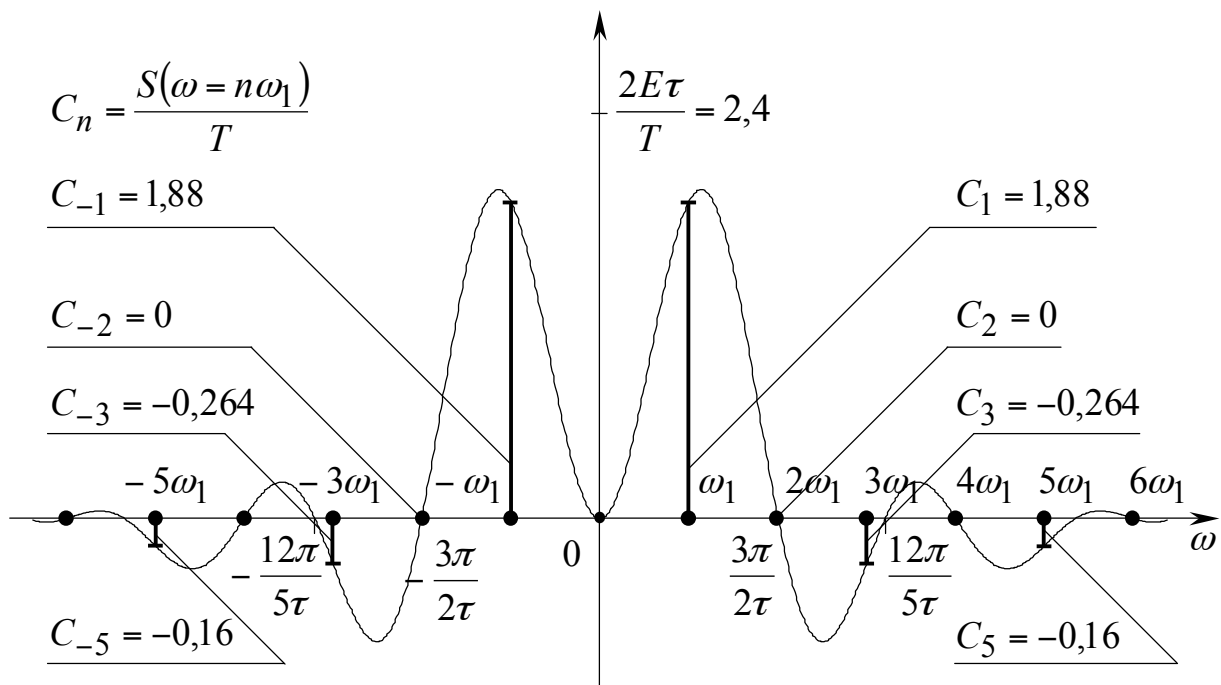


Рисунок 6.8 – Сравнение спектров периодического и непериодического сигналов

Сравнение спектров периодического и непериодического сигналов показывает, что гармоники, построенные на частотах, кратных ω_1 , и ограниченные спектральной плотностью непериодического сигнала, совпадают со значениями C_n на спектральных диаграммах периодического сигнала.

6.9 Определение энергии и средней мощности заданного сигнала на участке цепи с сопротивлением 1 Ом

Определим энергию сигнала по временному представлению:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

В виду того, что сигнал $s(t)$ отличен от нуля на конечном интервале описания, последнее выражение можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_1+T_{oc}} s^2(t) dt,$$

где T_{oc} – интервал описания сигнала.

Проведем расчет по полученной формуле:

$$\mathcal{E} = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \int_{-T/2}^{-T/2+\tau/2} E^2 dt + \int_{-T/2+\tau/2}^{\tau/2} E^2 dt + \int_{\tau/2}^{T/2} E^2 dt = 2E^2\tau.$$

Подставляя численные значения $E = 3,2$ В, $\tau = 375 \cdot 10^{-6}$ с, получим

$$\mathcal{E} = 2E^2\tau = 7,68 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Тогда, согласно исходным данным, $T_{oc} = 1 \cdot 10^{-3}$ с и средняя мощность равна

$$P = \frac{\mathcal{E}}{T_{oc}} = 7,68 \text{ Вт}.$$

6.10 Выводы

В настоящей работе проведено исследование спектральных свойств двух сигналов – периодического и непериодического.

Периодический сигнал представляет собой знакопеременную последовательность импульсов прямоугольной формы.

Сигнал описывается аналоговой функцией времени с двумя видами симметрии: четной симметрией относительно нуля

$$s(t) = s(-t)$$

и нечетной симметрией относительно $t = T/4$ (т.е. инверсией сигнала через каждую половину периода)

$$s(t) = -s\left(t - T/2\right).$$

Эти особенности временных свойств сигнала определяют характер его спектра:

1) спектр периодического сигнала дискретный (линейчатый), полностью характеризуется рядом Фурье;

2) инверсия сигнала через каждую половину периода приводит к отсутствию в спектре четных номеров гармоник, в том числе постоянной составляющей;

3) четность функции, описывающей сигнал, определяет наличие в спектре только косинусоидальных составляющих;

4) наличие разрывов в функции приводит к достаточно медленной сходимости ряда Фурье, так как на формирование сигнала в точках разрывов влияют в основном высшие гармоники.

Особенностью исследуемого непериодического сигнала является наличие в его составе импульсов различной длительности, четная симметрия относительно нуля и нулевое среднее значение на интервале описания. Кроме того, на интервале описания $(-T/2 < t < T/2)$ он полностью совпадает с периодическим сигналом, исследованным в начале работы.

Могут быть выделены следующие особенности спектра непериодического сигнала:

1) спектр непериодического сигнала непрерывный (сплошной), полностью характеризуется комплексной спектральной плотностью;

2) четность сигнала во времени определяет вещественный характер спектральной плотности;

3) спектральная плотность равна нулю на нулевой частоте вследствие нулевого среднего значения сигнала $(\int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt = 0)$;

4) ограниченность сигнала во времени определяет пульсирующий характер его спектра;

5) ширина спектра зависит от длительности наиболее короткого импульса, входящего в состав сигнала.

Энергия непериодического сигнала - конечная величина. Энергия периодического сигнала бесконечна и физического смысла не имеет.

Модуль спектральной плотности одиночного импульса и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности, полученной путем повторения заданного импульса, совпадают по форме и отличаются только масштабом.