

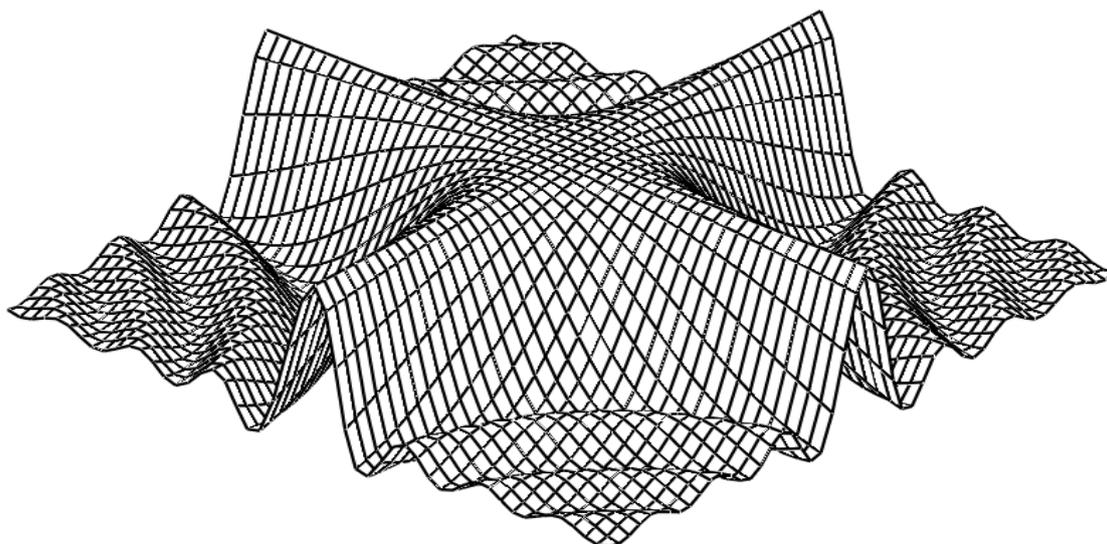
**Н.А. Каратаева**

# **РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

## **Часть 1**

**Теория сигналов и линейные цепи**

*Учебное пособие*



**ТОМСК – 2012**

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Н.А. Каратаева**

# **РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

## **Часть 1**

### **Теория сигналов и линейные цепи**

#### **Учебное пособие**

*Рекомендовано Сибирским региональным отделением  
учебно-методического объединения высших учебных  
заведений по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации для  
межвузовского использования в качестве учебного пособия для  
студентов, обучающихся по направлениям подготовки 552500,  
654200 «Радиотехника», 511100, 654300 «Проектирование и  
технология РЭА», 654400 «Телекоммуникации»*

**2012**

ББК 32.841  
УДК 621.372

Рецензенты:

Доктор технических наук профессор Красноярского  
Государственного технического университета А.И.Громько;  
Кафедра компьютерных измерительных систем и метрологии  
Томского политехнического университета

**Каратаева Н.А.**

Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1: Учебное пособие. – Томск:  
Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2012. – 260 с.

В учебном пособии изложены основы математического описания детерминированных сигналов и линейных цепей с постоянными параметрами. Рассмотрены обобщенные функции, ряды Фурье, преобразования Фурье, преобразования Лапласа и применение их для анализа сигналов, линейных цепей и взаимодействия между ними. Показано единство математических преобразований, исследованы взаимные связи между ними, отражена концепция смены математического аппарата в зависимости от меняющихся условий решаемых задач.

В пособии рассмотрены радиосигналы с амплитудной, частотной и фазовой модуляциями. Показана внутренняя структура узкополосных сигналов, проанализированы особенности взаимодействия узкополосных сигналов и частотно-избирательных цепей.

Предлагаемое учебное пособие может быть полезно для студентов и преподавателей высших учебных заведений радиотехнических специальностей.

**ББК 32.841**  
**УДК 621.372**

Разработчики электронной версии:

**Е.П. Ворошилин, В.В Родионов, А.А. Савин**

© Каратаева Н.А., 2012  
© Томский межвузовский центр  
дистанционного обучения, 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	7
<b>1 Введение в теорию сигналов</b> .....	9
1.1 Идеальные модели сигналов и их свойства.....	9
1.2 Описание алгоритмов взаимодействия обобщенных функций и сигналов.....	14
1.3 Энергетические характеристики сигналов.....	20
1.3.1 Энергетические характеристики вещественных сигналов.....	20
1.3.2 Энергетические характеристики комплексных сигналов.....	21
1.3.3 Корреляционные характеристики детерминированных сигналов.....	22
1.4 Обобщенное линейное представление сигналов.....	26
1.5 Динамическое представление сигналов.....	30
1.6 Выводы.....	33
<b>2 Гармонический анализ периодических сигналов</b> .....	34
2.1 Периодические сигналы и их свойства.....	34
2.2 Гармонические колебания (гармоники).....	35
2.3 Векторное и комплексное представления гармонического колебания.....	36
2.4 Сложение гармонических колебаний.....	38
2.5 Энергетические характеристики гармонических колебаний.....	40
2.6 Разложение произвольного периодического сигнала по гармоникам.....	42
2.7 Анализ внутренней структуры периодического сигнала.....	45
2.8 Энергетические характеристики периодического сигнала сложной формы.....	47
2.9 Практическое приложение ко второй главе.....	51
2.9.1 Гармонический анализ периодической последовательности униполярных прямоугольных импульсов.....	51
2.9.2 Частотное представление периодического сигнала.....	53
2.9.3 Распределение мощности в спектре периодического сигнала.....	54
2.9.4 Анализ связи между длительностью импульса, периодом и шириной спектра.....	55
2.9.5 Пример гармонического анализа периодической последовательности знакопередающихся импульсов треугольной формы.....	60
2.10 Выводы.....	61
<b>3 Гармонический анализ непериодических сигналов</b> .....	63
3.1 Предельный переход от периодических сигналов к непериодическим.....	63
3.2 Прямое и обратное преобразования Фурье.....	64
3.3 Спектральные характеристики непериодических сигналов.....	66
3.4 Анализ внутренней структуры непериодического сигнала.....	68
3.5 Энергетические характеристики непериодических сигналов.....	73
3.6 Границы применимости преобразований Фурье и возможности их расширения.....	75
3.7 Спектральное представление некоторых неинтегрируемых сигналов.....	79
3.8 Выводы.....	84

<b>4 Теоремы о спектрах</b> .....	85
4.1 Сложение сигналов.....	85
4.2 Теорема сдвига.....	86
4.3 Следствие теорем 4.1, 4.2.....	86
4.4 Изменение масштаба времени.....	87
4.5 Инверсия сигнала во времени.....	88
4.6 Дифференцирование сигнала по времени.....	90
4.7 Интегрирование сигнала во времени.....	91
4.8 Взаимозаменяемость аргументов $\omega$ и $t$ в преобразованиях Фурье.....	92
4.9 Перемещение спектра сигнала.....	93
4.10 Дифференцирование спектральной плотности.....	93
4.11 Свертывание двух сигналов.....	96
4.12 Произведение двух сигналов.....	98
4.13 Взаимная корреляционная функция сигналов.....	98
4.14 Автокорреляционная функция сигнала.....	99
4.15 Выводы.....	100
<b>5 Преобразование Лапласа</b> .....	102
5.1 Двустороннее преобразование Лапласа.....	102
5.2 Свойства правостороннего преобразования Лапласа.....	106
5.2.1 Основные определения.....	106
5.2.2 Сложение сигналов.....	107
5.2.3 Изменение масштаба времени.....	107
5.2.4 Сдвиг во времени.....	108
5.2.5 Умножение оригинала на экспоненциальную функцию.....	108
5.2.6 Дифференцирование оригинала.....	108
5.2.7 Дифференцирование изображения.....	109
5.2.8 Интегрирование оригинала.....	109
5.2.9 Интегрирование изображения.....	110
5.2.10 Свертка оригиналов.....	110
5.2.11 Свертка оригиналов, один из которых является производной.....	110
5.2.12 Предельные соотношения.....	111
5.3 Обратное преобразование Лапласа.....	112
5.4 Применение преобразования Лапласа к обобщенным функциям.....	114
5.5 Анализ связи между преобразованиями Лапласа и преобразованиями Фурье...	119
5.6 Практическое приложение к пятой главе.....	121
5.6.1 Математическое описание простейших односторонних сигналов и расчет изображений по Лапласу.....	121
5.6.2 Расчет изображений по Лапласу односторонних затухающих гармонических колебаний.....	123
5.6.3 Расчет изображений по Лапласу односторонних незатухающих гармонических колебаний.....	124
5.6.4 Дифференцирование сигналов и определение изображений.....	126
5.6.5 Интегрирование сигналов и определение изображений.....	127
5.6.6 Изображение свертки.....	128
5.7 Выводы.....	129

<b>6 Линейные электрические системы и их математические модели</b> .....	136
6.1 Математическое описание линейной электрической цепи (ЛЭЦ) .....	136
6.2 Методы алгебраизации дифференциального уравнения электрического равновесия.....	141
6.2.1 Метод комплексных амплитуд (МКА) .....	141
6.2.2 Частотный метод.....	144
6.2.3 Операторный метод.....	145
6.3 Анализ взаимодействия линейной цепи с сигналами, описываемыми обобщенными функциями.....	146
6.3.1 Импульсная характеристика цепи.....	146
6.3.2 Переходная характеристика цепи.....	147
6.3.3 Передаточная функция цепи.....	149
6.4 Практическое приложение к шестой главе.....	149
6.4.1 Расчет передаточных функций линейных цепей.....	149
6.4.2 Расчет временных характеристик линейных цепей.....	151
6.4.3 Расчет частотных и временных характеристик параллельного избирательного контура.....	155
6.4.4 Расчет частотных и временных характеристик последовательного избирательного контура.....	158
6.5 Выводы.....	161
<b>7. Прохождение сигналов через линейные цепи</b> .....	164
7.1 Анализ прохождения периодических сигналов через линейные цепи (метод комплексных амплитуд) .....	164
7.2 Операторный метод расчета отклика на выходе линейной цепи при произвольном непериодическом воздействии.....	167
7.3 Операторный метод определения установившейся реакции линейной цепи на включение периодического сигнала.....	172
7.4 Временные методы анализа (интегралы Дюамеля) .....	176
7.4.1 Операторный подход.....	176
7.4.2 Временной подход.....	177
7.5 Практическое приложение к седьмой главе.....	182
7.5.1 Расчет реакции дифференцирующей $RC$ - цепи на включение гармонического сигнала.....	182
7.5.2 Расчет реакции параллельного контура на включение гармонического сигнала.....	184
7.6 Выводы.....	187
<b>8 Спектральный анализ амплитудно-модулированных сигналов</b> .....	188
8.1 Основные определения.....	188
8.2 Тональная амплитудная модуляция гармонического несущего колебания.....	190
8.3 Энергетические характеристики АМ-сигнала.....	193
8.4 Амплитудная модуляция произвольным периодическим и непериодическим сигналами.....	194
8.5 Балансная и однополосная модуляция.....	196
8.6 Амплитудно-импульсная модуляция.....	198
8.7 Выводы.....	201

<b>9 Радиосигналы с угловой модуляцией</b> .....	202
9.1 Основные определения.....	202
9.2 Тональная угловая модуляция.....	202
9.3 Спектр сигнала с угловой тональной модуляцией при малых индексах.....	206
9.4 Спектр радиосигнала с угловой тональной модуляцией при произвольном индексе.....	208
9.5 Угловая модуляция сигналом сложной формы.....	212
9.6 Квадратурная амплитудная модуляция.....	214
9.7 Выводы.....	218
<b>10 Огибающая, частота и фаза узкополосного сигнала</b> .....	219
10.1 Физическая огибающая радиосигнала.....	219
10.2 Комплексная огибающая радиосигнала.....	219
10.3 Применение преобразования Гильберта для определения огибающей и фазового угла узкополосного сигнала.....	224
10.4 Аналитический сигнал и его свойства.....	229
10.5 Выводы.....	233
<b>11 Методы анализа прохождения узкополосных радиосигналов через избирательные цепи</b> .....	234
11.1 Понятие низкочастотного эквивалента избирательной цепи.....	234
11.2 Расчет НЧ – эквивалентов простейших колебательных цепей.....	235
11.3 Расчет НЧ – эквивалента произвольной частотно-избирательной цепи.....	238
11.4 Анализ связи между комплексными огибающими узкополосных сигналов на входе и выходе избирательной цепи.....	242
11.5 Расчет комплексной огибающей узкополосного сигнала на выходе избирательной цепи приближенным операторным методом.....	246
11.6 Расчет комплексной огибающей узкополосного сигнала на выходе избирательной цепи приближенным временным методом.....	246
11.7 Выводы.....	253
<b>Список рекомендуемой литературы</b> .....	255
<b>Приложения</b> .....	256
Таблица П.1 Комплексные функции и действия над ними.....	256
Таблица П.2 Тригонометрические функции и их преобразования.....	257
Таблица П.3 Дифференцирование функций.....	258
Таблица П.4 Определенные интегралы.....	259
Таблица П.5 Неопределенные интегралы.....	260

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное состояние научно-технического прогресса характеризуется резким повышением скорости передачи информации на расстояние. От специалистов, работающих в области создания комплексных систем обработки, хранения и передачи информации, требуется широта представлений, глубокое понимание фундаментальных закономерностей, в основе которых лежит теория преобразования сигналов.

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» (РТЦиС) отличается разнообразием содержания, так как в процессе обработки сигналы из аналоговых и непрерывных могут становиться импульсными, дискретными и цифровыми. Линейные и нелинейные преобразования сигналов выполняются в функциональных узлах канала передачи, которые в соответствии с передаваемыми сигналами могут быть аналоговыми, дискретными и цифровыми.

Для фундаментального изучения курса РТЦиС имеются первоклассные учебники, изданные в России и за рубежом [1,2,3,6,7,8], которые вооружают читателя разнообразными знаниями, универсальными методами анализа, многочисленными примерами и рассчитаны на годичный срок обучения.

Чтобы в ограниченные сроки освоить обязательный объем знаний и умений, предусмотренных по ГОС, необходимо четкое структурирование изучаемого материала, динамичная взаимосвязь с курсами «Высшая математика», «Физика», «Основы теории цепей».

Предлагаемое учебное пособие посвящено линейной части курса «Радиотехнические цепи и сигналы», а именно теории сигналов и методам анализа линейных цепей и систем.

Как показал опыт, студенты (особенно занимающиеся на заочных отделениях) испытывают трудности при самостоятельном изучении этой части курса РТЦиС, так как она тесно связана с такими разделами высшей математики, как «Ряды Фурье», «Преобразование Фурье» и «Преобразование Лапласа».

В процессе изучения РТЦиС студенты должны закрепить понятия и методы анализа, освоенные в курсе «Основы теории цепей», узнать новые методы анализа и современные способы математического описания сигналов, цепей и их взаимодействия. Особенно важно научиться выбирать математический аппарат, позволяющий решать поставленную задачу кратчайшим путем, видеть физическую сторону исследуемого явления, уметь составлять и сравнивать математические и физические модели изучаемых процессов.

В основу учебного пособия положена первая часть курса лекций по РТЦиС, читаемого автором на радиотехническом факультете Томского Государственного университета систем управления и радиоэлектроники.

Главы 1 и 2 знакомят с обобщенными функциями, рядами Фурье и их применением для анализа сигналов. Главы 3 и 4 посвящены преобразованиям Фурье и теоремам о спектрах, описывающим связь между временными и

спектральными (частотными) представлениями сигналов. Глава 5 посвящена преобразованиям Лапласа и их свойствам. Таким образом, в главах 1-5 подчеркивается диалектическое единство преобразований Лапласа, преобразований Фурье и рядов Фурье и исследуются взаимные связи между ними, формируя концепцию смены математического аппарата в зависимости от физической модели сигнала. Преобразования Фурье рассматриваются как обобщение рядов Фурье, а переход к преобразованиям Лапласа – как обобщение преобразований Фурье.

Главы 6 и 7 знакомят с применением рядов Фурье, преобразований Фурье и преобразований Лапласа для анализа линейных цепей и систем. Рассматривается возможность установления связи между сигналами на входе и выходе линейной цепи в произвольный момент времени.

В главах 8 и 9 рассматриваются радиосигналы с различными видами модуляции: амплитудной, частотной, фазовой. В процессе анализа применяются временные и векторные модели модулированных сигналов.

Главы 10 и 11 посвящены изучению внутренней структуры и особенностей взаимодействия узкополосных сигналов и частотно-избирательных линейных цепей. Результатом анализа является установление связи между комплексной огибающей радиосигнала и низкочастотным эквивалентом избирательной цепи.

Не все темы изложены одинаково полно и строго. Большое внимание уделено отбору материала, обеспечению наглядности, подготовке таблиц и графиков. Как на форму, так и на содержание пособия оказали существенное влияние коллеги по работе в прошлом и настоящем: Б.Л.Агранович, В.Ф.Сиверцев, Н.Н.Штарев, В.Н.Гришко, В.Л.Каминский, И.В.Мельникова, А.В.Пуговкин и другие. Велика роль студентов, общение с которыми вдохновляло, стимулировало и доставляло много радости. К разработке электронной версии учебного пособия с энтузиазмом подключались студенты радиотехнического факультета: Вережинский Максим, Гребенюк Юлия, Истомин Дмитрий, Круглов Роман, Присяжнюк Алексей и другие. Самой глубокой благодарности заслуживают основные разработчики электронной версии: Ворошилин Евгений, Родионов Владимир, Савин Александр, которые пожертвовали частью летних каникул, чтобы довести дело до конца.

# 1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИГНАЛОВ

## 1.1 Идеальные модели сигналов и их свойства

Для описания электрических цепей используют модели элементов цепи. Для описания сигналов также используют модели, а конкретнее, функции, графики, векторы, таблицы, диаграммы и прочие математические объекты. Их некорректно называть элементарными и трудно сравнивать между собой. Круг моделей, применяемых в процессе решения сложных задач, непрерывно расширяется.

Для описания постоянного или переменного напряжений, разряда емкости через сопротивление или реакции резонансного контура на произвольное воздействие и т.п. применяют существенно различающиеся, на первый взгляд, математические образы. Однако опыт показывает, что сравнивать их между собой и однозначно описывать можно, если своевременно ввести в обращение абстрактные математические модели, так называемые обобщенные функции: дельта-функцию и функцию Хевисайда.

Обобщенные функции представляют собой инструмент, позволяющий анализировать разнообразные сигналы сложной формы, как периодические так и непериодические. При использовании обобщенных функций нет необходимости выяснять, чем они «являются», так как имеет смысл лишь результат их «работы».

Дельта-функция ( $\delta$  – функция) не является функцией в смысле классического анализа.  $\delta$  – функция – это бесконечно короткий по длительности и бесконечно большой по амплитуде импульс единичной площади. Вводят  $\delta$  – функцию как предел дельта-образующих семейств функций. На рисунке 1.1а показано дельта-образующее семейство прямоугольных импульсов, амплитуда которых обратно пропорциональна длительности, а площадь равна единице.

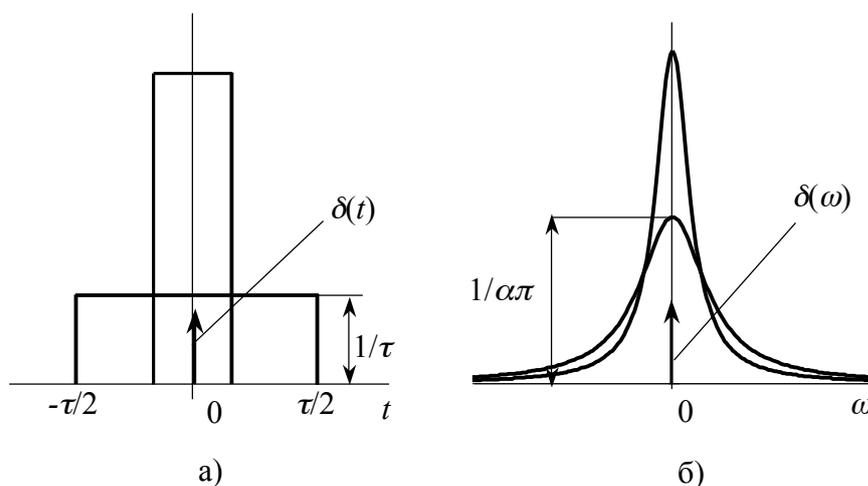


Рисунок 1.1 – Дельта-образующие семейства функций

На рисунке 1.1б представлено дельта-образующее семейство непрерывных функций с такими же свойствами:

$$\delta(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \infty, & \omega = 0, \\ 0, & \omega \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2} d(\omega/\alpha) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\alpha} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Изображают  $\delta$  – функцию короткой вертикальной стрелкой в точке, где она определена (не равна нулю). Таким образом,  $\delta(t)$  и  $\delta(\omega)$  – это условная сокращенная запись предела одного из дельта-образующих семейств функций (таблица 1.1), каждое из которых характеризуется тремя основными свойствами:

1) действие дельта-образующих семейств функций сосредоточено в начале координат

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

2) любая дельта-образующая функция имеет единичную площадь, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad (1.2)$$

3) все функции дельта-образующего семейства неотрицательны в окрестности нуля

$$\delta(t) > 0 \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Возникнув в недрах абстрактной математики,  $\delta$  – функция внедрилась не только в теорию, но и в практику анализа сигналов и цепей. Универсальные свойства  $\delta$  – функции позволяют выполнять математические операции непосредственно над  $\delta$  – функцией, не обращаясь к дельта-образующим семействам.

Рассмотрим подробнее некоторые из математических преобразований.

а) Задержка во времени.

Перемещение  $\delta$  – функции во времени математически выполняется с помощью замены в (1.1) аргумента  $t$  на  $(t - t_0)$  и обеспечивает перенос действия  $\delta$  – функции из начала координат в произвольную точку  $t_0$  (рисунок 1.2).

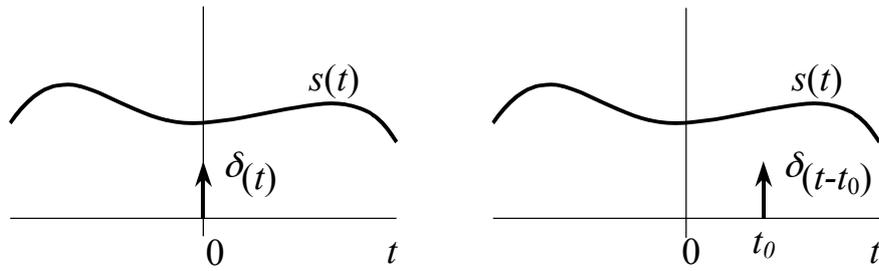


Рисунок 1.2 – Фильтрующее свойство  $\delta$  – функции и перенос действия из начала координат в точку  $t_0$

б) Фильтрующее свойство  $\delta$  – функции.

Использование  $\delta$  – функции позволяет аналитическим путем определить значение сигнала в произвольной точке  $t_0$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot \delta(t) dt = s(0), t_1 < 0 < t_2; \quad (1.4)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0), t_1 < t_0 < t_2. \quad (1.5)$$

в) Дифференцирование  $\delta$  – функции.

Применяя  $\delta$  – функцию, можно оценить скорость изменения сигнала в точке  $t_0$ :

$$\delta'(t - t_0) = 0, t \neq t_0; \quad (1.6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \cdot \delta'(t - t_0) dt = - \int_{t_1}^{t_2} s'(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = -s'(t_0). \quad (1.7)$$

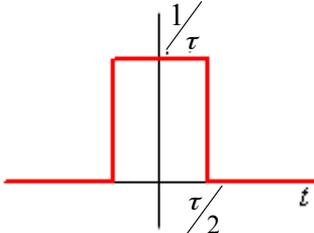
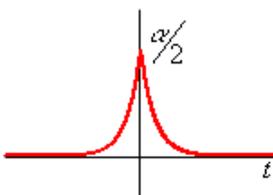
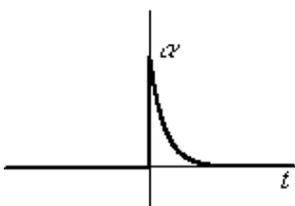
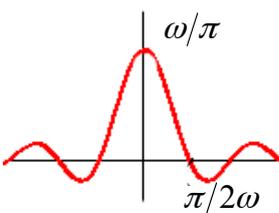
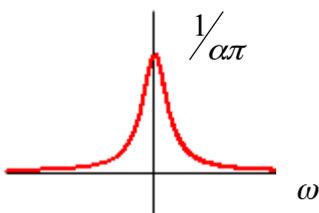
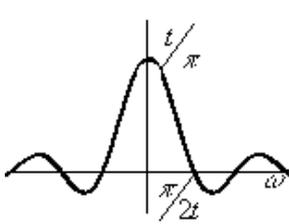
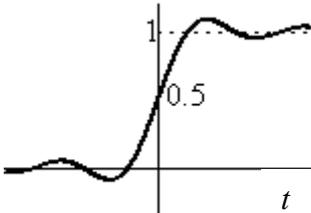
г) Интегрирование  $\delta$  – функции.

Интегрирование  $\delta$  – функции приводит к возникновению функции Хевисайда  $\sigma(t)$ :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) = \begin{cases} 1, t > 0, \\ 1/2, t = 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

На функции Хевисайда (единичном скачке) остановимся подробнее. Единичный скачок не является функцией в смысле классического анализа. Определяют функцию Хевисайда  $\sigma(t)$  как предел интеграла от дельта-образующих семейств. Два семейства, переходящие в пределе к функции Хевисайда, изображены на рисунке 1.3.

Таблица 1.1. Дельта-образующие функции

Аналитическое выражение	Графическое представление
$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\tau}, &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$	
$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t }$	
$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha e^{-\alpha t}, t \geq 0$	
$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$	
$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{j\Omega t} d\Omega$	
$\delta(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + \omega^2}$	
$\delta(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi \omega}$	
$\delta(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t e^{-j\omega\tau} d\tau$	
$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega\tau}{\pi\tau} d\tau$	

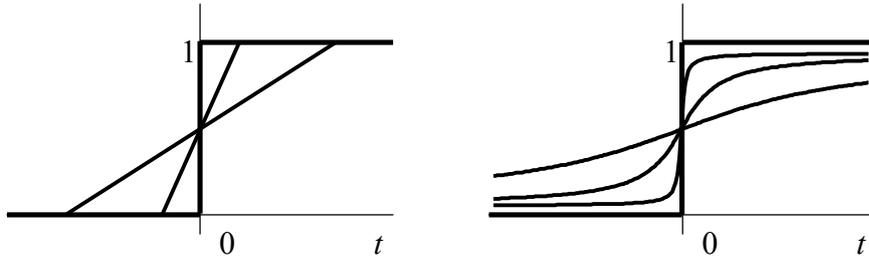


Рисунок 1.3 – Образование функций Хевисайда

Функцию Хевисайда изображают единичной ступенькой (с перебором уровня в начале координат) и, видимо, поэтому называют функцией включения или единичным скачком.

Основные свойства функции Хевисайда:

- 1) аналитическая связь с  $\delta$  – функцией

$$\sigma'(t) = \delta(t); \quad (1.9)$$

- 2) формирование одностороннего сигнала  $s(t)$  из произвольной функции  $f(t)$

$$s(t) = f(t) \cdot \sigma(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad (1.10)$$

- 3) определение значения сигнала в произвольной точке

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \sigma'(t - t_0) dt = s(t_0); \quad (1.11)$$

- 4) определение скорости изменения сигнала в точке

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \sigma''(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta'(t - t_0) dt = -s'(t_0). \quad (1.12)$$

Единичный скачок можно представить суммой четной и нечетной составляющих (рисунок 1.4):

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(t). \quad (1.13)$$

В таблице 1.1 представлены различные дельта - образующие функции с единичной площадью, которые при выполнении предельного перехода приобретают свойства  $\delta$  – функции. Используется  $\delta$  – функция в подынтегральных выражениях для сокращения объема преобразований и обеспечения ясности при дифференцировании не только непрерывных, но и разрывных функций.

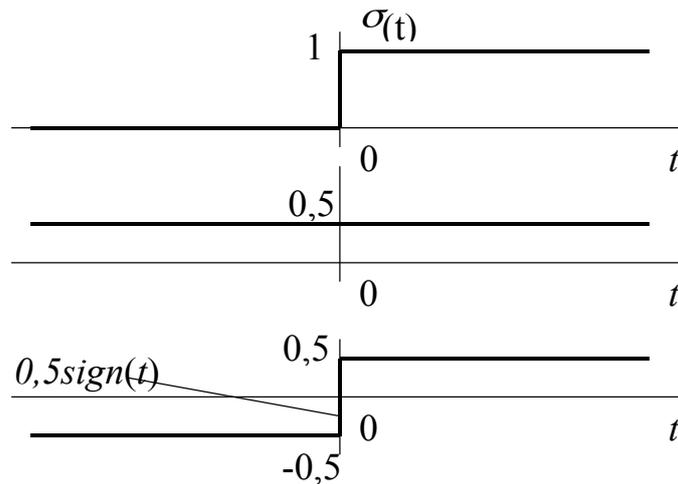


Рисунок 1.4 – Графическое представление единичного скачка

## 1.2 Описание алгоритмов взаимодействия обобщенных функций и сигналов

Функцию Хевисайда и  $\delta$  – функцию можно сдвигать, перемножать с другими функциями, интегрировать (например, по частям), дифференцировать и т.д. Соответствующий математический аппарат разработан.

Функция Хевисайда и  $\delta$  – функция - это линейные операторы (или функционалы), которые работают по определенным правилам, сведенным в таблицу 1.2. Правила эти просты и удобны. Они заменяют большой объем классических математических преобразований. Физический смысл преобразований с помощью обобщенных функций будем выяснять в процессе ознакомления с дисциплиной. Единичный скачок и  $\delta$  – функция – это не только функционалы, предписывающие правила преобразований, они имеют самостоятельное применение в качестве «испытательных» сигналов в теории цепей.

Рассмотрим различные преобразования, позволяющие аналитическим путем осуществить выбор момента времени и определить значения сигнала в произвольной точке:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = s(t_0); \quad (1.14)$$

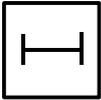
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sigma'(t - t_0) dt = s(t_0); \quad (1.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s'(t) \sigma(t - t_0) dt = -s(t_0). \quad (1.16)$$

Реализации преобразований в виде структурных схем содержат специализированные блоки, выполняющие следующие операции:



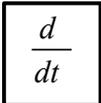
- умножение;



- задержка во времени;



- сложение;



- дифференцирование во времени;



- интегрирование во времени;



- усиление (с коэффициентом усиления A);



- усиление (с коэффициентом усиления A и инверсией).

Структурная схема, соответствующая преобразованию (1.14), и временные диаграммы, поясняющие ее работу в отмеченных точках, изображены на рисунках 1.5 и 1.6.

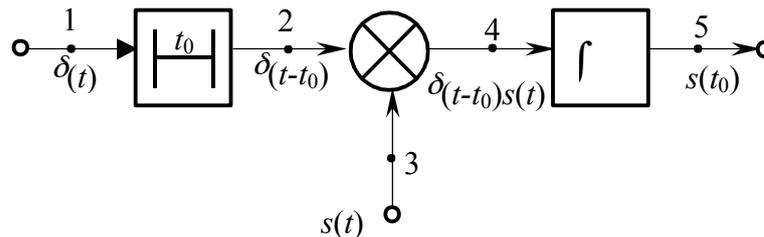


Рисунок 1.5 – Реализация функционального преобразования (1.14)

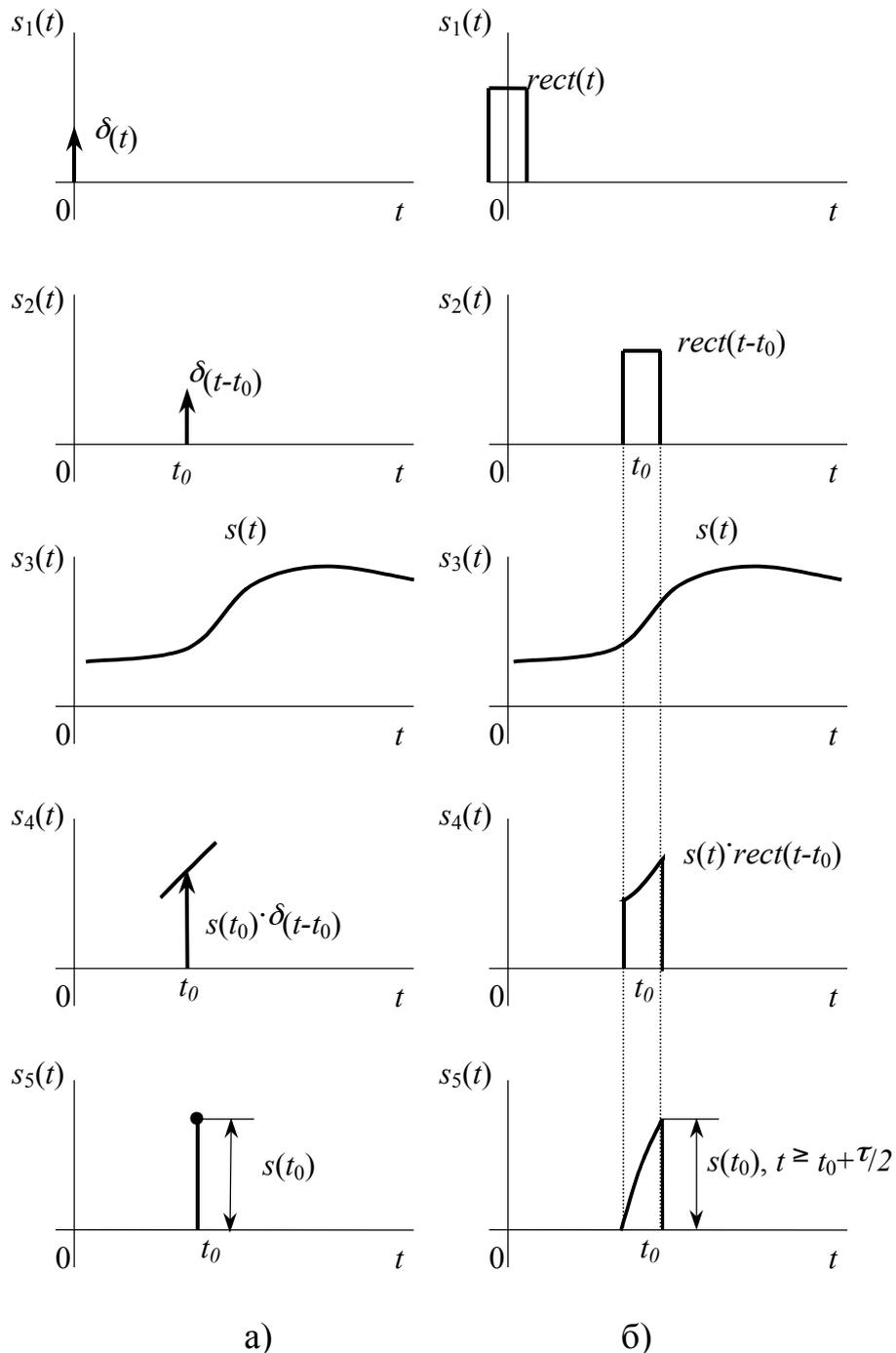


Рисунок 1.6 – Временные диаграммы (эпюры напряжений в контрольных точках схемы рис. 1.5), поясняющие аналитический выбор значения сигнала в произвольный момент времени с помощью двух «испытательных» функций: а)  $\delta$ –функции и б) прямоугольного импульса конечной длительности  $rect(t)$

Структурные схемы, реализующие два способа определения значения сигнала в произвольный момент времени (1.15) и (1.16), представлены на рисунке 1.7.

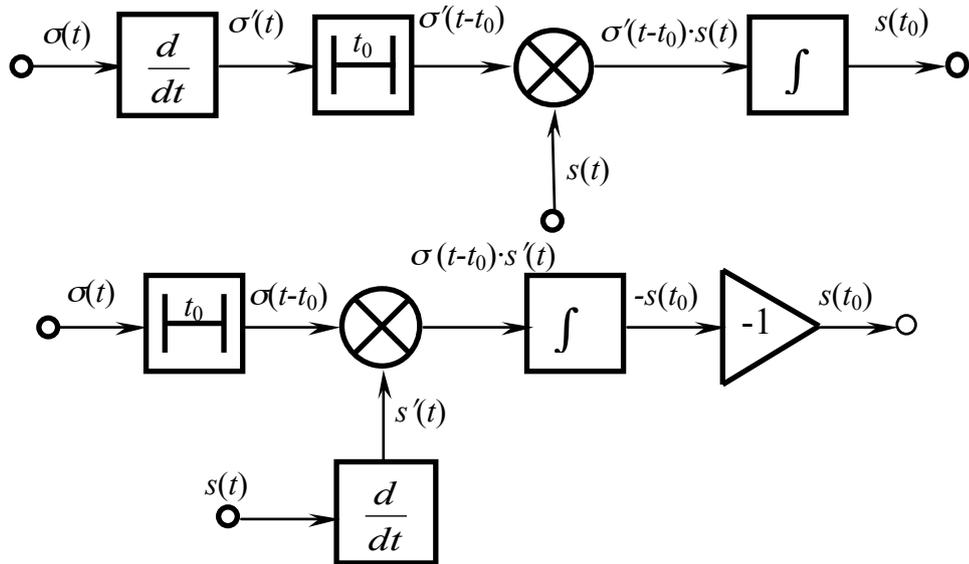


Рисунок 1.7 – Модификации структурных схем, соответствующие преобразованиям (1.15) и (1.16)

Путем аналогичных операций определяется скорость изменения сигнала в произвольной точке. Возможны различные формы записи интеграла взаимодействия сигнала и  $\delta$  – функции с целью определения скорости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s'(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = s'(t_0); \quad (1.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta'(t - t_0) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} s'(t) \delta(t - t_0) dt - s'(t_0). \quad (1.18)$$

Структурные схемы, формально реализующие необходимые линейные операции, изображены на рисунке 1.8

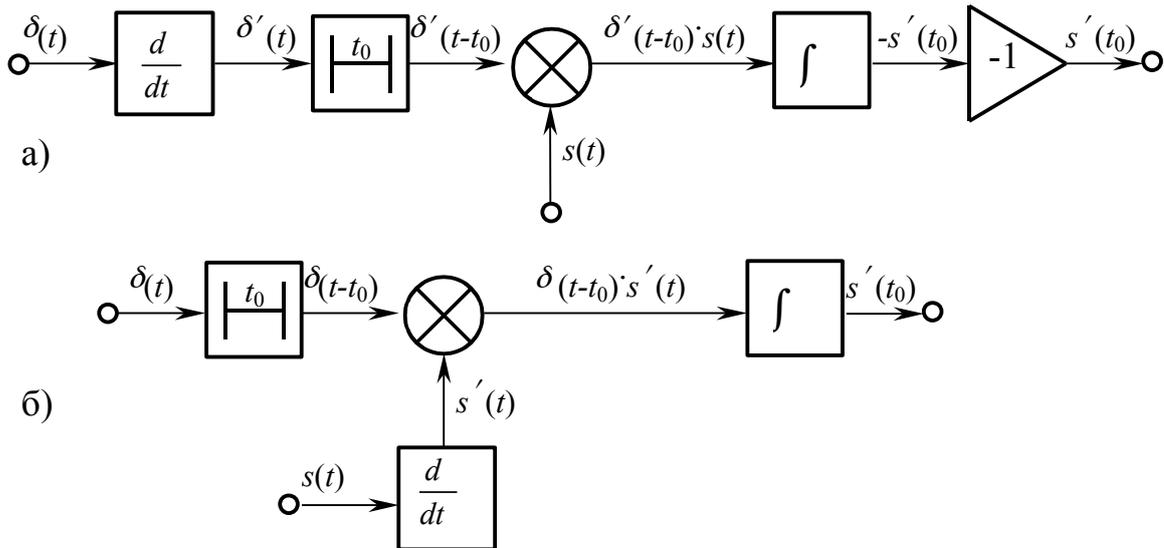


Рисунок 1.8 – Два способа определения скорости изменения сигнала в точке  $t_0$ : а) с инверсией и б) без инверсии

Таблица 1.2 – Правила взаимодействия обобщенных функций с сигналами

№ п/п	Описание преобразования	Математическое описание преобразования $\delta$ -функции
1	Определение $\delta$ – функции и единичного скачка	$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$ $\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$
2	Нормировка $\delta$ – функции	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
3	Сдвиг $\delta$ – функции во времени	$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}$
4	Изменение масштаба времени	$\delta(at - t_0) = \frac{1}{ a } \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$
5	Умножение сигнала на $\delta$ – функцию	$s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t)$ $s(t)\delta(t - t_0) = s(t_0)\delta(t - t_0)$
6	Взаимодействие сигнала $s(t)$ и $\delta$ – функции; $t_1 < t < t_2$	$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta(t)dt = s(0)$ $\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0)$ $\int_{t_1}^{t_2} \delta(\tau - t)\delta(\tau - t_0)d\tau = \delta(t - t_0)$

7	Дифференцирование $\delta$ – функции	$\delta'(t - t_0) = 0, t \neq t_0$
8	Взаимодействие сигнала $s(t)$ и производных от $\delta$ – функции; $t_1 < t < t_2$	$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta'(t)dt = - \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\delta(t)dt = -s'(0)$ $\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta'(t - t_0)dt = - \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\delta(t - t_0)dt = -s'(t_0)$ $\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta^{(n)}(t - t_0)dt = (-1)^n \int_{t_1}^{t_2} s^{(n)}(t)\delta(t - t_0)dt = (-1)^n s^{(n)}(t_0)$
9	Взаимодействие сигнала $s(t)$ и функции Хевисайда; $0 < \tau < t$	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sigma(t)dt = \int_0^{\infty} s(t)dt$ $\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau$
10	Взаимодействие сигнала $s(t)$ и производной от функции Хевисайда; $0 < \tau < t$	$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sigma'(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)\sigma(t)dt$ $s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sigma'(t - t_0)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)\sigma(t - t_0)dt$ $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\sigma'(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s'(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau$

### 1.3 Энергетические характеристики сигналов

Электрическое колебание, представляющее собой изменение напряжения, тока, заряда или другой физической величины, называют сигналом. Все физические сигналы принимают вещественные значения  $s(t)$ . Однако, в теории сигналов и в теории цепей широко используется понятие комплексного сигнала  $\dot{Z}(t)$ , реальная часть которого совпадает с физическим сигналом  $s(t)$ :

$$\dot{Z}(t) = s(t) + jv(t). \quad (1.19)$$

Рассмотрим энергетические характеристики как вещественных, так и комплексных сигналов.

#### 1.3.1 Энергетические характеристики вещественных сигналов

Основными энергетическими характеристиками вещественного сигнала  $s(t)$  являются: мгновенная мощность  $p(t)$ , энергия  $\mathcal{E}$  и средняя мощность  $P$ .

Мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении нагрузки  $R$ , равна

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t)R. \quad (1.20)$$

Энергия и средняя мощность на интервале времени  $(t_1, t_2)$  определяются выражениями (при условии  $R = 1 \text{ Ом}$ ):

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt; \quad (1.21)$$

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt. \quad (1.22)$$

Энергетические характеристики суммы двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  кроме энергетических характеристик каждого сигнала содержат дополнительное слагаемое, которое определяет энергию взаимодействия этих сигналов:

$$p_{\Sigma}(t) = [s_1(t) + s_2(t)]^2 = p_1(t) + p_2(t) + 2p_{12}(t); \quad (1.23)$$

$$\mathcal{E}_{\Sigma} = \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_{12}; \quad (1.24)$$

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = P_1 + P_2 + 2P_{12}. \quad (1.25)$$

Здесь  $p_{12}(t)$ ,  $\mathcal{E}_{12}$ ,  $P_{12}$  - взаимная мгновенная мощность, взаимная энергия и взаимная средняя мощность, которые описываются очевидными соотношениями:

$$p_{12}(t) = s_1(t)s_2(t),$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt,$$

$$P_{12} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt.$$

Структурные схемы, соответствующие преобразованиям (1.21) и (1.24), приведены на рисунке 1.9.

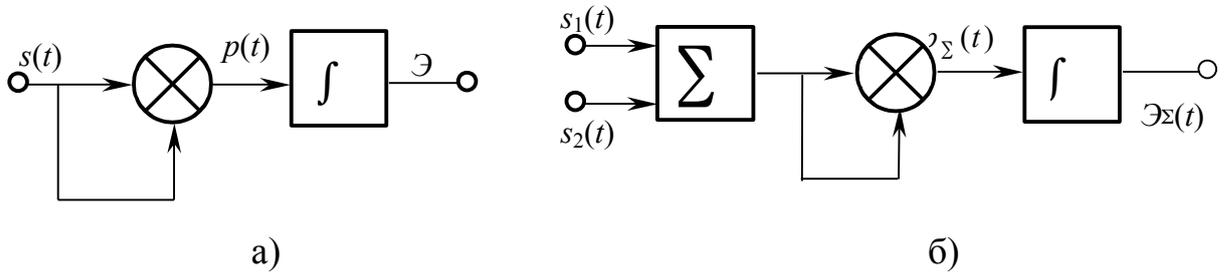


Рисунок 1.9 – Реализация преобразований (1.21), (1.24)

Если энергия взаимодействия равна нулю, то сигналы энергетически независимы, т.е. не взаимодействуют друг с другом на интервале времени  $(t_1, t_2)$ . Такие сигналы называются ортогональными на указанном интервале:

$$\int_{t_1}^{t_2} s_1(t) \cdot s_2(t) dt = 0. \quad (1.26)$$

Взаимная энергия двух сигналов является их скалярным произведением и относится к фундаментальным характеристикам теории сигналов.

### 1.3.2 Энергетические характеристики комплексных сигналов

Энергетические характеристики комплексного сигнала  $\dot{Z}(t)$  выражаются с учетом теории комплексного переменного следующим образом:

$$p_Z(t) = \dot{Z}(t) \cdot \dot{Z}^*(t) = [s(t) + jv(t)] \cdot [s(t) - jv(t)] = s^2(t) + v^2(t). \quad (1.27)$$

Мгновенная мощность комплексного сигнала равна сумме мгновенных мощностей действительной и мнимой частей:

$$p_Z(t) = p_s(t) + p_v(t). \quad (1.28)$$

Энергия комплексного сигнала определяется интегралом от произведения комплексно-сопряженных сигналов:

$$\mathcal{E}_Z = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Z}(t) \cdot \dot{Z}^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) + \int_{t_1}^{t_2} v^2(t), \quad (1.29)$$

$$\mathcal{E}_Z = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_v.$$

Средняя мощность комплексного сигнала представляет собой сумму средних мощностей действительной и мнимой частей:

$$P_Z = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \dot{Z}(t) \cdot \dot{Z}^*(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) + \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) \right], \quad (1.30)$$

$$P_Z = P_s + P_v.$$

Таким образом, энергетические характеристики комплексного сигнала равны сумме энергетических характеристик вещественной и мнимой частей. Энергия суммы двух комплексных сигналов равна:

$$\mathcal{E}_Z = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{Z}_1(t) + \dot{Z}_2(t)) \cdot (\dot{Z}_1^*(t) + \dot{Z}_2^*(t)) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [\dot{Z}_1(t) \cdot \dot{Z}_1^*(t) + \dot{Z}_2(t) \cdot \dot{Z}_2^*(t) + \dot{Z}_1(t) \cdot \dot{Z}_2^*(t) + \dot{Z}_2(t) \cdot \dot{Z}_1^*(t)] dt, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}_{Z_1} + \mathcal{E}_{Z_2} + 2\mathcal{E}_{s_1 s_2} + 2\mathcal{E}_{v_1 v_2} \pm j(\mathcal{E}_{s_1 v_2} - \mathcal{E}_{v_1 s_2}).$$

Два комплексных сигнала  $\dot{Z}_1(t)$  и  $\dot{Z}_2(t)$  будут ортогональными, если энергия их взаимодействия равна нулю, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{Z}_1(t) \cdot \dot{Z}_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Z}_2(t) \cdot \dot{Z}_1^*(t) dt = 0. \quad (1.32)$$

Энергия взаимодействия сигналов, которые в общем случае могут не совпадать во времени, оценивается с помощью корреляционных характеристик: автокорреляционной и взаимной корреляционной функций.

### 1.3.3 Корреляционные характеристики детерминированных сигналов

Взаимная энергия вещественного сигнала  $s(t)$  и его перемещающейся во времени копии  $s(t - \tau)$  называется автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала и обозначается  $B(\tau)$ :

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) dt. \quad (1.33)$$

Энергия сигнала  $\mathcal{E}_s$  численно равна значению АКФ в точке  $\tau = 0$ :

$$B(0) = \mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (1.34)$$

АКФ является четной функцией времени  $B(\tau) = B(-\tau)$ , т.к.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) dt. \quad (1.35)$$

Структурная схема, демонстрирующая процесс получения АКФ согласно преобразованию (1.33), изображена на рисунке 1.10.

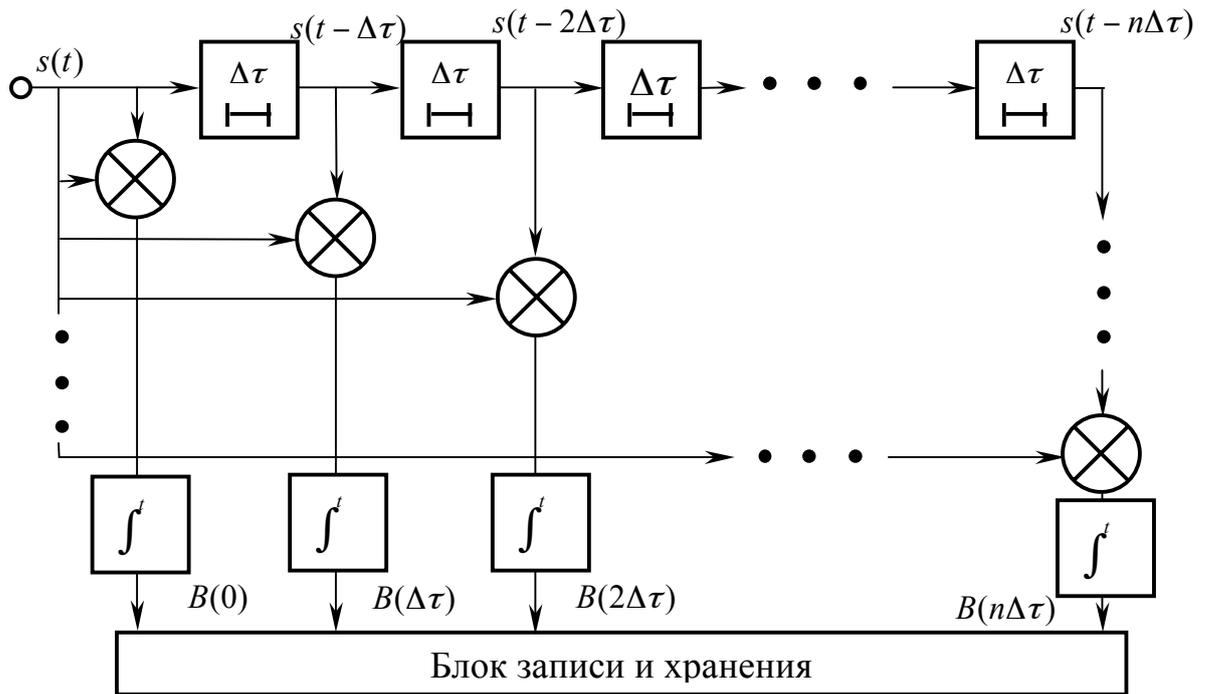


Рисунок 1.10 – Структурная схема для получения АКФ

На выходе схемы (в блоке записи и хранения) имеем АКФ в дискретные моменты времени  $n\Delta\tau$ , соответствующие неотрицательным временам задержки  $\tau \geq 0$ .

Взаимная энергия двух разных вещественных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , один из которых (первый или второй) перемещается во времени, называется взаимной корреляционной функцией (ВКФ) и обозначается  $B_{21}(\tau)$  или  $B_{12}(\tau)$  соответственно:

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t - \tau) dt, \quad (1.36)$$

$$B_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1(t - \tau) dt. \quad (1.37)$$

ВКФ  $B_{21}(\tau)$  является зеркальной копией ВКФ  $B_{12}(\tau)$ , т.е.

$$B_{21}(\tau) = B_{12}(-\tau). \tag{1.38}$$

Примеры получения АКФ и ВКФ показаны на рисунке 1.11.

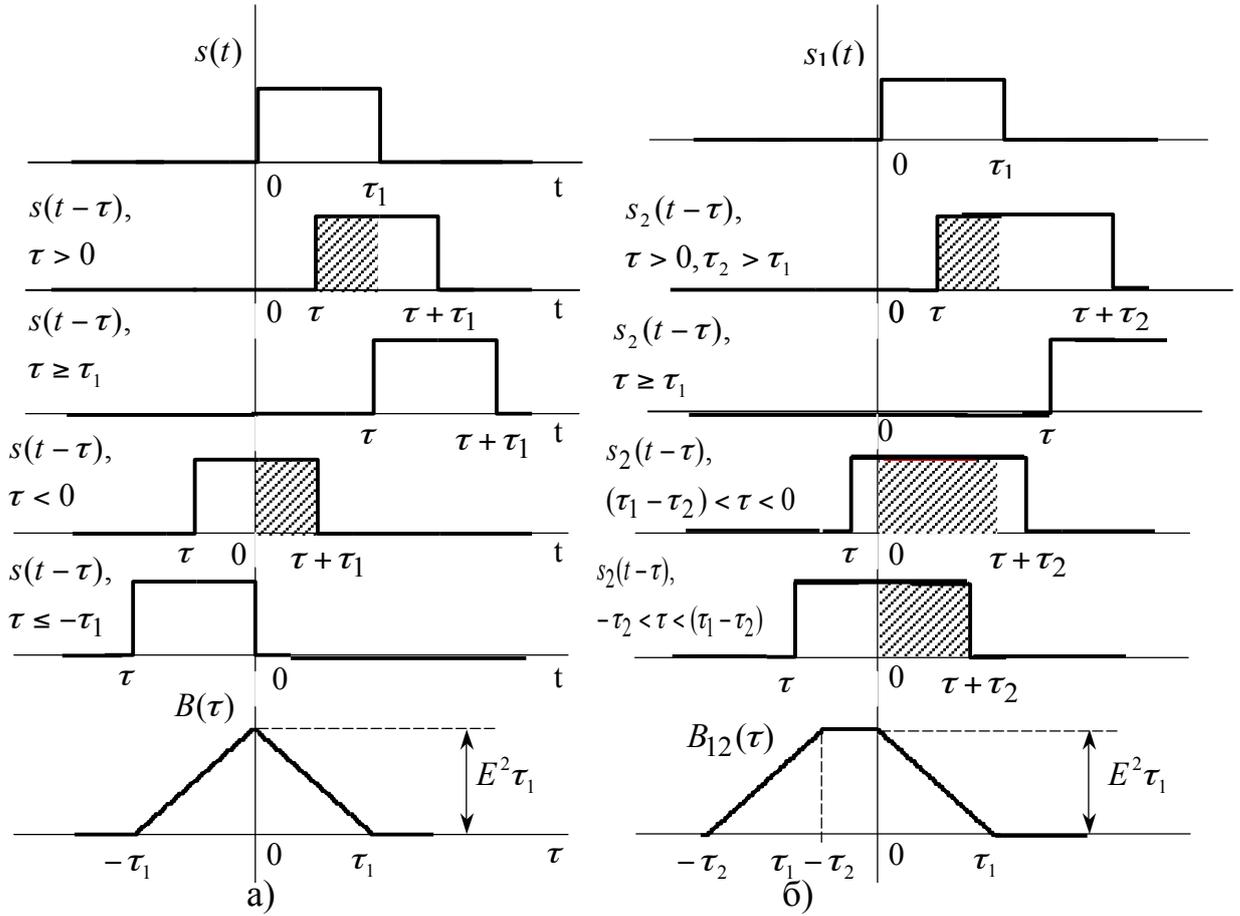


Рисунок 1.11 – Построение корреляционных функций:

а) АКФ прямоугольного импульса,

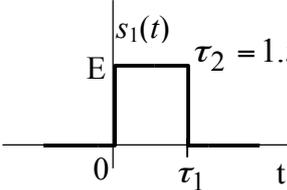
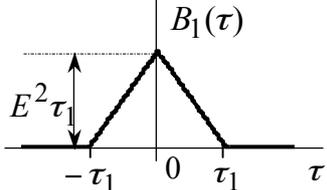
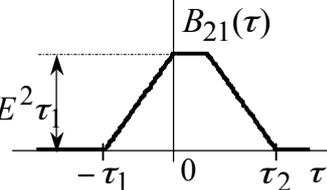
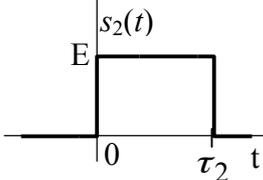
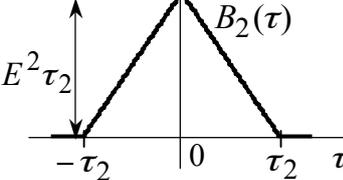
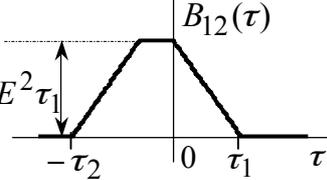
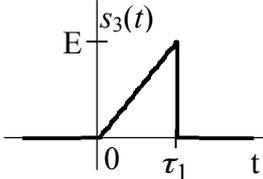
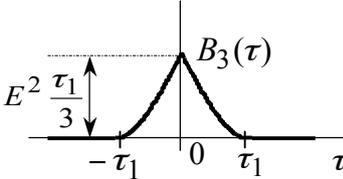
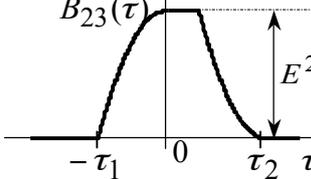
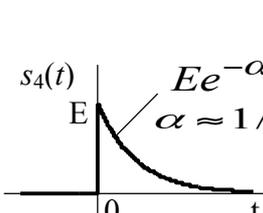
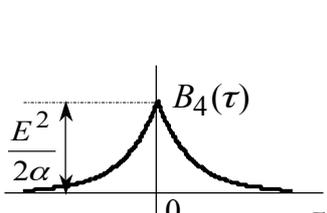
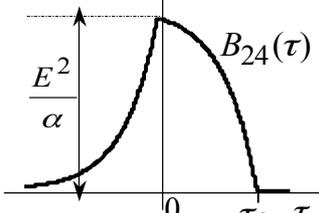
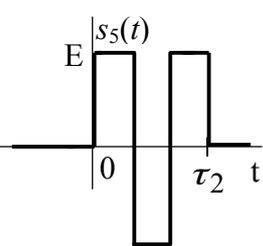
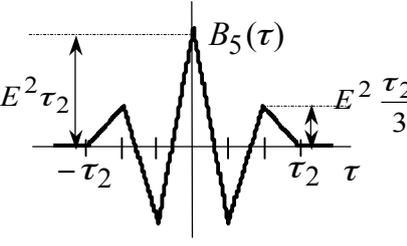
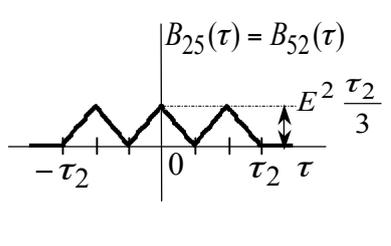
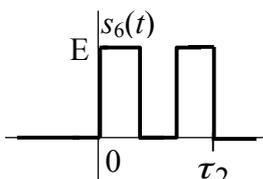
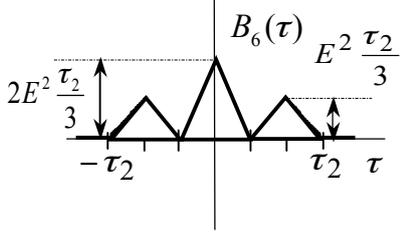
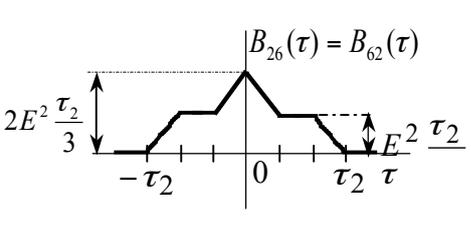
б) ВКФ двух импульсов разной длительности

В таблице 1.3 приведены графические иллюстрации АКФ и ВКФ различных вещественных сигналов.

Взаимная энергия комплексного сигнала  $\dot{Z}(t)$  и его перемещающейся во времени сопряженной копии  $\dot{Z}^*(t - \tau)$  называется автокорреляционной функцией комплексного сигнала и обозначается  $B_Z(\tau)$ :

$$B_Z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Z}(t) \cdot \dot{Z}^*(t - \tau) dt. \tag{1.39}$$

Таблица 1.3- Примеры АКФ и ВКФ некоторых вещественных сигналов

Сигнал $s_n(t)$	Автокорреляционная функция (АКФ) $B_n(\tau)$	Взаимная корреляционная функция (ВКФ) $B_{nm}(\tau)$
		
		
		
		
		
		

## 1.4 Обобщенное линейное представление сигналов

Исследуемый сигнал  $s(t)$  можно представить взвешенной суммой элементарных функций

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \dot{\varphi}_n(t), \quad (1.40)$$

где  $\dot{C}_n$  – комплексный (в общем случае) коэффициент пропорциональности;  $\dot{\varphi}_n$  – комплексная (в общем случае) элементарная функция.

Каждая из элементарных составляющих  $\dot{\varphi}_n(t)$  должна быть, с одной стороны, функционально связана с любой другой  $\dot{\varphi}_k(t)$ , а с другой стороны – обладать энергетической независимостью. То есть энергия суммы элементарных колебаний  $\mathcal{E}_\Sigma$  должна равняться сумме энергий отдельных составляющих:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Sigma &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \dot{\varphi}_n(t) \right] \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k^* \dot{\varphi}_k^*(t) \right] dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \dot{C}_k^* \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Энергетическая независимость (ортогональность) элементарных колебаний на интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  определяется следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt = \begin{cases} \mathcal{E}_{\varphi_n} = \|\dot{\varphi}_n\|^2, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \quad (1.42)$$

В выражении (1.42) использовано обозначение  $\|\dot{\varphi}_n\|$ , под которым в математическом анализе понимают норму бесконечномерного пространства функций  $\{\dot{\varphi}_n(t)\}$ . В нашем случае норму определяют как квадратный корень из энергии.

Учитывая (1.42), преобразуем (1.41) к виду:

$$\mathcal{E}_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n|^2 \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\varphi}_n(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\varphi_n} |\dot{C}_n|^2. \quad (1.43)$$

Набор ортогональных функций  $\{\dot{\varphi}_n(t)\}$  называют *ортогональным базисом*.

Пространство функций (базис) называется *метрическим*, если введен способ определения нормы.

Если энергии элементарных составляющих ортогонального базиса  $\mathcal{E}_{\varphi_n}$  не зависят от своего порядкового номера, то их подвергают нормировке, с тем чтобы норма  $\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_n}}$  равнялась единице. Такой базис называют ортонормированным (или ортонормальным).

Коэффициент пропорциональности  $\dot{C}_n$  в выражении (1.40) учитывает степень взаимодействия исследуемого сигнала  $s(t)$  и элементарного колебания  $\dot{\varphi}_n(t)$ . Для получения математического выражения  $\dot{C}_n$  умножим левую и правую части (1.40) на комплексно-сопряженную функцию  $\dot{\varphi}_k^*(t)$  и проинтегрируем в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt = \dot{C}_n \mathcal{E}_{\varphi_n} = \dot{C}_n \|\varphi_n\|^2, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \dot{\varphi}_n(t) dt = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t) \dot{\varphi}_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^* dt}. \quad (1.45)$$

Коэффициент пропорциональности  $\dot{C}_n$  представляет собой отношение взаимной энергии сигнала  $s(t)$  и элементарного колебания  $\dot{\varphi}_n(t)$  к собственной энергии отдельного элементарного колебания  $\dot{\varphi}_n(t)$ .

Ряд (1.40) называется *обобщенным рядом Фурье*, если выполняются условия (1.42) и (1.45).

Структурная схема, позволяющая получить коэффициент пропорциональности  $\dot{C}_n$  для данного сигнала  $s(t)$  и данного базиса  $\{\dot{\varphi}_n(t)\}$ , является обобщенным анализатором спектра (рисунок 1.12). Он реализуем физически в случае действительного сигнала и действительного базиса.

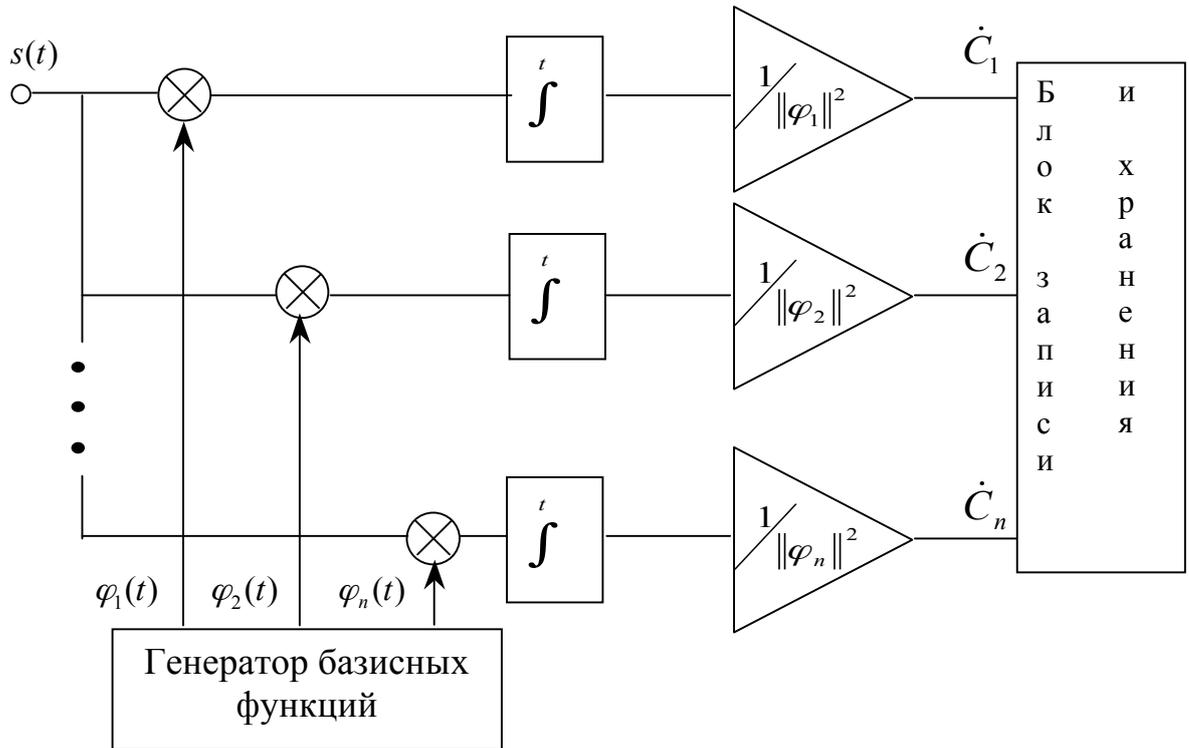


Рисунок 1.12 – Обобщенный анализатор спектра

Рассмотрим усеченный ряд Фурье, который называют оценкой сигнала  $s(t)$

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n \dot{\varphi}_n(t). \quad (1.46)$$

Энергию оценки  $s_N(t)$  найдем по формуле (1.43)

$$\mathcal{E}_N = \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 \mathcal{E}_{\varphi_n}. \quad (1.47)$$

Разность исследуемого сигнала  $s(t)$  и его оценки  $s_N(t)$  представляет собой мгновенное значение ошибки аппроксимации  $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = s(t) - s_N(t). \quad (1.48)$$

Энергия ошибки определится следующим образом:

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n \dot{\varphi}_n(t)]^2 dt, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt}_{\mathcal{E}_s} - 2 \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n \int_{t_1}^{t_2} s(t) \dot{\varphi}_n(t) dt + \\
&+ \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \dot{C}_n \dot{C}_k^* \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_k^*(t) dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt - 2 \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 \mathcal{E}_{\varphi_n} + \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 \mathcal{E}_{\varphi_n} = \mathcal{E}_s - \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 \mathcal{E}_{\varphi_n} = \mathcal{E}_s - \mathcal{E}_N. \quad (1.50)
\end{aligned}$$

Энергия ошибки согласно (1.50) равна разности энергий сигнала  $s(t)$  и его оценки  $s_N(t)$ . Относительное значение энергии ошибки найдем как отношение энергий ошибки и сигнала:

$$\delta = \frac{\langle \varepsilon^2(t) \rangle}{\mathcal{E}_s} = \frac{\mathcal{E}_s - \mathcal{E}_N}{\mathcal{E}_s} = 1 - \frac{1}{\mathcal{E}_s} \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 \mathcal{E}_{\varphi_n}. \quad (1.51)$$

Если при  $N \rightarrow \infty$  относительное значение энергии ошибки стремится к нулю ( $\delta \rightarrow 0$ ), то набор элементарных ортогональных функций называется *полным базисом*.

Реализация преобразования (1.46) показана на рисунке 1.13.

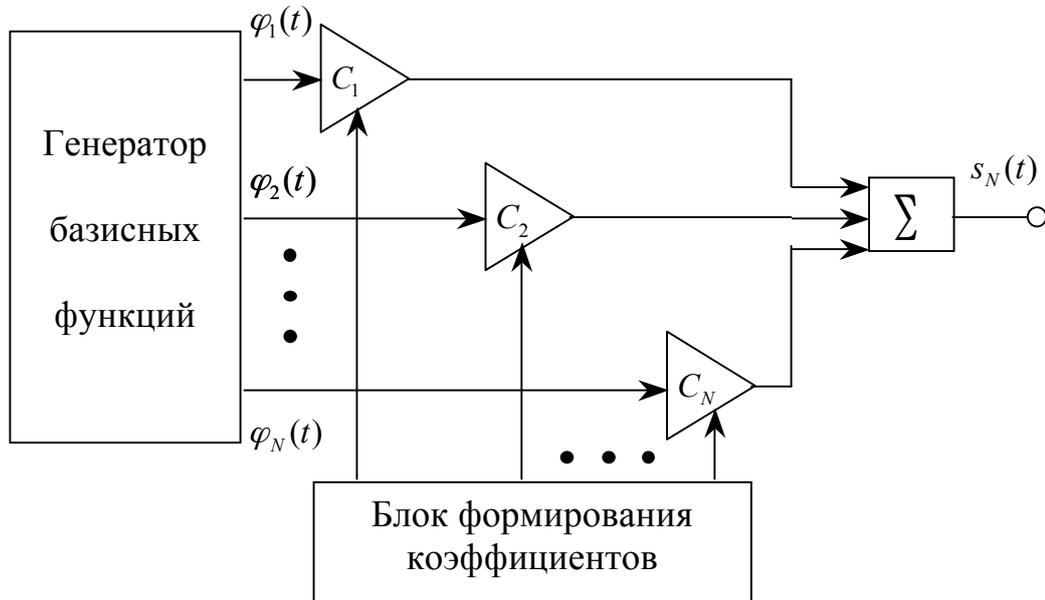


Рисунок 1.13 – Блок-схема синтеза сигнала (точнее, оценки) с помощью заданной системы базисных функций

## 1.5 Динамическое представление сигналов

Примером полной ортогональной системы функций является совокупность прямоугольных импульсов единичной амплитуды, изображенная на рисунке 1.14. Обобщенное представление сигнала  $s(t)$  в этом базисе представлено на рисунке 1.15.

Элементарные прямоугольные импульсы описываются разностью функций Хевисайда, которую будем обозначать  $rect(t)$  (от англ. *rectangle* – прямоугольник):

$$rect(t) = \sigma\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (1.52)$$

Импульсы  $rect(t - n\Delta\tau)$  имеют длительность  $\Delta\tau$  и сдвинуты друг относительно друга по времени на интервалах  $n\Delta\tau$ , поэтому ортогональность базиса очевидна.

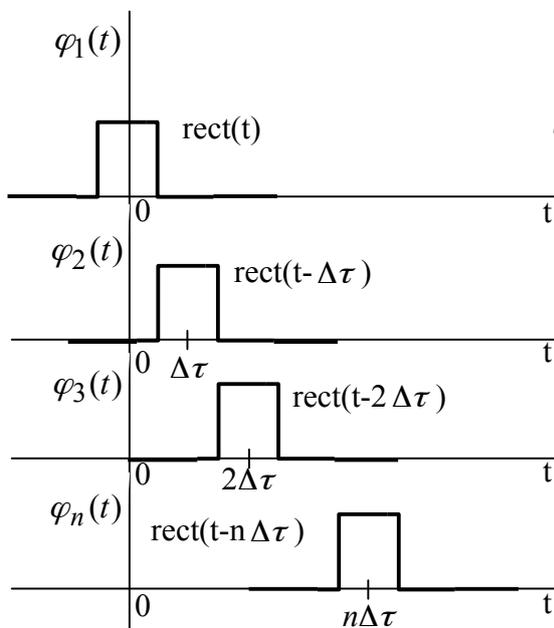


Рисунок 1.14 – Пример ортогонального базиса

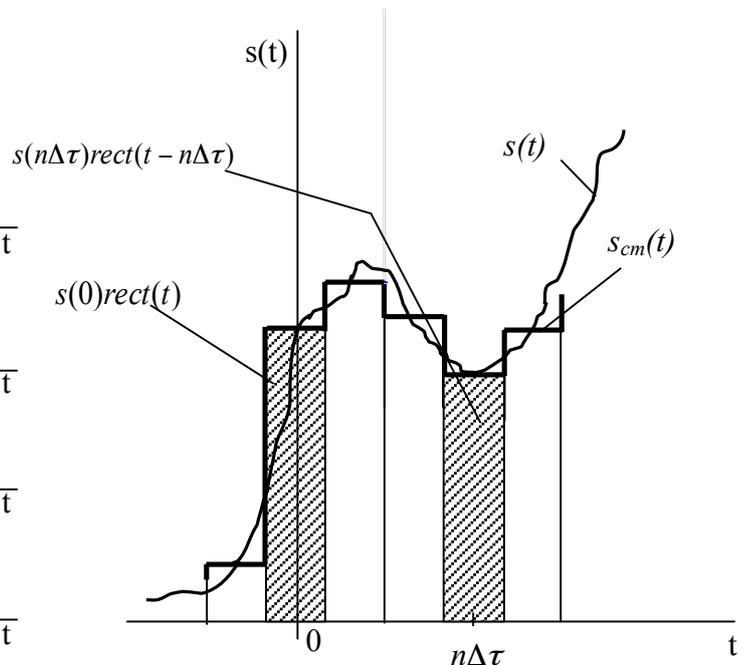


Рисунок 1.15 – Динамическое представление сигнала функциями  $rect(t - n\Delta\tau)$

Взвешенное суммирование элементарных функций приводит к возникновению ступенчатой аппроксимации  $s_{cm}(t)$  аналогового сигнала  $s(t)$ . Коэффициент взвешивания  $\dot{C}_n$  при этом равен мгновенному значению аналогового сигнала  $s(t)$  в точке  $t = n\Delta\tau$ , т.е.  $\dot{C}_n = s(n\Delta\tau)$ :

$$s_{cm}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta\tau) rect(t - n\Delta\tau). \quad (1.53)$$

Умножим и разделим правую часть уравнения (1.53) на  $\Delta\tau$  и перейдем к пределу при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ :

$$s(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta\tau) \left[ \frac{\text{rect}(t - n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] \Delta\tau. \quad (1.54)$$

Дискретный параметр  $n\Delta\tau$  при изменении  $n$  в бесконечных пределах и  $\Delta\tau \rightarrow 0$  преобразуется в непрерывный параметр  $\tau$ . Малая длительность импульса  $\Delta\tau$  переходит в качественно новый параметр – бесконечно малое приращение аргумента  $d\tau$ .

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\text{rect}(t - n\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \delta(t - \tau).$$

Пределом суммы по дискретному аргументу  $n$  станет интеграл по непрерывному параметру  $\tau$ :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

или (1.55)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau) \delta(\tau) d\tau.$$

Получившееся интегральное преобразование (1.55) называется “сверткой”, для которой можно использовать формальное обозначение  $s(t) = s(t) \otimes \delta(t)$ . Кроме того, преобразование (1.55) иллюстрирует фильтрующее свойство  $\delta$  – функции. Интегральное преобразование (1.55) лежит в основе динамического представления сигнала  $s(t)$  с помощью  $\delta$  – функций.

В выражении (1.55) заменим  $\delta$  – функцию на производную от функции Хевисайда  $\delta(t - \tau) = \sigma'(t - \tau)$  и, выполняя интегрирование по частям, найдем

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \sigma'(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s'(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.56)$$

Выражение (1.56) так же, как и (1.55), является сверткой. В (1.56) “сворачиваются” сигнал  $s(t)$  с производной от функции Хевисайда либо производная от сигнала  $s'(t)$  с функцией Хевисайда:

$$s(t) = s(t) \otimes \sigma'(t) = s'(t) \otimes \sigma(t).$$

На рисунке 1.16 имеется графическая иллюстрация интеграла свертки, анализ которой показывает, что верхний предел интегрирования целесооб-

разно заменить на текущий параметр  $t$  (полагая  $t \rightarrow \infty$ ). Параметр интегрирования  $\tau$  находится внутри параметра  $t$ , т.е.

$$s(t) = \int_{-\infty}^t s'(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.57)$$

На рисунке 1.17 показано динамическое представление одностороннего (с разрывом в начале координат) сигнала взвешенной суммой функций Хевисайда, смещенных друг относительно друга на интервал времени  $n\Delta\tau$ :

$$s_{cm}(t) = \sum_{n=0}^{N \rightarrow \infty} C_n \sigma(t - n\Delta\tau). \quad (1.58)$$

Весовой коэффициент  $C_n$  зависит от скорости изменения сигнала в момент времени  $t = n\Delta\tau$ . Величина скачка прямо пропорциональна приращению сигнала  $\Delta s_n$  в точке  $t = n\Delta\tau$ , т.е.

$$C_n = \Delta s_n = s'(n\Delta\tau) \Delta\tau,$$

$$\begin{aligned} s_{cm}(t) &= \Delta s_0 \sigma(t) + \Delta s_1 \sigma(t - \Delta\tau) + \dots + \Delta s_N \sigma(t - N\Delta\tau) = \\ &= \Delta s_0 \sigma(t) + \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} \Delta s_n \sigma(t - n\Delta\tau). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Переходя к пределу при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , получим

$$s(t) = s(0) \sigma(t) + \int_0^t s'(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.60)$$

Разрыв в начале координат обозначен как  $\Delta s_0$  или  $s(0)$ . Выражение (1.60) называют динамическим представлением сигнала  $s(t)$  с помощью функций Хевисайда.

Суть динамического представления заключается в приближённом описании реального сигнала  $s(t)$  суммой некоторых элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени. Точное представление исходного сигнала получается в пределе, если длительность отдельных элементарных сигналов стремится к нулю. Динамическое представление подчёркивает развивающийся во времени характер процесса.

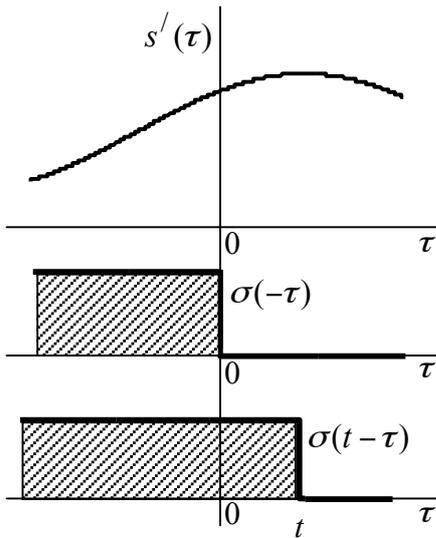


Рисунок 1.16 – Графическое представление интеграла свертки

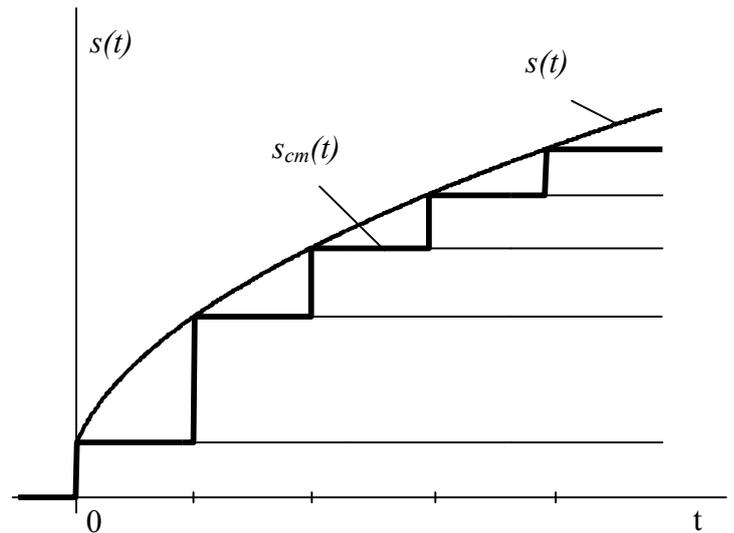


Рисунок 1.17 – Динамическое представление одностороннего сигнала функциями Хевисайда

## 1.6 Выводы

Основные операции, которым могут подвергаться сигналы на первом этапе анализа, являются:

- а) перемещение во времени;
- б) интегрирование;
- в) дифференцирование;
- г) взвешенное суммирование;
- д) определение мгновенного значения;
- е) анализ энергии взаимодействия как основной способ сравнения сигналов между собой.

Наиболее универсальными объектами для сравнения в настоящее время являются  $\delta$  – функция и единичный скачок, которые, как было показано, легко поддаются всем видам преобразований.

Качество аналитического представления произвольного сигнала взвешенной суммой ортогональных элементарных функций зависит от характеристик полного ортогонального набора функций.

## 2 ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 2.1 Периодические сигналы и их свойства

В теории и практике радиотехники и радиоэлектроники часто встречаются процессы, которые могут рассматриваться как периодические.

Сигнал  $s(t)$  называется периодическим, если выполняется тождество

$$s(t) = s(t + T) = s(t + 2T) = \dots = s(t + kT), \quad (2.1)$$

где  $T$  – период;  $k$  – любое целое число, положительное или отрицательное; аргумент  $t$  меняется в бесконечных пределах.

Периодический сигнал  $s(t)$  с периодом  $T$  обладает свойством, состоящим в том, что интеграл от него, взятый на интервале длиной  $T$ , не меняется при изменении пределов интегрирования, а именно:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} s(t) dt = \int_{t_2}^{t_2+T} s(t) dt = \int_0^T s(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt. \quad (2.2)$$

Периодический сигнал  $s(t)$ , пример которого изображен на рисунке 2.1, может быть представлен бесконечной суммой непериодических сигналов  $s_T(t)$ , сдвинутых друг относительно друга по закону

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_T(t + kT), \quad (2.3)$$

где  $s_T(t)$  – описание периодического сигнала в пределах периода  $T$ .

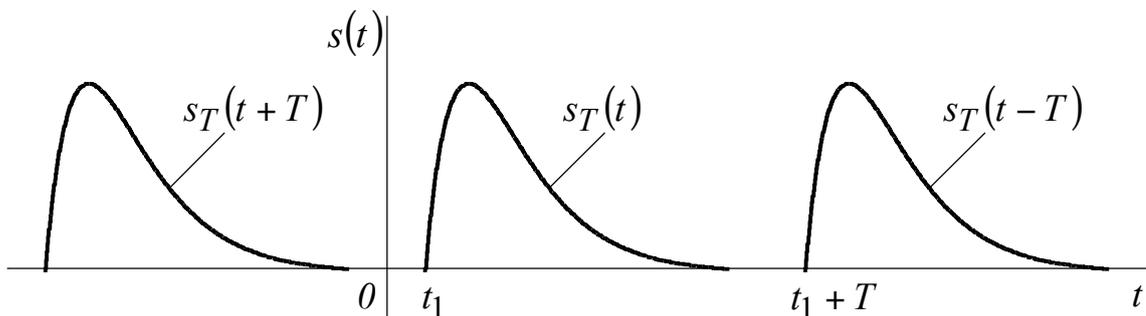


Рисунок 2.1 – Периодический сигнал  $s(t)$

Следует помнить, что бесконечной повторяемости явлений в строгом смысле, определяемом выражением (2.1), не существует в действительности. Таким образом, периодические сигналы являются полезной абстракцией, используемой при решении практических задач.

## 2.2 Гармонические колебания (гармоники)

Обычно под сигналом понимают физический процесс, несущий сообщение о состоянии какой-либо физической системы. Под электрическим сигналом понимают изменение какой-либо электрической величины в соответствии с исходной физической величиной (механической, химической, тепловой, оптической, звуковой и др.).

Естественно рассматривать сигнал как результат некоторых измерений в процессе исследований, поэтому сигналами, чаще всего, являются величины, изменяющиеся во времени. Временное представление сигнала в виде функции  $s(t)$  или графика – это лишь один из простых способов описания сигналов, которые будут обсуждаться ниже.

Примером простейшего периодического сигнала является гармоническое колебание вида

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \cos \omega_1(t + t_1) = A_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t + t_1). \quad (2.4)$$

Сигнал  $s_1(t)$ , описываемый тригонометрической функцией, в математике называют *гармоникой* с амплитудой  $A_1$ , угловой частотой  $\omega_1$ , фазой колебания  $\omega_1 t + \varphi_1$ , начальной фазой  $\varphi_1$  и периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ .

Для графического отображения гармонического колебания используют либо временное (рисунок 2.2) либо частотное (рисунок 2.3) представление. Оба представления позволяют однозначно описать гармоническое колебание.

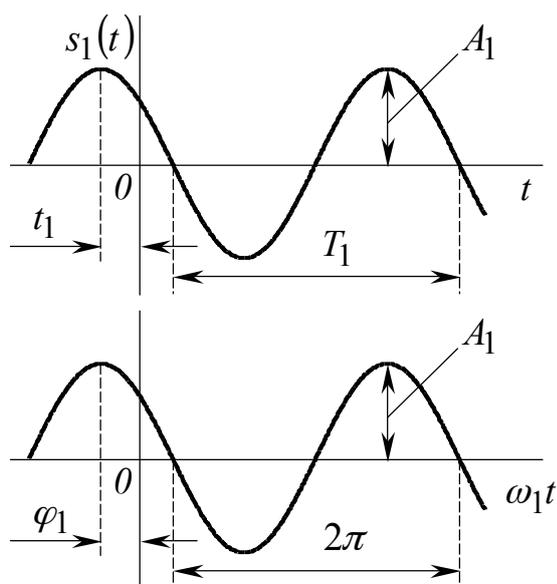


Рисунок 2.2 – Временная модель гармонического колебания

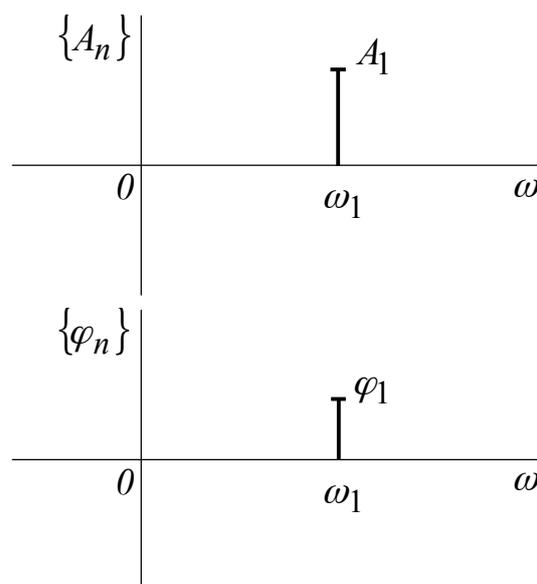


Рисунок 2.3 – Частотная модель гармонического колебания

Среднее значение гармонического сигнала на периоде  $T$  равно нулю

$$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) dt = 0. \quad (2.5)$$

Гармоническое колебание  $s_1(t)$  с произвольной начальной фазой (колебание общего вида) можно представить суммой косинусоидальной (четной во времени) и синусоидальной (нечетной во времени) тригонометрических составляющих с определенными весовыми коэффициентами.

$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \cos \varphi_1 \cos \omega_1 t - A_1 \sin \varphi_1 \sin \omega_1 t = \\ &= a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Коэффициенты пропорциональности  $a_1$ ,  $b_1$  связаны с амплитудой  $A_1$  и начальной фазой  $\varphi_1$  следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_1 \cos \varphi_1 \\ b_1 &= -A_1 \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \varphi_1 &= -\arctg \frac{b_1}{a_1} \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

### 2.3 Векторное и комплексное представления гармонического колебания

Любое гармоническое колебание можно представить в виде вектора (на декартовой плоскости с координатами  $XY$ ), вращающегося против часовой стрелки со скоростью  $\omega_1$  (рисунок 2.4 а).

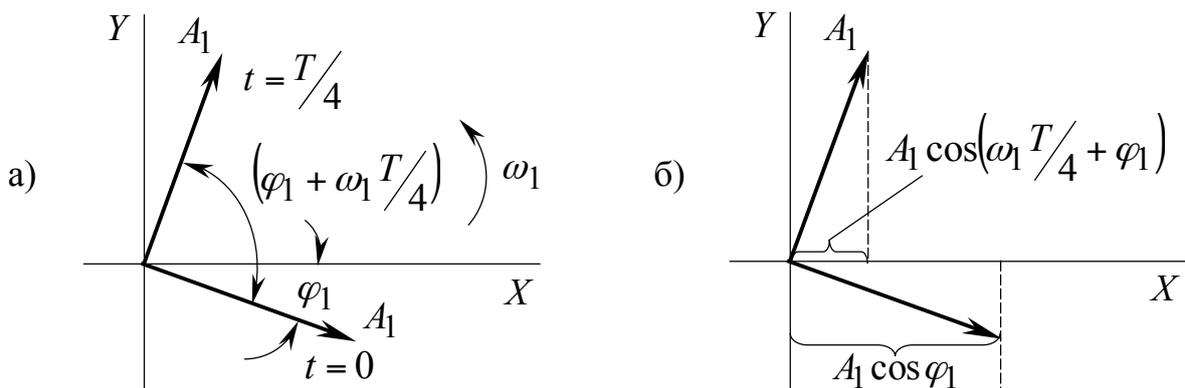


Рисунок 2.4 – Векторное представление гармоники

Мгновенное значение  $s_1(t)$  гармонического колебания можно получить, спроектировав вращающийся вектор с амплитудой  $A_1$  на ось абсцисс (рисунок 2.4 б).

Для анализа сложных электрических цепей удобно представление гармонического колебания в комплексной плоскости (по формуле Эйлера) сигналом  $\dot{Z}(t)$

$$\dot{Z}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + jA_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} = \dot{A}_1 e^{j\omega_1 t}, \quad (2.8)$$

$$\text{где } \dot{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}. \quad (2.9)$$

В выражении (2.9) комплексный множитель  $\dot{A}_1$  называется комплексной амплитудой, причем

$$A_1 = |\dot{A}_1|, \quad \varphi_1 = \arg \dot{A}_1.$$

Комплексная функция  $e^{j\omega_1 t}$  является комплексным вектором вращения (рисунок 2.5 а).

Гармоническое колебание  $s_1(t)$  можно представить полусуммой комплексно-сопряженных сигналов  $\dot{Z}(t)$  и  $\dot{Z}^*(t)$

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \frac{A_1}{2} \left[ e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)} \right] = \dot{C}_1 e^{j\omega_1 t} + \dot{C}_{-1} e^{-j\omega_1 t}, \quad (2.10)$$

где  $\dot{C}_1$  ( $\dot{C}_{-1}$ ) – комплексно-сопряженные коэффициенты;

$e^{j\omega_1 t}$  ( $e^{-j\omega_1 t}$ ) – комплексные векторы со встречным направлением вращения (рисунок 2.5 б).

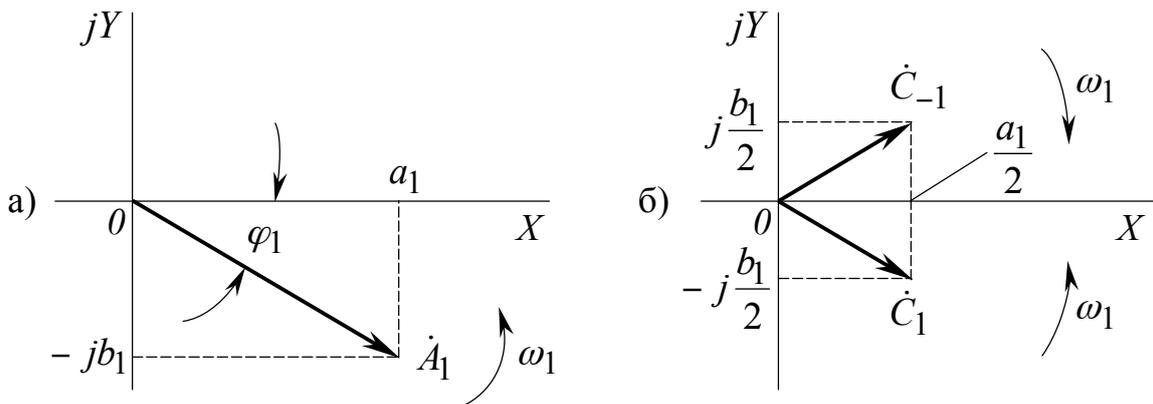


Рисунок 2.5 – Векторное представление гармонического колебания в комплексной плоскости с координатами  $X$ ,  $jY$

Комплексно-сопряженные коэффициенты  $\dot{C}_1$  и  $\dot{C}_{-1}$  связаны с весовыми коэффициентами  $a_1$  и  $b_1$  следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{1}{2} A_1 e^{j\varphi_1} = \frac{1}{2} A_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = \frac{1}{2} (a_1 - j b_1) \\ \dot{C}_{-1} &= \frac{1}{2} A_1 e^{-j\varphi_1} = \frac{1}{2} A_1 (\cos \varphi_1 - j \sin \varphi_1) = \frac{1}{2} (a_1 + j b_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Таким образом, описание гармонического колебания можно выполнить разными способами:

$$\begin{aligned} s_I(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t = \dot{C}_1 e^{j\omega_1 t} + \dot{C}_{-1} e^{-j\omega_1 t} = \\ &= 2|\dot{C}_1| \cdot \cos(\omega_1 t + \arg \dot{C}_1), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{где } A_1 = 2|\dot{C}_1|, \quad \varphi_1 = \arg \dot{C}_1 = -\arg \dot{C}_{-1}. \quad (2.13)$$

Тригонометрической и комплексной моделям сигнала соответствуют два способа частотного представления, изображенные на рисунках 2.6 и 2.7.

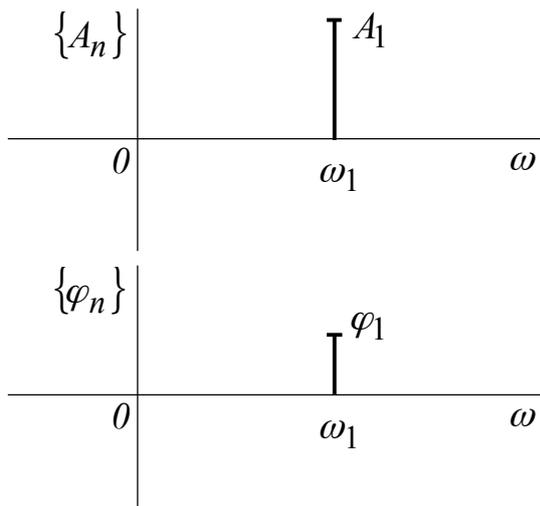


Рисунок 2.6 – Частотное представление тригонометрической модели сигнала

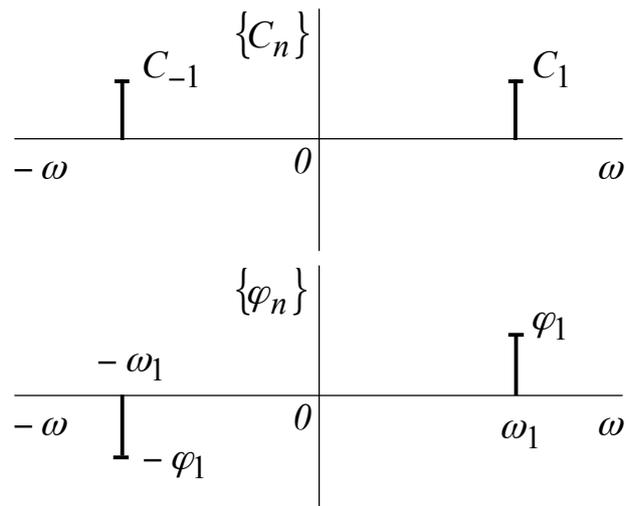


Рисунок 2.7 – Частотное представление комплексной модели сигнала

**Замечание.** Положительные и отрицательные частоты (рисунок 2.7) позволяют отобразить встречные направления вращения комплексных векторов  $e^{\pm j\omega_1 t}$  (рисунок 2.5 б).

## 2.4 Сложение гармонических колебаний

При сложении двух и более гармоник с одинаковой частотой получают гармоническое колебание с той же самой частотой, но другими амплитудой и начальной фазой (рисунок 2.8).

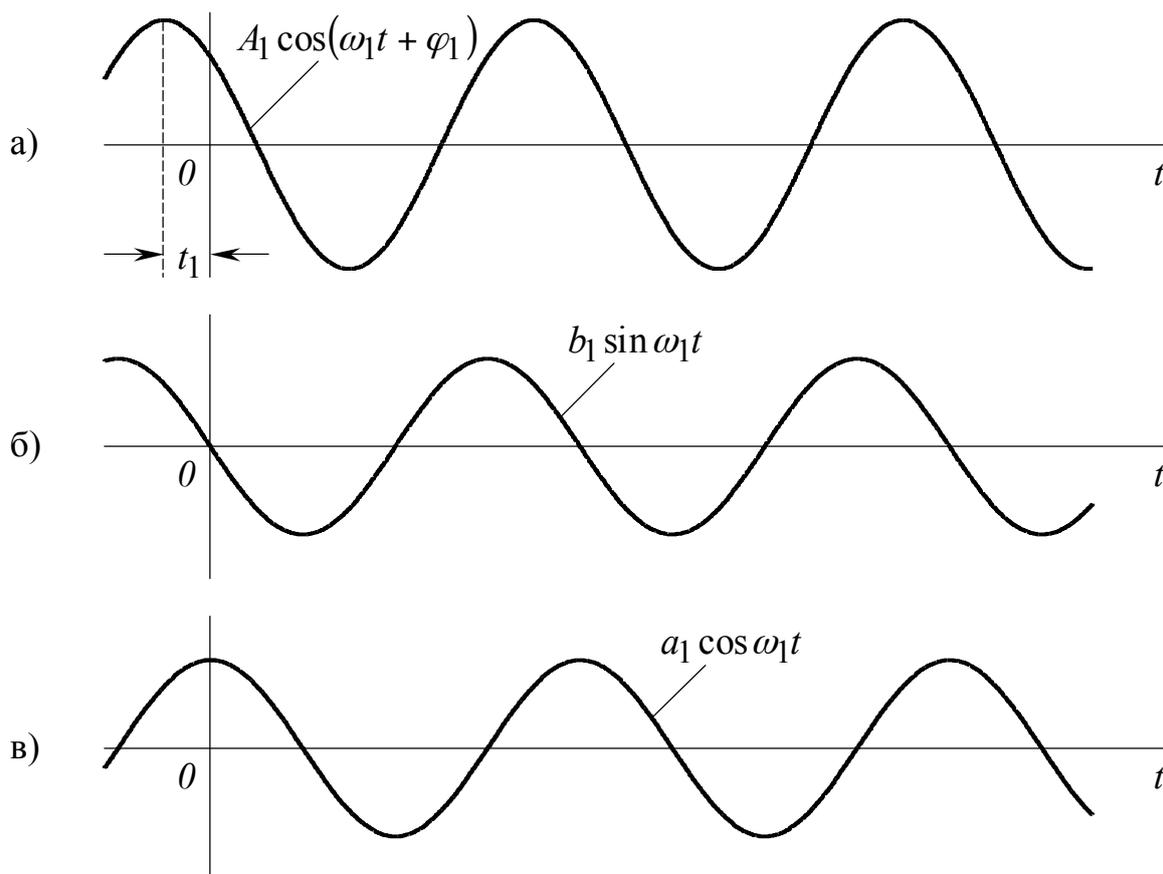


Рисунок 2.8 – Графическое представление гармонического сигнала общего вида (а), его нечетной (б) и четной (в) составляющих

Гармонические колебания  $A_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2)$ ,  $A_3 \cos(3\omega_1 t + \varphi_3)$ , ...,  $A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ , ..., называют соответственно второй, третьей и т.д. высшей гармониками относительно основной.

Сложение гармоник с кратными частотами  $\omega_1$ ,  $2\omega_1$ ,  $3\omega_1$ , амплитудами  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и начальными фазами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  приводит к образованию периодического сигнала сложной формы  $s_\Sigma(t)$  с периодом  $T$ , равным периоду первой гармоники с частотой  $\omega_1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} s_\Sigma(t) &= s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) = \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega_1 t + \varphi_3). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Каждое из слагаемых  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$  характеризует отдельное гармоническое колебание, однако график функции  $s_\Sigma(t)$  не является гармоническим.

На рисунках 2.9 и 2.10 приведены временное и частотное представления периодического сигнала сложной формы  $s_\Sigma(t)$ .

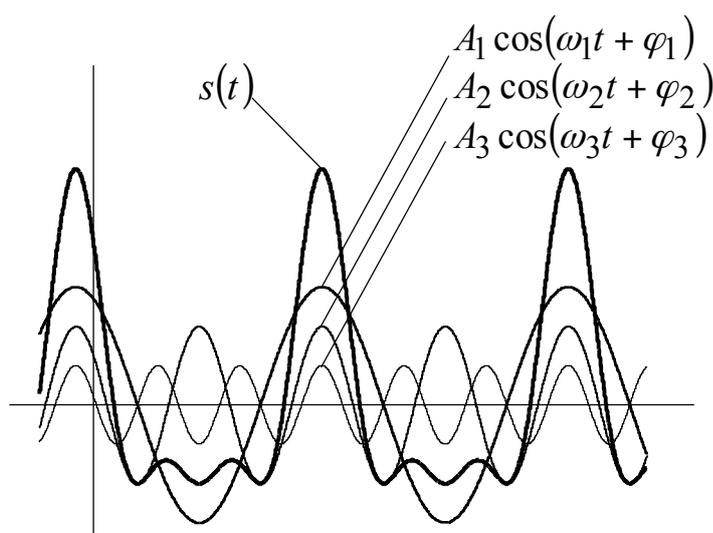


Рисунок 2.9 – Сложение гармоник

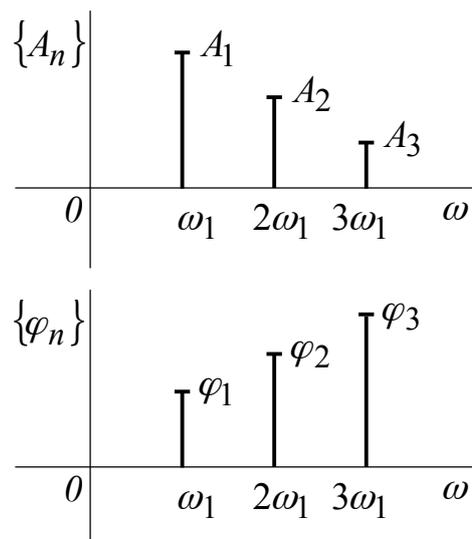


Рисунок 2.10 – Спектральное представление

Амплитудным спектром (спектром амплитуд) называется совокупность амплитуд  $\{A_n\}$  гармонических колебаний, изображенная в виде отрезков прямых вдоль частотной оси в точках, кратных частоте первой гармоники.

Фазовым спектром (спектром фаз) называется совокупность начальных фаз  $\{\varphi_n\}$  гармонических колебаний, изображенная в виде отрезков прямых вдоль частотной оси в точках, кратных частоте первой гармоники.

## 2.5 Энергетические характеристики гармонических колебаний

Если гармоническое колебание  $s_n(t)$  представляет собой ток или напряжение, то мгновенная мощность  $p_n(t)$ , выделяющаяся на сопротивлении 1 Ом, определится по формуле:

$$p_n(t) = s_n^2(t).$$

Энергия  $n$ -го гармонического колебания на периоде  $T = 2\pi/\omega_1$  равна:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \int_{t_1}^{t_1+T} s_n^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} A_n^2 \cos^2(n\omega_1 t + \varphi_n) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{A_n^2}{2} [1 + \cos 2(n\omega_1 t + \varphi_n)] dt = \frac{A_n^2}{2} T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) интеграл от гармонической функции  $\cos(2n\omega_1 t + 2\varphi_n)$ , согласно (2.5), равен нулю, т.к. в интервале интегрирования

$T = 2\pi/\omega_1$  укладывается целое число периодов интегрируемой функции  
 $T_{2n} = 2\pi/(2n\omega_1)$ . Откуда

$$\frac{A_n^2}{2} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos 2[n\omega_1 t + \varphi_n] dt = 0. \quad (2.16)$$

Средняя мощность  $n$ -го гармонического сигнала определяется как

$$P_n = \frac{\mathcal{E}_n}{T} = \frac{A_n^2}{2}. \quad (2.17)$$

Произведение двух гармонических колебаний  $s_n(t)$  и  $s_m(t)$  можно трактовать как мгновенную взаимную мощность  $p_{nm}(t)$

$$p_{nm}(t) = s_n(t) \cdot s_m(t). \quad (2.18)$$

Наиболее замечательным свойством гармонических сигналов является тот факт, что энергия взаимодействия  $\mathcal{E}_{nm}$  двух любых ( $n \neq m$ ) гармоник равна нулю, если интервал интегрирования равен периоду первой гармоники. Произведение двух высших гармоник с частотами  $n\omega_1$  и  $m\omega_1$  нетрудно преобразовать в сумму двух гармонических колебаний с частотами  $(n \pm m)\omega_1$ , интегрирование которых на интервале длиной  $T$  приведет к нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nm} &= \int_{t_1}^{t_1+T} s_n(t) s_m(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} A_n A_m \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_1 t + \varphi_m) dt = \\ &= \frac{1}{2} A_n A_m \int_{t_1}^{t_1+T} \cos[(n+m)\omega_1 t + \varphi_n + \varphi_m] dt + \\ &+ \frac{1}{2} A_n A_m \int_{t_1}^{t_1+T} \cos[(n-m)\omega_1 t + \varphi_n - \varphi_m] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Энергия суммы гармонических колебаний  $\mathcal{E}_\Sigma$  равна сумме энергий отдельных слагаемых, так как энергия взаимодействия  $\mathcal{E}_{nm}$  равна нулю:

$$\mathcal{E}_\Sigma = \int_{t_1}^{t_1+T} [s_n(t) + s_m(t)]^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} s_n^2(t) dt}_{\mathfrak{E}_n} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} s_m^2(t) dt}_{\mathfrak{E}_m} + 2 \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} s_n(t) s_m(t) dt}_{\mathfrak{E}_{nm}} = \left[ \frac{A_n^2}{2} + \frac{A_m^2}{2} \right] \cdot T, \\
\mathfrak{E}_N &= \int_{t_1}^{t_1+T} \left[ \sum_{n=1}^N s_n(t) \right]^2 dt = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{2} T. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

В курсе высшей математики системы функций, обладающие подобным свойством, называются ортогональными. Гармонические колебания кратных частот ортогональны на интервале времени, равном периоду первой гармоники.

## 2.6 Разложение произвольного периодического сигнала по гармоникам

Сложение гармоник приводит к образованию периодической функции с нулевым средним значением. Учтем в (2.14) постоянную составляющую (ненулевое среднее значение) введением специального коэффициента, например  $a_o/2$ . Получим известное из математики выражение

$$s_{\Sigma}(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n). \tag{2.21}$$

Перейдем к комплексной форме записи. Ненулевое среднее значение  $a_o/2$  обозначим коэффициентом  $C_o$ . С учетом обозначений, примененных в (2.10), преобразуем (2.21) к виду

$$s_{\Sigma}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}. \tag{2.22}$$

Уместен вопрос, всякую ли периодическую функцию  $s(t)$  можно аппроксимировать суммой гармоник  $s_{\Sigma}(t)$ ? И как рассчитать параметры гармоник: амплитуду  $A_n$ , частоту  $n\omega_1$ , начальную фазу  $\varphi_n$  и величину постоянной составляющей  $C_o = \frac{a_o}{2}$ ?

Мгновенное значение погрешности аппроксимации сигнала определяется разностью мгновенных значений исследуемого периодического сигнала  $s(t)$  и суммы гармоник  $s_{\Sigma}(t)$ :

$$\varepsilon(t) = s(t) - s_{\Sigma}(t) = s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (2.23)$$

Определим энергию погрешности  $\varepsilon(t)$  за период  $T$

$$\mathcal{E}_{\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_1+T} \varepsilon^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \left[ s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \right]^2 dt. \quad (2.24)$$

Найдем условия, при которых энергия погрешности аппроксимации будет стремиться к нулю. Потребуем, чтобы коэффициенты  $\dot{C}_n$  были выбраны из условия минимума энергии погрешности. Для этого продифференцируем правую и левую части уравнения (2.24) по переменным  $\dot{C}_0, \dot{C}_1, \dot{C}_{-1}, \dots, \dot{C}_k$  и приравняем их к нулю. Запишем систему уравнений, каждое из которых выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{C}_k} \left\{ \int_{t_1}^{t_1+T} \left[ s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \right]^2 dt \right\} = 0. \quad (2.25)$$

Выполним дифференцирование по комплексному коэффициенту  $\dot{C}_k$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} 2 \left[ s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \right] \cdot e^{jk\omega_1 t} dt = 0. \quad (2.26)$$

Осуществляя почленное интегрирование, найдем

$$\int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{jk\omega_1 t} dt - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jk\omega_1 t} e^{jn\omega_1 t} dt = 0 \quad \text{или}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{jk\omega_1 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(n+k)\omega_1 t} dt. \quad (2.27)$$

Интегрируя комплексную функцию, получим

$$\int_{t_1}^{t_1+T} e^{i(n+k)\omega_1 t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -k, \\ T, & n = -k. \end{cases} \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.27), определим  $\dot{C}_n$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = C_n \cdot T \quad \text{или}$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.29)$$

Представим комплексный коэффициент  $\dot{C}_n$  суммой действительной и мнимой частей и сравним с (2.11):

$$\dot{C}_n = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) \cos n\omega_1 t dt}_{\frac{1}{2}a_n} - j \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) \sin n\omega_1 t dt}_{\frac{1}{2}b_n}, \quad (2.30)$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \begin{cases} a_n = 2 \operatorname{Re} \dot{C}_n \\ b_n = -2 \operatorname{Im} \dot{C}_n \end{cases}, \quad (2.31)$$

$$|\dot{C}_n| = \frac{1}{2} A_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\varphi_n = \arg \dot{C}_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}.$$

Подводя итоги, можно сказать, что любой периодический сигнал может быть аппроксимирован бесконечной суммой гармонических колебаний и постоянной составляющей. Энергия погрешности аппроксимации стремится к нулю, если количество гармоник стремится к бесконечности.

В математической и специальной литературе разложение периодического сигнала по тригонометрическим либо комплексным функциям (тригонометрическому либо комплексному базису) называют рядом Фурье. Одинаково широко применяются три формы записи ряда Фурье. Чаще других в формулах для расчета коэффициентов применяют симметричные пределы интегрирования  $\pm \frac{T}{2}$ . Основные расчетные соотношения представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Ряды Фурье и расчетные соотношения для тригонометрического и комплексного базисов

№	Формы записи ряда Фурье	Формулы для расчета коэффициентов
1	$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}$	$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$
2	$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t$	$\frac{a_0}{2} = \dot{C}_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt$
3	$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ $s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot  C_n  \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \cdot  \dot{C}_n $ $\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} = \arg \dot{C}_n$ $\dot{C}_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$

## 2.7 Анализ внутренней структуры периодического сигнала

Сравнивая приведенные в таблице 2.1 формы записи ряда Фурье, видим, что каждая из них имеет свои преимущества, например:

$$s(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t}_{s_{\text{чет}}(t)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t}_{s_{\text{неч}}(t)}$$

$s_{\text{чет}}(t)$  – четная во времени составляющая сигнала  $s(t)$

$s_{\text{неч}}(t)$  – нечетная во времени составляющая сигнала  $s(t)$

Любой сигнал общего вида может быть представлен суммой четной и нечетной составляющих. Четный сигнал  $s(t) = s(-t)$  в разложении будет

иметь только косинусоидальные составляющие. Нечетный сигнал  $s(t) = -s(-t)$  в разложении будет иметь только синусоидальные составляющие. Постоянная составляющая входит только в состав четной компоненты сигнала.

Если ведется компьютерный анализ, то наиболее выгодным представляется комплексный ряд Фурье с универсальной расчетной формулой (2.29) для определения комплексного коэффициента  $\dot{C}_n$ .

Переход к тригонометрическому ряду общего вида не вызывает проблем:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\dot{C}_n| \cos(n\omega_1 t + \arg \dot{C}_n). \quad (2.32)$$

Расчет коэффициентов разложения существенно упрощается, если периодический сигнал имеет различные виды симметрии, представленные в таблице 2.2.

Пусть математическое описание периодического сигнала удовлетворяет равенству

$$s(t) = -s\left(t - \frac{T}{2}\right). \quad (2.33)$$

Такой сигнал обладает зеркальной симметрией, то есть повторяется через половину периода с противоположным знаком.

Если в математическом описании сигнала выполняется равенство

$$s(t) = s\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad (2.34)$$

то такой сигнал повторяется полностью не через интервал  $T$ , а через  $\frac{T}{2}$ .

С учетом (2.33) расчетная формула (2.29) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt - \frac{1}{T} \int_{t_1+T/2}^{t_1+T} s\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt - \frac{1}{T} \int_{t_1+T/2}^{t_1+T} s\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-jn\omega_1(t-T/2)} \cdot e^{-jn\omega_1 T/2} d\left(t - \frac{T}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt - \left[ \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt \right] \cdot e^{-jn\omega_1 T/2}. \end{aligned}$$

$$\dot{C}_n = \left(1 - e^{-jn\omega_1 T/2}\right) \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt,$$

$$1 - e^{-jn\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ 2, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$\dot{C}_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

В таблицах 2.2 и 2.3 приведены модели периодических сигналов и соответствующие им расчетные формулы коэффициентов разложения для различных видов симметрии относительно двух точек:  $t_1 = 0$  и  $t_2 = T/4$ .

## 2.8 Энергетические характеристики периодического сигнала сложной формы

Если  $s(t)$  представляет собой напряжение или ток, то квадрат сигнала  $s^2(t)$  численно равен мгновенной мощности  $p_s(t)$ , рассеиваемой на сопротивлении нагрузки 1 Ом.

Энергия периодического сигнала, расходуемая за период, равна

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_1 + T} s^2(t) dt.$$

Средняя мощность сигнала равна отношению энергии к периоду

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T} s^2(t) dt.$$

Среднюю мощность периодического сигнала, представленного рядом Фурье, можно оценить по спектру как сумму мощностей отдельных гармонических составляющих

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.36)$$

Таблица 2.2 – Модели периодических сигналов с различными видами симметрии

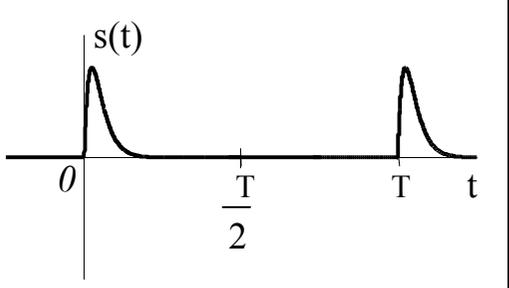
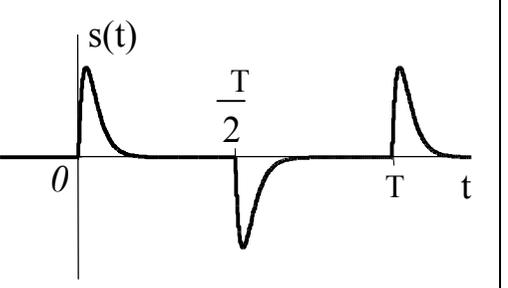
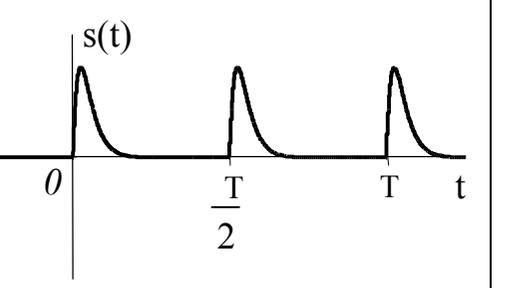
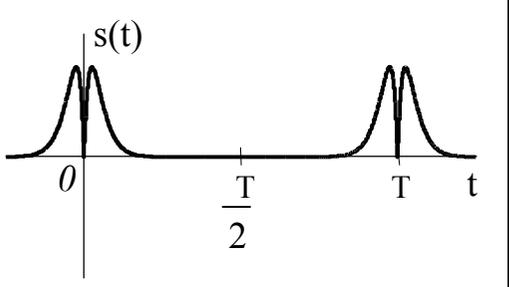
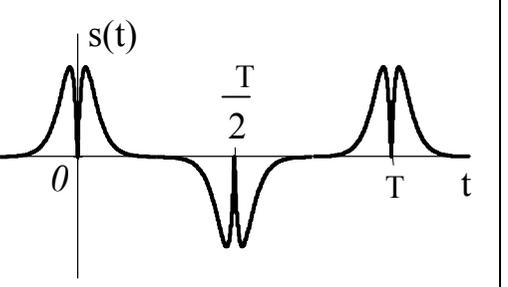
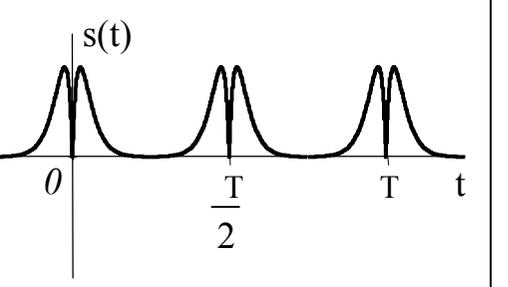
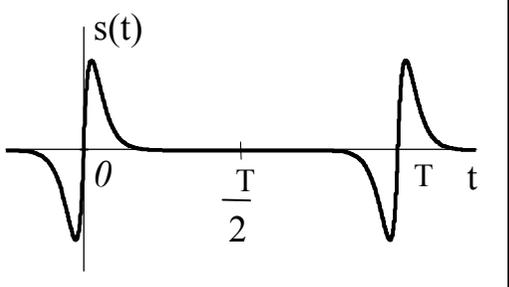
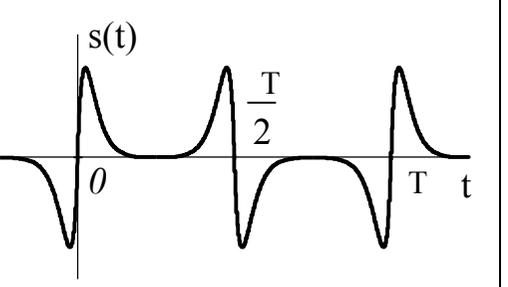
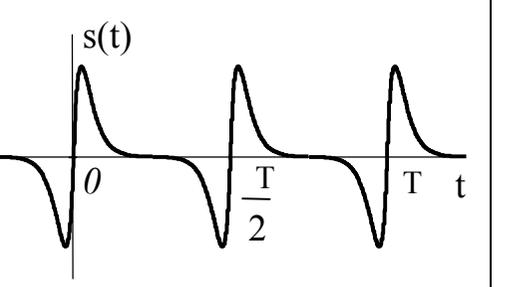
Симметрия относительно $t = 0$	Симметрия относительно $t = \frac{T}{4}$		
	$s(t) \neq s\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$s(t) = -s\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$s(t) = s\left(t - \frac{T}{2}\right)$
$s(t)$ - сигнал общего вида			
$s(t)$ -четный сигнал			
$s(t)$ -нечетный сигнал			

Таблица 2.3 – Коэффициенты ряда Фурье для периодических сигналов с различными видами симметрии

Симметрия относительно $t = 0$	Симметрия относительно $t = \frac{T}{4}$		
	$s(t) \neq s\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$s(t) = -s\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$s(t) = s\left(t - \frac{T}{2}\right)$
$s(t)$ - сигнал общего вида	$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$	$\dot{C}_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \text{ при} \\ n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \dots \\ 0, \text{ при} \\ n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots \end{cases}$	$\dot{C}_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \text{ при} \\ n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots \\ 0, \text{ при} \\ n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \dots \end{cases}$
$s(t)$ -четный сигнал	$b_n = 0; \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt$ $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$	$b_n = 0; \frac{a_0}{2} = 0$ $a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $n = 1, 3, 5, 7, \dots$	$b_n = 0; \frac{a_0}{2} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} s(t) dt$ $a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$
$s(t)$ -нечетный сигнал	$a_n = 0; \frac{a_0}{2} = 0$ $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$	$a_n = 0; \frac{a_0}{2} = 0$ $b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $n = 1, 3, 5, 7, \dots$	$a_n = 0; \frac{a_0}{2} = 0$ $b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$

На практике при анализе сигналов ряд Фурье ограничивают конечным числом гармоник  $N$ . Сигнал, представленный усеченным рядом, называют оценкой  $s_N(t)$ . Средняя мощность  $P_N$  усеченного ряда Фурье или оценки  $s_N(t)$  равна

$$P_N = \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2. \quad (2.37)$$

Абсолютная погрешность  $\varepsilon(t)$  описания сигнала  $s(t)$  усеченным рядом Фурье  $s_N(t)$  определяется разностью мгновенных значений сигнала и оценки

$$\varepsilon(t) = s(t) - s_N(t) = s(t) - \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Средняя мощность погрешности или квадрат среднеквадратического значения абсолютной погрешности  $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$  найдется по аналогии с (2.23)

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left[ s(t) - \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \right]^2 dt.$$

Возводя подынтегральное выражение в квадрат и выполняя почленное интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) dt}_P - 2 \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N \dot{C}_n \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt}_{2 \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \dot{C}_n \dot{C}_k \int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(k+n)\omega_1 t} dt}_{\sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2}, \end{aligned}$$

где  $\int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt = T \cdot \dot{C}_n^*$ ,  $\int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(k+n)\omega_1 t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -k, \\ T, & n = -k. \end{cases}$

Таким образом, средняя мощность погрешности аппроксимации равна разности мощностей сигнала  $s(t)$  и оценки  $s_N(t)$

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = P - 2 \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |\dot{C}_n|^2 = P - P_N. \quad (2.38)$$

Относительное значение погрешности аппроксимации периодического сигнала усеченным рядом Фурье определится как

$$\delta = \frac{P - P_N}{P}. \quad (2.39)$$

Анализируя поведение погрешности в зависимости от количества слагаемых ряда Фурье, можно сказать следующее: с ростом  $N$  погрешность асимптотически стремится к нулю. Кроме того, погрешность всегда положительна, т.к. мощность бесконечного ряда всегда больше мощности усеченного ряда.

## 2.9 Практическое приложение к второй главе

### 2.9.1 Гармонический анализ периодической последовательности униполярных прямоугольных импульсов

Представим периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 2.11) суммой гармонических колебаний. Определим амплитуды и фазы гармоник.

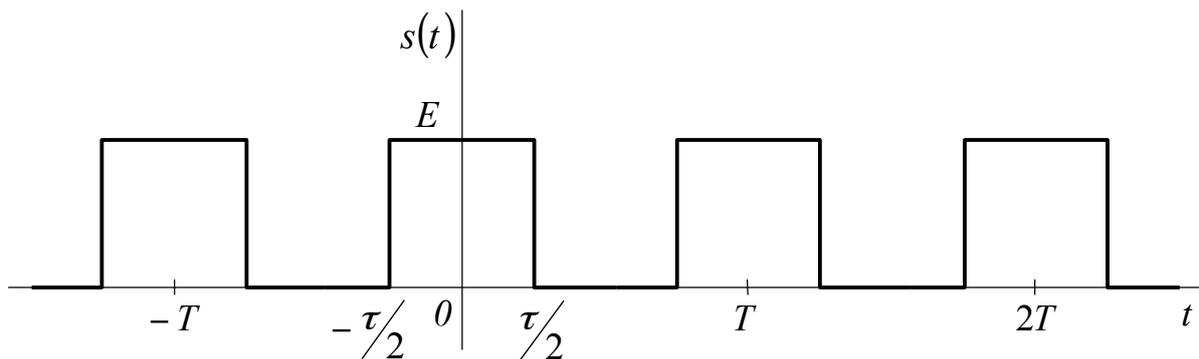


Рисунок 2.11 – Периодическая последовательность импульсов

Заданный сигнал является четной функцией времени, т.е. в разложении будут присутствовать только косинусоидальные составляющие с весовыми коэффициентами  $a_n$ :

$$b_n = 0,$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt.$$

Произведение двух четных функций  $s(t)$  и  $\cos n\omega_1 t$  образует четную функцию времени. Интеграл от четной функции на симметричном интервале равен удвоенному значению интеграла за половину интервала интегрирования. Выполняя преобразования, получим

$$a_n = \frac{4E}{T} \int_0^{\tau/2} \cos n\omega_1 t dt = \frac{4E}{T} \frac{1}{n\omega_1} \sin n\omega_1 \frac{\tau}{2} = \frac{2E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2},$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2}[a_n - j0] = \frac{1}{2} a_n,$$

$$A_n = |a_n| = \frac{2E\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2} \right|,$$

$$\varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} = -\arctg \frac{0}{a_n} = \begin{cases} 0, & a_n > 0, \\ -\pi, & a_n < 0. \end{cases}$$

Ряд Фурье для заданного периодического сигнала в соответствии с таблицей 2.1 может иметь три формы записи:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2} \cdot e^{jn\omega_1 t} = \\ &= \frac{E\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2} \cdot \cos n\omega_1 t = \\ &= \frac{E\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2} \right| \cdot \cos(n\omega_1 t + \varphi_n). \end{aligned}$$

Отношение периода к длительности прямоугольного импульса называют скважностью  $q$

$$q = \frac{T}{\tau}.$$

Рассмотрим случай, когда период в два раза больше длительности, т.е.  $q = \frac{T}{\tau} = 2$ . Откуда

$$a_n = E \frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}, & n = 2m-1, \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Сумма гармоник, описывающая анализируемый сигнал для случая  $T = 2\tau$ , имеет вид

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \cos \omega_1 t - \frac{2E}{3\pi} \cos 3\omega_1 t + \frac{2E}{5\pi} \cos 5\omega_1 t - \dots$$

и графически изображена на рисунке 2.12.

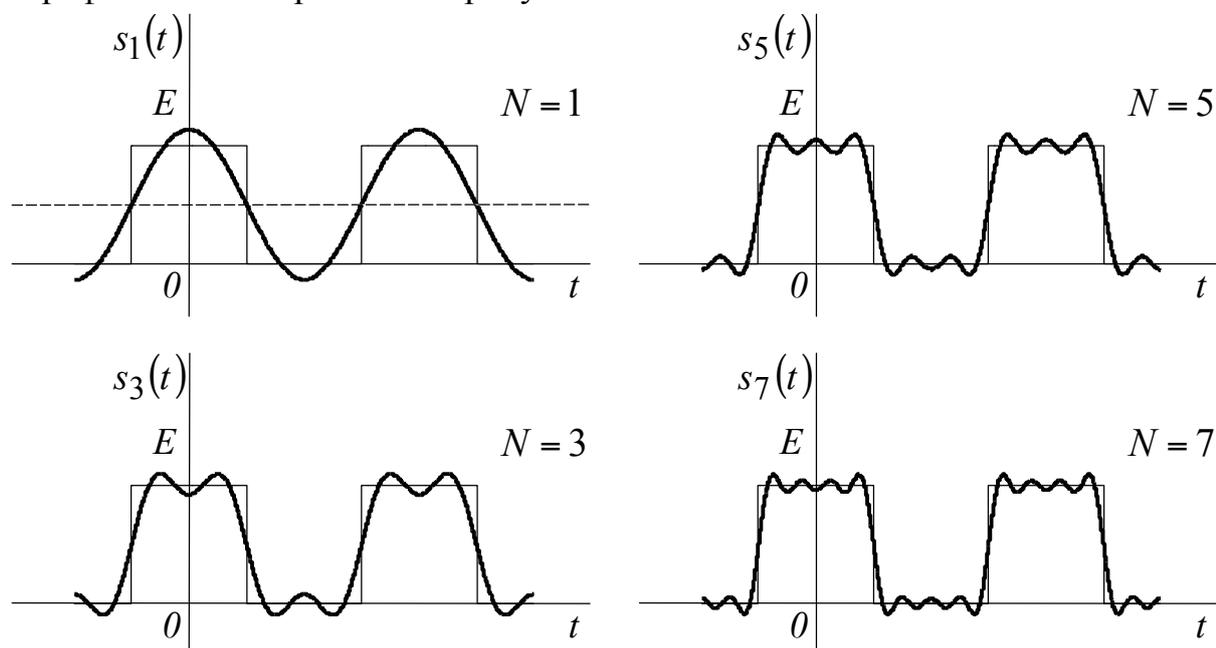


Рисунок 2.12 – Временное представление сигнала  $s(t)$  и усеченного ряда Фурье  $s_N(t)$  ( $N = 1, 3, 5, 7$ )

На рисунке 2.12 показано, как меняется форма суммы гармонических колебаний с ростом количества слагаемых ряда Фурье. Чем больше учтено гармонических колебаний, тем лучше описываются разрывы в исследуемом сигнале. Кроме того, отмечаем равноволновый характер приближения к анализируемому сигналу и уменьшение абсолютного значения погрешности.

### 2.9.2 Частотное представление периодического сигнала

Наглядность частотного представления периодического сигнала обеспечивает построение спектральных диаграмм. На рисунке 2.13 изображена совокупность коэффициентов комплексного ряда Фурье  $\{C_n\}$ , которую называют частотным спектром. На рисунке 2.14 показаны совокупность амплитуд гармоник  $\{A_n\}$ , называемая спектром амплитуд, и совокупность начальных фаз  $\{\varphi_n\}$ , называемая спектром фаз.

Полученные спектры являются дискретными функциями частоты. Комплексные коэффициенты располагаются на всей частотной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Анализируемый сигнал является четной функцией времени, поэтому комплексный коэффициент  $\dot{C}_n$  имеет только действительную составляющую.

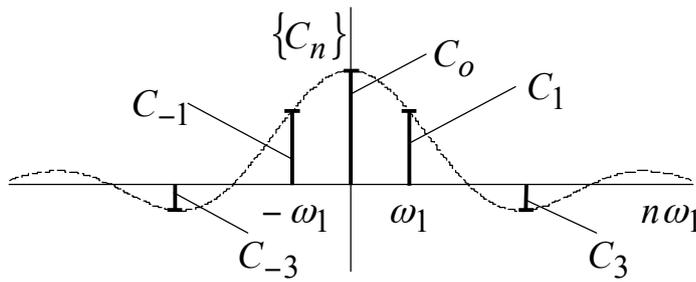


Рисунок 2.13 – Частотный спектр коэффициентов  $\{C_n\}$

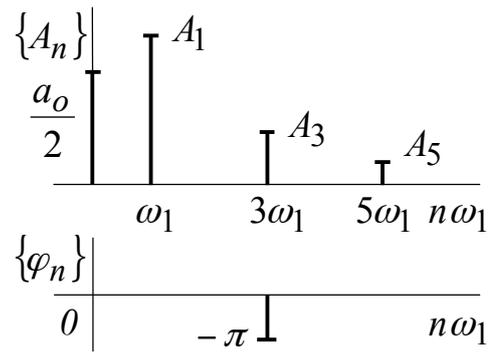


Рисунок 2.14 – Спектр амплитуд  $\{A_n\}$  и спектр фаз  $\{\varphi_n\}$  периодической последовательности импульсов

Спектр амплитуд  $\{A_n\}$  и спектр фаз  $\{\varphi_n\}$  располагаются только на положительных частотах от нуля до бесконечности.

Важно отметить, что абсолютное количество гармоник, при аппроксимации сигнала рядом Фурье, бесконечно, но амплитуды их падают с увеличением частоты. Ширина спектра реального сигнала – конечная величина.

Под шириной спектра понимают эффективную область частот, в пределах которой сосредоточена основная энергия сигнала.

### 2.9.3 Распределение мощности в спектре периодического сигнала

По временному представлению сигнала  $s(t)$  рассчитаем среднюю мощность периодической последовательности импульсов

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E^2 dt = \frac{E^2 \tau}{T} = \frac{E^2}{2}.$$

По частотному представлению определим среднюю мощность усеченного ряда

$$P_N = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2.$$

Результаты расчетов сведем в таблицу 2.4.

Анализ данных таблицы 2.4 показывает, что для восстановления заданного периодического сигнала по спектру можно ограничиться учетом постоянной составляющей и первой гармоники (рисунок 2.12 а). Относительное значение погрешности аппроксимации при этом не превышает 0,1.

Таблица 2.4 – Распределение мощности в спектре периодической последовательности импульсов

Средняя мощность сигнала $P$		Средняя мощность элементов ряда Фурье $n = 0,1,2,\dots,7$							
		$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
		$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2$	$\frac{a_1^2}{2}$	0	$\frac{a_3^2}{2}$	0	$\frac{a_5^2}{2}$	0	$\frac{a_7^2}{2}$
Абс. знач.	$\frac{E^2\tau}{T}$	$\left(\frac{E}{2}\right)^2$	$\frac{2E^2}{\pi^2}$	0	$\frac{2E^2}{9\pi^2}$	0	$\frac{2E^2}{25\pi^2}$	0	$\frac{2E^2}{49\pi^2}$
Норм.	100%	50%	40%	0	5%	0	1,7%	0	1%

#### 2.9.4 Анализ связи между длительностью импульса, периодом и шириной спектра

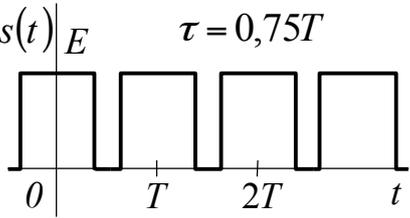
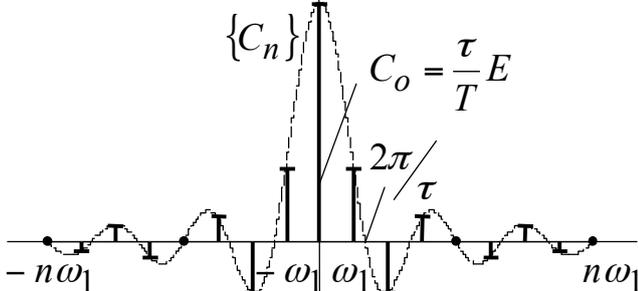
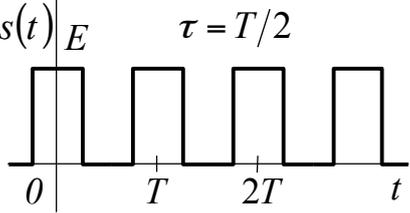
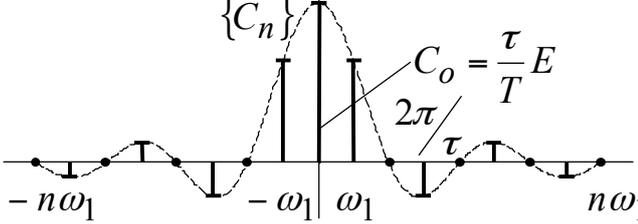
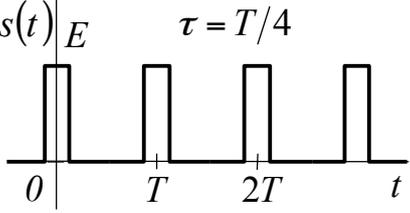
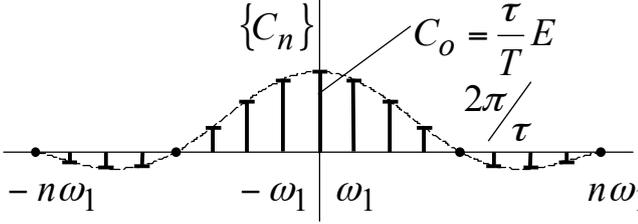
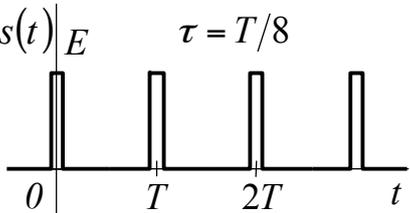
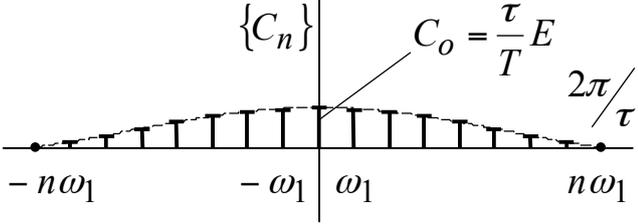
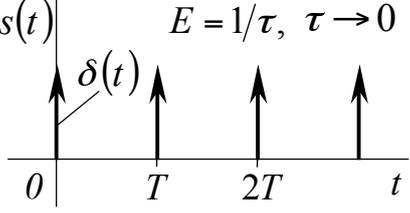
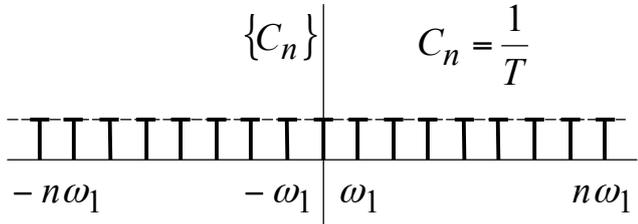
Рассмотрим изменения, происходящие в спектре периодической последовательности прямоугольных импульсов при изменении длительности импульса и периода. В таблице 2.5 дано временное и частотное представление периодической последовательности прямоугольных импульсов, у которой период не меняется, а длительность импульса изменяется.

Поведение комплексного спектра четырех первых сигналов, представленных в таблице 2.5, определяется функцией  $\dot{C}_n = \frac{E\tau}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2}$ . Все четы-

ре спектра затухают с ростом частоты. Обращаем внимание на пульсирующий характер спектра. Первый переход через ноль частотного спектра однозначно связан с длительностью импульса. Однако, по ширине главного лепестка спектра, заключенного в пределах  $\pm \frac{2\pi}{\tau}$ , не всегда можно судить о полосе частот, в которой сосредоточена основная часть энергии переменной составляющей периодического сигнала.

Сравнивая спектральный состав первого и третьего сигналов в таблице 2.5, видим, что у этих сигналов значительно отличаются постоянные составляющие и спектры фаз. Спектры амплитуд первого и третьего сигналов равны между собой, так как переменные составляющие этих сигналов отличаются только сдвигом во времени.

Таблица 2.5 – Спектры периодических последовательностей прямоугольных импульсов, у которых период неизменен, а длительность изменяется

№	Временное представление сигналов $s_n(t)$	Спектральное представление сигналов $\{C_n\}$
1		
2		
3		
4		
5		

Наиболее узкополосным из пяти представленных сигналов является второй сигнал, у которого длительность импульса равна половине периода.

Пятый сигнал представляет собой периодическую последовательность  $\delta$ -функций. Комплексный коэффициент  $\dot{C}_n$  разложения бесконечной суммы  $\delta$ -функций в ряд Фурье равен

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} = const$$

Периодическая последовательность  $\delta$ -функций может быть представлена бесконечной суммой гармонических колебаний кратных частот с одинаковыми амплитудами  $A_n = 2|C_n| = 2/T$ , т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_1 t$$

Таким образом, пятый сигнал характеризуется бесконечно большой полосой.

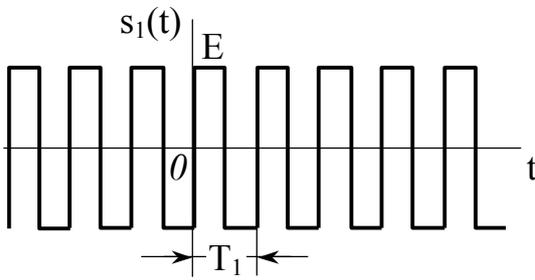
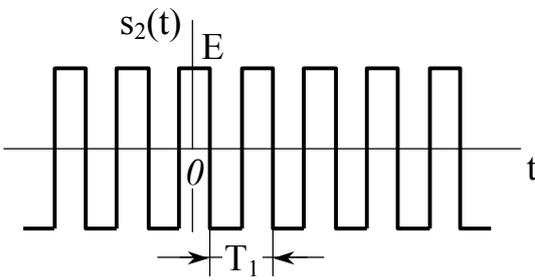
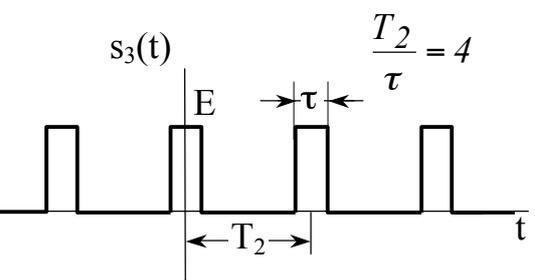
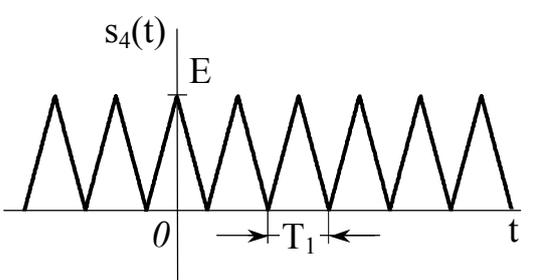
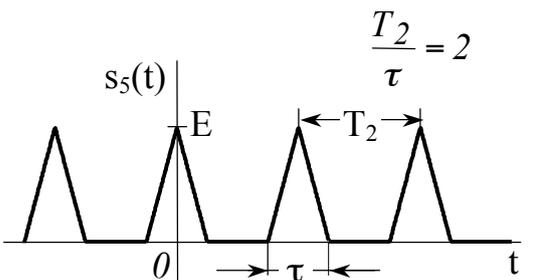
В таблице 2.6 дано временное и частотное представление периодической последовательности прямоугольных импульсов, у которой длительность импульсов не меняется, а период увеличивается.

В таблице 2.7 систематизированы результаты гармонического анализа периодических сигналов с различными видами симметрии.

Таблица 2.6 – Спектры периодических последовательностей прямоугольных импульсов, у которых длительность неизменна, а период увеличивается

N°	Временное представление сигналов $s_n(t)$	Спектральное представление сигналов $\{C_n\}$
1		
2		
3		
4		

Таблица 2.7– Периодические сигналы с различными видами симметрии и ряды Фурье

№	Сигнал $s(t)$	Ряды Фурье
1		$s_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega_1 t$
2		$s_2(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)\omega_1 t$
3		$s_3(t) = \frac{E}{4} + \frac{E}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\frac{\pi n}{4}} \cos n\omega_2 t$
4		$s_4(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\omega_1 t$
5		$s_5(t) = \frac{E}{4} + \frac{E}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \right)^2 \cdot \cos n\omega_2 t$

6		$s_6(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\omega_2 t$
7		$s_7(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega_2 t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_2 t \right]$
8		$s_8(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \cos \omega_2 t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_2 t \right]$
9		$s_9(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos n\omega_1 t \right]$
10		$s_{10}(t) = \frac{E \sin \Theta - \Theta \cos \Theta}{\pi (1 - \cos \Theta)} + \frac{\Theta E}{\pi (1 - \cos \Theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(n-1)\Theta}{(n-1)\Theta} - \frac{\sin(n+1)\Theta}{(n+1)\Theta} \right) \frac{\cos n\omega_2 t}{n}$

Анализ спектров, представленных в таблице 2.6 показывает, что огибающие комплексных спектров носят один и тот же пульсирующий характер, так как ни форма импульсов, ни их длительность не меняются.

С увеличением интервала между импульсами амплитуды гармонических колебаний уменьшаются. Частоты гармонических колебаний уменьшаются. Ширина спектра сигналов остается неизменной, и для ее оценки можно использовать половину ширины главного лепестка спектра:  $\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}$  при  $\tau \leq T/2$ . С ростом периода происходит перераспределение энергии между постоянной и переменной составляющими сигнала: энергия постоянной составляющей падает, а энергия переменной составляющей растет при неизменной полосе.

### 2.9.5 Пример гармонического анализа периодической последовательности знакопеременных импульсов треугольной формы

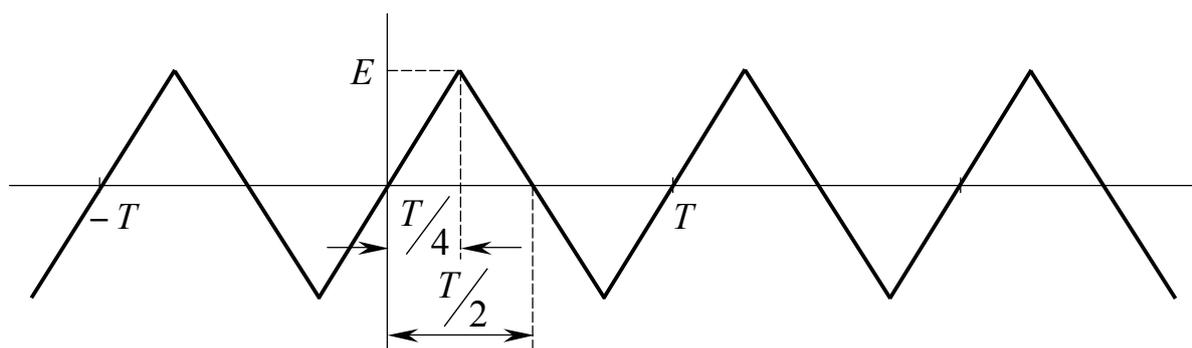


Рисунок 2.15 – Периодический сигнал с двумя видами симметрии

Анализируя временное представление сигнала, изображенного на рисунке 2.15, видим, что заданный сигнал является нечетной функцией времени, поэтому

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t.$$

Кроме того, сигнал обладает зеркальной симметрией, т.е. повторяется через половину периода с противоположным знаком, следовательно (см. таблицу 2.3)

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{8}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cdot \sin n\omega_1 t dt, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Выполним математическое описание сигнала, изображенного на рисунке 2.15.

$$s(t) = \frac{4E}{T}t, \quad 0 < t \leq T/4.$$

Рассчитываем весовой коэффициент  $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} \frac{4E}{T} \cdot t \cdot \sin n\omega_1 t dt = \frac{32E}{T^2} \left\{ UV \Big|_0^{T/4} - \int_0^{T/4} V dU \right\} = \\ &= \frac{32E}{T^2} \left\{ t \left( -\frac{1}{n\omega_1} \right) \cos n\omega_1 t \Big|_0^{T/4} + \frac{1}{n\omega_1} \int_0^{T/4} \cos n\omega_1 t dt \right\} = \\ &= \frac{32E}{T^2} \left\{ -\frac{1}{n\omega_1} t \cos n\omega_1 T/4 + \frac{1}{(n\omega_1)^2} \sin n\omega_1 T/4 \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя  $\frac{n\omega_1 T}{4} = n\frac{\pi}{2}$ , получим для нечетных  $n$

$$\cos n\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & n = 1, 5, 9, \dots \\ -1, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Пусть  $(2m-1) = n$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\sin n\frac{\pi}{2} = (-1)^{m+1}.$$

$$b_n = \frac{8E}{(n\pi)^2} \sin n\frac{\pi}{2} = \frac{8E}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}.$$

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin(2m-1)\omega_1 t.$$

## 2.10 Выводы

1. Бесконечно повторяющийся во времени физический процесс может быть представлен периодическим сигналом, широко используемым при решении практических задач.

2. Под гармоническим анализом понимают разложение периодического сигнала на сумму гармоник с частотами, кратными основной частоте повторения периодической последовательности.

3. Суммирование гармоник с определенными амплитудами и начальными фазами позволяет восстановить периодический сигнал с любой заданной точностью.

4. Под спектральными характеристиками периодического сигнала понимают распределение амплитуд (и начальных фаз) по частотам и называют спектрами амплитуд и фаз соответственно.

5. Временное и спектральное представления однозначно описывают периодический сигнал в двух разных плоскостях: мгновенное значение – время и амплитуда – частота (начальная фаза – частота).

6. Временное представление периодического сигнала, как правило, аналоговая функция времени. Спектральное представление периодического сигнала – дискретная затухающая функция частоты.

7. Экспериментальное исследование изменения сигнала во времени осуществляется с помощью осциллографа, поэтому  $s(t)$  называют осциллограммой. Экспериментальное исследование спектрального состава сигнала выполняется с помощью анализатора спектра и называется спектрограммой.

8. Форма периодического сигнала зависит не только от спектра амплитуд, но и от значений начальных фаз гармоник. Если начальные фазы гармоник 0 либо  $\pi$ , то периодический сигнал обладает четной симметрией относительно начала координат. Если начальные фазы гармоник  $\pm \frac{\pi}{2}$ , то периодический сигнал обладает нечетной симметрией относительно начала координат. Если спектр амплитуд затухает медленно, то периодический сигнал имеет разрывы. Если в спектре амплитуд “исчезают” некоторые гармоники (или огибающая спектра амплитуд пульсирует), то это признак импульсного характера периодического сигнала.

9. Мощность периодического сигнала сложной формы равна сумме (в общем случае бесконечной) мощностей отдельных гармонических составляющих. Погрешность аппроксимации периодического сигнала конечной суммой гармоник равна разности мощностей сигнала и конечной суммы гармоник.

## 3 ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

### 3.1 Предельный переход от периодических сигналов к непериодическим

Изложенный в главе 2 гармонический анализ периодических сигналов можно распространить на непериодические сигналы, если в выражении (2.3) период устремить к бесконечности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_T(t + kT) = s_T(t). \quad (3.1)$$

Рассмотрим изменения, происходящие в спектре периодического сигнала  $s(t)$  при увеличении периода, на примере периодической последовательности импульсов, представленной в таблице 2.6. При  $T \rightarrow \infty$  коэффициенты  $\dot{C}_n$ , а, следовательно, и амплитуды гармоник  $A_n = 2|C_n|$  уменьшаются до бесконечно малой величины, кроме того, расстояние  $\Delta\omega$  между частотами соседних гармоник  $n\omega_1$  и  $(n+1)\omega_1$  стремятся к нулю.

Кажущееся “исчезновение” информации происходит из-за нарушения энергетических соотношений. Энергия периодического сигнала  $s(t)$  бесконечна, а энергия непериодического сигнала  $s_T(t)$  конечна.

Чтобы исключить возникающее энергетическое противоречие, совместим гармонический анализ и восстановление сигнала по спектру (синтез).

Воспользуемся комплексным рядом Фурье (в таблице 2.1)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}, \quad \text{где } \dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Подставим  $\dot{C}_n$  в выражение для комплексного ряда

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\left[ \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt \right]}_{\dot{C}_n} \cdot e^{jn\omega_1 t}.$$

Устремляя период к бесконечности и переходя к пределу, получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \cdot e^{jn\omega_1 t} \right]. \quad (3.2)$$

При  $T \rightarrow \infty$  расстояние между спектральными линиями  $\Delta\omega$  уменьшается до бесконечно малой величины  $d\omega$ , т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Частоты отдельных гармонических колебаний будут меняться не дискретно:  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots, n\omega_1$ , а непрерывно, образуя текущую частоту  $\omega$ , т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} n\omega_1 = \omega.$$

Дискретная сумма (3.2) преобразуется в интегральную сумму с бесконечными пределами по текущему параметру  $\omega$ . В результате получается двойной интеграл Фурье

$$s_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.3)$$

$\dot{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\dot{C}_n T)$

Внутренний интеграл называется прямым преобразованием Фурье (ППФ). Формально ППФ обозначается  $\Phi^+[s(t)]$ . Результатом применения ППФ к сигналу  $s(t)$  является спектральная плотность  $\dot{S}(\omega)$ . Спектральная плотность  $\dot{S}(\omega)$  – это комплексная функция частоты, которую можно представить как эквивалентный вклад всех спектральных составляющих, находящихся внутри частотного интервала  $d\omega$ .

$$\dot{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (T\dot{C}_n) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{\omega_1} \dot{C}_n \right) = \frac{2\pi\dot{C}_n}{d\omega}. \quad (3.4)$$

Внешний интеграл в (3.3) называется обратным преобразованием Фурье (ОПФ). Формально ОПФ обозначается  $\Phi^-[S(\omega)]$ . Результатом применения ОПФ к спектральной плотности (функции частоты) является сигнал  $s(t)$  – функция времени.

### 3.2 Прямое и обратное преобразования Фурье

Существуют два способа описания непериодического сигнала. Первый способ основан на математическом представлении физического сигнала функцией времени  $s(t)$ . Второй способ – описание физического сигнала функцией частоты  $\dot{S}(\omega)$ . Эти два представления сигнала связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \Phi^+[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.5)$$

$$s(t) = \Phi^{-}[\dot{S}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.6)$$

Размерность частоты  $\omega$  обратна размерности времени  $t$ . Произведение параметров  $\omega$  и  $t$  – безразмерная величина

$$\omega t = 2\pi f t. \quad (3.7)$$

Функции  $s(t)$  и  $\dot{S}(\omega)$  описывают в различной форме один и тот же физический процесс. Функция  $s(t)$  дает представление о состоянии системы в координатах “мгновенное значение – время”. Функция  $\dot{S}(\omega)$  позволяет описать поведение системы в координатах “амплитуда – частота”.

Интересно сопоставить интегральные формулы комплексного коэффициента ряда Фурье  $\dot{C}_n$  и спектральной плотности  $\dot{S}(\omega)$ :

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt,$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность – непрерывная функция частоты. Комплексный коэффициент  $\dot{C}_n$  – дискретная функция частоты. Размерность комплексного коэффициента  $\dot{C}_n$  ряда Фурье совпадает с размерностью исследуемого сигнала  $s(t)$

$$[s(t)] = [\dot{C}_n].$$

Размерность спектральной плотности равна произведению размерности сигнала  $s(t)$  и времени

$$[\dot{S}(\omega)] = [s(t)] \cdot [время].$$

Значения спектральной плотности, взятые в дискретных точках  $\omega = n\omega_1$ , с точностью до постоянного множителя  $T$  совпадают со значениями коэффициентов  $\dot{C}_n$

$$T \cdot \dot{C}_n = \dot{S}(n\omega_1). \quad (3.8)$$

Сравним между собой комплексный ряд Фурье и обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t},$$

$$s_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Ряд Фурье представляет периодическую функцию  $s(t)$  суммой хотя и бесконечного числа гармоник, но с частотами, имеющими определенные дискретные значения  $n\omega_1$ . Интеграл Фурье (3.6) описывает непериодическую функцию  $s_T(t)$  интегральной суммой бесконечно малых по амплитуде гармоник с непрерывной последовательностью частот.

### 3.3 Спектральные характеристики непериодических сигналов

Спектральной характеристикой (или спектральной плотностью) непериодического сигнала называют комплексную функцию частоты  $\dot{S}(\omega)$ .

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = A(\omega) - jB(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.9)$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt = \operatorname{Re} \dot{S}(\omega), \quad (3.10)$$

$$-B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = \operatorname{Im} \dot{S}(\omega). \quad (3.11)$$

Модуль и аргумент спектральной плотности определяются выражениями:

$$|\dot{S}(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad (3.12)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \quad (3.13)$$

Модуль комплексной спектральной плотности называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) спектра сигнала  $s(t)$ . Часто АЧХ или  $|\dot{S}(\omega)|$  называют амплитудным спектром. Аргумент комплексной спектральной плотности называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ) спектра сигнала  $s(t)$ . В технической литературе  $\varphi(\omega)$  называют фазовым спектром. АЧХ – четная функция частоты, а ФЧХ – нечетная функция частоты, т.е.

$$|\dot{S}(\omega)| = |\dot{S}(-\omega)|, \quad (3.14)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega). \quad (3.15)$$

**Пример 3.1** - Расчет спектральных характеристик одиночного прямоугольного импульса

Одиночному прямоугольному импульсу, длительность которого  $\tau$ , амплитуда  $E$  (рисунок 3.1), соответствует спектральная плотность  $\dot{S}(\omega)$ .

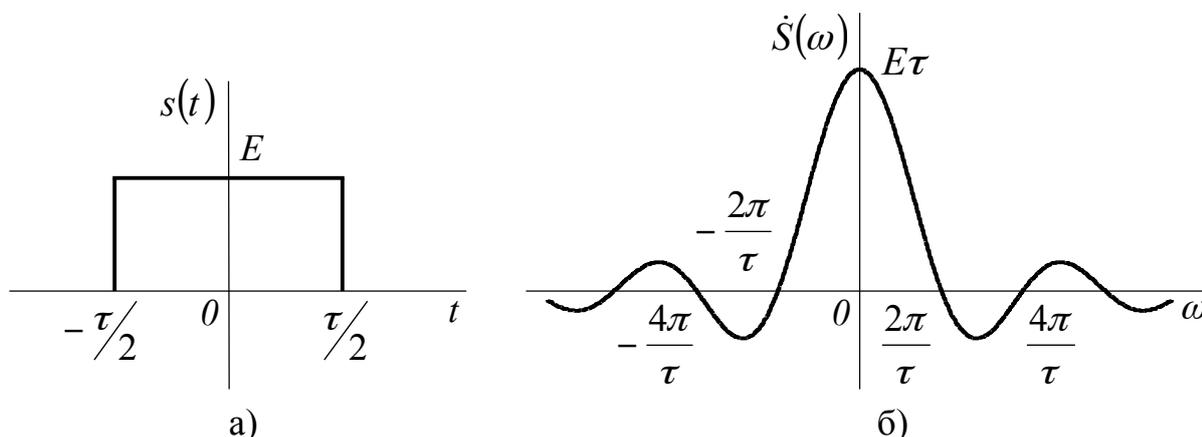


Рисунок 3.1 – Временное (а) и спектральное (б) представления сигнала

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{2E}{\omega} \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} = E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

При  $\omega = 0$  спектральная плотность численно равна площади сигнала

$$\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = E\tau.$$

Сигнал описывается четной функцией времени, а спектральная плотность – действительной функцией частоты  $S(\omega) = A(\omega)$ . Сигнал обладает конечной энергией и конечной длительностью  $\tau$ , поэтому спектральная плотность затухает с увеличением частоты, и затухание носит “пульсирующий” характер. Переход спектральной плотности через ноль однозначно связан с длительностью импульса  $\tau$ . По половине ширины главного лепестка спектральной плотности можно оценивать полосу частот сигнала.

Для построения спектральных характеристик (рисунок 3.2) необходимо рассчитать модуль и аргумент спектральной плотности:

$$|\dot{S}(\omega)| = |A(\omega)| = E\tau \frac{|\sin \omega\tau/2|}{|\omega\tau/2|}, \quad \varphi(\omega) = \arg \dot{S}(\omega) = \begin{cases} 0, & A(\omega) > 0 \\ -\pi, & A(\omega) < 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 0, & A(\omega) > 0 \\ -\pi, & A(\omega) < 0 \end{cases}} \right\} \text{при } \omega > 0, \\ \begin{cases} 0, & A(\omega) > 0 \\ +\pi, & A(\omega) < 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 0, & A(\omega) > 0 \\ +\pi, & A(\omega) < 0 \end{cases}} \right\} \text{при } \omega < 0.$$

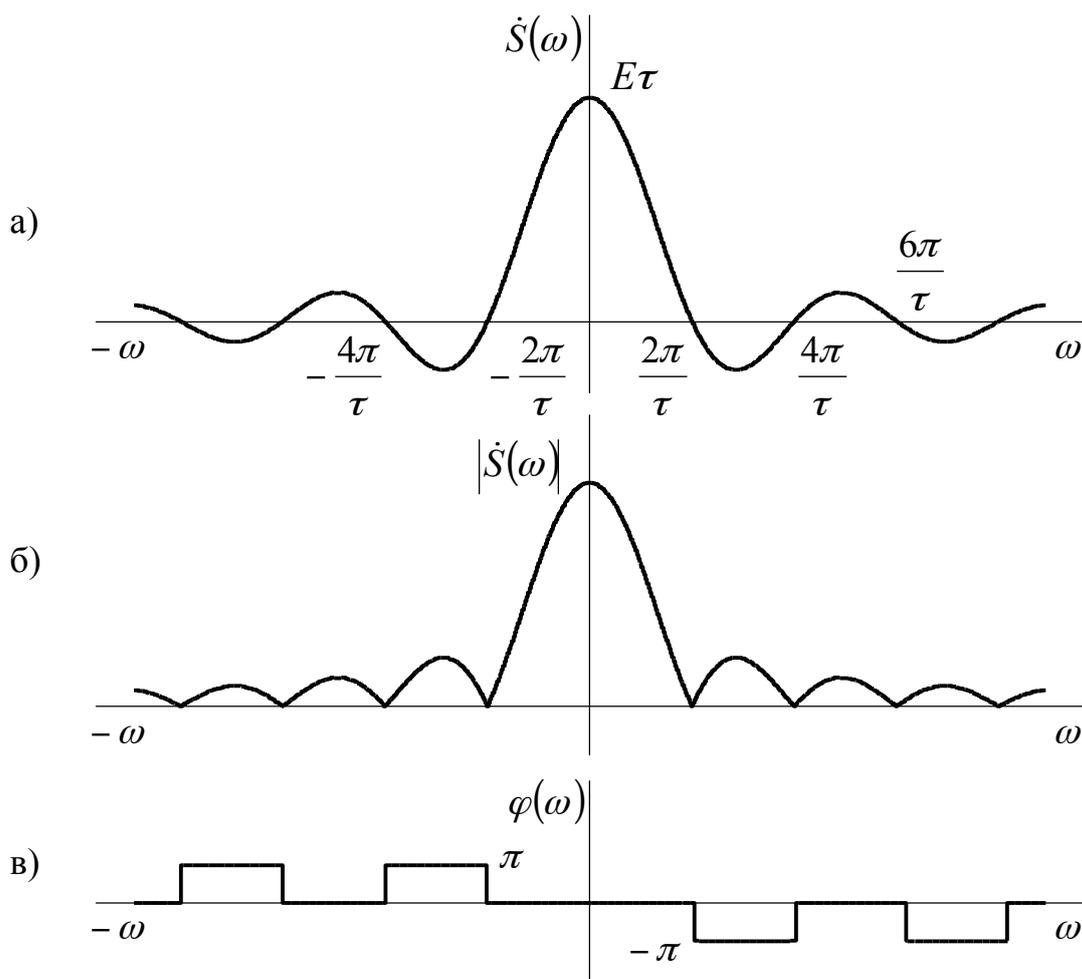


Рисунок 3.2 – Спектральные характеристики прямоугольного импульса: а) спектральная плотность – действительная функция частоты  $\dot{S}(\omega) = A(\omega)$ ; б)  $|S(\omega)|$  амплитудный спектр или амплитудно–частотная характеристика (АЧХ) спектра сигнала; в)  $\varphi(\omega)$  – фазовый спектр или фазочастотная характеристика (ФЧХ) спектра сигнала

### 3.4 Анализ внутренней структуры непериодического сигнала

Любой произвольный сигнал  $s(t)$  может быть представлен суммой четной  $s_{чет}(t)$  и нечетной  $s_{неч}(t)$  составляющих:

$$s(t) = s_{чет}(t) + s_{неч}(t), \quad (3.16)$$

$$s_{чет}(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)], \quad s_{неч}(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)]. \quad (3.17)$$

Здесь  $s(t)$  – исходный сигнал,  $s(-t)$  – сигнал с инверсией во времени.

Определим спектральные плотности четной и нечетной составляющих сигнала общего вида:

$$\Phi^+[s(t)] = \Phi^+[s_{чет}(t)] + \Phi^+[s_{неч}(t)],$$

$$\begin{aligned}\Phi^+[s_{\text{чет}}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{чет}}(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{чет}}(t) \sin \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} s_{\text{чет}}(t) \cos \omega t dt, \\ \Phi^+[s_{\text{чет}}(t)] &= A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s_{\text{чет}}(t) \cos \omega t dt,\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\Phi^+[s_{\text{неч}}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{неч}}(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{неч}}(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{\infty} s_{\text{неч}}(t) \cos \omega t dt, \\ \Phi^+[s_{\text{неч}}(t)] &= -jB(\omega) = -j2 \int_0^{\infty} s_{\text{неч}}(t) \sin \omega t dt.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Любому сигналу общего вида соответствует спектральная плотность  $\dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$ , причем  $A(\omega)$  – спектральная плотность четной составляющей,  $-jB(\omega)$  – спектральная плотность нечетной составляющей.

$$s(t) = s_{\text{чет}}(t) + s_{\text{неч}}(t), \quad \dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega).$$

$$\begin{cases} \Phi^+[s_{\text{чет}}(t)] = \text{Re } \dot{S}(\omega) = A(\omega) \\ \Phi^+[s_{\text{неч}}(t)] = j \text{Im } \dot{S}(\omega) = -jB(\omega) \end{cases}\quad (3.20)$$

Если сигнал  $s(t)$  представляет собой четную функцию времени, то спектральная плотность – действительная функция частоты. Если сигнал  $s(t)$  представляет собой нечетную функцию времени, то спектральная плотность – чисто мнимая функция частоты.

Применение обратного преобразования Фурье к  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  позволяет определить отдельно четную и нечетную составляющие сигнала общего вида:

$$\begin{aligned}s_{\text{чет}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t dt + \underbrace{j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t dt}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t dt,\end{aligned}\quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}s_{\text{неч}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-jB(\omega)] \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t dt - \underbrace{j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t dt}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t dt.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Сигнал  $s(t)$  – действительная функция времени, следовательно, мнимая часть выражений (3.21) и (3.22) должна быть равна нулю. Таким образом,  $A(\omega)$  должна быть четной функцией частоты, а  $B(\omega)$  – нечетной функцией частоты:

$$\begin{cases} A(\omega) = A(-\omega), \\ B(\omega) = -B(-\omega). \end{cases} \quad (3.23)$$

Чтобы разделить сигнал общего вида на четную и нечетную составляющие, можно воспользоваться либо соотношениями (3.17), либо выражениями:

$$s_{\text{чет}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cdot \cos \omega t d\omega, \quad (3.24)$$

$$s_{\text{неч}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cdot \sin \omega t d\omega. \quad (3.25)$$

Результаты обобщения свойства четности преобразований Фурье на вещественные и комплексные сигналы представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Свойства четности преобразований Фурье для вещественных и комплексных сигналов

N	Описание сигнала	Спектральная плотность
1	$s_{\text{чет}}(t)$	$A(\omega)$
2	$s_{\text{неч}}(t)$	$-jB(\omega)$
3	$js_{\text{чет}}(t)$	$jA(\omega)$
4	$js_{\text{неч}}(t)$	$B(\omega)$
5	$s_{\text{чет}}(t) + s_{\text{неч}}(t)$	$A(\omega) - jB(\omega)$
6	$j[s_{\text{чет}}(t) + s_{\text{неч}}(t)]$	$B(\omega) + jA(\omega)$
7	$s_{\text{чет}}(t) + js_{\text{неч}}(t)$	$A(\omega) + B(\omega)$
8	$s_{\text{чет}}(t) - js_{\text{неч}}(t)$	$A(\omega) - B(\omega) = A(\omega) + B(-\omega)$
9	$s_{\text{неч}}(t) + js_{\text{чет}}(t)$	$j[A(\omega) - B(\omega)]$
10	$s_{\text{неч}}(t) - js_{\text{чет}}(t)$	$-j[A(\omega) + B(\omega)]$

**Пример 3.2** - Расчет спектральной плотности одиночного экспоненциального импульса, его четной и нечетной составляющих, изображенных на рисунке 3.3.

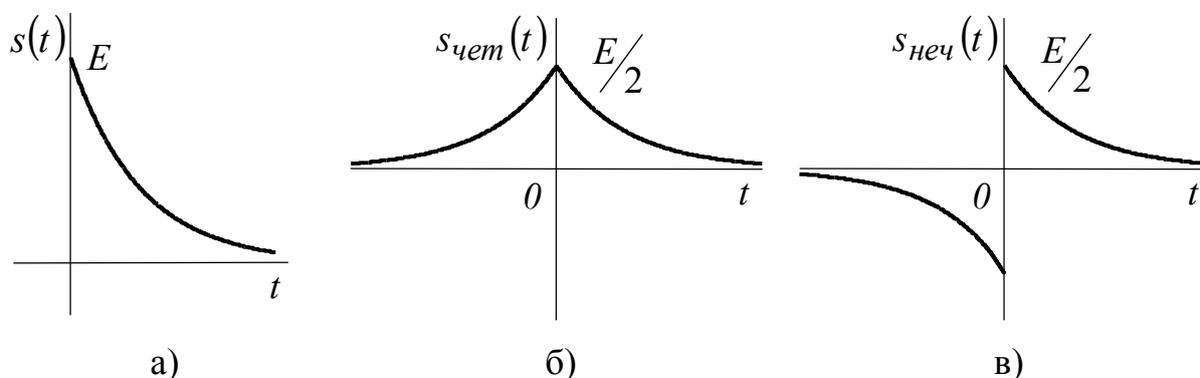


Рисунок 3.3 – Экспоненциальный импульс  $s(t)$ , его четная  $s_{\text{чет}}(t)$  и нечетная  $s_{\text{неч}}(t)$  составляющие

Математическое описание экспоненциального импульса имеет вид

$$s(t) = Ee^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Разделяя сигнал общего вида на четную и нечетную компоненты, получим:

$$s_{\text{чет}}(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)] = \frac{E}{2}e^{-\alpha|t|},$$

$$s_{\text{неч}}(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)] = \frac{E}{2}e^{-\alpha|t|}\text{sign}(t).$$

Суммирование четной и нечетной составляющих приводит к восстановлению сигнала общего вида:

$$s(t) = s_{\text{чет}}(t) + s_{\text{неч}}(t),$$

$$s(t) = \frac{E}{2}e^{-\alpha|t|}[1 + \text{sign}(t)] = Ee^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Спектральная плотность экспоненциального импульса равна

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{\infty} Ee^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + j\omega}.$$

Спектральная плотность состоит из суммы действительной и мнимой частей

$$\dot{S}(\omega) = \frac{E}{\alpha + j\omega} = \frac{E(\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} = E \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - jE \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Мнимая часть спектральной плотности соответствует нечетной составляющей сигнала  $s_{\text{неч}}(t)$ , а действительная часть спектральной плотности относится к четной составляющей сигнала. Результаты расчетов сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – Временное и спектральное представление сигнала общего вида и его составляющих

Сигналы		Спектральные плотности	
Аналитическое представление	Графическое представление	Аналитическое представление	$ S(\omega) $ – АЧХ, $\varphi(\omega)$ – ФЧХ
$s(t) = Ee^{-\alpha \cdot t} \sigma(t)$		$\Phi^+[s(t)] = \frac{E}{\alpha + j\omega}$	
$s_{\text{чет}}(t) = \frac{E}{2} e^{-\alpha t }$		$\Phi^+[s_{\text{чет}}(t)] = E \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	
$s_{\text{неч}}(t) = \frac{E}{2} e^{-\alpha t } \text{sign}(t)$		$\Phi^+[s_{\text{неч}}(t)] = -jE \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$	

Анализируя спектральные характеристики, замечаем:

а) спектральная плотность в точке  $\omega = 0$  численно равна площади сигнала

$$\int_0^{\infty} E e^{-\alpha \cdot t} dt = \frac{E}{\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{2} e^{-\alpha \cdot |t|} dt = \frac{E}{\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{2} e^{-\alpha \cdot |t|} \cdot \text{sign}(t) dt = 0;$$

б) спектральная плотность затухает с увеличением частоты без “пульсаций”, т.к. исследуемые сигналы имеют конечную энергию, но бесконечную теоретическую длительность.

В таблице 3.3 представлены аналитические и графические модели различных сигналов во временной и частотной областях.

### 3.5 Энергетические характеристики непериодических сигналов

Энергию непериодического сигнала можно определить как по временному, так и по спектральному представлениям:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega \cdot t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega \cdot t} dt}_{\dot{S}^*(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.27)$$

Квадрат модуля спектральной плотности сигнала называется энергетическим спектром  $W_S(\omega)$ :

$$W_S(\omega) = \dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2. \quad (3.28)$$

Реальные сигналы имеют не только конечную энергию, но и ограниченную длительность, а, следовательно, – бесконечный спектр. На практике требуется не только определить полную энергию сигнала, но и оценить полосу частот, занимаемую сигналом. Для принятия объективного решения используют энергетический критерий: вводят коэффициент использования  $\lambda$  энергии сигнала. Выбирают значение коэффициента использования  $\lambda = 0,9 \div 0,99$ .

Под шириной спектра понимают эффективную полосу частот  $\Delta\omega_{\text{Э}}$ , в пределах которой сосредоточена основная часть энергии сигнала (90%÷99%), и рассчитывают ее из уравнения

$$\text{Э}_{\lambda} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\text{Э}}} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.29)$$

Временное представление сигнала также не всегда определено конечной длительностью импульса. Например, сигнал, представляющий собой разряд конденсатора через резистор (экспоненциальный импульс), имеет бесконечную длительность. Поэтому для сигналов также вводят понятие энергетической (эффективной) длительности  $\tau_{\text{Э}}$ . Энергетической длительностью  $\tau_{\text{Э}}$  называют интервал времени, в пределах которого заключена основная часть энергии сигнала. Коэффициент, обозначающий учитываемую часть энергии, обозначим так же  $\lambda$ . Для расчета энергетической длительности сигнала используют уравнение

$$\text{Э}_{\lambda} = \int_{t_1}^{t_1 + \tau_{\text{Э}}} s^2(t) dt = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (3.30)$$

**Пример 3.3** – Расчет энергетических параметров одиночного экспоненциального импульса

Математическое описание экспоненциального импульса во времени и его спектральная плотность известны из примера 3.2. Графические модели имеются в таблице 3.2. Откуда

$$s(t) = Ee^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{E}{\alpha + j\omega}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Учитываемая часть энергии  $\lambda$  составляет 90%. Для определения энергетической длительности  $\tau_{\text{Э}}$  воспользуемся уравнением (3.30):

$$0,9 \cdot \int_0^{\infty} E^2 e^{-2\alpha t} dt = \int_0^{\tau_{\text{Э}}} E^2 e^{-2\alpha t} dt;$$

$$0,9 \frac{E^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\tau_{\text{Э}}};$$

$$0,9 = 1 - e^{-2\alpha \tau_{\text{Э}}};$$

$$\tau_{\text{Э}} = \frac{\ln 10}{2\alpha} = 1,15 / \alpha.$$

Для определения энергетической полосы частот  $\Delta\omega_{\mathcal{E}}$  воспользуемся уравнением (3.29):

$$0,9 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega_{\mathcal{E}}} \frac{E^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega;$$

$$0,9 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{E^2}{\alpha} \cdot \arctg \omega/\alpha \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{E^2}{\alpha} \cdot \arctg \omega/\alpha \Big|_0^{\Delta\omega_{\mathcal{E}}};$$

$$0,45 = \frac{1}{\pi} \arctg \Delta\omega_{\mathcal{E}}/\alpha;$$

$$\Delta\omega_{\mathcal{E}} = \alpha \cdot \operatorname{tg}(0,9 \cdot \pi/2) \approx 6,3\alpha; \Delta f_{\mathcal{E}} = \frac{6,3}{2\pi} \cdot \alpha \approx \alpha.$$

Энергетические параметры экспоненциального импульса показаны на рисунке 3.4.

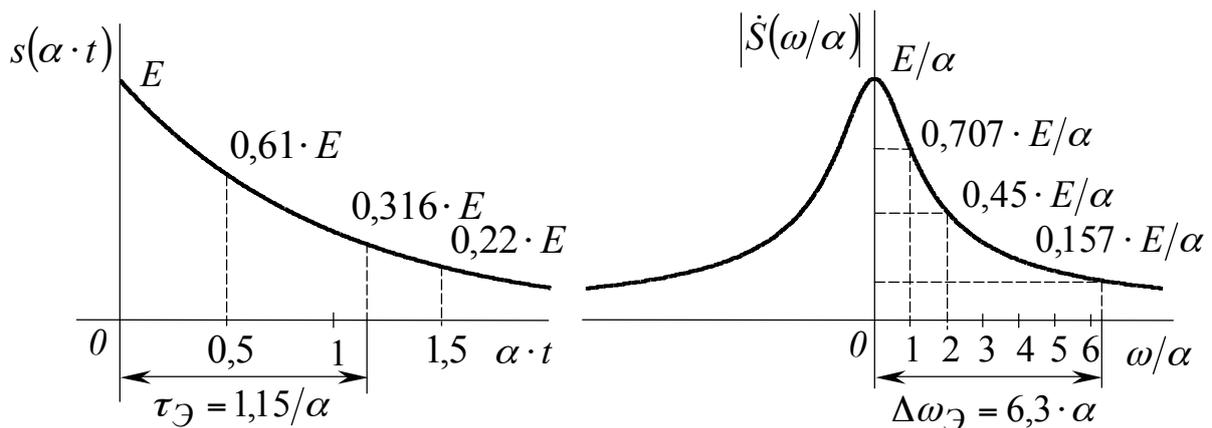


Рисунок 3.4 – Энергетические параметры одиночного экспоненциального импульса

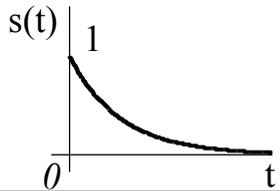
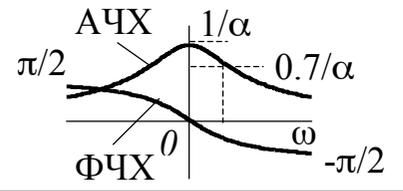
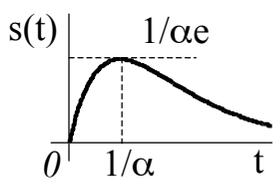
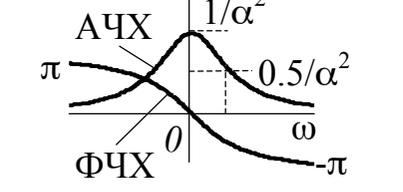
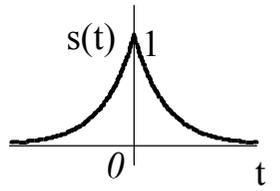
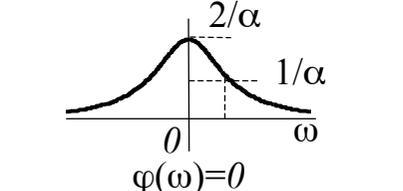
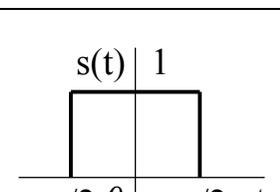
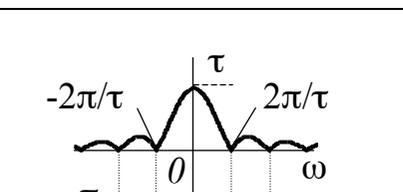
### 3.6 Границы применимости преобразований Фурье и возможности их расширения

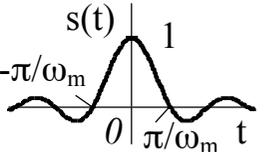
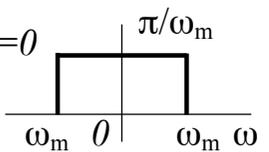
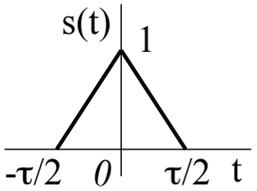
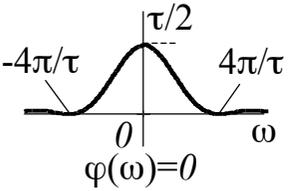
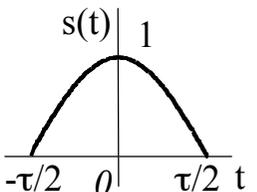
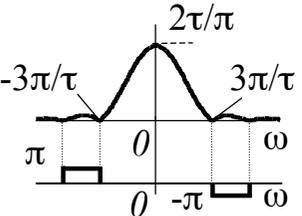
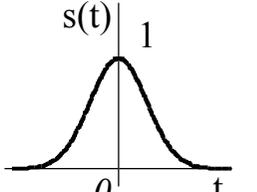
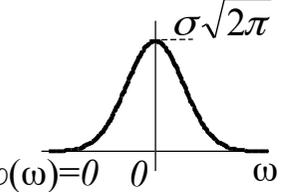
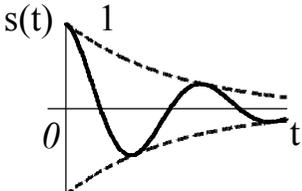
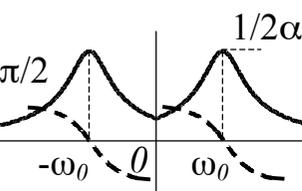
Преобразования Фурье описывают связь между спектральной плотностью  $\dot{S}(\omega)$  и непериодическим сигналом  $s_T(t)$ , полученным из периодического при  $T \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} s(t) = 0. \quad (3.31)$$

Результаты анализа ряда типовых интегрируемых сигналов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых сигналов

Сигнал $s(t)$		Спектральная плотность $S(\omega)$	
Аналитическое представление	Графическое представление	Аналитическое представление	$ S(\omega) $ – АЧХ, $\varphi(\omega)$ – ФЧХ
1 $s(t) = e^{-\alpha \cdot t} \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$	
2 $s(t) = te^{-\alpha \cdot t} \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$	
3 $s(t) = e^{-\alpha t }$		$\dot{S}(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	
4 $s(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$	

5	$s(t) = \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}$		$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_m}, &  \omega  < \omega_m \\ 0, &  \omega  > \omega_m \end{cases}$	
6	$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau/2}, &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2$	
7	$s(t) = \begin{cases} \cos(\omega_o t), &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ $\tau = \frac{\pi}{\omega_o} = \frac{T_o}{2}$		$\dot{S}(\omega) = 2\omega_o \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{\omega_o^2 - \omega^2}$	
8	$s(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$		$\dot{S}(\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	
9	$s(t) = (e^{-\alpha t} \cos \omega_o t) \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_o)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_o)} \right]$	

Первое условие (3.31) следует трактовать как конечность переходных процессов в линейных системах.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt \leq M \quad (3.32)$$

Второе соотношение (3.32) свидетельствует о конечности энергии сигнала или является условием его физической реализуемости.

Условия Дирихле (3.31) и (3.32) значительно снижают класс сигналов, к которым применимы преобразования Фурье. Однако, точно также как к непериодическим сигналам были применены ряды Фурье (и в результате получены преобразования Фурье), к периодическим сигналам применяют преобразования Фурье.

Рассмотрим изменения спектральной характеристики одиночного прямоугольного импульса (рисунок 3.5) в двух предельных случаях:

во-первых, при увеличении длительности импульса до бесконечности (переход к постоянной составляющей);

во-вторых, при уменьшении длительности импульса до нуля при одновременном сохранении площади импульса ( $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 1$ ).

К аппарату обобщенных функций, в частности к дельта – функциям, приходится обращаться в двух идеальных моделях: при  $\tau \rightarrow 0$  и при  $\tau \rightarrow \infty$ . Только при  $\tau \rightarrow 0$  дельта – функция возникает во временной области, а при  $\tau \rightarrow \infty$  дельта–функция образуется в частотной области.

Применяя фильтрующее свойство дельта–функций при выполнении преобразований Фурье, получим:

$$\Phi^+[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1, \quad -\infty < \omega < \infty;$$

$$\Phi^- [2\pi \cdot \delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1, \quad -\infty < t < \infty.$$

Спектральная характеристика дельта–функции равна 1 на всех частотах, т.е. полоса частот равна бесконечности. Спектральная характеристика постоянной составляющей равна  $2\pi \cdot \delta(\omega)$ , т.е. равна бесконечности при  $\omega = 0$  и равна нулю на всех других частотах.

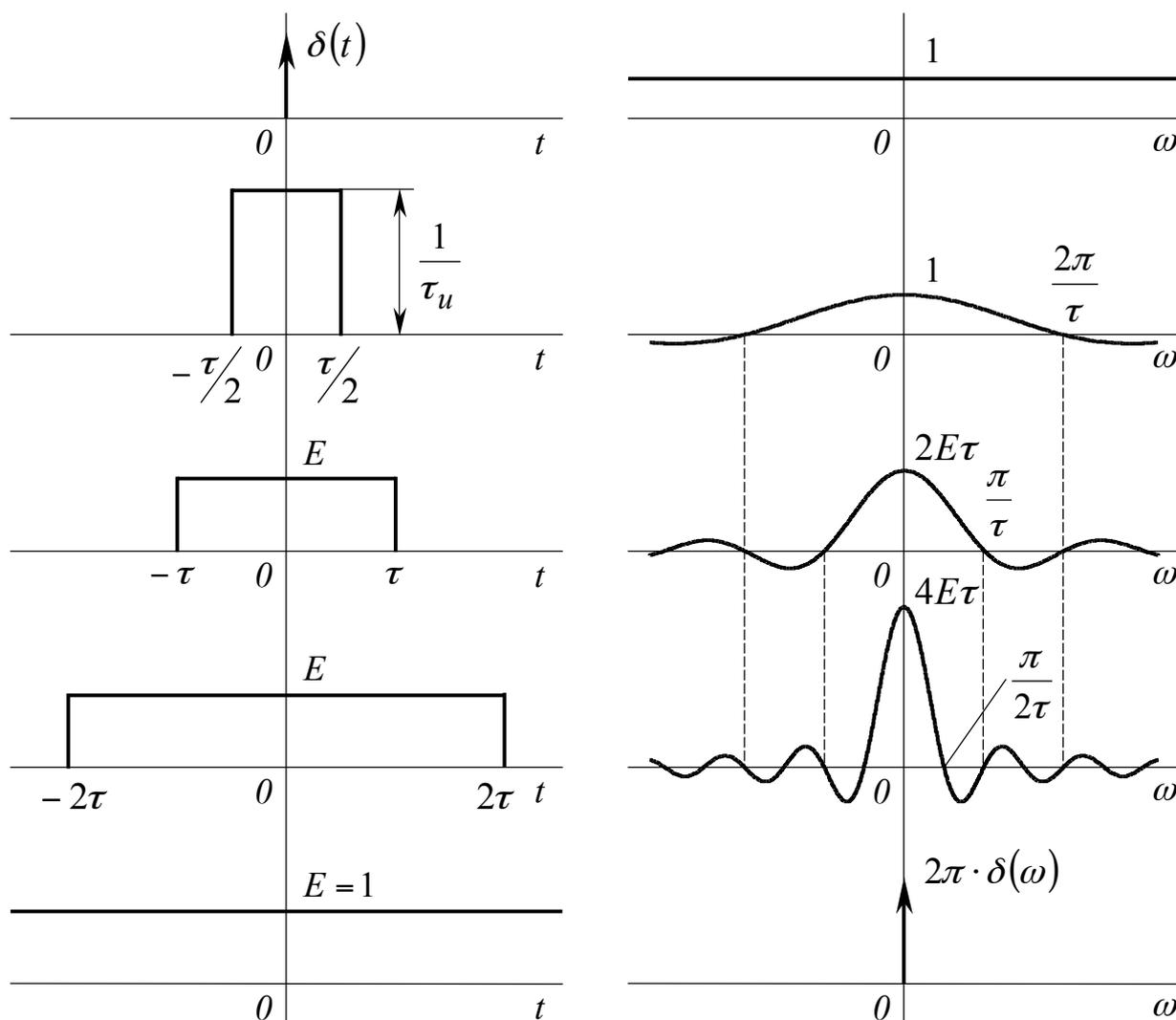


Рисунок 3.5 – Временное и спектральное представления процесса преобразования одиночного импульса в дельта-функцию и постоянную составляющую

### 3.7 Спектральное представление некоторых неинтегрируемых сигналов

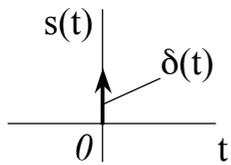
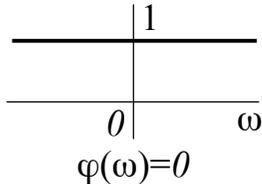
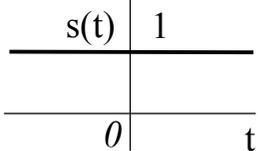
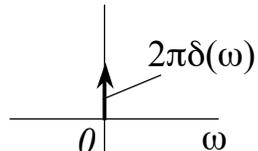
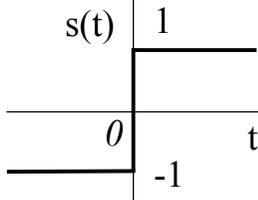
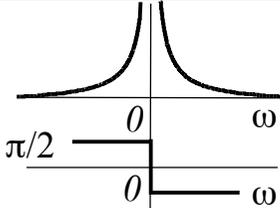
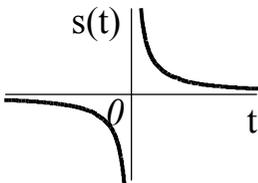
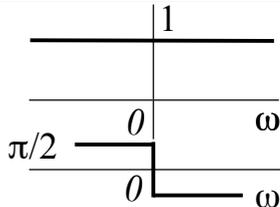
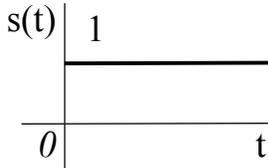
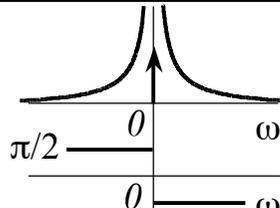
Условие абсолютной интегрируемости сигналов можно не нарушать, если предварительно преобразовать неинтегрируемый сигнал. На рисунке 3.6 показаны неинтегрируемые  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и интегрируемые сигналы  $s_3(t)$ ,  $s_4(t)$ :

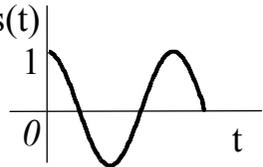
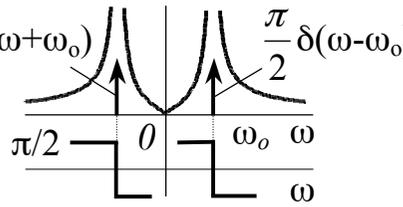
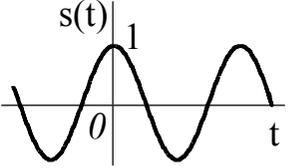
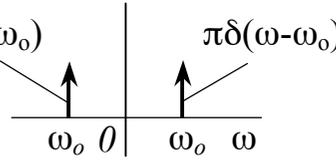
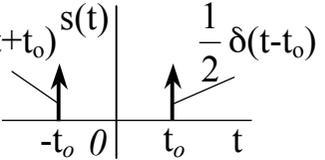
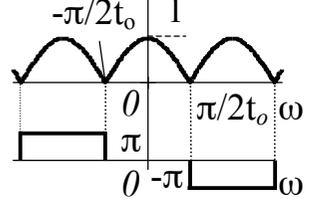
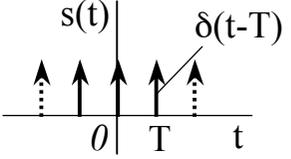
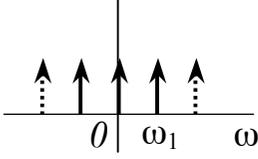
$$s_1(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} s_3(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|},$$

$$s_2(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} s_4(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|} \operatorname{sign} t.$$

Результаты анализа ряда типовых неинтегрируемых сигналов приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Преобразования Фурье сигналов, описываемых обобщенными функциями

Сигнал $s(t)$		Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$	
Аналитическое описание	Графическая модель	Аналитическое описание	$ \dot{S}(\omega) $ -АЧХ, $\varphi(\omega)$ -ФЧХ
1 $s(t) = \delta(t)$		$\dot{S}(\omega) = 1$	
2 $s(t) = 1$		$\dot{S}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$	
3 $s(t) = \text{sign}(t) = \frac{t}{ t }$		$\dot{S}(\omega) = \frac{2}{j\omega}$	
4 $s(t) = \frac{1}{\pi \cdot t}$		$\dot{S}(\omega) = -j \cdot \text{sign}(\omega) = -\frac{j\omega}{ \omega }$	
5 $s(t) = \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	

6	$s(t) = \sigma(t) \cos \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_o) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega_o) + j \frac{\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$	
7	$s(t) = \cos \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_o) + \pi \delta(\omega + \omega_o)$	
8	$s(t) = \frac{1}{2} [\delta(t + t_o) + \delta(t - t_o)]$		$\dot{S}(\omega) = \cos \omega \cdot t_o$	
9	$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ $T = 2\pi / \omega_1$		$\dot{S}(\omega) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$ $\omega_1 = 2\pi / T$	

**Пример 3.4** – Расчет спектральных плотностей сигналов, изображенных на рисунке 3.6.

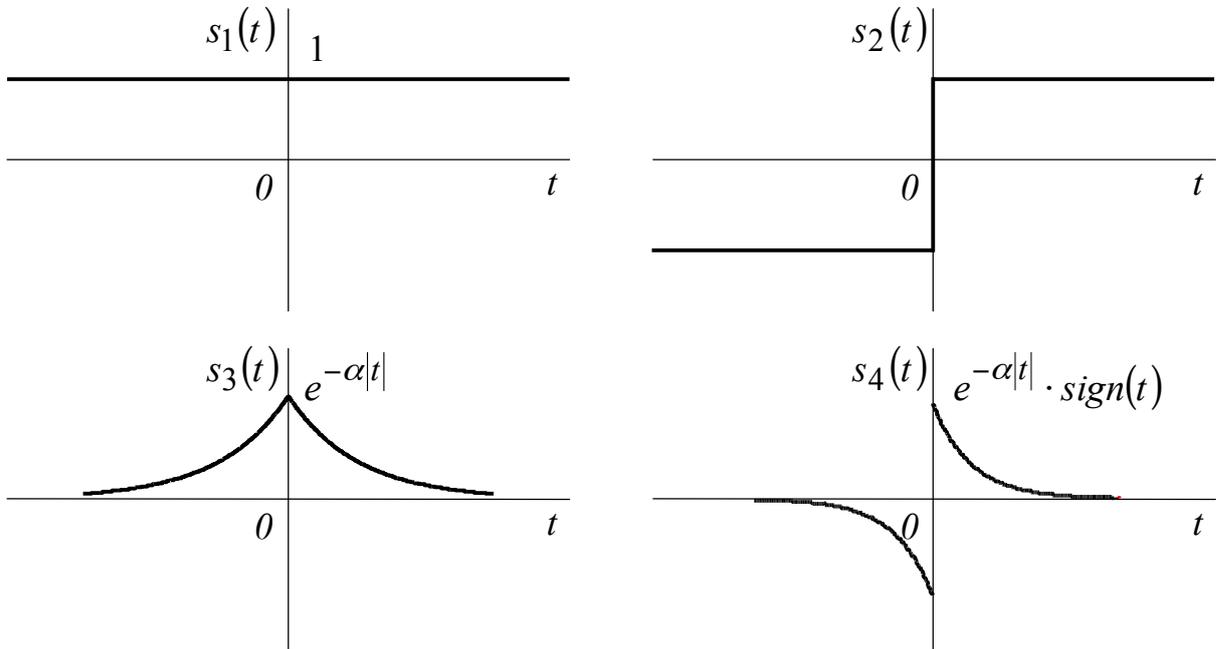


Рисунок 3.6 – Графические модели интегрируемых и неинтегрируемых сигналов

Применяя прямое преобразование Фурье к интегрируемому сигналу  $s_3(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{S}_3(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \left[ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \right] = \\ &= \left[ \frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{\alpha-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega} \Big|_0^{\infty} \right] = \left( \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , найдем спектральную плотность неинтегрируемого сигнала  $s_1(t)$

$$\dot{S}_1(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0, \\ \infty, & \omega = 0. \end{cases}$$

Функция с такими свойствами относится к дельта-образующим функциям (таблица 1.1). Учитывая условие нормировки, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\alpha} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi,$$

$$\dot{S}_1(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0, \\ 2\pi \cdot \delta(\omega), & \omega = 0. \end{cases}$$

Спектральную плотность сигнала  $s_2(t)$  определим таким же путем.

Применяя прямое преобразование Фурье к интегрируемому сигналу  $s_4(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{S}_4(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \cdot |t|} \text{sign}(t) e^{-j\omega t} dt = \left[ \int_{-\infty}^0 -e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \right] = \\ &= \left[ \frac{-e^{(\alpha - j\omega)t}}{\alpha - j\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right] = \left( \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = -j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , найдем спектральную плотность неинтегрируемого сигнала  $s_2(t) = \text{sign}(t)$

$$\dot{S}_2(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -j \frac{2}{\omega} = \frac{2}{j\omega}.$$

**Пример 3.5** – Расчет спектральной плотности гармонического колебания  $s_5(t)$  и радиоимпульса  $s_6(t)$ , изображенных на рисунке 3.7.

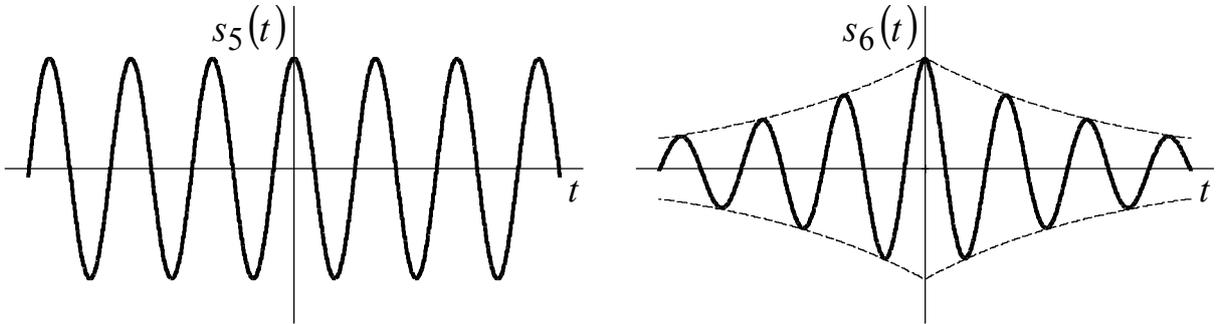


Рисунок 3.7 – Модели радиосигналов  $s_5(t) = \cos \omega_0 t$  и  $s_6(t) = e^{-\alpha|t|} \cos \omega_0 t$

$$s_5(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} s_6(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|} \cos \omega_0 t.$$

Применяя прямое преобразование Фурье к сигналу  $s_6(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{S}_6(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} \left( e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{[\alpha - j(\omega - \omega_o)]}}{\alpha - j(\omega - \omega_o)} \right]_{-\infty}^0 - \frac{e^{-[\alpha + j(\omega - \omega_o)]}}{\alpha + j(\omega - \omega_o)} \Big|_0^{\infty} \Bigg] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{[\alpha - j(\omega + \omega_o)]}}{\alpha - j(\omega + \omega_o)} \right]_{-\infty}^0 - \frac{e^{-[\alpha + j(\omega + \omega_o)]}}{\alpha + j(\omega + \omega_o)} \Big|_0^{\infty} \Bigg] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_o)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_o)^2}.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим спектральную плотность гармонического колебания  $s_5(t) = \cos \omega_o t$

$$\dot{S}_5(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_o)^2} \right] + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_o)^2} \right] = \pi \delta(\omega - \omega_o) + \pi \delta(\omega + \omega_o).$$

### 3.8 Выводы

1. Преобразования Фурье устанавливают взаимно однозначное соответствие между двумя способами описания физического процесса. Один из них отображает исследуемое явление в плоскости “мгновенное значение – время”, а второй – в плоскости “амплитуда – частота”.

2. Переход от временного представления к частотному (спектральной плотности) осуществляется с помощью прямого преобразования Фурье. Если анализируемый сигнал периодический, то его спектр *дискретный*, если непериодический, то его спектр *сплошной*.

3. Если сигнал описывается вещественной функцией времени  $s(t)$ , то спектральная плотность  $\dot{S}(\omega)$  является комплексной функцией, у которой действительная часть – четная функция частоты, а мнимая – нечетная функция частоты.

4. Сигнал  $s(t)$  может быть четным, нечетным или общего вида. Сигнал общего вида равен сумме четной и нечетной составляющих. Спектральная плотность *четного* сигнала – вещественная, *четная* функция частоты. Спектральная плотность *нечетного* сигнала – мнимая, *нечетная* функция частоты.

5. Преобразования Фурье применимы к физически реализуемым сигналам, энергия которых конечна. Расширение границ применимости преобразований Фурье достигается с помощью обобщенных функций.

## 4 ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРАХ

### 4.1 Сложение сигналов

Преобразование Фурье – линейная операция, поэтому взвешенное суммирование сигналов

$$s_{\Sigma}(t) = \sum_n \gamma_n s_n(t) \quad (4.1)$$

приводит к взвешенному суммированию спектральных плотностей

$$\dot{S}_{\Sigma}(\omega) = \sum_n \gamma_n \dot{S}_n(\omega), \quad (4.2)$$

где  $\gamma_n$  – постоянный коэффициент.

Теорема о сложении – единственная из всех в том смысле, что преобразование сигнала по времени совпадает с преобразованием спектральной плотности по частоте:

$$\Phi^+ \left[ \sum_n \gamma_n s_n(t) \right] = \sum_n \gamma_n \Phi^+ [s_n(t)] = \sum_n \gamma_n \dot{S}_n(\omega), \quad (4.3)$$

$$\Phi^- \left[ \sum_n \gamma_n \dot{S}_n(\omega) \right] = \sum_n \gamma_n \Phi^- [\dot{S}_n(\omega)] = \sum_n \gamma_n s_n(t). \quad (4.4)$$

Сложение спектральных плотностей происходит по законам комплексного представления

$$\dot{S}_{\Sigma}(\omega) = \sum_n \gamma_n A_n(\omega) - j \sum_n \gamma_n B_n(\omega). \quad (4.5)$$

Суммарный сигнал  $s_{\Sigma}(t)$  имеет спектральные характеристики вида:

$$A_{\Sigma} = |\dot{S}_{\Sigma}(\omega)| = \sqrt{\left( \sum_n \gamma_n A_n(\omega) \right)^2 + \left( \sum_n \gamma_n B_n(\omega) \right)^2}, \quad (4.6)$$

$$\Phi_{\Sigma} = \varphi_n(\omega) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\sum_n \gamma_n B_n(\omega)}{\sum_n \gamma_n A_n(\omega)} \right). \quad (4.7)$$

## 4.2 Теорема сдвига

Смещение сигнала во времени не изменяет его энергетических характеристик, поэтому амплитудный спектр не меняется (рисунок 4.1). Изменения произойдут только в фазовом спектре.

$$\Phi^+[s(t-t_3)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_3)e^{-j\omega t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_3)e^{-j\omega(t-t_3)} d(t-t_3) \right] e^{-j\omega t_3} = \dot{S}(\omega)e^{-j\omega t_3}$$

$$\Phi^+[s(t \pm t_3)] = \dot{S}(\omega)e^{\pm j\omega t_3} = |\dot{S}(\omega)|e^{j[\varphi(\omega) \pm j\omega t_3]}. \quad (4.8)$$

Если сигнал перемещается по закону  $(t \pm t_3)$ , то фазовый спектр  $\varphi(\omega)$  получает линейное приращение  $\pm \omega \cdot t_3$ , т.е.

$$\Phi_{ЧХ} = \arg \Phi^+[s(t \pm t_3)] = \varphi(\omega) \pm \omega \cdot t_3. \quad (4.9)$$

Неизменность модуля говорит о том, что амплитудный спектр не зависит от положения сигнала во времени.

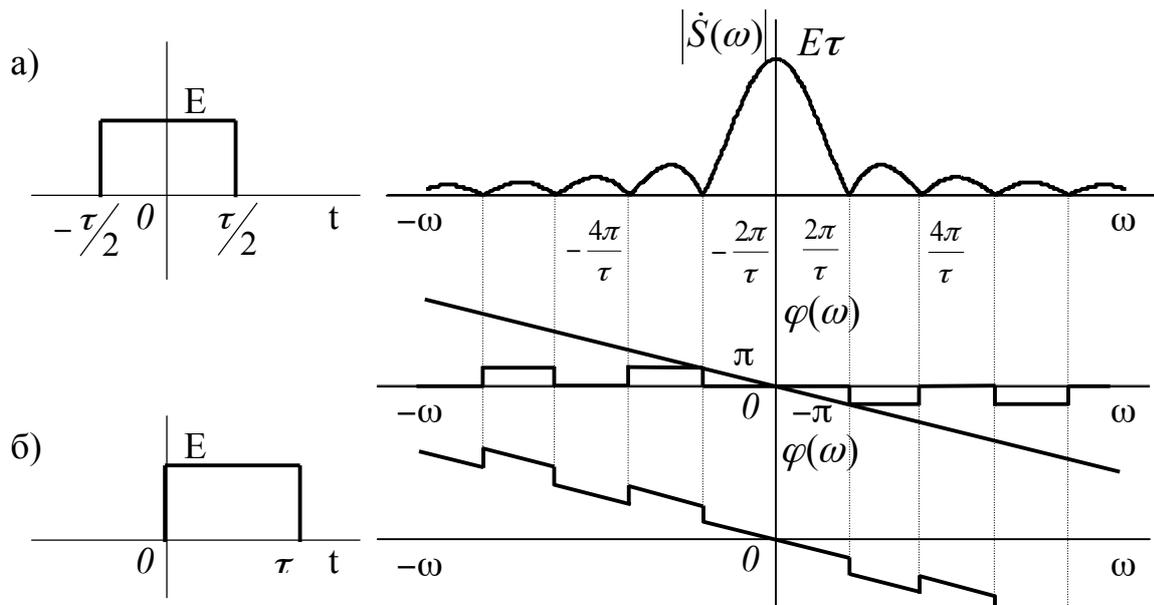


Рисунок 4.1 – Временное и спектральное представления двух сигналов, один из которых (б) задержан относительно другого на  $\tau/2$

## 4.3 Следствие теорем 4.1, 4.2

Следствием первых двух теорем является возможность сформулировать условия неискаженной передачи сигнала по каналу связи.

Сигнал на выходе канала связи (рисунок 4.2) считают неискаженным, если, начиная с некоторого момента времени  $(t \pm t_3)$ , сигнал на выходе  $s_{вых}(t)$  с точностью до постоянного множителя  $K$  совпадает с сигналом на входе:

$$s_{\text{ввлх}}(t) = K s(t \pm t_3). \quad (4.10)$$

Спектральные плотности сигналов на входе и выходе канала связи имеют вид:

$$\Phi^+[s(t)] = \dot{S}(\omega), \quad (4.11)$$

$$\Phi^+[s_{\text{ввлх}}(t)] = \dot{S}_{\text{ввлх}}(\omega) = K \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t_3}. \quad (4.12)$$

Отношение спектральных плотностей позволяет судить о комплексной передаточной функции канала связи  $\dot{K}_{\text{КС}}(\omega)$ .

$$\dot{K}_{\text{КС}}(\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{ввлх}}(\omega)}{\dot{S}(\omega)} = K e^{-j\omega t_3}. \quad (4.13)$$

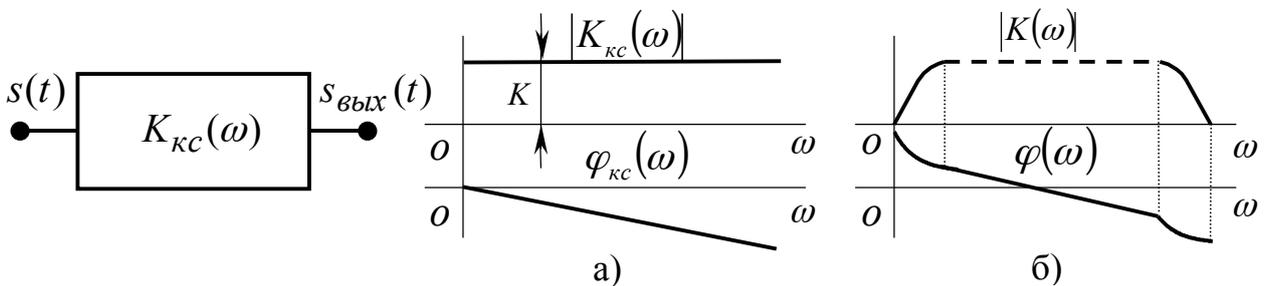


Рисунок 4.2 – Канал связи Рисунок 4.3 – а) АЧХ и ФЧХ идеального канала связи;  
б) АЧХ и ФЧХ реального канала связи

Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) идеального канала связи изображены на рисунке 4.3а. Реальный канал связи, АЧХ и ФЧХ которого изображены на рисунке 4.4б, не пропускает постоянный ток и “заваливает” низкочастотные составляющие спектра сигнала. В области верхних частот сказывается инерционность элементной базы, и поэтому не проходят высокочастотные составляющие спектра сигнала. Идеальный канал связи все гармонические составляющие спектра *задерживает на одинаковое время*. Реальный канал связи низкочастотные составляющие “тормозит”, а высокочастотные – “ускоряет”.

#### 4.4 Изменение масштаба времени

Одна из основных практических задач передачи информации на расстояние связана с повышением скорости передачи. Причем, в процессе обработки сигнал  $s(at)$  либо сжимается во времени при ( $a > 1$ ), либо растягивается (при  $a < 1$ ).

$$\Phi^+[s(t)] = \dot{S}(\omega).$$

$$\Phi^+[s(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(at)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \dot{S}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (4.14)$$

Умножение аргумента  $t$  на положительное число  $a$  приводит к делению аргумента  $\omega$  на такое же число. Таким образом, "сжатие" сигнала во времени приводит к "растяжению" спектра и наоборот (рисунок 4.4).

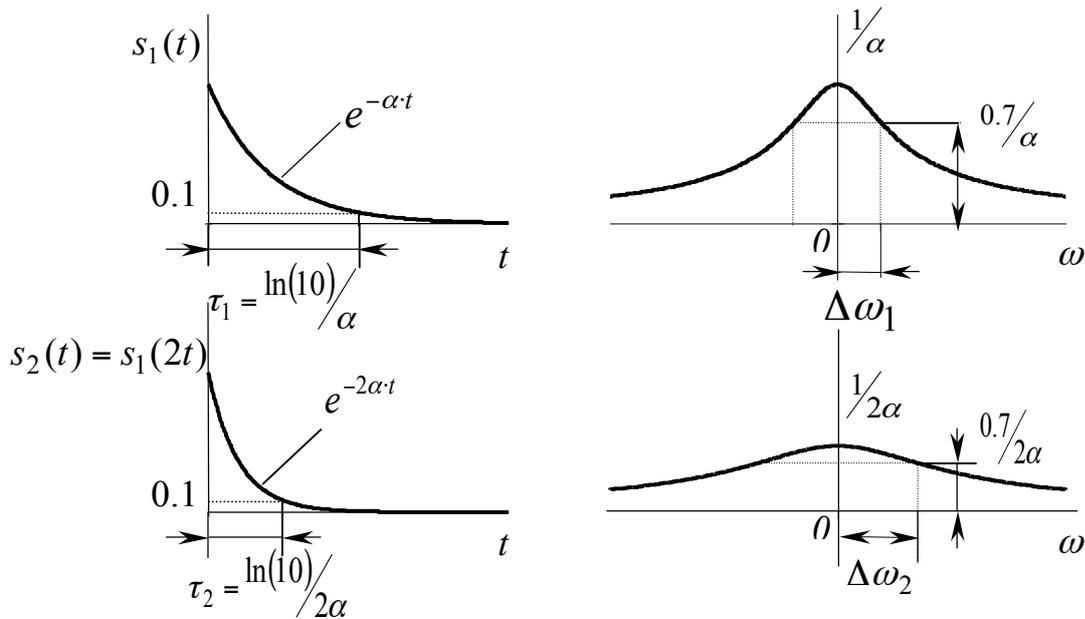


Рисунок 4.4 – Временное и спектральное представления сигнала при изменении масштаба времени

#### 4.5 Инверсия сигнала во времени

На рисунке 4.5 изображены сигналы с инверсией во времени (зеркальные сигналы) и без инверсии во времени.

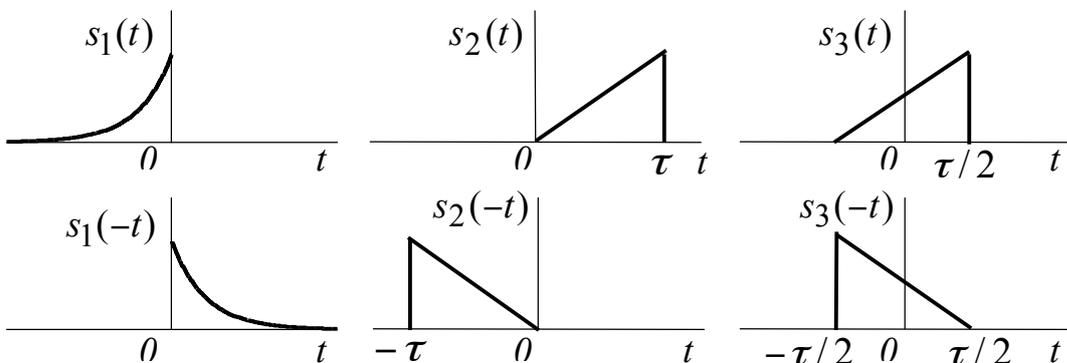


Рисунок 4.5 –  $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$  – сигналы без инверсии во времени,  
 $s_1(-t), s_2(-t), s_3(-t)$  – зеркальные сигналы

Применяя прямое преобразование Фурье к сигналу с инверсией во времени, получим:

$$\begin{aligned}\Phi^+[s(-at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s(-at)e^{-j\omega t} dt = \{-at = x\} = \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\left(-\frac{\omega}{a}\right)x} dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \dot{S}\left(-\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \dot{S}^*\left(\frac{\omega}{a}\right), \\ \Phi^+[s(-at)] &= \frac{1}{|a|} \dot{S}\left(-\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Инверсия сигнала во времени приводит к тому, что спектральная плотность становится комплексно-сопряженной функцией.

$$\Phi^+[s(t)] = \dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega).\quad (4.16)$$

$$\Phi^+[s(-t)] = \dot{S}^*(\omega) = A(\omega) + jB(\omega).\quad (4.17)$$

Применяя рассмотренную теорему, определим аналитические выражения для расчета спектральных плотностей четной и нечетной составляющих сигнала общего вида  $s(t)$ . Результаты анализа представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Аналитическое представление сигнала общего вида и его четной и нечетной составляющих во временной и частотной областях

$s(t) = s_{чет}(t) + s_{неч}(t)$	$\dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$
$s_{чет}(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s(-t)]$	$\Phi^+[s_{чет}(t)] = \frac{1}{2}[\dot{S}(\omega) + \dot{S}^*(\omega)] = A(\omega)$
$s_{неч}(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s(-t)]$	$\Phi^+[s_{неч}(t)] = \frac{1}{2}[\dot{S}(\omega) - \dot{S}^*(\omega)] = -jB(\omega)$

## 4.6 Дифференцирование сигнала по времени

Дифференцирование сигнала приводит к исчезновению постоянной составляющей (если она была), увеличению скорости изменения мгновенных значений сигнала во времени и расширению полосы частот.

Преобразование сигналов и их спектров при дифференцировании по времени представлено на рисунке 4.6 и в таблице 4.2.

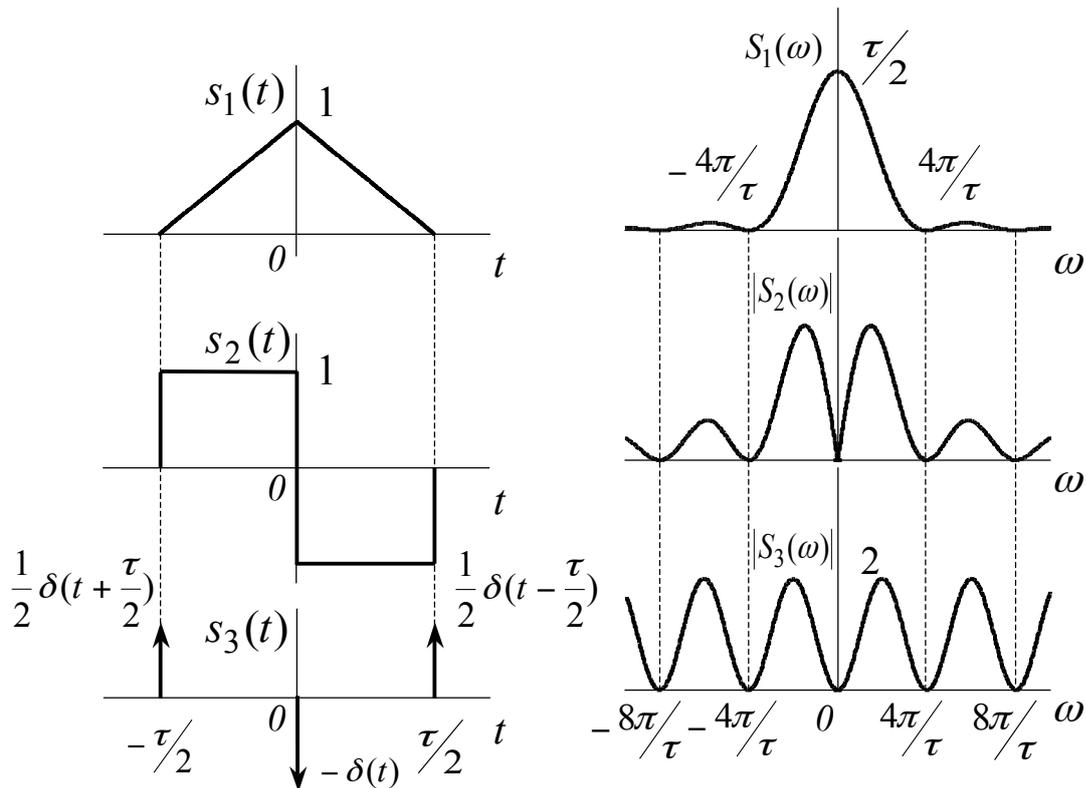


Рисунок 4.6 – Временное и спектральное представления трех функционально связанных сигналов при дифференцировании по времени

Доказательство теоремы о дифференцировании сигнала выполним, применяя интегрирование по частям.

$$\Phi[s'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s'(t) e^{-j\omega t} dt = s(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \dot{S}(\omega),$$

при выполнении условия  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} s(t) = 0$ .

Обобщая на случай многократного дифференцирования, получим

$$\begin{cases} \Phi^+[s'(t)] = j\omega \dot{S}(\omega), \\ \dots\dots\dots \\ \Phi^+[s^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \dot{S}(\omega). \end{cases} \quad (4.18)$$

Таблица 4.2 – Преобразование сигналов и их спектров при дифференцировании по времени

Преобразование сигналов		Преобразование спектральных плотностей	
Математическое описание сигналов в пределах $ t  \leq \tau/2$	Функциональная связь между сигналами	Функциональная связь между спектрами	Спектральная плотность сигналов
$s_1(t) = 1 - 2 t /\tau$	$s_1(t)$	$\dot{S}_1(\omega)$	$\frac{\tau}{2} \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2$
$s_2(t) = -t/ t $	$s_2(t) = \frac{\tau}{2} s_1'(t)$	$\dot{S}_2(\omega) = \frac{\tau}{2} (j\omega) \dot{S}_1(\omega)$	$j\tau \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}}$
$s_3(t) = \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta(t) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$	$s_3(t) = \frac{1}{2} s_2'(t) = \frac{\tau}{4} s_1''(t)$	$S_3(\omega) = \frac{1}{2} (j\omega) \dot{S}_2(\omega) = \frac{\tau}{4} (j\omega)^2 \dot{S}_1(\omega)$	$-2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{4}$

Итак,  $n$  – кратное дифференцирование сигнала по времени приводит к умножению спектральной плотности на комплексный аргумент  $(j\omega)^n$ .

#### 4.7 Интегрирование сигнала во времени

Интегрирование сигнала во времени приводит к сглаживанию быстрых флуктуаций сигнала и, соответственно, к сужению полосы частот.

$$\begin{aligned} \Phi^+ \left[ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau}_{-j\omega} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{-j\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) + \pi \dot{S}(0) \delta(\omega). \end{aligned}$$

$$\Phi^+ \left[ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) + \pi \dot{S}(0) \delta(\omega). \quad (4.19)$$

$$\text{Здесь } \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{+i\omega} (e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \pi \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2t \sin \omega \cdot t}{\pi \omega \cdot t} = 2\pi \delta(\omega).$$

Интегрирование во времени приводит к делению спектральной плотности на комплексный параметр ( $j\omega$ ). Спектральная плотность будет содержать дельта – функцию в том случае, если

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \dot{S}(\omega = 0) \neq 0.$$

Повторное интегрирование сигнала приводит к делению спектральной плотности на комплексный параметр  $(j\omega)^2$ . Дополнительное слагаемое (производная от  $\delta$  – функции) перейдет в мнимую часть.

$$\begin{aligned} \Phi^+[\delta(x)] &= 1, \\ \Phi^+ \left[ \int_{-\infty}^{\tau} \delta(x) dx \right] &= \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega), \\ \Phi^+ \left[ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(x) dx d\tau \right] &= \frac{1}{(j\omega)^2} + j\pi \delta'(\omega). \end{aligned} \quad (4.20)$$

В таблице 4.3 (стр. 94-95) в компактной форме представлены основные свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах).

#### 4.8 Взаимозаменяемость аргументов $\omega$ и $t$ в преобразованиях Фурье

Сравнение между собой двух преобразований Фурье, прямого и обратного, позволяет сделать заключение о дуальности времени и частоты. Если  $\dot{S}(\omega)$  является преобразованием Фурье сигнала  $s(t)$ , то функция  $2\pi \cdot s(-\omega)$  будет результатом прямого преобразования Фурье комплексного сигнала  $\dot{S}(t)$ , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+[s(t)] &= \dot{S}(\omega) \\ \Phi^+[\dot{S}(t)] &= 2\pi \cdot s(-\omega) \end{aligned} \right\} (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi^-[\dot{S}(\omega)] &= s(t) \\ \Phi^-[s(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \dot{S}(-t) \end{aligned} \right\} (4.22)$$

#### 4.9 Перемещение спектра сигнала

Использование принципа дуальности позволяет провести рассуждения, аналогичные теореме сдвига. Если спектральной плотности  $\dot{S}(\omega)$  соответствует сигнал  $s(t)$ , то смещенной спектральной плотности  $\dot{S}(\omega - \omega_o)$  соответствует сигнал  $s(t)e^{j\omega_o t}$ .

$$\Phi^{-}[\dot{S}(\omega - \omega_o)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - \omega_o) e^{j(\omega - \omega_o)t} e^{j\omega_o t} dt = s(t) e^{j\omega_o t}. \quad (4.23)$$

$$\Phi^{-}[\dot{S}(\omega + \omega_o)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega + \omega_o) e^{j(\omega + \omega_o)t} e^{-j\omega_o t} dt = s(t) e^{-j\omega_o t}. \quad (4.24)$$

Суммируя правые и левые части выражений (4.23) и (4.24), получим  $\Phi^{-}[\dot{S}(\omega - \omega_o)] + \Phi^{-}[\dot{S}(\omega + \omega_o)] = s(t) [e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}] = 2s(t) \cos(\omega_o t)$ .

Таким образом, умножение сигнала  $s(t)$  на быстроосциллирующую функцию  $\cos \omega_o t$  приводит к раздвоению спектральной плотности  $\dot{S}(\omega)$  на две симметричные относительно оси  $\omega=0$  составляющие

$$\Phi^{+}[s(t) \cos \omega_o t] = \frac{1}{2} \dot{S}(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} \dot{S}(\omega + \omega_o). \quad (4.25)$$

#### 4.10 Дифференцирование спектральной плотности

Дифференцирование спектральной плотности по частоте приводит к умножению сигнала  $s(t)$  на параметр  $(-j) \cdot t$ .

$$\Phi^{-}[\dot{S}'(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}'(\omega) e^{j\omega \cdot t} d\omega = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \dot{S}(\omega) e^{j\omega \cdot t} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - jt \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega \cdot t} d\omega}_{s(t)} \quad (4.26)$$

Первое слагаемое в выражении (4.26) равно нулю, т.к.  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \dot{S}(\omega) = 0$ .

Выполняя  $n$  – кратное дифференцирование, получим:

$$\begin{aligned} \Phi^{-}[\dot{S}'(\omega)] &= (-j) \cdot t \cdot s(t), \\ \Phi^{-}[\dot{S}''(\omega)] &= (-j)^2 t^2 s(t), \\ \Phi^{-}[\dot{S}^{(n)}(\omega)] &= (-j)^n t^n s(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

$n$ -кратное дифференцирование спектральной плотности приводит к умножению сигнала  $s(t)$  на параметр  $(-j)^n \cdot (t)^n$ .

Таблица 4.3–Основные свойства преобразований Фурье (теоремы о спектрах)

$N$	Преобразование сигнала $s(t)$	Преобразование спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$	
1	Прямое преобразование Фурье $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$	$\dot{S}(\omega)$	Получение спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ по заданному сигналу $s(t)$
2	Получение сигнала $s(t)$ по заданной спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ $s(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega$	Обратное преобразование Фурье
3	Свойство симметрии преобразований $s(t)$ $\dot{S}(t)$	$\dot{S}(\omega)$ $2\pi s(-\omega)$	Взаимобратимость преобразований Фурье
4	Сложение сигналов $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$	$a_1 \dot{S}_1(\omega) + a_2 \dot{S}_2(\omega)$	Сложение спектральных плотностей
5	Изменение масштаба времени $s(at)$	$\frac{1}{ a } \dot{S}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Изменение масштаба частоты
6	Инверсия аргумента $t$ $s(-t)$	$\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$	Инверсия аргумента $\omega$
7	Сдвиг сигнала во времени $s(t - t_0)$	$\dot{S}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$	Умножение спектральной плотности на комплексную функцию частоты $e^{-j\omega t_0}$
8	Умножение сигнала на комплексную функцию времени $e^{j\omega_0 t}$ $s(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$	$\dot{S}(\omega - \omega_0)$	Смещение спектральной плотности по частоте

9	Умножение сигнала на гармоническую функцию	$s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}(\omega + \omega_0)$	Перемещение спектральной плотности в области положительных и отрицательных частот
10	n-кратное дифференцирование сигнала по времени	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$(j\omega)^n \cdot \dot{S}(\omega)$	Умножение спектральной плотности на параметр $(j\omega)^n$
11	Умножение сигнала на параметр $t^n$	$t^n s(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} \dot{S}(\omega)$	n-кратное дифференцирование спектральной плотности по частоте
12	Интегрирование сигнала во времени	$\int_{-\infty}^t s(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) + \pi \dot{S}(0) \delta(\omega)$	Деление спектральной плотности на параметр $j\omega$ , если $\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0$
13	Свертка двух сигналов во времени	$s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$	$\dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega)$	Перемножение двух спектральных плотностей
14	Произведение двух сигналов	$s_1(t) s_2(t)$	$\dot{S}_1(\omega) \otimes \dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\Omega) \dot{S}_2(\omega - \Omega) d\Omega$	Свертка спектральных плотностей по частоте

### 4.11 Свертывание двух сигналов

Свертыванием (сверткой) двух сигналов называется интегральное преобразование вида

$$s_3(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \tau) s_2(\tau) d\tau \quad (4.28)$$

Формально интегральное преобразование (4.28) обозначается значком  $\otimes$ .

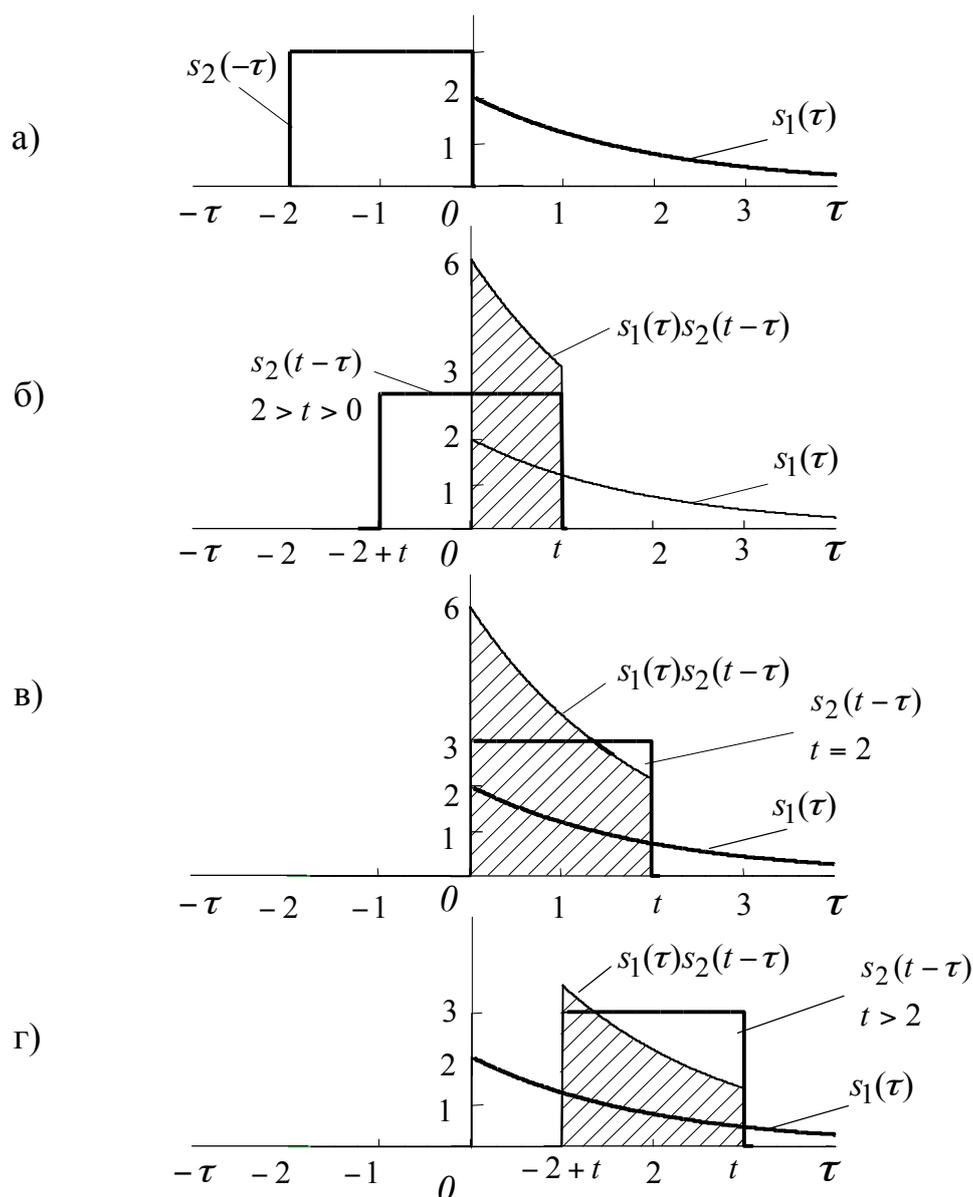


Рисунок 4.7 – Геометрическая интерпретация процесса сворачивания двух сигналов: а)  $t = 0$ ; б)  $0 < t < 2$ ; в)  $t = 2$ ; г)  $t > 2$

На рисунке 4.7 показано несколько стадий процесса сворачивания двух сигналов для четырех моментов времени:  $t = 0$ ;  $0 < t < 2$ ;  $t = 2$ ;  $t > 2$ .

Взаимное расположение сигналов  $s_1(\tau)$  и  $s_2(t - \tau)$  меняется. Интервал взаимодействия сначала растет, а затем остается постоянным. В результате интегрирования произведения двух функций  $s_1(\tau)$  и  $s_2(t - \tau)$  возникает новая функция  $s_3(t)$ . Возможные значения функции  $s_3(t)$  численно равны заштрихованной площади, изображенной на рисунке 4.7.

Применяя прямое преобразование Фурье к свертке двух сигналов и меняя порядок интегрирования местами, получим произведение спектральных плотностей.

$$\begin{aligned} \Phi^+[s_1(t) \otimes s_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt}_{\dot{S}_2(\omega) e^{-j\omega\tau}} d\tau = \dot{S}_2(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{\dot{S}_1(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\Phi^+[s_1(t) \otimes s_2(t)] = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega). \quad (4.30)$$

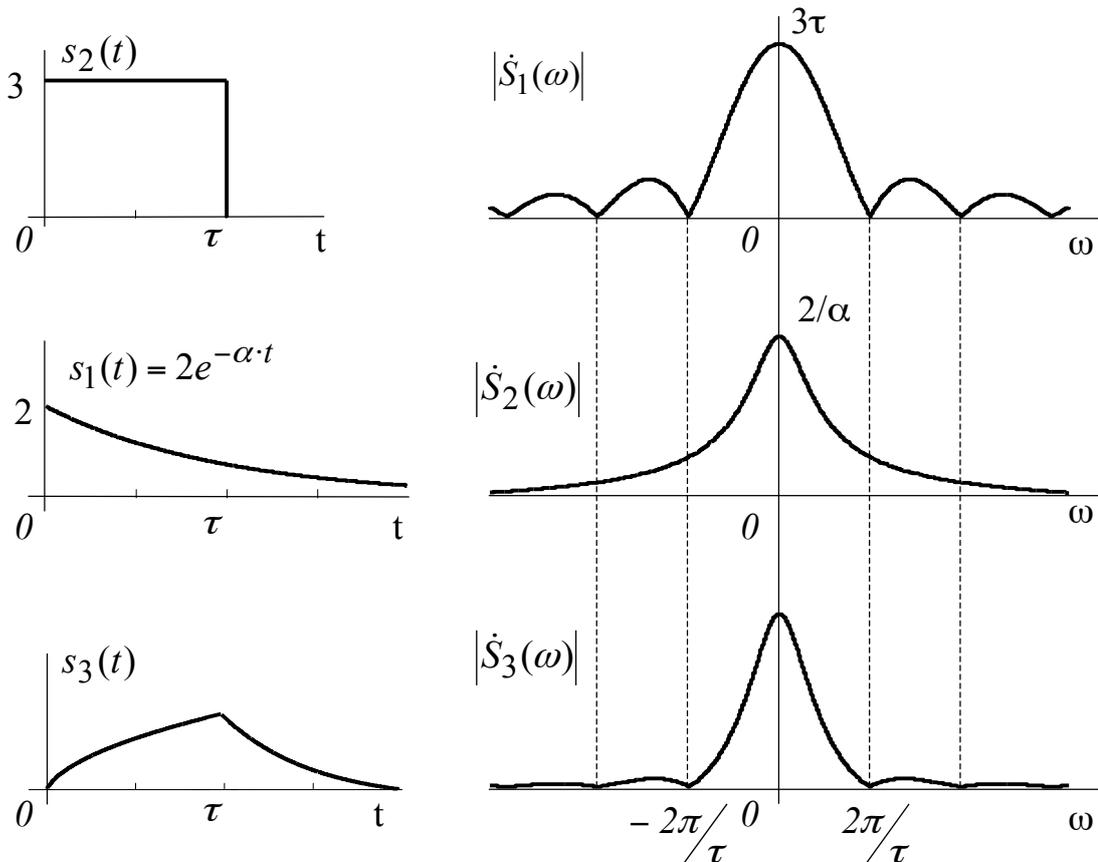


Рисунок 4.8 – Графическое представление двух сигналов  $s_1(t), s_2(t)$  и результата их свертки  $s_3(t)$  во временной и частотной областях

На рисунке 4.8 показаны сворачиваемые сигналы и результат свертки во временной и частотной областях. В результате свертки прямоугольного импульса с односторонней экспоненциальной функцией во временной области произошло сглаживание импульса, исчезли разрывы. В частотной области перемножение спектральных плотностей привело к уменьшению эффективной ширины спектра прямоугольного импульса.

#### 4.12 Произведение двух сигналов

Нетрудно показать, что преобразование Фурье от произведения двух сигналов равно свертке спектральных плотностей

$$\begin{aligned} \Phi^+[s_1(t)s_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\Omega)e^{-j\Omega t} d\Omega \right]}_{s_1(t)} s_2(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\Omega) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)e^{-j(\omega-\Omega)t} dt \right]}_{\dot{S}_2(\omega-\Omega)} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\Omega)\dot{S}_2(\omega-\Omega)d\Omega, \\ \Phi^+[s_1(t)s_2(t)] &= \dot{S}_1(\omega) \otimes \dot{S}_2(\omega). \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### 4.13 Взаимная корреляционная функция сигналов

Взаимной корреляционной функцией (ВКФ) двух сигналов называется интегральное преобразование вида:

$$\begin{aligned} B_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)d\tau, \\ B_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

ВКФ характеризует энергию взаимодействия двух сигналов, один из которых сдвигается по закону  $(t - \tau)$ .

Применяя прямое преобразование Фурье к ВКФ, получим:

$$\begin{aligned}
\Phi^+[B_{12}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau}_{\dot{S}_2^*(\omega)e^{-j\omega t}} dt = \\
&= \dot{S}_2^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)e^{-j\omega t} dt = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2^*(\omega), \\
\left. \begin{aligned} \Phi^+[B_{12}(\tau)] &= W_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2^*(\omega) \\ \Phi^+[B_{21}(\tau)] &= W_{21}(\omega) = \dot{S}_2(\omega)\dot{S}_1^*(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

#### 4.14 Автокорреляционная функция сигнала

Автокорреляционной функцией (АКФ) называется интегральное преобразование вида:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)d\tau. \quad (4.33)$$

АКФ характеризует энергию взаимодействия сигнала и его копии, сдвинутой во времени.

Применяя преобразование Фурье к АКФ, получим

$$\begin{aligned}
\Phi^+[B(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau}_{\dot{S}^*(\omega)e^{-j\omega t}} dt = \\
&= \dot{S}^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \dot{S}^*(\omega)\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2.
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Спектральная плотность АКФ, равная квадрату модуля спектральной плотности сигнала, называется энергетическим спектром детерминированного сигнала и обозначается  $W(\omega)$ .

$$\Phi^+[B(\tau)] = W(\omega) = \dot{S}(\omega)\dot{S}^*(\omega). \quad (4.35)$$

Таким образом, автокорреляционная функция  $B(\tau)$  и энергетический спектр  $W(\omega)$  связаны между собой преобразованиями Фурье.

$$\left. \begin{aligned} W(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ B(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Полная энергия сигнала может быть определена по АКФ при условии, что  $\tau = 0$ .

$$\mathcal{E} = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (4.37)$$

Расчет полной энергии можно выполнить по энергетическому спектру

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega. \quad (4.38)$$

Нетрудно показать, что (4.37) и (4.38) дают один и тот же результат:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]}_{s(t)} s(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right]}_{\dot{S}^*(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.39)$$

## 4.15 Выводы

1. В функциональных узлах канала связи сигналы подвергаются различным линейным и нелинейным преобразованиям. К линейным преобразованиям относят суммирование, усиление, дифференцирование, интегрирование, задержку во времени и свертку во времени. В результате нелинейных преобразований сигналов происходит свертка спектральных плотностей, перемещение спектров сигналов из одной области частотной оси в другую и т.п.

2. Теоремы о спектрах устанавливают взаимно однозначное соответствие между изменениями сигналов во временной области и преобразованиями их спектров в частотной. Таким образом, существует возможность по изменениям сигналов во временной области судить об изменениях их спектров в частотной (и наоборот). Кроме того, частотный подход к анализу сигналов связан с использованием того же математического аппарата, который применяется при анализе цепей.

3. Линейные преобразования сигналов сопровождаются перераспределением энергии между существующими спектральными составляющими. Например, при дифференцировании сигнала по времени происходит перераспределение энергии в сторону высоких частот, при интегрировании – наоборот.

4. Задержка произвольного сигнала во времени не связана с изменением энергетических соотношений. Это идеальное математическое преобразование, т.к. его реализация на практике зависит от физических возможностей обеспечения одинаковой задержки всех спектральных составляющих на всех текущих частотах.

5. Центральное положение среди линейных преобразований занимает свертка сигналов во времени, при которой в частотной области происходит перемножение спектральных плотностей.

6. При нелинейных преобразованиях сигналов в частотной области, кроме уже существующих спектральных составляющих, возникают новые, в другой области частотной оси. Нелинейные преобразования сопровождаются переносом части энергии из одной области частотной оси в другую.

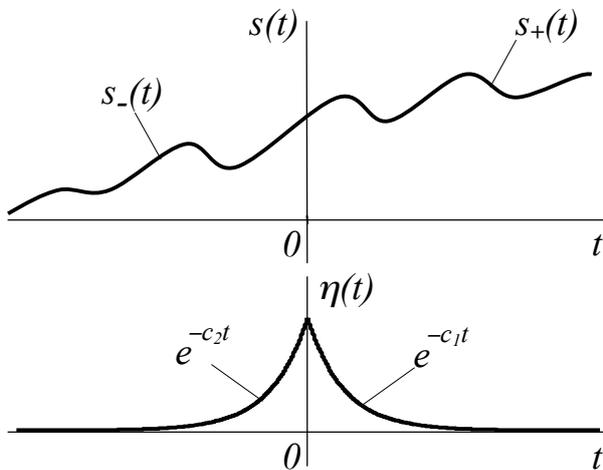
## 5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

### 5.1 Двустороннее преобразование Лапласа

С помощью преобразований Фурье, несмотря на применение обобщенных функций, не удастся проанализировать экспоненциальные сигналы вида:

$$s(t) = e^{\pm\alpha \cdot t}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5.1)$$

Кроме того, применение преобразований Фурье для анализа линейных электрических цепей и прохождения сигнала произвольной формы представляет большие, подчас непреодолимые математические трудности. Сигналы, как правило, разрывные, а дифференциальные уравнения электрического равновесия имеют достаточно высокий порядок. Это приводит к  $n$ -кратному дифференцированию дельта-функций и последующему применению начальных условий для отыскания решения. Эти проблемы устраняются с переходом от действительной частоты  $\omega$ , меняющейся в бесконечных пределах, к комплексной частоте  $p$ , характеризующейся своим положением в  $p$ -плоскости. Рассмотрим переход от действительной частоты  $\omega$  к комплексной частоте  $p$ .



$$s(t) = \begin{cases} s_+(t), & 0 \leq t < \infty \\ s_-(t), & 0 \geq t > -\infty. \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-c_1 t}, & 0 \leq t < \infty \\ e^{-c_2 t}, & 0 \geq t > -\infty. \end{cases} \quad (5.3)$$

Здесь  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < 0$ .

Рисунок 5.1—Произвольный сигнал  $s(t)$  и вспомогательная функция  $\eta(t)$

Перемножим произвольный сигнал  $s(t)$  и вспомогательную функцию  $\eta(t)$  (рисунок 5.1). Результирующий сигнал  $s(t)\eta(t)$  будет удовлетворять условиям Дирихле (3.31) и (3.32) для любых неинтегрируемых сигналов (в том числе и экспоненциальных), т.к. число  $c$  можно выбрать сколь угодно большим, но конечным. Применим к сигналу  $s(t) \cdot \eta(t)$  прямое преобразование Фурье.

$$\underbrace{\Phi^+ \left[ s(t)e^{-|c|t} \right]}_{\dot{S}(c+j\omega)} = \underbrace{\int_{-\infty}^0 s_-(t)e^{-(c_2+j\omega)t} dt}_{\dot{S}_-(c_2+j\omega)} + \underbrace{\int_0^{\infty} s_+(t)e^{-(c_1+j\omega)t} dt}_{\dot{S}_+(c_1+j\omega)}.$$

$$\dot{S}(c+j\omega) = \dot{S}_-(c_2+j\omega) + \dot{S}_+(c_1+j\omega). \quad (5.4)$$

Обозначая  $c + j\omega = p$ ,  $c_1 + j\omega = p_1$ ,  $c_2 + j\omega = p_2$ , получим двустороннее преобразование Лапласа, состоящее из двух односторонних:

$$S(p) = S_-(p_2) + S_+(p_1). \quad (5.5)$$

Правостороннее преобразование Лапласа определяется для положительных времен на интервале интегрирования от 0 до  $\infty$ :

$$S_+(p_1) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-p_1 t} dt. \quad (5.6)$$

Левостороннее преобразование Лапласа определяется для отрицательных времен на интервале интегрирования от  $-\infty$  до 0:

$$S_-(p_2) = \int_{-\infty}^0 s(t)e^{-p_2 t} dt. \quad (5.7)$$

Новые функции  $S(p)$ ,  $S_+(p)$ ,  $S_-(p)$  называются изображениями по Лапласу.  $S(p)$  – результат двустороннего преобразования Лапласа.  $S_+(p)$  и  $S_-(p)$  – результаты односторонних преобразований. Изображение по Лапласу рассматриваются в  $p$  – плоскостях. Представленные на рисунке 5.2  $p$  – плоскости характеризуется декартовыми осями координат. Ось ординат – мнимая  $\text{Im}(p) = j\omega$ , ось абсцисс – действительная  $\text{Re}(p) = c$ .

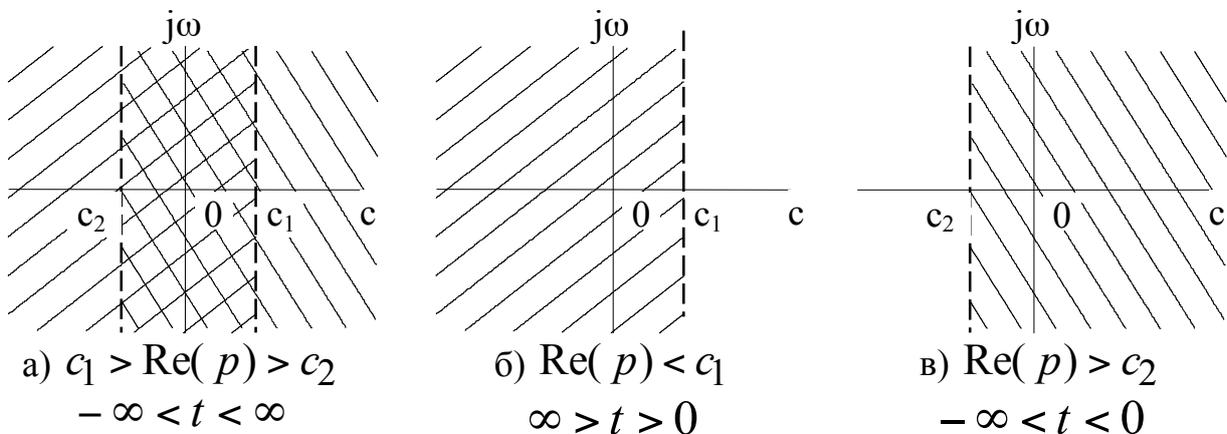


Рисунок 5.2 – а)  $p$  – плоскость двустороннего преобразования Лапласа,

б) и в)  $p$  – плоскости односторонних преобразований Лапласа

Если  $\text{Re}(p)$  равна нулю, то комплексная частота  $p$  равна чисто мнимой величине  $j\omega$ , и двустороннее преобразование Лапласа переходит в преобразование Фурье. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразований Фурье.

Зная изображение сигнала по Лапласу  $S(p)$ , можно восстановить сигнал  $s(t)$  подобно тому, как это делается по Фурье.

Проведем рассуждения для правостороннего преобразования Лапласа.

$$s_+(t)e^{-c_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(c_1 + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выполняем замену переменных  $p_1 = c_1 + j\omega$ .

$$\begin{aligned} s_+(t)e^{-c_1 t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(c_1 + j\omega) e^{(j\omega + c_1)t} e^{-c_1 t} \frac{d(j\omega + c_1)}{j} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} S(p_1) e^{p_1 t} e^{-c_1 t} \frac{dp_1}{j}. \end{aligned}$$

Сокращая правую и левую части на функцию  $e^{-c_1 t}$ , получим обратное преобразования Лапласа:

$$s_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} S(p_1) e^{p_1 t} dp_1, \quad (5.8)$$

где  $p_1 = c_1 + j\omega$ ,  $\text{Re}(p) < c_1$ .

Проведя аналогичные рассуждения для левостороннего преобразования Лапласа, запишем:

$$s_-(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2 - j\infty}^{c_2 + j\infty} S(p_2) e^{p_2 t} dp_2, \quad (5.9)$$

где  $p_2 = c_2 + j\omega$ ,  $c_2 < \text{Re}(p)$ .

Объединяя выражения (5.8) и (5.9), получим двустороннее обратное преобразование Лапласа.

$$\begin{aligned} s(t) &= s_+(t) + s_-(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} S(p_1) e^{p_1 t} dp_1 + \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2 - j\infty}^{c_2 + j\infty} S(p_2) e^{p_2 t} dp_2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

**Замечание.** В специальной литературе двустороннее преобразование Лапласа применяется без пояснительных индексов. Прямое двустороннее преобразование Лапласа:

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt + \int_{-\infty}^0 s(t)e^{-pt} dt.$$

Обратное двустороннее преобразование Лапласа:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp. \quad (5.11)$$

Изображение  $S(p)$  чаще всего представляет собой дробно-рациональную функцию  $A(p)/B(p)$ . Корни уравнения  $B(p) = 0$ , называемые полюсами, в общем случае являются комплексными:

$$p_k = \alpha_k + j\omega_k.$$

Знак реальной части  $\text{Re}(p_k)$  однозначно определяет тип одностороннего преобразования Лапласа. Если реальные части всех полюсов имеют одинаковые знаки, то имеет место одностороннее преобразование Лапласа, если разные – то двустороннее.

На рисунке 5.3. изображено расположение полюсов в трех  $p$ - плоскостях полюсов.

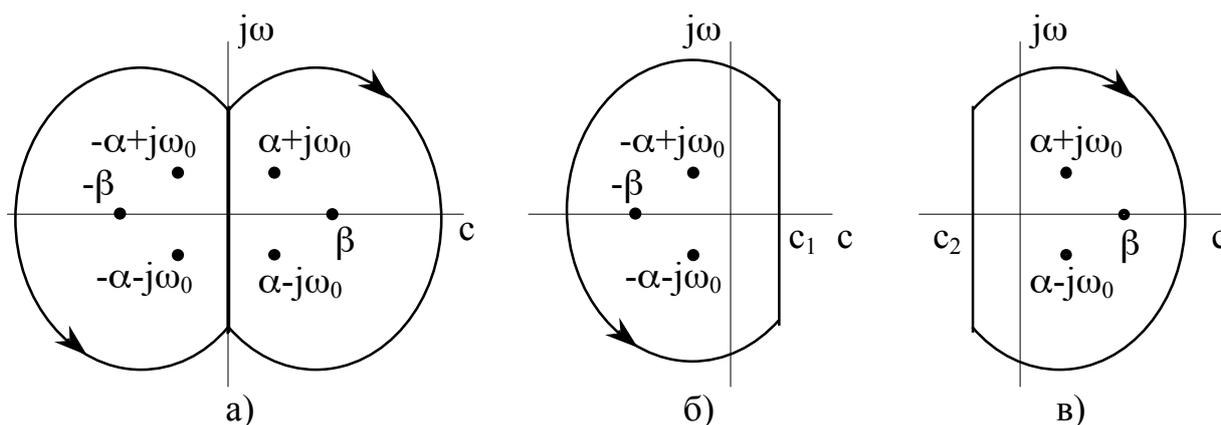


Рисунок 5.3 – Расположение полюсов в двустороннем (а), правостороннем (б), левостороннем (в) преобразовании Лапласа

Большее распространение получила запись выражения (5.11) в форме криволинейного (или контурного) интеграла комплексной переменной  $p$ :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_l S(p)e^{pt} dp,$$

где  $l$  – обозначает контур, изображенный на рисунке 5.2а двойной штриховкой (контур лежит в пределах области сходимости  $c_1 > \operatorname{Re}(p) > c_2$ ).

Двустороннее преобразование Лапласа универсально. Возможностями двустороннего преобразования во всей их полноте пользуются довольно редко (анализ электромагнитных полей, решение краевых задач, расчет характеристик стационарных и случайных нестационарных процессов и т.д.). Большинство задач при расчетах цепей, анализе систем и сигналов решаются в рамках одностороннего преобразования Лапласа. Наиболее широко применяется правостороннее преобразование Лапласа для изучения переходных процессов, поскольку последние равны нулю при  $t < 0$  (так как отклик не может опережать воздействие).

## 5.2 Свойства правостороннего преобразования Лапласа

### 5.2.1 Основные определения

Прямое и обратное преобразования Лапласа (ППЛ и ОПЛ) связаны между собой парой интегральных преобразований:

$$S(p) = L^+[s(t)] = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt, \quad (5.12)$$

$$s(t) = L^-[S(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp. \quad (5.13)$$

Сравнивая (5.6) и (5.12), а так же (5.8) и (5.13), отмечаем, что преобразования Лапласа формально не изменились, за исключением того, что в обозначениях опущены индексы. Преобразования Лапласа устанавливают взаимно однозначное соответствие между *оригиналами*  $s(t)$  и *изображениями*  $S(p)$ .

Сигнал  $s(t)$  называется *оригиналом*, если выполняются три условия:

- 1) сигнал  $s(t)$  односторонний, т.е.

$$s(t) = f(t)\sigma(t);$$

- 2) сигнал  $s(t)$  увеличивается с ростом  $t$  не быстрее, чем

$$|s(t)| < Me^{c_0 t},$$

где  $M > 0$  – любое конечное число,  $c_0 \geq 0$  – показатель роста;

- 3) сигнал  $s(t)$  может иметь разрывы первого рода, причем, количество разрывов конечно на каждом интервале конечной длины.

**Замечание.** К пространству оригиналов нельзя отнести разрывную функцию  $f(t) = 1/t$  или функцию  $f(t) = e^{t^2}$ , т.к. они не удовлетворяют указанным условиям.

Аналитическая дробно-рациональная функция  $S(p)$  называется *изображением*, если для произведения  $p^n S(p)$  справедливо предельное соотношение вида:

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p^n S(p) = 0, \text{ где } n = 0. \quad (5.14)$$

Выполняя в (5.12) интегрирование по частям и переходя к пределу при  $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ , получим для произвольного значения  $n \geq 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{t \rightarrow +0} s(t), \\ \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p^2 S(p) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d}{dt} s(t), \\ \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p^n S(p) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} s(t). \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Свойства (5.14) (5.15) помогают установить, что та или иная функция аргумента  $p$  не представляет собой результат преобразования Лапласа от некоторого исходного оригинала.

### 5.2.2 Сложение сигналов

$$L^+ \left[ \sum_i s_i(t) \right] = \sum_i L^+ [s_i(t)] = \sum_i S_i(p). \quad (5.16)$$

Сложению оригиналов соответствует сложение изображений.

### 5.2.3 Изменение масштаба времени

$$L^+ [s(at)] = \int_0^{\infty} s(at) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} s(at) e^{-\left(\frac{p}{a} \cdot at\right)} d(at) = \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right). \quad (5.17)$$

Умножение параметра  $t$  на константу  $a > 0$  в области оригиналов приводит к делению параметра  $p$  на константу  $a > 0$  в области изображений.

### 5.2.4 Сдвиг во времени

$$\begin{aligned}
 L^+[s(t-t_3)] &= \int_0^{\infty} s(t-t_3)e^{-pt} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} s(t-t_3)e^{-3(t-t_3+t_3)} d(t-t_3) = S(p)e^{-pt_3}.
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Замена переменных в оригинале  $t-t_3$  вызывает умножение изображения на экспоненциальную функцию  $e^{-pt_3}$  (оператор сдвига).

### 5.2.5 Умножение оригинала на экспоненциальную функцию

$$L^+[s(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} s(t)e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} s(t)e^{-(\alpha+p)t} dt = S(p+\alpha).
 \tag{5.19}$$

Умножению оригинала на экспоненциальную функцию  $e^{-\alpha t}$  соответствует замена переменных в изображении  $S(p+\alpha)$ .

### 5.2.6 Дифференцирование оригинала

Перед доказательством следует уточнить, о дифференцировании какой функции идет речь. Оригиналом называется односторонний сигнал, полученный в результате перемножения произвольной функции  $s(t)$  и единичного скачка  $\sigma(t)$ . Дифференцированию подвергается функция  $s(t)$  (а не произведение  $s(t)\sigma(t)$ ) в предположении, что она непрерывно дифференцируема на отрезке  $(0, \infty)$ . Требуется определить изображение оригинала вида  $s'(t)\sigma(t)$  (при условии, что  $s'(t)\sigma(t)$  обладает свойствами оригинала).

$$\begin{aligned}
 L^+[s'(t)\sigma(t)] &= \int_0^{\infty} s'(t)e^{-pt} dt = s(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - (-p) \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = \\
 &= - \lim_{t \rightarrow +0} s(t) + pS(p) = pS(p) - s(0), \text{ откуда} \\
 L^+[s'(t)] &= pS(p) - s(0), \text{ где } s(0) = \lim_{t \rightarrow +0} s(t) \\
 &\text{или } s(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p).
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

Повторное дифференцирование приводит к следующим результатам:

$$L^+[s''(t)] = p^2 S(p) - ps(0) - s'(0), \quad (5.21)$$

$$\text{где } s'(0) = \lim_{t \rightarrow +0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 S(p).$$

Выполним  $n$ -кратное дифференцирование оригинала:

$$L^+[S^{(n)}(t)] = p^n S(p) - p^{n-1}s(0) - \dots - p^0 s^{(n)}(0). \quad (5.22)$$

Достоинством одностороннего преобразования Лапласа является “автоматический учет” ненулевых начальных условий. При  $n$ -кратном дифференцировании оригинала происходит умножение изображения на  $p^n$  и прибавление дополнительных слагаемых  $p^{n-m}s^{(m)}(0)$ , отражающих ненулевые начальные условия.

### 5.2.7 Дифференцирование изображения

$$L^-[S'(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S'(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \left[ S(p)e^{pt} \Big|_{c-j\infty}^{c+j\infty} - t \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp \right] = (-t)s(t).$$

$$L^-[S'(p)] = (-t)s(t). \quad (5.23)$$

Выполнение  $n$ -кратного дифференцирования изображения вызывает умножение оригинала на параметр  $(-t)^n$ .

$$L^-[S^{(n)}(p)] = (-t)^n s(t). \quad (5.24)$$

### 5.2.8 Интегрирование оригинала

$$L^+ \left[ \int_0^t s(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \int_0^t s(\tau) d\tau e^{-pt} dt = \underbrace{\int_0^t s(\tau) d\tau \frac{1}{-p} e^{-pt} \Big|_0^\infty}_0 + \frac{1}{p} \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt = \frac{S(p)}{p}.$$

$$L^+ \left[ \int_0^t s(\tau) d\tau \right] = \frac{S(p)}{p}. \quad (5.25)$$

Выполнение  $n$ -кратного интегрирования оригинала приводит к делению изображения на параметр  $p^n$ .

$$L^+ \left[ \int_0^t \dots \int_0^x s(\tau) d\tau \right] = \frac{S(p)}{p^n}. \quad (5.26)$$

В таблице 5.1 (стр. 116) в компактной форме представлены свойства преобразований Лапласа.

### 5.2.9 Интегрирование изображения

Нетрудно показать, что интегрированию изображения соответствует деление оригинала на параметр  $t$ .

$$L^{-} \left[ \int_p^{\infty} S(z) dz \right] = \frac{s(t)}{t}. \quad (5.27)$$

Однако, применять это правило можно лишь в том случае, если оригиналом является не только функция  $s(t)$ , но и функция  $\frac{s(t)}{t}$ , т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s(t)}{t} \neq \infty.$$

### 5.2.10 Свертка оригиналов

$$\begin{aligned} L^{+} [s_1(t) \otimes s_2(t)] &= \int_0^{\infty} \int_0^t s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^t s_1(\tau) \underbrace{\int_0^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-pt} dt}_{S_2(p) e^{-p\tau}} d\tau = S_2(p) \underbrace{\int_0^t s_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau}_{S_1(p) \text{ при } t \rightarrow \infty} \\ L^{+} [s_1(t) \otimes s_2(t)] &= L^{+} [s_2(t) \otimes s_1(t)] = S_1(p) S_2(p). \end{aligned} \quad (5.28)$$

### 5.2.11 Свертка оригиналов, один из которых является производной

Полагая  $s_1(t) = s(t)$ ,  $s_2(t) = h'(t)$ , получим

$$\begin{aligned} L^{+} [s(t) \otimes h'(t)] &= \int_0^{\infty} \int_0^t s(\tau) h'(t - \tau) d\tau e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^t s(\tau) \underbrace{\int_0^{\infty} h'(t - \tau) e^{-pt} dt}_{[pH(p) - h(0)] e^{-p\tau}} d\tau = S(p) [pH(p) - h(0)]. \end{aligned}$$

Дифференцирование одного из сворачиваемых оригиналов  $h(t)$  приводит к следующим преобразованиям в области изображений:

$$L^+[s(t) \otimes h'(t)] = pH(p)S(p) - h(0)S(p), \text{ где } h(0) = \lim_{t \rightarrow +0} h(t). \quad (5.29)$$

Выполнив дифференцирование второго оригинала, найдем

$$L^+[s'(t) \otimes h(t)] = pH(p)S(p) - s(0)H(p), \text{ где } s(0) = \lim_{t \rightarrow +0} s(t). \quad (5.30)$$

Обращаем внимание на одинаковые слагаемые  $pH(p)S(p)$  в выражениях (5.29) и (5.30) и, учитывая коммутативность свертки, получим четыре формы записи, называемые формулами Дюамеля:

$$L^-[pH(p)S(p)] = \begin{cases} h(0)s(t) + \int_0^t s(\tau)h'(t-\tau)d\tau, \\ h(0)s(t) + \int_0^t s(t-\tau)h'(\tau)d\tau, \\ s(0)h(t) + \int_0^t s'(\tau)h(t-\tau)d\tau, \\ s(0)h(t) + \int_0^t s'(t-\tau)h(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (5.31)$$

### 5.2.12 Предельные соотношения

Если  $h(t)$  и  $h'(t)$  – оригиналы, то  $L^+[h'(t)] = pH(p) - h(0)$ .

Применяя для анализа изображений при  $p \rightarrow \infty$  свойство (5.14), получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L^+[h'(t)] = \lim_{p \rightarrow \infty} [pH(p) - h(0)] = 0. \quad \text{Откуда следует}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pH(p) = \lim_{t \rightarrow +0} h(t); \quad (5.32)$$

Переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , найдем

$$\lim_{p \rightarrow 0} L[h'(t)] = \begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} h'(t)e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} [pH(p) - h(0)], \\ \int_0^{\infty} h'(t) \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [h(t) - h(0)] \end{cases} \quad (5.33)$$

Сравнивая правые части выражения (5.33), нетрудно установить

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t). \quad (5.34)$$

### 5.3 Обратное преобразование Лапласа

В процессе перехода от преобразований Фурье к преобразованиям Лапласа было получено соотношение для обратного преобразования Лапласа.

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp.$$

С помощью этого интеграла решают задачу восстановления оригинала  $s(t)$  по известному изображению  $S(p)$ . На практике при отыскании оригиналов обращаются к таблицам, связывающим оригиналы и изображения, например, к таблице 5.3 (стр. 130). Либо моделируют оригинал из имеющихся функций. Для этого стараются преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы можно было использовать уже известные интегралы. Самый распространенный путь – это представление изображения  $S(p)$  в виде ряда

$$S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(p),$$

сходящегося в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > c_0$

1) Рассмотрим первый случай – разложение по понижающим степеням  $p$

$$S(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}. \quad (5.35)$$

Если формально выполнить переход к оригиналу, то получим ряд

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0\sigma(t) + \frac{a_1}{1!}t\sigma(t) + \frac{a_2}{2!}t^2\sigma(t) + \dots + \\ &+ \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}\sigma(t) + \frac{a_n}{n!}t^n\sigma(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}t^n\sigma(t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Сопоставляя члены рядов (5.35) и (5.36) между собой и используя свойство дифференцирования оригиналов, получим выражение для определения  $n$ -го слагаемого ряда (5.36)

$$L^{-1}[S(p)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}t^n\sigma(t), \quad (5.37)$$

$$L^{-1}\left[\frac{a_n}{p^n}\right] = \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{d^n}{dp^n} (a_n e^{pt}) \right] = \frac{a_n}{n!} t^n \sigma(t). \quad (5.38)$$

2) Рассмотрим второй случай – разложение изображения  $S(p)$  на частные дроби.

Изображение  $S(p)$  представляет дробно-рациональную функцию вида

$$S(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + a_2 p^2 + \dots + b_n p^n}. \quad (5.39)$$

Причем, степень полинома  $B(p)$  больше степени полинома  $A(p)$ , т.е.  $n > m$ .

Полином  $B(p)$  имеет корни  $p_1, p_2, \dots, p_i$  как простые, так и кратные (или можно сказать, что изображение  $S(p)$  имеет полюса простые и кратные). Рассмотрим случай простых корней.

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{A(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = \\ &= \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p-p_3} + \dots + \frac{A_{n-1}}{p-p_{n-1}} + \frac{A_n}{p-p_n}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - простые корни  $B(p)$ ;

$A_1, A_2, \dots, A_n$  - набор констант, называемых вычетами.

Изображению (5.40) можно поставить в соответствие оригинал

$$s(t) = A_1 e^{p_1 t} \sigma(t) + A_2 e^{p_2 t} \sigma(t) + \dots + A_n e^{p_n t} \sigma(t). \quad (5.41)$$

Из выражения (5.40) можно определить любой из коэффициентов  $A_n$ .

Умножая правую и левую части (5.40) на скобку  $(p-p_n)$  и переходя к пределу при  $p \rightarrow p_n$ , получим

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow p_n} [S(p)(p-p_n)] &= \lim_{p \rightarrow p_n} \left[ A_1 \frac{p-p_n}{p-p_1} + A_2 \frac{p-p_n}{p-p_2} + \dots + A_n + \dots \right], \\ A_n &= S(p)(p-p_n) \Big|_{p=p_n} = \frac{A(p)}{B(p)} (p-p_n) \Big|_{p=p_n}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Нетрудно показать, что умножение на скобку  $(p-p_n)$  эквивалентно дифференцированию знаменателя по  $p$ , а именно:

$$A_n = \frac{A(p)}{B'(p)} \Big|_{p=p_n}. \quad (5.43)$$

Сопоставляя члены рядов (5.40) и (5.41) между собой и учитывая (5.42), получим выражение для определения  $n$ -го слагаемого ряда (5.40).

$$L^{-1} \left[ \frac{A_n}{p-p_n} \right] = \lim_{p \rightarrow p_n} \left[ S(p)(p-p_n) e^{pt} \right] \sigma(t). \quad (5.44)$$

Учитывая (5.43), преобразуем (5.44) к виду

$$L^{-1} \left[ \frac{A_n}{p - p_n} \right] = \left[ \frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt} \right] \sigma(t) \Big|_{p=p_n} \quad (5.45)$$

3) Рассмотрим третий случай – разложение изображений с кратными корнями.

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{H_1(p)}{(p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_n)^{k_n}} = \\ &= \frac{A_1(p)}{(p - p_1)^{k_1}} + \frac{A_2(p)}{(p - p_2)^{k_2}} + \frac{A_3(p)}{(p - p_3)^{k_3}} + \dots + \frac{A_n(p)}{(p - p_n)^{k_n}}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, а так же учитывая, что дифференцирование изображений приводит к увеличению степени знаменателя, получим для любого слагаемого ряда (5.46)

$$L^{-1} \left[ \frac{A_n(p)}{(p - p_n)^k} \right] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_n} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} [S(p)(p - p_n)^k e^{pt}]. \quad (5.47)$$

Выражение (5.47) является наиболее общим, т.е. включает формулы (5.38) и (5.44) и (5.45), как частные случаи, и называется *вычетом*  $\operatorname{Res} s$  функции  $S(p)e^{pt}$  в особой точке  $p = p_n$ . Для определения оригинала по известному изображению достаточно найти сумму вычетов во всех особых точках  $l$ , количество которых зависит от числа полюсов (кратных и некратных)

$$s(t) = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res}_i [S(p)e^{pt}] = \sum_{i=1}^l \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} [S(p)(p - p_i)^k e^{pt}]. \quad (5.48)$$

В таблице 5.2 (стр. 118) приведены формулы Дюамеля и формулы разложения изображений.

#### 5.4 Применение преобразований Лапласа к обобщенным функциям

Применим прямое преобразование Лапласа к  $\delta$  – функциям и ее производным. Используя фильтрующее свойство  $\delta$  – функций, получим:

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1; \\ L[\delta'(t)] &= \int_0^{\infty} \delta'(t) e^{-pt} dt = p; \\ L[\delta^{(n)}(t)] &= \int_0^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-pt} dt = p^n. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Хотелось бы обратить внимание на получение дельта функций и их производных в результате применения обратного преобразования Лапласа.

Пусть некоторая функция  $F(p)$  представляет собой неправильную дробь. Причем,  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = M(p)$  (а не нулю), следовательно из  $F(p)$  необходимо выделить целую часть  $M(p)$  путем деления полинома числителя  $A(p)$  на полином знаменателя  $B(p)$ .

$$F(p) = M(p) + S(p),$$

$$L^{-}[F(p)] = L^{-}[M(p)] + L^{-}[S(p)].$$

Если целая часть  $M(p)$  равна постоянной величине  $M_0$ , то:

$$L^{-}[M_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} M_0 e^{pt} dp = M_0 \delta(t). \quad (5.50)$$

Если целая часть  $M(p)$  представляет собой полином повышающихся степеней  $p$ , то:

$$M(p) = M_0 + M_1 p + M_2 p^2 + \dots$$

$$L^{-}[M(p)] = M_0 \delta(t) + M_1 \delta'(t) + M_2 \delta''(t) + \dots \quad (5.51)$$

## 5.5 Анализ связи между преобразованиями Лапласа и преобразованиями Фурье

Преобразования Лапласа являются обобщениями преобразований Фурье, следовательно спектральную плотность сигнала  $s(t)$  можно получить из изображения по Лапласу  $S(p)$ .

Если изображение по Лапласу  $S(p)$  не содержит полюсов, равных нулю, или полюсов, реальная часть которых равна нулю, то оригинал является абсолютно интегрируемой функцией. Его спектральная плотность может быть найдена из изображений по Лапласу  $S(p)$  путем замены  $p$  на  $j\omega$ , т.е.  $\dot{S}(\omega) = S(p = j\omega)$  (смотри таблицы 5.4 и 5.5).

Если изображение содержит полюса, лежащие на мнимой оси, можно искусственно сместить их влево заменой параметра  $p$  на  $p + \alpha$ . Затем перейти к спектральной плотности, полагая  $p = j\omega$ . Далее разделить полученную спектральную плотность на действительную и мнимую части и перейти к пределу в каждом из них отдельно при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Таблица 5.1 – Свойства преобразований Лапласа

N	Преобразование оригиналов	Преобразование изображений
1	Прямое преобразование Лапласа $\int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt$	$S(p)$ Получение изображения
2	Получение оригинала $s(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp$ Обратное преобразование Лапласа
3	Сложение оригиналов $as_1(t) + bs_2(t)$	$aS_1(p) + bS_2(p)$ Сложение изображений
4	Изменение масштаба времени $s(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} S\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ Изменение масштаба комплексной частоты $\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
5	Дифференцирование оригинала $s'(t)$ $s''(t)$ $s^{(n)}(t)$	$pS(p) - s(0_+)$ $p^2 S(p) - p \cdot s(0_+) - s'(0_+)$ $p^n S(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \cdot s^{(k-1)}(0_+)$ Умножение изображения на $p^n$ при $s^{(k-1)}(0_+) = 0$

6	Интегрирование оригинала	$\int_0^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(p)}{p}$	Деление изображения на $p$
7	Умножение интеграла на $-t$	$-ts(t)$	$S'(p)$	Дифференцирование изображения
8	Деление оригинала на $t$	$\frac{s(t)}{t}$	$\int_p^\infty S(u) du$	Интегрирование изображения
9	Теорема сдвига оригинала во времени	$s(t - \tau)$	$S(p) \cdot e^{-p\tau}$	Умножение изображения на $e^{-pt}$
10	Умножение оригинала на $e^{-\alpha t}$	$s(t)e^{-\alpha t}$	$S(p + \alpha)$	Замена аргумента $p$ на $(p + \alpha)$
11	Свертка двух оригиналов	$\int_0^t s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$ $\int_0^t s_1(\tau - \tau) s_2(t) d\tau$	$S_1(p) \cdot S_2(p)$ $S_1(p) \cdot S_2(p)$	Умножение изображений

Таблица 5.2 – Формулы Дюамеля и формулы разложения

1	Прямое преобразование Лапласа	$H(p) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot e^{-pt} dt$	$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-pt} dt$
2	Обратное преобразование Лапласа	$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(p) \cdot e^{pt} dp$	$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p) \cdot e^{pt} dp$
3	Предельные соотношения	$h(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH(p)$	$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p)$
4	Формулы Дюамеля	$L^{-}[pS(p)H(p)] = s(0)h(t) + \int_0^t s'(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$L^{-}[pS(p)H(p)] = s(0)h(t) + \int_0^t h(\tau)s'(t-\tau)d\tau$
		$L^{-}[pS(p)H(p)] = s(t)h(0) + \int_0^t s(\tau)h'(t-\tau)d\tau$	$L^{-}[pS(p)H(p)] = s(t)h(0) + \int_0^t h'(\tau)s(t-\tau)d\tau$
5	Формулы разложения: 1) случай простых корней  2) случай кратных корней	$L^{-}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{A(p)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \lim_{p \rightarrow p_k} \left[ \frac{A(p)}{B(p)} (p - p_k) e^{pt} \right]$	$L^{-}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left[ \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left( \frac{A(p)}{B(p)} (p - p_k)^m e^{pt} \right) \right]$

1) Рассмотрим изображение единичного скачка  $S_1(p) = \frac{1}{p}$ . Изображение  $S_1(p)$  содержит один полюс  $p_1$ , лежащий на мнимой оси  $p_1 = 0$ . Сместим полюс влево, т.е. рассмотрим изображение  $S_2(p)$ .

$$S_2(p) = S_1(p + \alpha) \text{ или } S_2(p) = \frac{1}{p + \alpha}, \text{ где } S_1(p) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_2(p).$$

Определим спектральную плотность по изображению  $S_2(p)$  со смещенным полюсом.

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Разделим  $\dot{S}_2(\omega)$  на действительную и мнимую части и перейдем к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ .

$$\dot{S}_2(\omega) = \operatorname{Re} S(\omega) + j \operatorname{Im} S(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re} \dot{S}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \pi \cdot \delta(\omega), & \omega = 0 \end{cases}, \text{ т.к.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Im} \dot{S}(\omega) = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -\frac{1}{\omega}.$$

Таким образом, спектральная плотность исходного сигнала (единичного скачка) равна:

$$\dot{S}_1(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

2) Рассмотрим изображение линейно нарастающей функции  $L^+[t\sigma(t)] = \frac{1}{p^2}$ . Изображение содержит один полюс  $p_1 = 0$  с кратностью полюса, равной 2. Сместим полюс влево.

$$S_2(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2}.$$

Выполняя замену переменных  $p = j\omega$ , определим спектральную плотность. Разделим спектральную плотность на действительную и мнимую части и, переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим:

$$S_2(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2} = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} - j \frac{2\omega\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2};$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re} \dot{S}_2(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = -\frac{1}{\omega^2};$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Im} \dot{S}_2(\omega) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ -\pi \cdot \delta'(\omega), & \omega = 0. \end{cases}$$

Из прошлого примера знаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi\delta(\omega).$$

Продифференцировав по  $\omega$  правую и левую части, получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ -\frac{2\omega\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \right] = \pi\delta'(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность сигнала  $t\sigma(t)$  равна

$$\Phi^+[t\sigma(t)] = \pi \cdot \delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}.$$

Дальнейшие переходы выполним, применяя свойства преобразований Лапласа. В таблицах 5.4 и 5.5 (стр. 132–135) представлены разнообразные сигналы и их изображения по Лапласу и по Фурье.

## 5.6 Практическое приложение к пятой главе

### 5.6.1 Математическое описание простейших односторонних сигналов и расчет изображений по Лапласу

На рисунке 5.3 показаны сигналы (оригиналы), представляющие собой произведение линейно нарастающей функции и единичных скачков

Выполним математическое описание шести сигналов с помощью элементарных составляющих и установим связь между всеми сигналами:

$$s_1(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t);$$

$$s_2(t) = \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \sigma(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t\sigma(t) - E\sigma(t) = s_1(t) - E\sigma(t);$$

$$s_3(t) = \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) = s_1(t - t_0);$$

$$s_4(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t - t_0) = \frac{E}{t_0} (t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) + E \cdot \sigma(t - t_0) = s_1(t - t_0) + E\sigma(t - t_0);$$

$$s_5(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t) - \frac{E}{t_0} (t - t_0) \sigma(t - t_0) = s_1(t) - s_1(t - t_0);$$

$$s_6(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot [\sigma(t) - \sigma(t - t_0)] = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t) - \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t - t_0) = s_1(t) - s_4(t).$$

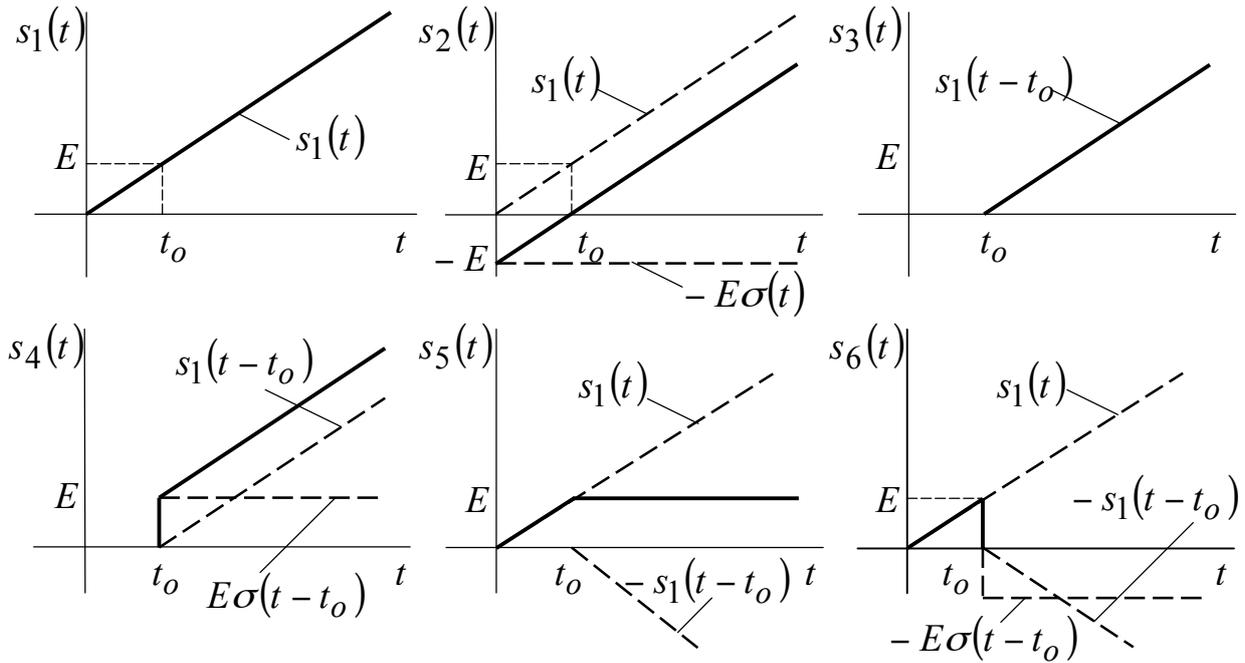


Рисунок 5.3 – Графическое представление сигналов

Анализ полученных математических моделей показывает, что редкий сигнал описывается единственным способом. Как правило, существует несколько вариантов математического описания, каждое из которых имеет свои достоинства. Полезно видеть разные подходы, т.к. это позволяет сравнивать их, выбирать кратчайший путь решения задачи, а также исключать промахи.

Применяя прямое преобразование Лапласа и его свойства, найдем изображения шести сигналов:

$$S_1(p) = \int_0^{\infty} \frac{E}{t_0} \cdot t e^{-pt} dt = \frac{E}{t_0} \left[ t \cdot \frac{1}{-p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2};$$

$$S_2(p) = L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t) \right] - L^+ [\sigma(t)] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{E}{p};$$

$$S_4(p) = L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) \right] + L^+ [E \cdot \sigma(t)] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot e^{-pt_0} + \frac{E}{p} \cdot e^{-pt_0};$$

$$S_5(p) = L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t) \right] - L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) \right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot e^{-pt_0};$$

$$S_6(p) = L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t) \right] - L^+ \left[ \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \sigma(t - t_0) \right] = \frac{E}{t_0} \frac{1}{p^2} - \frac{E}{t_0} \frac{1}{p^2} e^{-pt_0} - \frac{E}{p} e^{-pt_0}.$$

При расчете изображений шести сигналов только один раз выполнялось интегрирование по частям. В остальных случаях были использованы связи между сигналами, которые применялись при расчете изображений.

### 5.6.2 Расчет изображений по Лапласу односторонних затухающих гармонических колебаний

На рисунке 5.4 представлены сигналы  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$ , затухающие по экспоненциальному закону  $s_1(t)$ .

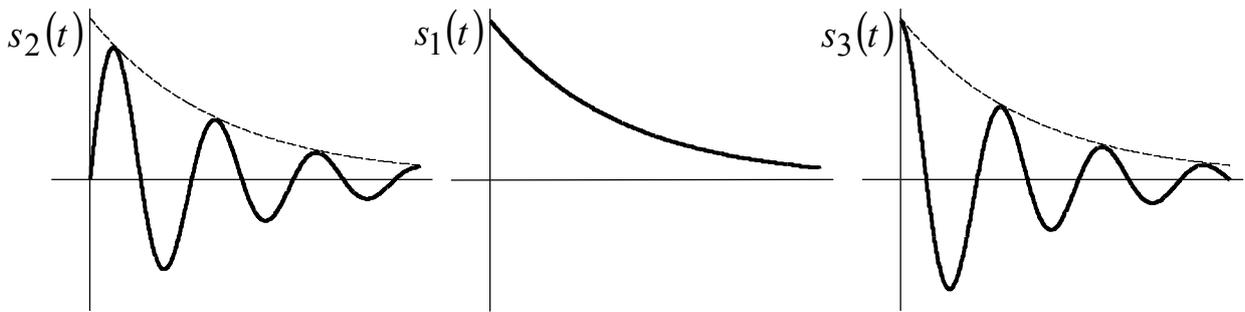


Рисунок 5.4 – Односторонние сигналы, затухающие по экспоненциальному закону

Математические модели сигналов описываются следующим образом:

$$s_1(t) = E e^{-\alpha t} \sigma(t);$$

$$s_2(t) = (E e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_0 t) \sigma(t) = \frac{E}{2j} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} \sigma(t) - \frac{E}{2j} e^{-(\alpha + j\omega_0)t} \sigma(t);$$

$$s_3(t) = (E e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega_0 t) \sigma(t) = \frac{E}{2} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} \sigma(t) + \frac{E}{2} e^{-(\alpha + j\omega_0)t} \sigma(t).$$

Определим изображения трех сигналов:

$$S_1(p) = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{E}{-(p + \alpha)} e^{-(\alpha + p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + p};$$

$$S_2(p) = L^+ \left[ \frac{E}{2j} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} \sigma(t) \right] - L^+ \left[ \frac{E}{2j} e^{-(\alpha + j\omega_0)t} \sigma(t) \right] =$$

$$= \frac{E}{2j} \frac{1}{(p + \alpha - j\omega_0)} - \frac{E}{2j} \frac{1}{p + \alpha + j\omega_0} = E \cdot \frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2};$$

$$S_3(p) = L^+ \left[ \frac{E}{2} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} \sigma(t) \right] + L^+ \left[ \frac{E}{2} e^{-(\alpha + j\omega_0)t} \sigma(t) \right] =$$

$$= \frac{E}{2} \frac{1}{(p + \alpha - j\omega_0)} + \frac{E}{2} \frac{1}{(p + \alpha + j\omega_0)} = E \cdot \frac{p}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}.$$

Представление сигналов суммой экспоненциальных составляющих привело к существенному упрощению расчета изображений.

### 5.6.3 Расчет изображений по Лапласу односторонних незатухающих гармонических колебаний

На рисунке 5.5 показаны модели сигналов, представляющих собой произведение гармонических колебаний и единичных скачков.

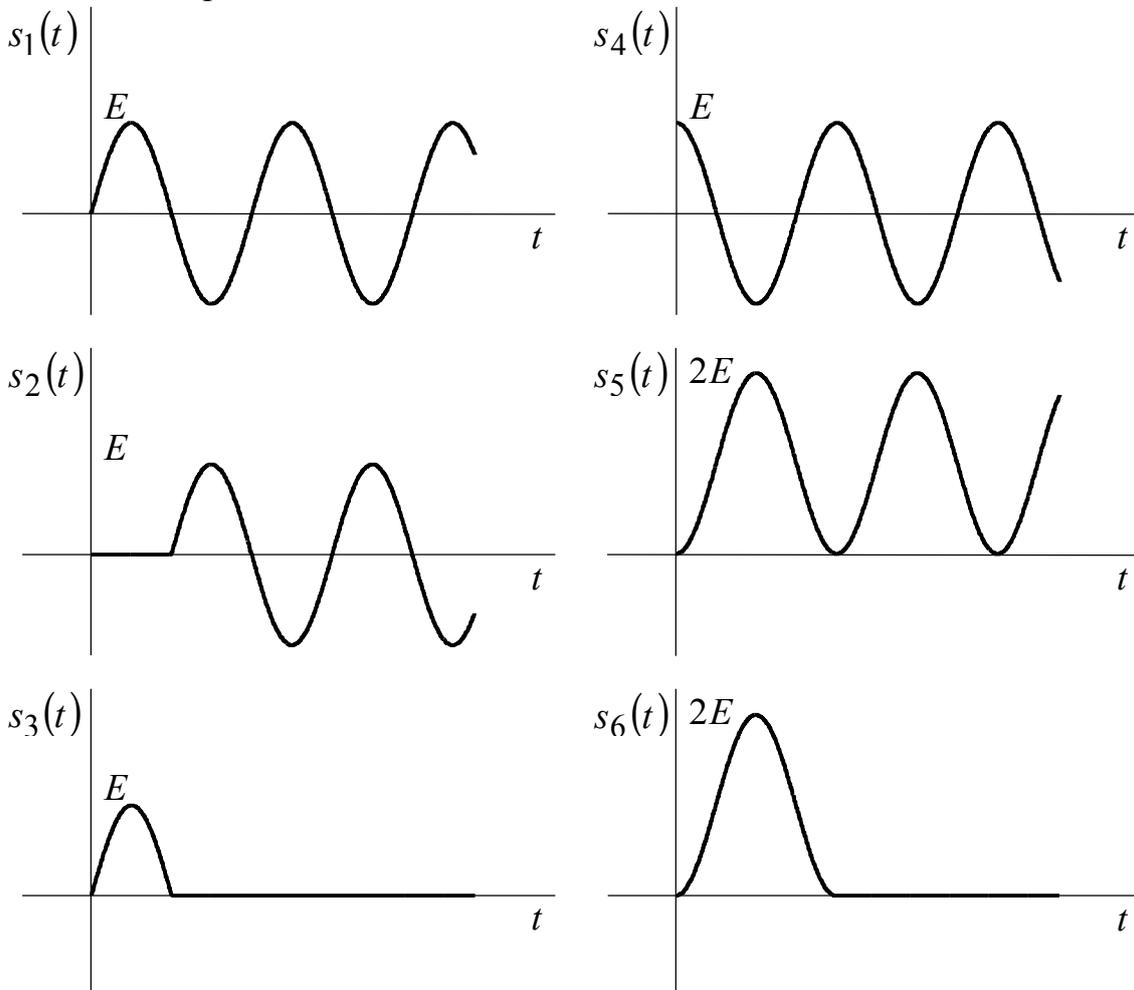


Рисунок 5.5 – Модели сигналов, полученных из незатухающих гармонических колебаний

Выполним математическое описание шести сигналов, изображенных на рисунке 5.5:

$$s_1(t) = (E \sin \omega_0 t) \sigma(t) = \frac{E}{2j} e^{j\omega_0 t} \sigma(t) - \frac{E}{2j} e^{-j\omega_0 t} \sigma(t);$$

$$s_2(t) = \left[ E \sin \omega_0 \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] \sigma \left( t - \frac{T}{2} \right) = -(E \sin \omega_0 t) \sigma \left( t - \frac{T}{2} \right);$$

$$s_3(t) = E \left[ \sigma(t) - \sigma \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] \sin \omega_0 t = (E \sin \omega_0 t) \sigma(t) + [E \sin \omega_0 (t - \tau)] \sigma \left( t - \frac{T}{2} \right);$$

$$s_4(t) = (E \cos \omega_0 t) \sigma(t) = \frac{E}{2} e^{j\omega_0 t} \sigma(t) + \frac{E}{2} e^{-j\omega_0 t} \sigma(t);$$

$$s_5(t) = E(1 - \cos \omega_0 t) \cdot \sigma(t) = E\sigma(t) - E \cos \omega_0 t \sigma(t);$$

$$s_6(t) = E(1 - \cos \omega_0 t) [\sigma(t) - \sigma(t - T_0)] = s_5(t) \sigma(t) - s_5(t - T_0) \cdot \sigma(t - T_0).$$

Используя свойства преобразований Лапласа, определяем изображения шести сигналов:

$$S_1(p) = \int_0^{\infty} E \sin \omega_0 t e^{-pt} dt = \frac{E}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(p-j\omega_0)t} dt - \frac{E}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(p+j\omega_0)t} dt =$$

$$\frac{E}{2j} \frac{1}{p-j\omega_0} - \frac{E}{2j} \frac{1}{p+j\omega_0} = E \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} e^{-pT/2};$$

$$S_3(p) = L^+ [E \sin \omega_0 t \sigma(t)] + L^+ [E \sin \omega_0 (t - T/2) \sigma(t - T/2)] = \frac{E\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-pT/2});$$

$$S_4(p) = L^+ [(E \cdot \cos \omega_0 t) \sigma(t)] = L^+ \left[ \frac{E}{2} e^{j\omega_0 t} \sigma(t) \right] + L^+ \left[ \frac{E}{2} e^{-j\omega_0 t} \sigma(t) \right] =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{E}{2j} e^{-(p-j\omega_0)t} dt - \int_0^{\infty} \frac{E}{2j} e^{-(p+j\omega_0)t} dt = \frac{E}{2} \frac{1}{p-j\omega_0} + \frac{E}{2} \frac{1}{p+j\omega_0} = E \cdot \frac{p}{p^2 + \omega_0^2};$$

$$S_5(p) = L^+ [(1 - \cos \omega_0 t) \sigma(t)] = L^+ [E\sigma(t)] - L^+ [E \cos \omega_0 t \sigma(t)] =$$

$$= E \frac{1}{p} - E \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} = E \frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}; \quad S_6(p) = L^+ [S_5(t) - S_5(t - T_0)] = E \frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)} (1 - e^{-pT}).$$

Основу анализа затухающих и незатухающих односторонних гармонических колебаний составляют две теоремы: взвешенное суммирование оригиналов и умножение оригинала на экспоненциальную функцию.

### 5.6.4 Дифференцирование сигналов и определение изображений

На рисунке 5.6 показано 5 сигналов: два сигнала описываются непрерывными на бесконечном интервале времени функциями  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ ; три сигнала – односторонними функциями.

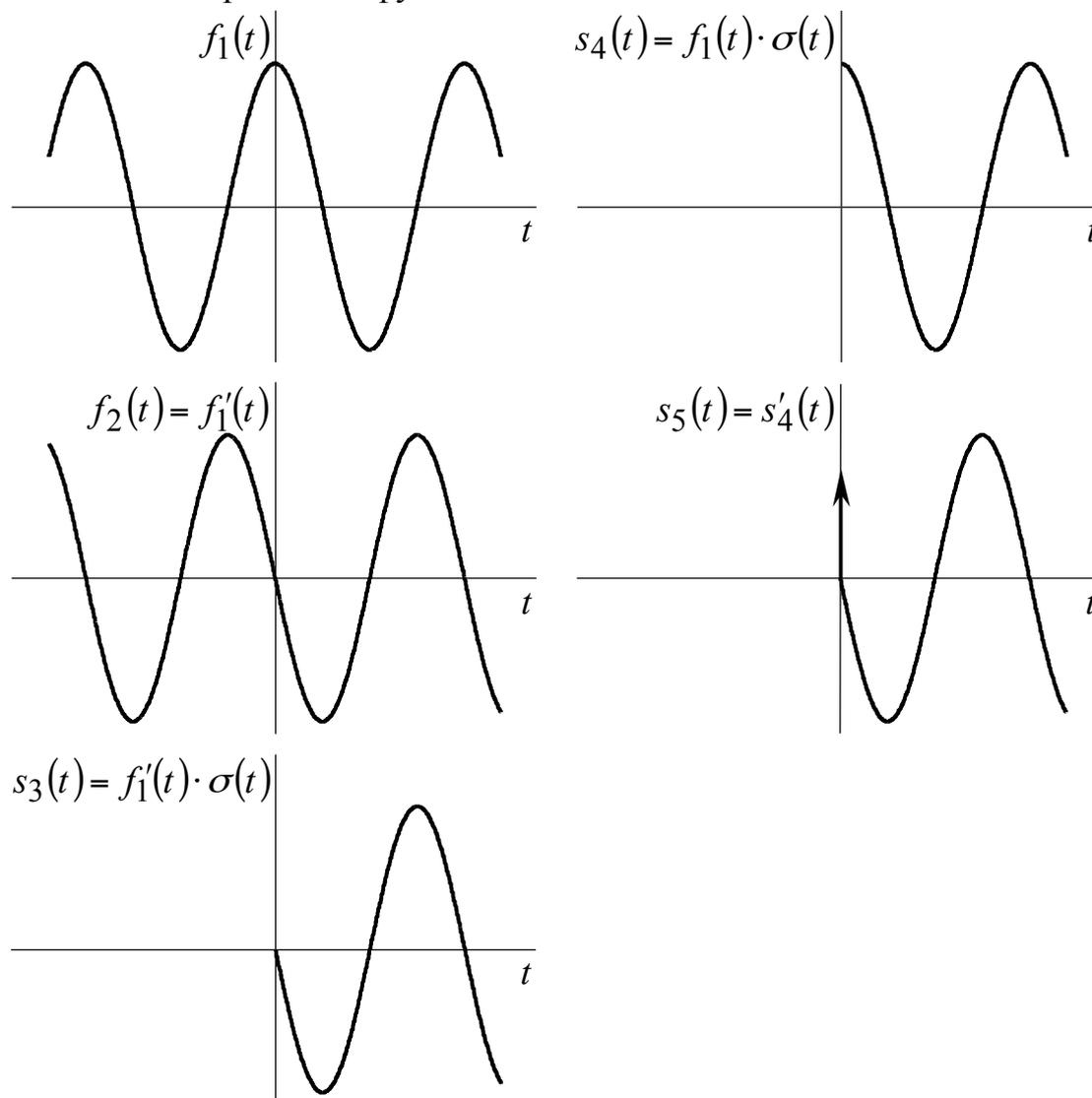


Рисунок 5.6 –Графическое представление дифференцирования аналитической функции  $f_1(t)$  и оригинала  $f_1(t) \cdot \sigma(t)$

При дифференцировании сигналов нужно помнить, что оригиналом одностороннего преобразования Лапласа является произведение функции  $f(t)$  и единичного скачка  $\sigma(t)$ . Следует различать, подверглась дифференцированию функция  $f(t)$  или оригинал  $f(t) \cdot \sigma(t)$ . Запишем математические модели сигналов, изображенных на рисунке 5.6:

$$f_1(t) = \cos \omega_0 t, \quad -\infty < t < \infty;$$

$$f_2(t) = f_1'(t) = -\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad -\infty < t < \infty;$$

$$s_3(t) = f_1'(t)\sigma(t) = (-\omega_o \sin \omega_o t)\sigma(t);$$

$$s_4(t) = (\cos \omega_o t)\sigma(t);$$

$$s_5(t) = s_4'(t) = (-\omega_o \sin \omega_o t)\sigma(t) + \delta(t) \cos \omega_o t = s_3(t) + \delta(t).$$

Найдем изображения, соответствующие трем сигналам  $s_3(t), s_4(t), s_5(t)$ :

$$S_4(p) = L^+[s_4(t)] = L^+[\cos \omega_o t \sigma(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega_o^2};$$

$$L^+[s_3(t)] = L^+[\cos \omega_o t \sigma(t)] = p \cdot S_4(p) - \lim_{t \rightarrow 0} \cos \omega_o t = p \cdot \frac{p}{p^2 + \omega_o^2} - 1 = -\frac{\omega_o^2}{p^2 + \omega_o^2};$$

$$L^+[s_3(t)] = L^+[-\omega_o \sin \omega_o t \sigma(t)] = -\omega_o \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{p(p-j\omega_o)t}}{2j} - \frac{e^{p(p+j\omega_o)t}}{2j} \right] dt =$$

$$= -\frac{\omega_o}{2j} \left[ \frac{1}{p-j\omega_o} - \frac{1}{p+j\omega_o} \right] = -\frac{\omega_o^2}{p^2 + \omega_o^2}.$$

$$L^+[s_5(t)] = L^+[-\omega_o \sin \omega_o t \sigma(t)] + L^+[\delta(t)] = -\frac{\omega_o^2}{p^2 + \omega_o^2} + 1 = \frac{p^2}{p^2 + \omega_o^2}.$$

При дифференцировании оригинала  $f_1(t) \cdot \sigma(t)$  кроме производной от функции  $f_1'(t) \cdot \sigma(t)$  может появиться дополнительное слагаемое  $f_1(0) \cdot \sigma(t)$ , если  $\lim_{t \rightarrow 0} f_1(t) \neq 0$ .

### 5.6.5 Интегрирование сигналов и определение изображений

Математическое описание сигналов, изображенных на рисунке 5.7, имеет вид:

$$s_1(t) = \delta(t); \quad s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(\tau) d\tau = \sigma(t);$$

$$s_3(t) = \int_{-\infty}^t s_2(\tau) d\tau = t\sigma(t); \quad s_4(t) = \int_{-\infty}^t s_3(\tau) d\tau = t^2\sigma(t).$$

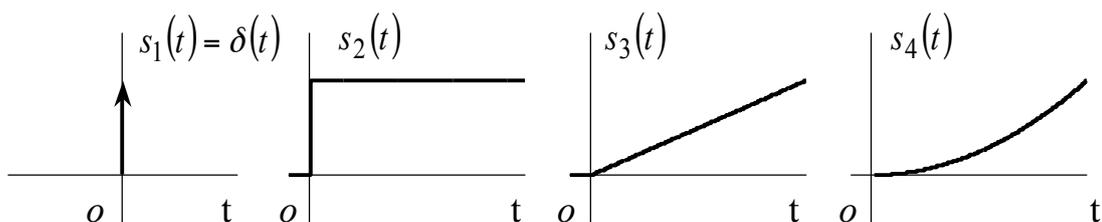


Рисунок 5.7 – Графическое представление четырех оригиналов, из которых каждый последующий получен путем интегрирования предыдущего

Определим изображения сигналов, используя прямое преобразование Лапласа и его свойства:

$$s_1(p) = L^+[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1; \quad s_2(p) = L^+ \left[ \int_{-\infty}^t s_1(\tau) d\tau \right] = \frac{s_1(p)}{p} = \frac{1}{p};$$

$$s_3(p) = L^+ \left[ \int_{-\infty}^t s_2(\tau) d\tau \right] = \frac{s_2(p)}{p} = \frac{1}{p^2}; \quad s_4(p) = L^+ \left[ \int_{-\infty}^t s_3(\tau) d\tau \right] = \frac{s_3(p)}{p} = \frac{1}{p^3}.$$

Интегрирование оригиналов приводит к делению изображений на параметр  $p$ .

### 5.6.6 Изображение свертки

Рассчитаем свертку и изображение свертки одностороннего экспоненциального сигнала  $s_3(t)$  с различными функциями (оригиналами)  $s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$ , изображенными на рисунке 5.8.

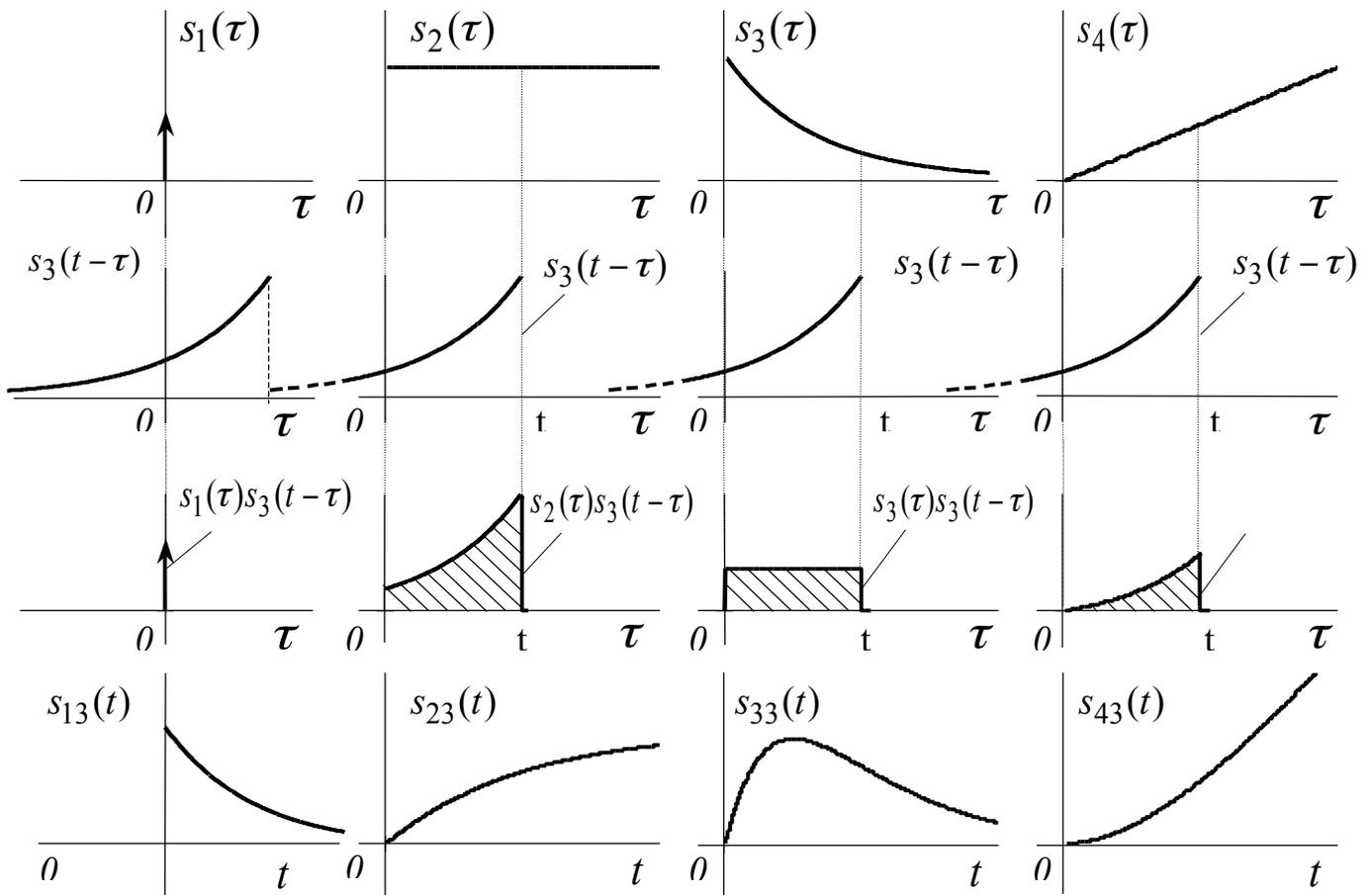


Рисунок 5.8 – Геометрическая интерпретация свертки четырех оригиналов  $s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$  с одностороннего экспоненциального сигнала  $s_3(t)$

Сворачивая сигналы, получим:

$$s_{13}(t) = \int_0^t \delta(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \sigma(t); \quad s_{23}(t) = \int_0^t \sigma(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot \sigma(t);$$

$$s_{33}(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = t e^{-\alpha t} \sigma(t); \quad s_{43}(t) = \int_0^t \tau e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\alpha^2} [\alpha \cdot t - (1 - e^{-\alpha t})] \cdot \sigma(t).$$

Изображения сверток определим, применяя свойства преобразований Лапласа:

$$S_{13}(p) = L^+[s_{13}(t)] = L^+[\delta(t)] \cdot L^+[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{p + \alpha};$$

$$S_{23}(p) = L^+[s_{23}(t)] = L^+[\sigma(t)] \cdot L^+[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{p(p + \alpha)};$$

$$S_{33}(p) = L^+[s_{33}(t)] = L^+[e^{-\alpha t}] \cdot L^+[t e^{-\alpha t}] = \frac{1}{(p + \alpha)^2};$$

$$S_{43}(p) = L^+[s_{43}(t)] = L^+[e^{-\alpha t}] \cdot L^+[t^2 \sigma(t)] = \frac{1}{p^2(p + \alpha)}.$$

Свертка оригиналов приводит к перемножению изображений.

## 5.7 Выводы

1. Преобразования Лапласа устанавливают взаимно однозначное соответствие между пространством оригиналов и пространством изображений. Оригинал называется односторонний сигнал, который растет с увеличением времени не быстрее положительной экспоненциальной функции и имеет конечное число разрывов первого рода на конечном интервале времени.

Изображением является аналитическая дробно-рациональная функция комплексного аргумента  $p$ , которая стремится к нулю, если реальная часть  $p$  стремится к бесконечности.

2. Преобразования Лапласа представляют собой обобщение преобразований Фурье и применяются как к интегрируемым, так и односторонним неинтегрируемым сигналам, снимая ограничения Дирихле. От изображения по Лапласу заменой аргумента  $p$  на  $j\omega$  можно перейти к спектральной плотности в том случае, если сигнал относится к физически реализуемым сигналам. Изображения по Лапласу для физически реализуемых сигналов отличаются тем, что особые точки, называемые полюсами, лежат левее мнимой оси, т.е. реальная часть полюсов – конечная отрицательная величина.

Если изображение по Лапласу содержит полюса, лежащие на мнимой оси (т.е. реальная часть полюса равна нулю), то реализуется замена аргумента  $p$  на  $\alpha + j\omega$  с последующим разделением спектральной плотности на действительную и мнимую части и предельным переходом при  $\alpha \rightarrow 0$ .

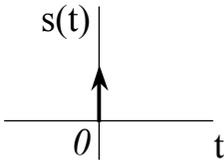
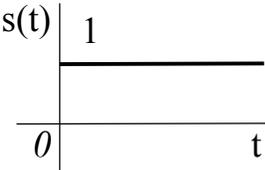
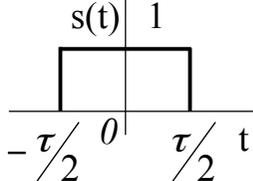
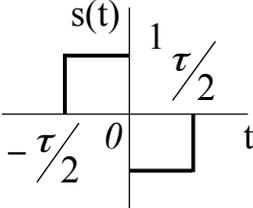
3. Свойства преобразований Лапласа можно рассматривать как обобщение теорем о спектрах. Теоремы о спектрах отличает глубокая физическая трактовка. Преобразования Лапласа и их свойства – это более совершенный и простой в применении математический аппарат. Особенно широкое распространение получили формулы Дюамеля и обратное преобразование Лапласа, выполняемое с помощью теории вычетов.

Таблица 5.3–Связь между изображениями и оригиналами при одностороннем преобразовании Лапласа

$S(p)$	$s(t)$	$S(p)$	$s(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)\sigma(t)$
$p$	$\delta'(t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)\sigma(t)$
$p^n$	$\delta^{(n)}(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)\sigma(t)$
$\frac{1}{p}$	$\sigma(t)$	$\frac{\omega \cos \varphi + (p+\alpha) \sin \varphi}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)\sigma(t)$
$\frac{1}{p^2}$	$t\sigma(t)$	$\frac{-\omega \sin \varphi + (p+\alpha) \cos \varphi}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)\sigma(t)$
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sigma(t)$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$(1 - \cos \omega t)\sigma(t)$
$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t} \sigma(t)$	$\frac{1}{p((p+\alpha)^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \sigma(t)$
$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$(1 - e^{-\alpha t})\sigma(t)$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)(p+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right] \sigma(t)$
$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t} \sigma(t)$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left[ -\alpha e^{-\alpha t} + \alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right] \sigma(t)$

$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 e^{-\alpha t} \sigma(t)$	$\frac{2\omega \cdot p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \sin(\omega t) \sigma(t)$
$\frac{p}{(p+\alpha)^3}$	$t \left(1 - \frac{\alpha}{2}t\right) e^{-\alpha t} \sigma(t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos(\omega t) \sigma(t)$
$\frac{1}{p(p+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \sigma(t)$	$\frac{p}{(p+\beta)(p+\alpha)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}) \sigma(t)$
$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \sigma(t)$	$\frac{1}{p(p+\beta)(p+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha\beta} \left[1 + \frac{1}{\alpha - \beta} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})\right] \sigma(t)$
$\frac{\alpha^2}{p^2(p+\alpha)}$	$[\alpha t - (1 - e^{-\alpha t})] \sigma(t)$	$\frac{p+\gamma}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{(\gamma - \alpha)e^{-\alpha t} - (\gamma - \beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \sigma(t)$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t) \sigma(t)$	$\frac{2\Omega\omega p}{[p^2 + (\omega + \Omega)^2] \cdot [p^2 + (\omega - \Omega)^2]}$	$\sin \Omega t \cdot \sin \omega t \sigma(t)$
$\frac{p}{p^2 + (\omega \pm \Omega)^2}$	$\cos(\omega \pm \Omega)t \sigma(t)$	$\frac{p(p^2 + \omega^2 + \Omega^2)}{[p^2 + (\omega + \Omega)^2] \cdot [p^2 + (\omega - \Omega)^2]}$	$\cos \Omega t \cdot \cos \omega t \sigma(t)$
$\frac{(p^2 + 2\omega_0^2)}{[p^2 + (2\omega_0)^2] \cdot p}$	$\cos^2(\omega_0 t) \sigma(t)$	$\frac{\Omega(p^2 - (\omega^2 - \Omega^2))}{[p^2 + (\omega + \Omega)^2] \cdot [p^2 + (\omega - \Omega)^2]}$	$\sin \Omega t \cdot \cos \omega t \sigma(t)$
$\frac{2\omega_0^2}{[p^2 + (2\omega_0)^2] \cdot p}$	$\sin^2(\omega_0 t) \sigma(t)$	$\frac{\omega(p^2 + (\omega^2 - \Omega^2))}{[p^2 + (\omega + \Omega)^2] \cdot [p^2 + (\omega - \Omega)^2]}$	$\cos \Omega t \cdot \sin \omega t \sigma(t)$

Таблица 5.4 – Сигналы и изображения по Фурье и Лапласу

	Сигнал (оригинал) $s(t)$		Изображение по Фурье $\dot{S}(\omega)$	Изображение по Лапласу $S(p)$
1	$s(t) = \delta(t)$		$\dot{S}(\omega) = 1$	$S(p) = 1$
2	$s(t) = \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$S(p) = \frac{1}{p}$
3	$s(t) = \begin{cases} 1, &  t  \leq \tau/2 \\ 0, &  t  > \tau/2 \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$	$S(p) = \frac{1}{p} (e^{p\tau/2} - e^{-p\tau/2}) =$ $= \frac{2}{p} sh^{p\tau/2} = \tau \frac{sh^{p\tau/2}}{p\tau/2}$
4	$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau/2 \\ -1, & 0 \geq t \geq -\tau/2 \\ 0, &  t  \geq \tau/2 \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = j\tau \frac{\sin^2 \omega\tau/4}{\omega\tau/4}$	$S(p) = \frac{1}{p} (e^{-p\tau/2} - 2 + e^{p\tau/2}) =$ $= \frac{1}{p} (e^{p\tau/4} - e^{-p\tau/4})^2 =$ $= \frac{4}{p} sh^2 p\tau/4 = \tau \frac{sh^2 p\tau/4}{p\tau/4}$

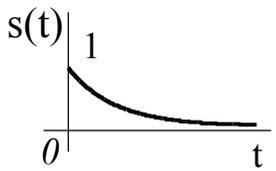
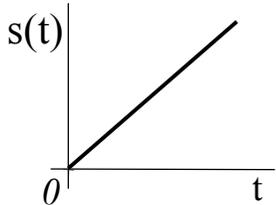
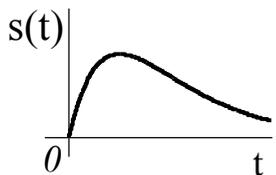
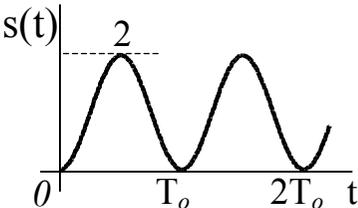
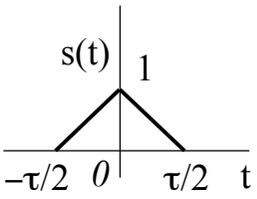
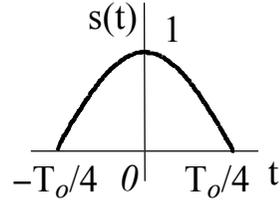
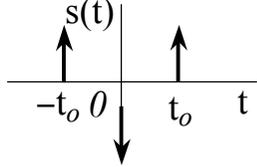
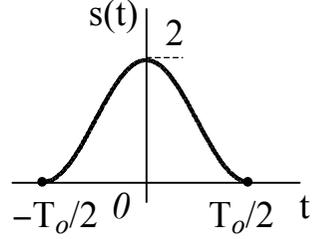
5	$s(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$	$S(p) = \frac{1}{p + \alpha}$
6	$s(t) = t\sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$	$S(p) = \frac{1}{p^2}$
7	$s(t) = te^{-\alpha t} \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$	$S(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2}$
8	$s(t) = (1 - \cos \omega_0 t) \sigma(t)$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{j\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} +$ $+ \pi\delta(\omega) - \frac{1}{2}\pi\delta(\omega - \omega_0) -$ $- \frac{1}{2}\pi\delta(\omega + \omega_0)$	$S(p) = \frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$

Таблица 5.5 – Сигналы и изображения по Фурье и Лапласу (продолжение)

	Сигнал (оригинал) $s(t)$		Изображение по Фурье $\dot{S}(\omega)$	Изображение по Лапласу $S(p)$
1	$s(t) = \sigma(t)\sin \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\omega_o}{(j\omega)^2 + \omega_o^2} - \frac{1}{2j}\pi[\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]$	$S(p) = \frac{\omega_o}{p^2 + \omega_o^2}$
2	$s(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)\sin \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\omega_o}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_o^2}$	$S(p) = \frac{\omega_o}{(p + \alpha)^2 + \omega_o^2}$
3	$s(t) = \sigma(t)\cos \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_o^2} + \frac{1}{2}\pi[\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)]$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_o^2}$
4	$s(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)\cos \omega_o t$		$\dot{S}(\omega) = \frac{j\omega + \alpha}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$S(p) = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_o^2}$

5	$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau/2}, &  t  \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\sin \omega\tau/4}{\omega\tau/4} \right)^2$	$S(p) = \frac{2}{p^2} (e^{-p\tau/2} - 2 + e^{p\tau/2}) =$ $= \frac{8}{p^2} sh^2 p\tau/4 = \frac{\tau}{2} \left( \frac{sh^2 p\tau/4}{p\tau/4} \right)^2$
6	$s(t) = \begin{cases} \cos \omega_o t, &  t  \leq \frac{T_o}{4} \\ 0, &  t  > \frac{T_o}{4} \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \frac{2\omega_o}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos \omega T_o/4$	$S(p) = \frac{\omega_o}{p^2 + \omega_o^2} (e^{pT_o/4} +$ $+ e^{-pT_o/4}) = \frac{2\omega_o}{p^2 + \omega_o^2} ch pT_o/4$
7	$s(t) = \frac{1}{2} [\delta(t + t_o) + \delta(t - t_o) - 2\delta(t)]$		$\dot{S}(\omega) = \cos \omega \cdot t_o - 1 =$ $= -2 \sin^2 \omega \cdot t_o/2$	$S(p) = \frac{1}{2} (e^{pt_o} - 2 + e^{-pt_o}) =$ $= 2 sh^2 pt_o/2$
8	$s(t) = \begin{cases} 1 + \cos \omega_o t, &  t  \leq \frac{T_o}{2} \\ 0, &  t  > \frac{T_o}{2} \end{cases}$		$\dot{S}(\omega) = \frac{2\omega_o^2}{\omega(\omega_o^2 - \omega^2)} \sin \omega T_o/2$	$S(p) = \frac{\omega_o^2}{p(p^2 + \omega_o^2)} \left( e^{\frac{pT_o}{2}} - \right.$ $\left. - e^{-\frac{pT_o}{2}} \right) = \frac{2\omega_o^2}{p(p^2 + \omega_o^2)} sh \frac{pT_o}{2}$

## 6 ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 6.1 Математическое описание линейной электрической цепи (ЛЭЦ)

Система называется линейной, если сигналы в ней подвергаются линейным преобразованиям. Линейные системы отличаются тем, что хотя бы теоретически можно решить любую задачу о преобразовании сигнала такой системой.

Линейная система состоит из линейных функциональных блоков и простейших линейных элементов, математические модели которых приведены в таблице 6.1.

Токи  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  в элементах электрической цепи и сигналы на входе  $x(t)$  и выходе  $y(t)$  функциональных блоков связаны между собой линейными интегрально-дифференциальными уравнениями либо линейными алгебраическими уравнениями в зависимости от способов описания сигналов.

При анализе работы ЛЭЦ учитывают законы Кирхгофа и ограничения, обусловленные физической природой изменения токов и напряжений. Ток в катушке индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться скачком

$$i(-0) = i(+0) \text{ и } u(-0) = u(+0). \quad (6.1)$$

Первый закон Кирхгофа для токов: алгебраическая сумма направленных токов, притекающих к любому узлу цепи, равна нулю

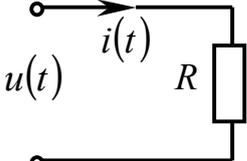
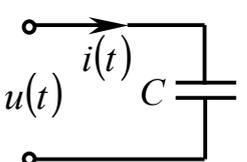
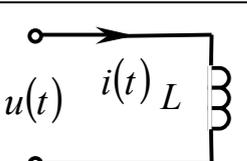
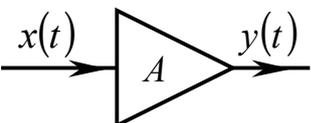
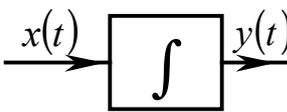
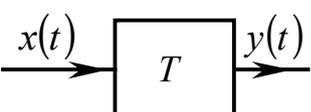
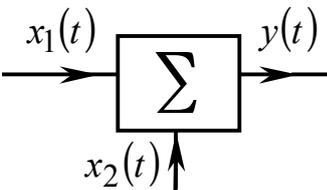
$$\sum_{n=1}^N i_n(t) = 0. \quad (6.2)$$

Второй закон Кирхгофа для напряжений: алгебраическая сумма направленных напряжений вдоль любого замкнутого контура цепи равна нулю.

$$\sum_{n=1}^N u_n(t) + \sum_{k=1}^M v_k(t) = 0. \quad (6.3)$$

Соответственно и методы анализа влияния внешнего воздействия  $v_k(t)$  на линейную цепь разделяются на метод контурных токов и метод узловых потенциалов.

Таблица 6.1 – Математические модели элементов линейной электрической цепи (ЛЭЦ)

Линейный элемент электрической цепи	Преобразования мгновенных значений произвольных сигналов	Преобразования комплексных амплитуд гармонических сигналов (или спектральных характеристик сигналов)
 <p>Сопротивление</p>	$i(t) = u(t) / R$ $u(t) = R \cdot i(t)$	$\dot{I}_m = \dot{U}_m / R$ $\dot{U}_m = R \cdot \dot{I}_m$
 <p>Емкость</p>	$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	$\dot{I}_m = j\omega C \cdot \dot{U}_m$ $\dot{U}_m = \dot{I}_m / j\omega C$
 <p>Индуктивность</p>	$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$ $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	$\dot{I}_m = \dot{U}_m / j\omega L$ $\dot{U}_m = j\omega L \cdot \dot{I}_m$
 <p>Масштабный усилитель</p>	$y(t) = A \cdot x(t)$	$\dot{Y}(\omega) = A \cdot \dot{X}(\omega)$
 <p>Интегратор</p>	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\dot{Y}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \dot{X}(\omega)$
 <p>Элемент задержки</p>	$y(t) = x(t - T)$	$\dot{Y}(\omega) = \dot{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$
 <p>Сумматор</p>	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	$\dot{Y}(\omega) = \dot{X}_1(\omega) + \dot{X}_2(\omega)$

На основании первого и второго законов Кирхгофа составляется линейное дифференциальное уравнение электрического равновесия, которое связывает между собой мгновенные значения сигналов на входе  $x(t)$  и выходе  $y(t)$  линейной цепи

$$\begin{aligned} \alpha_n \cdot \frac{d^n}{dt^n}[x(t)] + \alpha_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[x(t)] + \dots + \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt}[x(t)] + \alpha_0 \cdot x(t) = \\ = \beta_m \cdot \frac{d^m}{dt^m}[y(t)] + \beta_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}[y(t)] + \dots + \beta_1 \cdot \frac{d}{dt}[y(t)] + \beta_0 \cdot y(t), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $\alpha_n$  и  $\beta_m$  - постоянные коэффициенты, выражающиеся через параметры цепи.

### Пример 6.1

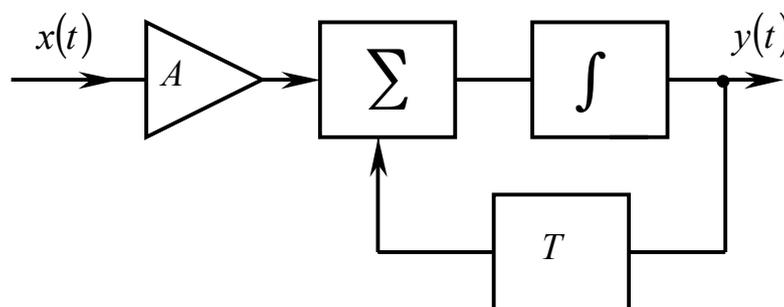


Рисунок 6.1

Для цепи, изображенной на рисунке 6.1, уравнение электрического равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t A \cdot x(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t y(\tau - T) d\tau = y(t), \\ A \cdot x(t) = \frac{d}{dt} y(t) - y(t - T). \end{aligned}$$

Получено дифференциальное уравнение первого порядка.

### Пример 6.2

Для цепи, изображенной на рисунке 6.2, составление уравнения электрического равновесия можно разбить на 4 этапа.

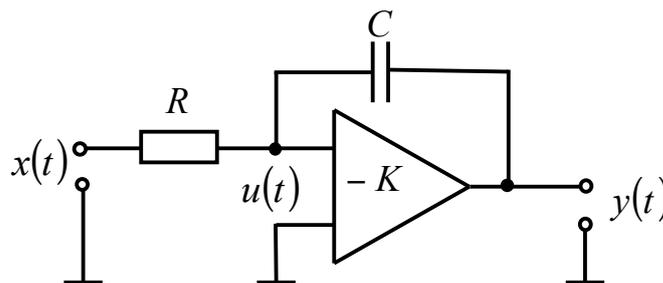


Рисунок 6.2

1) Обойдем внешний контур ЛЭЦ по второму закону Кирхгофа. При составлении уравнения учтем, что ток  $i(t)$  через емкость равен току, протекающему через сопротивление  $R$ , так как входной ток масштабного усилителя равен нулю из-за бесконечного входного сопротивления.

$$y(t) = x(t) - i(t) \cdot R - \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau.$$

2) Обходя входной контур ЛЭЦ, выразим напряжение  $u(t)$  на входе масштабного усилителя и ток  $i(t)$  через резистор

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) - i(t) \cdot R, \\ i(t) &= \frac{1}{R} [x(t) - u(t)]. \end{aligned}$$

3) Учитывая свойства масштабного усилителя, свяжем между собой напряжения на входе и выходе

$$y(t) = -K \cdot u(t) \text{ или } u(t) = -\frac{1}{K} y(t).$$

4) Составим уравнение электрического равновесия

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{K} \cdot y(t) - \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t \left[ \frac{1}{R} \cdot x(\tau) + \frac{1}{KR} \cdot y(\tau) \right] d\tau, \\ \frac{K+1}{K} \cdot y(t) + \frac{1}{K} \cdot \int_{-\infty}^t \frac{y(\tau)}{RC} d\tau &= -\frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau, \\ \frac{K+1}{K} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{K} \cdot \frac{y(t)}{RC} &= -\frac{1}{RC} \cdot x(t). \end{aligned}$$

Получено дифференциальное уравнение первого порядка. Если коэффициент передачи  $K$  масштабного усилителя много больше единицы, например  $K=100$ , то предыдущие уравнения упрощаются к виду:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{RC} \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{1}{RC} \cdot x(t). \end{aligned}$$

**Пример 6.3**

В заключение рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 6.3 .

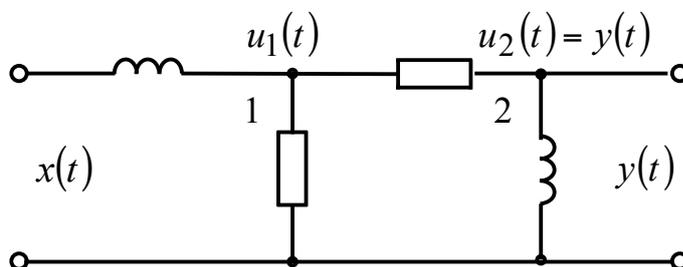


Рисунок 6.3

Запишем уравнение Кирхгофа для двух обозначенных узлов.

1) Для токов, вытекающих из первого узла, получим

$$\frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t [u_1(\tau) - x(\tau)] d\tau + \frac{1}{R} \cdot u_1(t) + \frac{1}{R} \cdot [u_1(t) - y(t)] = 0.$$

2) Для токов, вытекающих из второго узла, найдем

$$\frac{1}{R} \cdot [y(t) - u_1(t)] + \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = 0,$$

$$u_1(t) = y(t) + \frac{R}{L} \cdot \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau.$$

3) Составляем уравнение электрического равновесия

$$y(t) + \frac{3R}{L} \cdot \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau + \frac{R^2}{L^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{R}{L} \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{R}{L} \cdot \frac{d}{dt} y(t) + \frac{R^2}{L^2} \cdot y(t) = \frac{R}{L} \cdot \frac{d}{dt} x(t).$$

Получено дифференциальное уравнение второго порядка.

## 6.2 Методы алгебраизации дифференциального уравнения электрического равновесия

### 6.2.1 Метод комплексных амплитуд (МКА)

Суть метода заключается в том, что вместо произвольных вещественных сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$  на входе и выходе ЛЭЦ рассматриваются комплексные гармонические сигналы  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{X}_m \cdot e^{j\omega t} \\ \dot{y}(t) &= \dot{Y}_m \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где  $\dot{X}_m$  и  $\dot{Y}_m$  - комплексные амплитуды гармонических сигналов произвольной частоты  $\omega$ .

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_m &= X_m \cdot e^{j\varphi_x} \\ \dot{Y}_m &= Y_m \cdot e^{j\varphi_y} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (6.4) комплексные модели (6.5), получим алгебраическое уравнение

$$\left[ \alpha_0 + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \alpha_n \cdot (j\omega)^n \right] \cdot \dot{X}_m \cdot e^{j\omega t} = \left[ \beta_0 + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \beta_m \cdot (j\omega)^m \right] \cdot \dot{Y}_m \cdot e^{j\omega t}, \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt} \dot{x}(t) &= \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt} (\dot{X}_m \cdot e^{j\omega t}) = \alpha_1 \cdot (j\omega) \cdot \dot{X}_m \cdot e^{j\omega t}; \\ \alpha_n \cdot \frac{d^n}{dt^n} \dot{x}(t) &= \alpha_n \cdot \frac{d^n}{dt^n} (\dot{X}_m \cdot e^{j\omega t}) = \alpha_n \cdot (j\omega)^n \cdot \dot{X}_m \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $n$ -кратное дифференцирование комплексного гармонического сигнала по времени приводит к умножению комплексной амплитуды  $\dot{X}_m$  на множитель  $(j\omega)^n$ . Комплексная функция  $e^{j\omega t}$  входит в качестве сомножителя в правую и левую части алгебраического уравнения и не оказывает влияния на решение.

Выразим отношение комплексных амплитуд через параметры цепи.

$$\frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \alpha_n \cdot (j\omega)^n}{\beta_0 + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \beta_m \cdot (j\omega)^m} = \dot{K}(\omega). \quad (6.8)$$

Получившаяся комплексная функция  $\dot{K}(\omega)$  называется системной функцией ЛЭЦ. Системная функция цепи  $\dot{K}(\omega)$  связывает комплексные амплитуды гармонических сигналов на входе и выходе линейной цепи

$$\dot{Y}_m = \dot{K}(\omega) \cdot \dot{X}_m. \quad (6.9)$$

$\dot{K}(\omega)$  зависит не только от частоты, но и от параметров электрической цепи, входящих в постоянные коэффициенты  $\alpha_n, \beta_m$ .

Если сигналы  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  представляют собой одномерные комплексные модели гармонических напряжений, то функция частоты  $\dot{K}(\omega)$  называется комплексной передаточной функцией.

В инженерных расчетах комплексную передаточную функцию  $\dot{K}(\omega)$  находят методами теории цепей, не прибегая к составлению дифференциальных уравнений.

#### **Пример 6.4**

Применяя метод комплексных амплитуд, рассчитаем комплексную передаточную функцию ЛЭЦ, изображенной на рисунке 6.2

1) Обходя внешний контур ЛЭЦ, получим алгебраическое уравнение вида

$$\dot{Y}_m = \dot{X}_m - \dot{I}_m R - \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m.$$

2) Обходя входной контур ЛЭЦ, установим связь комплексными амплитудами

$$\dot{U}_m = \dot{X}_m - \dot{I}_m R,$$

$$\dot{I}_m = \frac{1}{R} (\dot{X}_m - \dot{U}_m),$$

3) Учтем инвертирующий характер масштабного усилителя

$$\dot{Y}_m = -K \cdot \dot{U}_m \text{ или } \dot{U}_m = -\frac{1}{K} \dot{Y}_m.$$

4) Составим алгебраическое уравнение электрического равновесия, связывающее между собой комплексные амплитуды сигналов на входе и выходе ЛЭЦ.

$$\dot{Y}_m = -\frac{1}{K} \dot{Y}_m - \frac{1}{j\omega CR} \left( \dot{X}_m + \frac{1}{K} \dot{Y}_m \right),$$

$$\dot{Y}_m \left[ 1 + \frac{1}{K} - \frac{1}{j\omega CRK} \right] = -\frac{1}{j\omega CR} \dot{X}_m,$$

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{X}_{1m}}{\dot{X}_m} = -\frac{K}{(K+1)j\omega RC - 1}.$$

Представим комплексную передаточную функцию в показательной форме, связывающей между собой модуль и аргумент, называемые в теории цепей амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками ЛЭЦ.

$$|\dot{K}(\omega)| = |\dot{K}(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)},$$

где  $\dot{K}(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (K+1)^2(\omega RC)^2}}$  – АЧХ,

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(K+1)\omega RC - \text{ФЧХ}.$$

На рисунке 6.4 изображены амплитудно-частотные характеристики линейной цепи (рисунок 6.2), содержащей масштабный усилитель с различными коэффициентами усиления

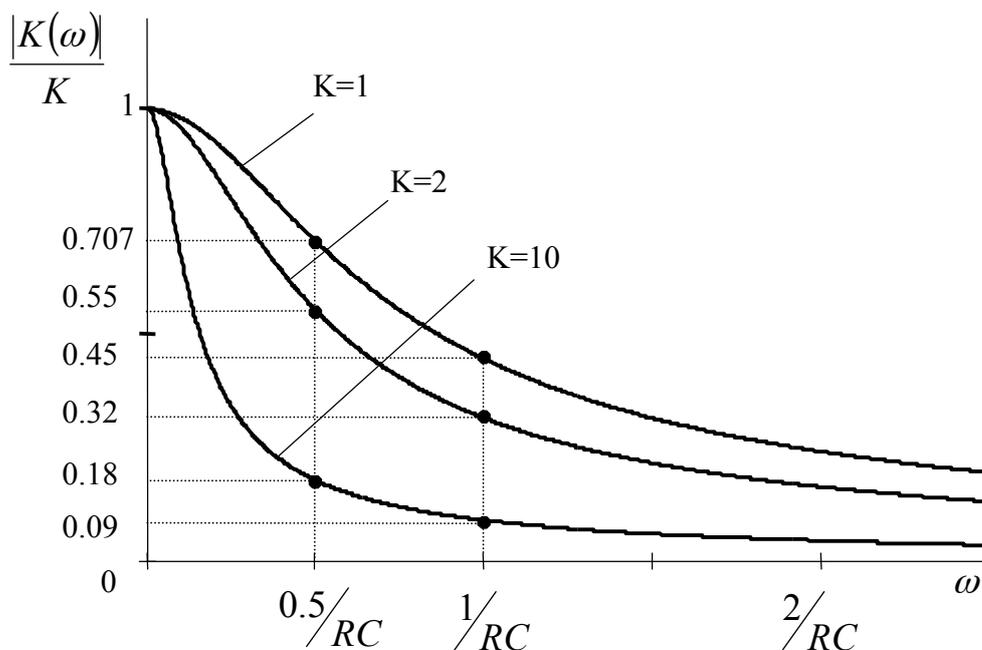


Рисунок 6.4 – Амплитудно-частотная характеристика ЛЭЦ, изображенной на рисунке 6.2

### 6.2.2 Частотный метод

Частотный метод базируется на представлении входного и выходного сигналов их спектральными плотностями.

В основе метода лежит применение прямого преобразования Фурье к правой и левой части дифференциального уравнения (6.4).

$$\begin{aligned} &(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \alpha_n \cdot (j\omega)^n + \dots) \cdot \dot{X}(\omega) = \\ &= (\beta_0 + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \beta_m \cdot (j\omega)^m + \dots) \cdot \dot{Y}(\omega), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где

$\Phi[x(t)] = \dot{X}(\omega)$  - спектральная плотность входного сигнала;

$\Phi[y(t)] = \dot{Y}(\omega)$  - спектральная плотность выходного сигнала.

В результате применения теорем о спектрах получены соотношения

$$\begin{aligned} \Phi \left[ \alpha_1 \frac{d}{dt} \dot{x}(t) \right] &= \alpha_1 \cdot (j\omega) \cdot \dot{X}(\omega), \\ \Phi \left[ \alpha_n \frac{d^n}{dt^n} \dot{x}(t) \right] &= \alpha_n \cdot (j\omega)^n \cdot \dot{X}(\omega). \end{aligned}$$

Алгебраическое уравнение (6.10) связывает между собой спектральные плотности входного и выходного сигналов.

$$\dot{Y}(\omega) = \dot{X}(\omega) \cdot \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot (j\omega) + \alpha_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \alpha_n \cdot (j\omega)^n}{\beta_0 + \beta_1 \cdot (j\omega) + \beta_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + \beta_m \cdot (j\omega)^m}. \quad (6.11)$$

Спектральная плотность сигнала на выходе линейной цепи  $\dot{Y}(\omega)$  равна произведению спектральной плотности сигнала на входе  $\dot{X}(\omega)$  на комплексную передаточную функцию цепи  $\dot{K}(\omega)$ .

$$\dot{Y}(\omega) = \dot{K}(\omega) \cdot \dot{X}(\omega). \quad (6.12)$$

Частотный метод можно рассматривать как предельный переход от рядов Фурье к преобразованиям Фурье.

### 6.2.3 Операторный метод

Операторный метод основывается на представлении входного и выходного сигналов их изображениями по Лапласу.

Суть метода состоит в применении прямого преобразования Лапласа к правой и левой части дифференциального уравнения (6.4)

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n + \dots) \cdot X(p) = \\ = (\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_m p^m + \dots) \cdot Y(p), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $L[x(t)] = X(p)$  – изображение по Лапласу входного сигнала;

$L[y(t)] = Y(p)$  – изображение по Лапласу выходного сигнала;

$$\begin{aligned} L\left[\alpha_1 \frac{d}{dt} y(t)\right] &= \alpha_1 p Y(p); \\ L\left[\alpha_n \frac{d^n}{dt^n} y(t)\right] &= \alpha_n p^n Y(p). \end{aligned}$$

Алгебраическое уравнение (6.13) связывает между собой изображения по Лапласу двух сигналов на входе и выходе ЛЭЦ. Изображение по Лапласу сигнала на выходе ЛЭЦ  $Y(p)$  равно произведению изображения сигнала на входе  $X(p)$  на передаточную функцию цепи  $K(p)$  в операторной форме записи

$$Y(p) = X(p) \cdot K(p), \quad (6.14)$$

где  $K(p)$  – передаточная функция ЛЭЦ в операторной форме записи.

$$K(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n + \dots}{\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \dots + \beta_m p^m + \dots} \quad (6.15)$$

#### Пример 6.5

Применяя прямое преобразование Лапласа, определим передаточную функцию ЛЭЦ, изображенной на рисунке 6.3

$$L^+ \left[ \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{R}{L} \frac{d}{dt} y(t) + \frac{R^2}{L^2} y(t) \right] = L^+ \left[ \frac{R}{L} \frac{d}{dt} x(t) \right],$$

$$Y(p) \cdot \left[ p^2 + 3 \frac{R}{L} p + \frac{R^2}{L^2} \right] = \frac{R}{L} p \cdot X(p),$$

$$Y(p) = K(p) \cdot X(p),$$

$$K(p) = \frac{\frac{R}{L} p}{p^2 + 3 \frac{R}{L} p + \frac{R^2}{L^2}}.$$

### 6.3 Анализ взаимодействия линейной цепи с сигналами, описываемыми обобщенными функциями

Представим себе линейную систему с нулевыми начальными условиями. Кроме того, положим, что сигналы на входе и выходе системы одномерны.

Рассмотрим в качестве входных сигналов идеальные обобщенные модели: дельта-функцию  $\delta(t)$  и единичный скачок  $\sigma(t)$  (рисунок 6.5).

#### 6.3.1 Импульсная характеристика цепи

Отклик линейной системы с нулевыми начальными условиями на воздействие  $\delta$ -функции называется импульсной характеристикой  $g(t)$ . На рисунке 6.5 формально изображены две линейные системы, безразмерная передаточная функция каждой из них равна  $K(p)$ .

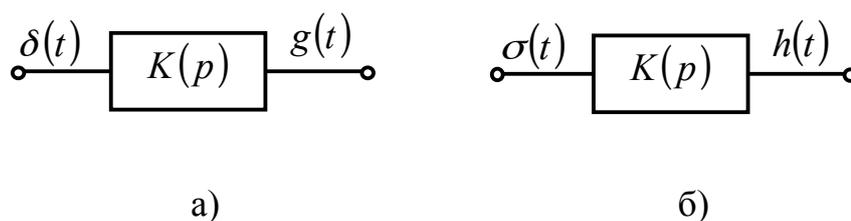


Рисунок 6.5 – Представление импульсной (а) и переходной (б) характеристик

Импульсная характеристика – такая же идеализация, как и порождающая ее  $\delta$  – функция. Размерность импульсной характеристики совпадает с размерностью  $\delta$  – функции, т.е. обратна размерности времени.

С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал единичной площади при условии, что эффективная длительность  $\delta$  – образующей

функции много меньше эффективной длительности импульсной характеристики системы.

Изображение по Лапласу импульсной характеристики совпадает с передаточной функцией  $K(p)$ , так как изображение  $\delta$  – функции равно 1.

Таким образом, импульсная характеристика  $g(t)$  и передаточная функция цепи  $K(p)$  связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} K(p) &= L[g(t)] = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt \\ g(t) &= L^{-1}[K(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p)e^{pt} dp \end{aligned} \right\} 6.16$$

### 6.3.2. Переходная характеристика цепи

Отклик линейной системы с нулевыми начальными условиями на воздействие единичного скачка называется переходной характеристикой  $h(t)$ .

Единичный скачок – функция безразмерная, поэтому переходная характеристика также безразмерна.

Изображение по Лапласу входного единичного скачка равно  $1/p$ .

Переходная характеристика  $h(t)$ , ее изображение  $H(p)$  и передаточная функция цепи  $K(p)$  связаны между собой следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} H(p) &= \frac{K(p)}{p} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt \\ h(t) &= L^{-1}\left[\frac{K(p)}{p}\right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(p)}{p} e^{pt} dp \end{aligned} \right\} 6.17$$

Изображения по Лапласу и оригиналы испытательных сигналов и соответствующих им временных характеристик представлены в таблице 6.2 .

Таблица 6.2 – Испытательные сигналы и временные характеристики ЛЭЦ (изображения и оригиналы)

Название	Изображение по Лапласу	Оригинал
$\delta$ – функция	$L[\delta(t)] = 1$	$\delta(t) = L^{-1}[1]$
Единичный скачок	$L[\sigma(t)] = 1/p$	$\sigma(t) = L^{-1}[1/p]$
Импульсная характеристика	$L^+[g(t)] = K(p)$	$g(t) = L^{-1}[K(p)]$
Переходная характеристика	$L^+[h(t)] = K(p)/p$	$h(t) = L^{-1}[K(p)/p]$

Переходная и импульсная характеристики существуют только при  $t \geq 0$ , так как отклики не могут опережать воздействия. Переходная и импульсная характеристики связаны между собой так же, как и входные воздействия, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \\ \delta(t) &= \frac{d}{dt} \sigma(t) \end{aligned} \right\} (6.18);$$

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \\ g(t) &= \frac{d}{dt} h(t) \end{aligned} \right\}. (6.19)$$

В заключение, пользуясь свойствами преобразований Лапласа, запишем предельные соотношения, связывающие между собой передаточную функцию  $K(p)$  и переходную характеристику  $h(t)$ .

$$\lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^t h'(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau = \int_0^t h'(\tau) \cdot \lim_{p \rightarrow 0} e^{-p\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t),$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot H(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) \end{aligned} \right\} (6.20)$$

### 6.3.3 Передаточная функция цепи

Сравнивая между собой выражения  $K(p)$  и  $\dot{K}(\omega)$  (соответственно формулы (6.15) и (6.8)), необходимо заметить, что это не просто замена переменных  $j\omega = p$ , а переход с мнимой оси ( $j\omega$ ) на всю плоскость комплексных частот  $p = c + j\omega$ .

Передаточная функция  $K(p)$  представляет собой отношение полиномов целых положительных степеней  $p$ , где  $m \geq n$ .

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

Корни уравнения  $A(p) = 0$  называют нулями передаточной функции и обозначают  $p_{o1}, p_{o2}, p_{o3}, \dots$ . Корни уравнения  $B(p) = 0$  называют полюсами передаточной функции и обозначают  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Функция  $K(p)$  аналитична на всей плоскости  $p$ , за исключением конечного числа точек, являющихся корнями знаменателя  $B(p)$ , то есть полюсами.

Преобразовав числитель  $A(p)$  и знаменатель  $B(p)$ , получаем нуль-полюсное представление передаточной функции

$$K(p) = M_o \cdot \frac{(p - p_{o1})(p - p_{o2}) \dots (p - p_{oL})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_N)}$$

где  $L$  – число нулей;

$N$  – число полюсов.

## 6.4 Практическое приложение к шестой главе

### 6.4.1 Расчет передаточных функций линейных цепей

Рассмотрим три простейшие цепи, изображенные на рисунке 6.6

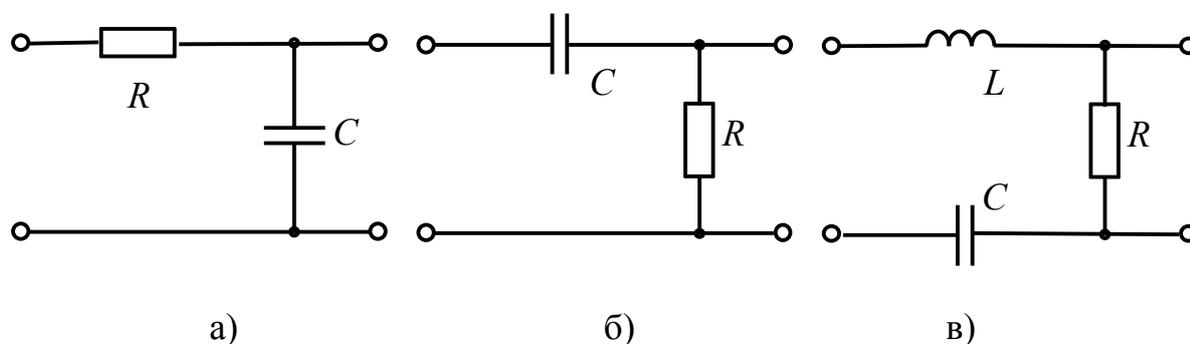


Рисунок 6.6 – Простейшие цепи: а)–интегрирующая; б)–дифференцирующая; в)–последовательный колебательный контур

Запишем передаточные функции трех цепей с учетом обозначений

$$RC = \tau, \quad R/L = 2\alpha, \quad \omega_p = 1/\sqrt{LC},$$

$$K_1(p) = \frac{1}{p\tau + 1}, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad K_1(p) \approx 1/p\tau,$$

$$K_2(p) = \frac{p\tau}{p\tau + 1}, \quad \text{при } \tau \rightarrow 0 \quad K_2(p) \approx p\tau,$$

$$K_3(p) = \frac{2p\alpha}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}, \quad \text{где } \alpha \ll \omega_p.$$

На рисунке 6.7 показано расположение нулей и полюсов на  $p$ -плоскости для трех передаточных функций

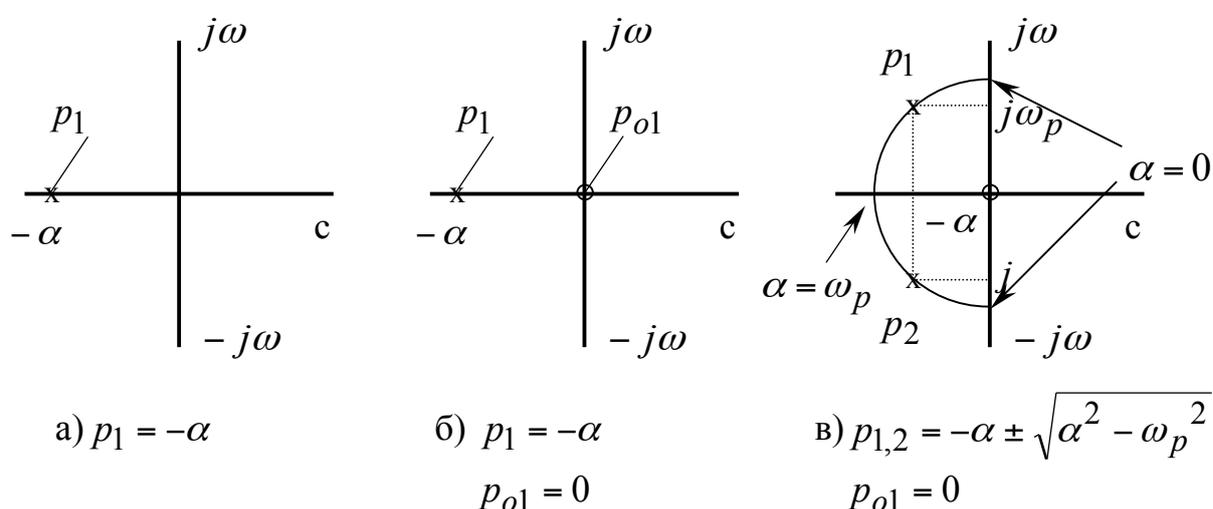


Рисунок 6.7 – Полюсы ( $\times$ ) и нули (0) трех передаточных функций  $K_1(p), K_2(p), K_3(p)$

Коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_m$  передаточной функции  $K(p)$  вещественны, поэтому нули и полюса либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары. Для случаев, когда нули и полюсы располагаются на действительной оси, существует графоаналитический прием – метод Боде, позволяющий изобразить АЧХ и ФЧХ линейной цепи с помощью графиков функции  $20 \cdot \log_{10} |\dot{K}(\omega)|$ .

Однако, в настоящее время этим методом практически не пользуются, так как применение компьютерной техники позволяет рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ любой цепи. В таблицах 6.3 и 6.4 приведены частотные и временные характеристики простейших электрических цепей.

### 6.4.2 Расчет временных характеристик линейных цепей

При определении импульсной характеристики необходимо проверить, удовлетворяет ли передаточная функция требованиям, предъявляемым к изображениям по Лапласу (5.12).

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = 0.$$

Это условие может не выполняться (например, для фильтров верхних частот), т.е.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = M_o \cdot p^{n-m} = \begin{cases} 0, & m > n \\ M_o, & m = n \end{cases}.$$

В этом случае из передаточной функции следует выделять целую часть

$$K(p) = M_o + \frac{A(p) - M_o B(p)}{B(p)}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к первым двум передаточным функциям, получим

$$g_1(t) = L^{-1}[K_1(p)] = L^{-1}\left[\frac{1/\tau}{p + 1/\tau}\right] = 1/\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot \sigma(t),$$

$$\begin{aligned} g_2(t) &= L^{-1}[K_2(p)] = L^{-1}\left[\frac{p}{p + 1/\tau}\right] = L^{-1}\left[1 - \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}\right] = \\ &= L^{-1}[1] - L^{-1}\left[\frac{1/\tau}{p + 1/\tau}\right] = \delta(t) - 1/\tau \cdot e^{-t/\tau} \cdot \sigma(t). \end{aligned}$$

Третья передаточная функция имеет два комплексно-сопряженных полюса

$$p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2 = 0,$$

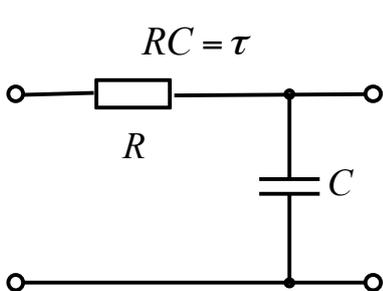
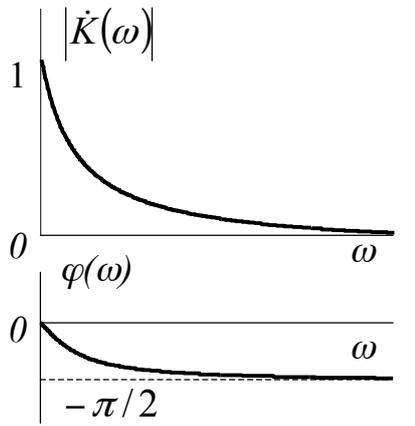
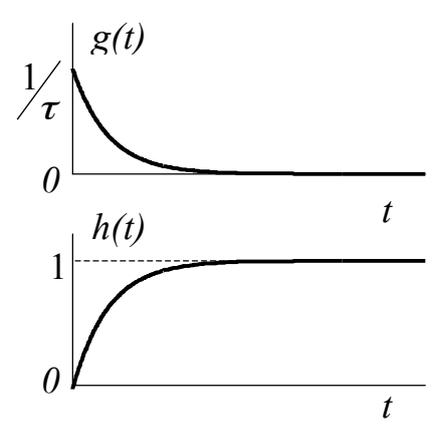
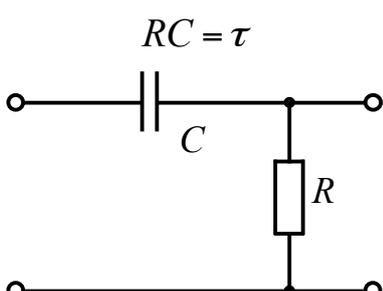
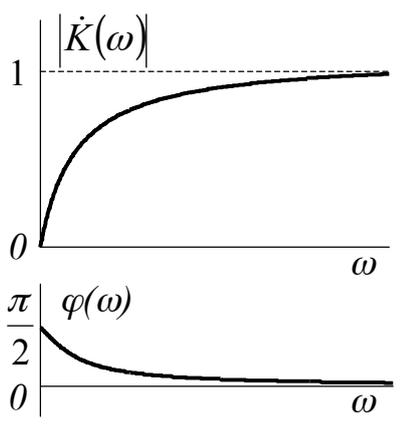
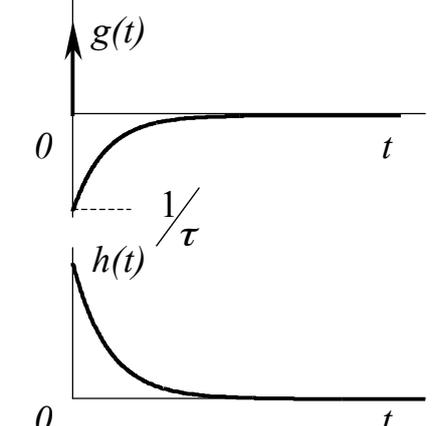
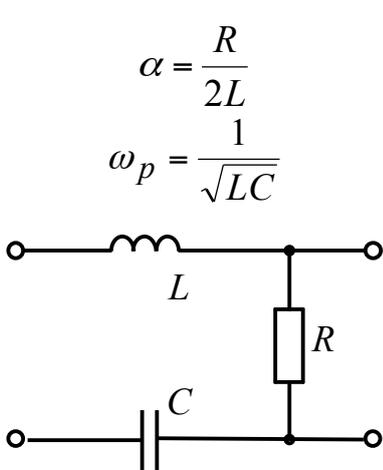
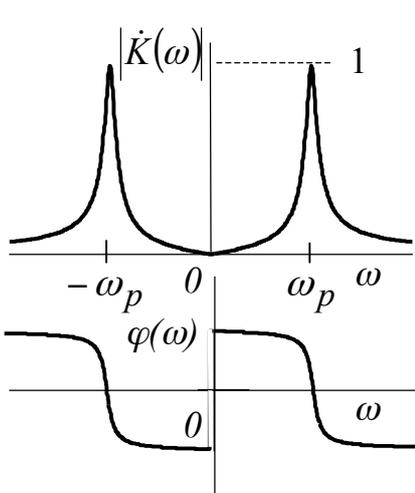
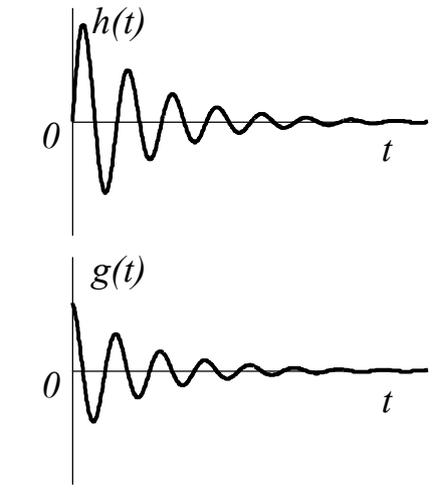
$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} = -\alpha \pm j\omega_{св},$$

$$\text{где } \omega_{св} = \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2}, \text{ т.е. } \omega_p^2 = \omega_{св}^2 + \alpha^2.$$

Таблица 6.3 – Частотные и временные характеристики простейших ЛЭЦ (математические модели)

Электрическая Цепь	Частотные характеристики ЛЭЦ	Временные характеристики ЛЭЦ
Наименование	Передаточная функция $K(p)$ , АЧХ и ФЧХ $ \dot{K}(\omega)  \quad \varphi(\omega)$	Переходная $h(t)$ и импульсная $g(t)$ характеристики
Интегрирующая цепь	$K(p) = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$ $ \dot{K}(\omega)  = \frac{1/\tau}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$ $\varphi(\omega) = -\arctg \omega \tau$	$g(t) = 1/\tau \cdot e^{-t/\tau} \sigma(t)$ $h(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \sigma(t)$
Дифференцирующая цепь	$K(p) = \frac{p}{p + 1/\tau}$ $ \dot{K}(\omega)  = \frac{\omega}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$ $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega / \alpha$	$g(t) = \delta(t) - 1/\tau \cdot e^{-t/\tau} \sigma(t)$ $h(t) = e^{-t/\tau} \cdot \sigma(t)$
Избирательная цепь (последовательный колебательный контур)	$K(p) = \frac{2p\alpha}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$ $ \dot{K}(\omega)  = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega\alpha}\right)^2 + 1}}$ $\varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega\alpha}\right)$	$g(t) = -\frac{2\alpha\omega_p}{\omega_{св}} e^{-\alpha t} \sigma(t) \times$ $\times \sin(\omega_{св} t - \Psi)$ $h(t) = \left(\frac{2\alpha}{\omega_{св}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{св} t\right) \sigma(t)$ $\omega_{св} = \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2}$

Таблица 6.4 – Частотные и временные характеристики простейших ЛЭЦ (графические модели)

Электрическая цепь	Частотные характеристики ЛЭЦ	Временные характеристики ЛЭЦ
Схема	АЧХ и ФЧХ	Переходная и импульсная характеристики
 <p style="text-align: center;"><math>RC = \tau</math></p> <p style="text-align: center;"><math>R</math></p> <p style="text-align: center;"><math>C</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math> \dot{K}(\omega) </math></p> <p style="text-align: center;"><math>\varphi(\omega)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>g(t)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>h(t)</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>RC = \tau</math></p> <p style="text-align: center;"><math>C</math></p> <p style="text-align: center;"><math>R</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math> \dot{K}(\omega) </math></p> <p style="text-align: center;"><math>\varphi(\omega)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>g(t)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>h(t)</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \frac{R}{2L}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>L</math></p> <p style="text-align: center;"><math>R</math></p> <p style="text-align: center;"><math>C</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math> \dot{K}(\omega) </math></p> <p style="text-align: center;"><math>\varphi(\omega)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>h(t)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>g(t)</math></p>

Импульсная характеристика для третьей передаточной функции равна сумме двух комплексно-сопряженных вычетов или удвоенной реальной части одного из них (при сложении двух комплексно-сопряженных полюсов мнимые части сокращаются).

$$g_3(t) = L^{-1} \left[ \frac{2p\alpha}{(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \text{Res}_{s_1} + \text{Res}_{s_2} = 2 \text{Re}[\text{Res}_{p_1}],$$

$$\text{Res}_{p_1} = \lim_{p=p_1} \left[ \frac{2p\alpha}{(p-p_1)(p-p_2)} \cdot (p-p_1) \cdot e^{pt} \right] = \frac{2p_1\alpha}{p_1-p_2} \cdot e^{p_1 t} \Big|_{p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{c\beta}} =$$

$$= \frac{2\alpha(-\alpha + j\omega_{c\beta})}{2j\omega_{c\beta}} \cdot e^{(-\alpha + j\omega_{c\beta})t} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \omega_{c\beta}^2}}{\omega_{c\beta}} \cdot e^{-\alpha t} e^{j(\omega_{c\beta}t + \frac{\pi}{2} - \Psi)},$$

$$\text{где } \Psi = \text{arctg} \frac{\omega_{c\beta}}{\alpha},$$

$$g_3(t) = \left[ -\frac{2\omega_{p\alpha}}{\omega_{c\beta}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_{c\beta} \cdot t - \Psi) \right] \cdot \sigma(t).$$

Используя (6.17), рассчитаем переходные характеристики трех линейных цепей.

Переходная характеристика интегрирующей цепи равна

$$h_1(t) = L^{-1} \left[ \frac{K_1(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1/\tau}{p(p+1/\tau)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} \right] = (1 - e^{-\alpha t}) \cdot \sigma(t)$$

Дифференцирующая цепь описывается переходной характеристикой вида

$$h_2(t) = L^{-1} \left[ \frac{K_2(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{p+1/\tau} \right] = e^{-t/\tau} \cdot \sigma(t).$$

Переходная характеристика избирательной цепи определится следующим образом:

$$h_3(t) = L^{-1} \left[ \frac{K_3(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{2\alpha}{(p-p_1)(p-p_2)} \right] = 2 \text{Re}[\text{Res}_{p_1}] =$$

$$= 2 \text{Re} \left\{ \frac{2\alpha}{p_1-p_2} L^{-1} \left[ \frac{1}{p-p_2} \right] \right\} = 2 \text{Re} \left( \frac{2\alpha}{p_1-p_2} e^{p_1 t} \right) =$$

$$= 2 \text{Re} \left( \frac{\alpha}{j\omega_{c\beta}} e^{-(\alpha + j\omega_{c\beta})t} \right) = \left[ \frac{2\alpha}{\omega_{c\beta}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_{c\beta} t - \frac{\pi}{2}) \right] \cdot \sigma(t).$$

### 6.4.3 Расчет частотных и временных характеристик параллельного избирательного контура

Схема параллельного избирательного контура и его частотные характеристики изображены на рисунке 6.8.

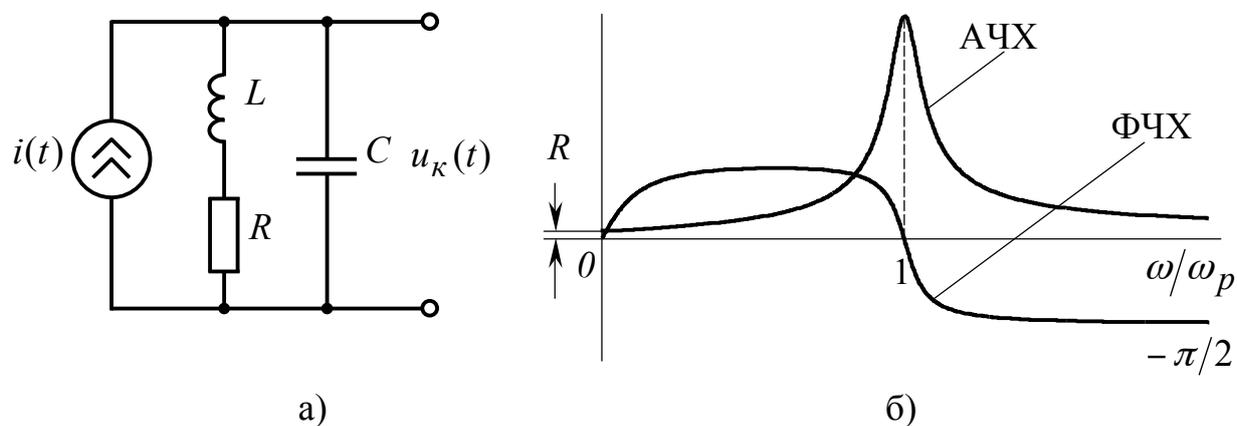


Рисунок 6.8 – Схема (а) параллельного контура и частотные (б) характеристики (АЧХ и ФЧХ)

На входе действует ток  $i(t)$ , на выходе имеем напряжение  $u(t)$ , поэтому системная функция цепи имеет размерность сопротивления  $[Ом]$ . Определим входное сопротивление цепи в операторной форме записи.

$$Z(p) = \frac{1/pC \cdot (pL + R)}{pL + R + 1/pC} = \frac{p + 2\alpha}{C \cdot (p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2)},$$

где  $\alpha = R/2L$  – коэффициент затухания контура,  $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$  – резонансная частота.

Перейдем от  $Z(p)$  к комплексной функции частоты  $\dot{Z}(\omega)$ , заменив  $p$  на  $j\omega$  и разделив числитель и знаменатель на общий множитель  $j2\omega\alpha$ .

$$\dot{Z}(\omega) = R_{рез} \cdot \frac{1 - j \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega_p}{\omega}}{1 + jQ \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)},$$

где  $Q = \omega_p/2\alpha$  – добротность контура,  $R_{рез} = Q/\omega_p C$  – резонансное сопротивление.

Частотные характеристики, а именно модуль (АЧХ) и аргумент (ФЧХ) комплексного входного сопротивления, определим по формулам

$$|\dot{Z}(n)| = R_{\text{рез}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 1/(Qn)^2}}{\sqrt{1 + [(n - 1/n) \cdot Q]^2}},$$

$$\arg \dot{Z}(n) = -\arctg \frac{1}{Qn} - \arctg [(n - 1/n) \cdot Q],$$

где  $n = \frac{\omega}{\omega_p}$ .

На рисунке 6.8 изображены частотные характеристики параллельного контура для добротности  $Q = 10$ .

Для расчета импульсной  $g(t)$  и переходной  $h(t)$  характеристик резонансного контура воспользуемся изображениями по Лапласу

$$L[g(t)] = Z(p) \qquad L[h(t)] = \frac{Z(p)}{p}$$

Применим обратное преобразование Лапласа (5.11) и теорему о вычетах (5.48). Найдем полюсы функции  $Z(p)$ , приравнивая знаменатель к нулю.

$$p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2 = (p - p_1)(p - p_2) = 0,$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св},$$

где  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2}$  – частота свободных (собственных) колебаний контура.

Полюсы  $p_1$  и  $p_2$  представляют собой комплексно-сопряженную пару, поэтому вычеты будут комплексно-сопряженными функциями, суммирование которых приводит к удвоению реальной части и сокращению мнимой.

$$\text{Res}_1 + \text{Res}_2 = 2\text{Re}[\text{Res}_1].$$

Будем рассчитывать только один вычет (любой из комплексно-сопряженной пары).

Представим  $Z(p)$  в виде

$$Z(p) = \frac{p + 2\alpha}{C(p - p_1)(p - p_2)},$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_1 &= \lim_{p=p_1} \left[ \frac{p + 2\alpha}{C(p - p_1)(p - p_2)} \cdot (p - p_1)e^{pt} \right] = \\ &= \frac{p_1 + 2\alpha}{C(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} = \frac{\alpha + j\omega_{св}}{C \cdot 2j\omega_{св}} e^{(-\alpha + j\omega_{св})t} = \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{св}^2}}{2C\omega_{св}} \cdot e^{-\alpha \cdot t} e^{j\left(\omega_{св}t + \Psi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\omega_p}{2C\omega_{св}} \cdot e^{-\alpha \cdot t} e^{j\left(\omega_{св}t + \Psi - \frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned}$$

где  $\Psi = \arctg \frac{\omega_{св}}{\alpha}$ .

Импульсную характеристику определим, взяв удвоенную реальную часть  $\text{Re } s_1$ .

$$g(t) = \frac{\omega_p}{C\omega_{cв}} e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_{cв}t + \Psi) = 2\alpha \frac{\omega_p}{\omega_{cв}} R_{pez} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{cв}t + \Psi) \cdot \sigma(t),$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_{cв}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2}} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}, \quad \frac{\omega_{cв}}{\alpha} = \sqrt{4Q^2 - 1},$$

$$g(t) = 2\alpha \cdot R_{pez} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{cв}t + \Psi) \cdot \sigma(t).$$

Проведем расчет переходной характеристики параллельного контура

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{p + 2\alpha}{C \cdot p(p - p_1)(p - p_2)} \right].$$

Анализируя знаменатель, видим, что, кроме двух комплексно – сопряженных полюсов  $p_1$  и  $p_2$ , появился третий  $p_3 = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Re } s_1 &= \lim_{p=p_1} \left[ \frac{p + 2\alpha}{C \cdot p(p - p_1)(p - p_2)} \cdot (p - p_2) e^{pt} \right] = \\ &= \frac{p_1 + 2\alpha}{C \cdot p_1(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} = \frac{\alpha + j\omega_{cв}}{C \cdot (-\alpha + j\omega_{cв}) \cdot 2j\omega_{cв}} e^{-\alpha \cdot t} e^{j\omega_{cв}t} = \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{cв}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{cв}^2}} \cdot \frac{1}{2C\omega_{cв}} e^{-\alpha \cdot t} e^{j\left(\omega_{cв}t + 2\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ 2\text{Re}[\text{Re } s_1] &= -\frac{1}{C\omega_{cв}} e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{cв}t + 2\Psi), \end{aligned}$$

$$\text{Re } s_3 = \lim_{p=p_3=0} \left[ \frac{p + 2\alpha}{C \cdot p(p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2)} \cdot (p - 0) e^{pt} \right] = \frac{2\alpha}{C\omega_p^2}.$$

Объединяя вычеты, получим

$$h(t) = \left[ \frac{2\alpha}{C\omega_p^2} - \frac{1}{\omega_{cв}C} e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{cв}t + 2\Psi) \right] \cdot \sigma(t).$$

**Замечание.** Обращаем внимание, что на размерностях импульсной и переходной характеристик отразилась размерность системной функции контура (сопротивления)

$$[g(t)] = \frac{\text{Ом}}{\text{сек}} \quad [h(t)] = \text{Ом}$$

На рисунке 6.9 изображены временные характеристики параллельного избирательного контура

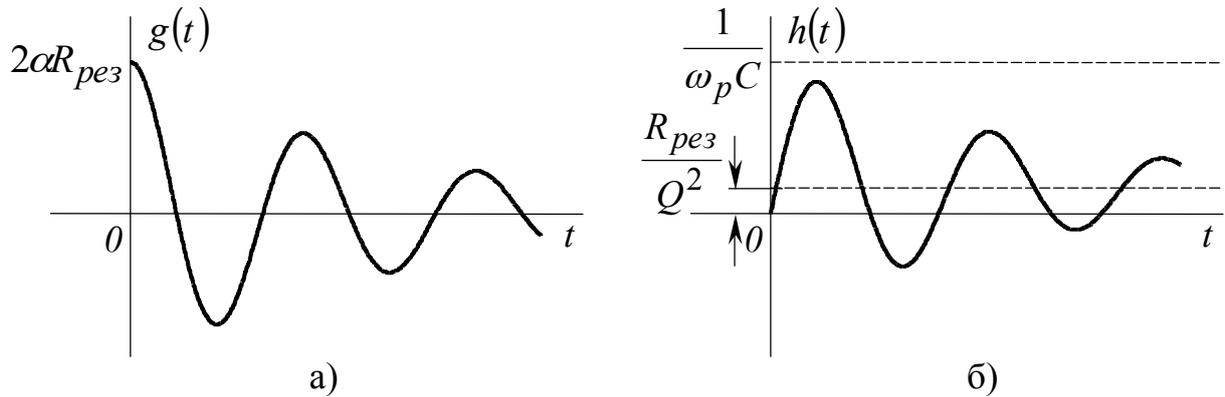


Рисунок 6.9 – Импульсная (а) и переходная (б) характеристики параллельного избирательного контура

В заключение проверим выполнение предельных соотношений:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{R_{рез}}{Q^2}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} Z(p) = \frac{2\alpha}{C\omega_p^2} = \frac{R_{рез}}{Q^2} = R.$$

#### 6.4.4 Расчет частотных и временных характеристик последовательного избирательного контура

Схема последовательного избирательного контура и его частотные характеристики изображены на рисунке 6.10.

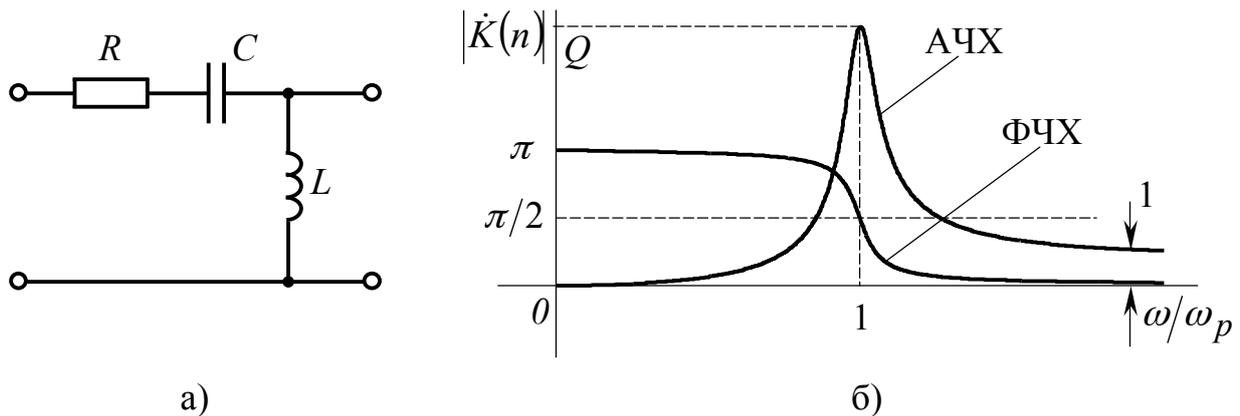


Рисунок 6.10 – Схема (а) последовательного контура и частотные (б) характеристики

$$K(p) = \frac{pL}{pL + R + 1/pC} = \frac{p^2}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2},$$

$$\dot{K}(\omega) = \frac{(j\omega)^2}{2j\omega\alpha + \omega_p^2 - \omega^2} = \frac{jQ \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)},$$

$$|\dot{K}(n)| = \frac{Q \cdot n}{\sqrt{1 + [(n - 1/n) \cdot Q]^2}}, \quad \varphi(n) = \pi/2 - \arctg[(n - 1/n) \cdot Q].$$

Здесь  $\alpha = R/2L$ ,  $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ ,  $n = \omega/\omega_p$ ,  $Q = \omega_p/2\alpha$ .

Перед расчетом импульсной характеристики обращаем внимание на то, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = 1.$$

Разделив числитель на знаменатель, выделим из  $K(p)$  целую часть

$$K(p) = \frac{p^2 \pm (2p\alpha + \omega_p^2)}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2} = 1 - \frac{2p\alpha + \omega_p^2}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}.$$

Учтем, что  $p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2 = (p - p_1)(p - p_2)$ , а  $p_1$  и  $p_2$  – комплексно-сопряженные полюса  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{св}$

$$g(t) = L^{-1} \left[ 1 - \frac{2p\alpha + \omega_p^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \right] = \delta(t) - L^{-1} \left[ \frac{2p\alpha + \omega_p^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \right] = \delta(t) - 2\operatorname{Re}[Re s_1],$$

$$Re s_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[ \frac{2p\alpha + \omega_p^2}{(p - p_1)(p - p_2)} (p - p_1) e^{pt} \right] = \left[ \frac{2\alpha \cdot (-\alpha + j\omega_{св}) + \omega_p^2}{2j\omega_{св}} e^{(-\alpha + j\omega_{св})t} \right].$$

Подставляя  $\omega_p^2 - \alpha^2 = \omega_{св}^2$ , получим

$$\begin{aligned} Re s_1 &= - \left[ \frac{\alpha^2 - 2j\omega_{св} \cdot \alpha - \omega_p^2}{2j\omega_{св}} e^{(-\alpha + j\omega_{св})t} \right] = \\ &= - \left[ \frac{(\alpha - j\omega_{св})^2}{2j\omega_{св}} e^{(-\alpha + j\omega_{св})t} \right] = - \frac{\omega_p^2}{2\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} e^{j(\omega_{св}t - 2\Psi - \pi/2)}, \end{aligned}$$

где  $\Psi = \arctg \omega_{св}/\alpha$ ,

$$g(t) = \delta(t) + \frac{\omega_p^2}{2\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{св}t - 2\Psi) \cdot \sigma(t).$$

Расчет переходной характеристики не вызывает затруднений

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{K(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{p}{(p-p_1)(p-p_1)} \right] = 2 \operatorname{Re}[\operatorname{Res}_1],$$

$$\operatorname{Res}_1 = \lim_{p=p_1} \left[ \frac{p}{(p-p_1)(p-p_1)} (p-p_1) e^{pt} \right] =$$

$$= \frac{-\alpha + j\omega_{c\beta}}{2j\omega_{c\beta}} e^{(-\alpha + j\omega_{c\beta})t} = \frac{\omega_p}{2\omega_{c\beta}} e^{-\alpha \cdot t} e^{j(\omega_{c\beta}t - \Psi + \pi/2)},$$

$$h(t) = -\frac{\omega_p}{2\omega_{c\beta}} e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{c\beta}t - \Psi) \cdot \sigma(t),$$

где  $\Psi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{c\beta}}{\alpha}$ .

Проверим выполнение предельных соотношений:

$$\lim_{p \rightarrow 0} K(p) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K(p) = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \sin \Psi =$$

$$= \frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{\omega_{c\beta}}{\alpha} \right) = \frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \cdot \frac{\omega_{c\beta}/\alpha}{\sqrt{1 + (\omega_{c\beta}/\alpha)^2}} = 1.$$

Проверим правильность связи между переходной и импульсной характеристиками

$$g(t) = h'(t) = -\frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \left\{ e^{-\alpha \cdot t} \sigma(t) \cdot \sin(\omega_{c\beta}t - \Psi) \right\},$$

$$g(t) = -\frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \left\{ -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\} \cdot \sin(\omega_{c\beta}t - \Psi) +$$

$$+ [\omega_{c\beta} \cdot \cos(\omega_{c\beta}t - \Psi)] [e^{-\alpha \cdot t} \sigma(t)] =$$

$$= -\frac{\omega_p}{\omega_{c\beta}} \left\{ \delta(t) \sin \Psi + e^{-\alpha \cdot t} [\omega_{c\beta} \cos(\omega_{c\beta}t - \Psi) - \alpha \sin(\omega_{c\beta}t - \Psi)] \right\} =$$

$$= \delta(t) + \frac{\omega_p^2}{2\omega_{c\beta}} e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{c\beta}t - 2\Psi) \cdot \sigma(t).$$

На рисунке 6.11 изображены временные характеристики последовательного контура

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = -\frac{\omega_p^2}{\omega_{c\beta}} \sin 2\Psi = -2\alpha.$$

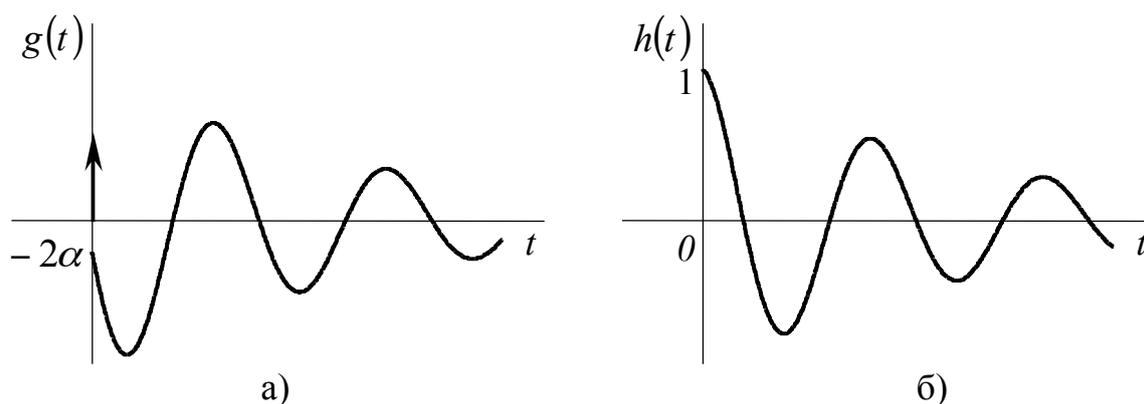


Рисунок 6.11 – Импульсная (а) и переходная (б) характеристики последовательного контура

В таблице 6.5 представлены аналитические выражения передаточных функций и временных характеристик простейших изобразительных цепей.

В таблице 6.6 показаны модули частотных коэффициентов передачи, а также импульсные и переходные характеристики этих же цепей.

## 6.5 Выводы

1. В линейной цепи сигналы подвергаются линейным преобразованиям. Мгновенные значения сигналов на входе и выходе ЛЭЦ связаны между собой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

2. Частотный коэффициент передачи линейной цепи представляет собой дробно-рациональную функцию частоты и может быть определен как отношение комплексной амплитуды гармонического сигнала на выходе к комплексной амплитуде гармонического сигнала на входе ЛЭЦ.

3. Спектральная плотность выходного сигнала является произведением частотного коэффициента передачи и спектральной плотности сигнала на выходе линейной цепи.

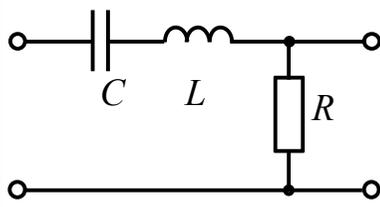
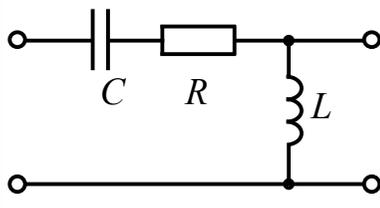
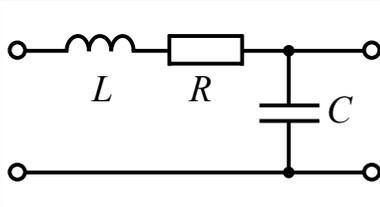
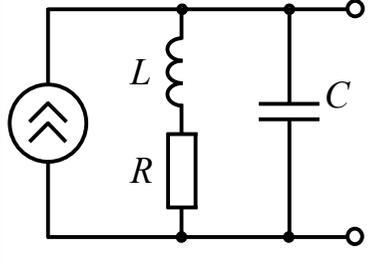
4. Реакция линейной цепи на воздействие дельта-функции (или единичного скачка) называется временной характеристикой ЛЭЦ – импульсной (или переходной).

5. Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика цепи связаны парой преобразований Фурье.

6. Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению электрического равновесия позволяет определить передаточную функцию ЛЭЦ в операторной форме записи.

7. Переход к операционному исчислению существенно упрощает расчеты временных характеристик. Особенно это проявляется при анализе колебательных цепей.

Таблица 6.5 – Передаточные функции и временные характеристики простейших избирательных цепей

	Схема контура	Передаточная функция $K(p)$ , $Z(p)$	Импульсная характеристика	Переходная характеристика
1		$K(p) = \frac{2p\alpha}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$	$g(t) = -\frac{2\alpha\omega_p}{\omega_{св}} \left[ e^{-\alpha \cdot t} \times \sin(\omega_{св}t - \Psi) \right] \cdot \sigma(t)$	$h(t) = \frac{2\alpha}{\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} \sin \omega_{св}t \cdot \sigma(t)$
2		$K(p) = \frac{p^2}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$	$g(t) = \delta(t) + \frac{\omega_p^2}{\omega_{св}} \left[ e^{-\alpha \cdot t} \times \sin(\omega_{св}t - 2\Psi) \right] \cdot \sigma(t)$	$h(t) = \left[ -\frac{\omega_p}{\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} \times \sin(\omega_{св}t - \Psi) \right] \cdot \sigma(t)$
3		$K(p) = \frac{\omega_p^2}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$	$g(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} \sin \omega_{св}t \cdot \sigma(t)$	$h(t) = \left[ 1 - \frac{\omega_p}{\omega_{св}} e^{-\alpha \cdot t} \times \sin(\omega_{св}t + \Psi) \right] \cdot \sigma(t)$
4		$Z(p) = \frac{(p + 2\alpha)/C}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2}$	$g(t) = R_{рез} \frac{2\alpha \cdot \omega_p}{\omega_{св}} \left[ e^{-\alpha \cdot t} \times \sin(\omega_{св}t + \Psi) \right] \cdot \sigma(t)$	$h(t) = R_{рез} \left[ \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q} \frac{\omega_p}{\omega_{св}} \times e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_{св}t + 2\Psi) \right] \cdot \sigma(t)$

Условные обозначения и связь между ними:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad Q = \frac{\omega_p}{2\alpha}, \quad R_{рез} = \frac{Q}{\omega_p C}, \quad \Psi = \arctg\left(\frac{\omega_{св}}{\alpha}\right), \quad \omega_p^2 = \omega_{св}^2 + \alpha^2, \quad \frac{\omega_p}{\omega_{св}} = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}, \quad \frac{\omega_{св}}{\alpha} = \sqrt{4Q^2 - 1}.$$

Таблица 6.6 – Графическое представление частотных и временных характеристик простейших избирательных цепей

	$ \dot{K}(\omega/\omega_p) $ или $ \dot{Z}(\omega/\omega_p) $	$g(t)$	$h(t)$
1			
2			
3			
4			

## 7 ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### 7.1 Анализ прохождения периодических сигналов через линейные цепи (метод комплексных амплитуд)

Периодический сигнал, проходя через ЛЭЦ, не теряет своей периодической природы, поэтому сигналы на входе и выходе линейной цепи можно представить бесконечной суммой непериодических сигналов, сдвинутых друг относительно друга на период:

$$\begin{cases} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_T(t + nT) \\ s_{\text{вых}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{\text{вых}T}(t + nT) \end{cases} \quad (7.1)$$

Применяя для описания сигналов тригонометрическую форму записи ряда Фурье, получим:

$$\begin{cases} s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ s_{\text{вых}}(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right)_{\text{вых}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n_{\text{вых}}} \cos(n\omega_1 t + \varphi_{n_{\text{вых}}}) \end{cases} \quad (7.2)$$

Используем для расчета параметров выходного периодического сигнала метод комплексных амплитуд, считая, что комплексная передаточная функция  $\dot{K}(\omega)$  известна:

$$\dot{K}(n\omega_1) = |\dot{K}(n\omega_1)| \cdot e^{j\varphi(n\omega_1)}. \quad (7.3)$$

Постоянная составляющая на выходе прямо пропорциональна значению коэффициента передачи при  $\omega = 0$ . Амплитуды гармонических колебаний умножаются на значения модуля комплексной передаточной функции на частотах  $\omega = n\omega_1$ . Начальные фазы гармонических колебаний суммируются со значениями фазочастотной характеристики ЛЭЦ на частотах  $\omega = n\omega_1$ .

$$\begin{cases} \left(\frac{a_0}{2}\right)_{\text{вых}} = \frac{a_0}{2} K(0), \\ A_{n_{\text{вых}}} = A_n \cdot |\dot{K}(n\omega_1)|, \\ \varphi_{n_{\text{вых}}} = \varphi_n + \varphi(n\omega_1). \end{cases} \quad (7.4)$$

Периодический сигнал на выходе ЛЭЦ описывается рядом

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{a_0}{2} K(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot |\dot{K}(n\omega_1)| \cdot \cos[n\omega_1 t + \varphi_n + \varphi(n\omega_1)]. \quad (7.5)$$

Частотный метод анализа, использованный в данном случае, позволяет получить ясное представление о том, каким образом изменяется спектр выходного периодического сигнала.

Например, при прохождении периодического сигнала через ФНЧ энергия выходного сигнала будет сосредоточена в низкочастотной области, т.е. происходит увеличение амплитуд гармоник в области нижних частот относительно верхних.

### Пример 7.1

Произведем сравнительный анализ ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов на входе и выходе интегрирующей  $RC$  - цепочки, изображенной на рисунке 7.1.

Сигнал на входе опишем суммой гармонических колебаний общего вида:

$$s(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E\tau}{T} \left| \frac{\sin n\omega_1 \tau/2}{n\omega_1 \tau/2} \right| \cdot \cos(n\omega_1 t - \pi/2) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E \left| \frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \right| \cdot \cos(n\omega_1 t - \pi/2),$$

где  $T \stackrel{\Delta}{=} 2\tau$

Найдем комплексную передаточную функцию  $RC$ -цепи и ее частотные характеристики АЧХ и ФЧХ.

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Полагая  $\omega = n\omega_1$ ,  $\omega_1 RC = 0.5$ , получим:

$$\dot{K}(n\omega_1) = \frac{1}{1 + jn\omega_1 RC} = \frac{1}{1 + j0.5n},$$

$$|\dot{K}(n\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.5n)^2}},$$

$$\varphi(n\omega_1) = -\arctg 0.5n.$$

Сигнал на выходе  $RC$ -цепи определим как сумму гармонических колебаний, амплитуды и начальные фазы которых определяется по формулам (7.4):

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E}{\sqrt{1 + (0.5n)^2}} \cdot \left| \frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \right| \cdot \cos[n\omega_1 t - \pi/2 - \arctg 0.5n].$$

Спектральные диаграммы сигналов на входе и выходе ЛЭЦ изобразим на рисунке 7.1.

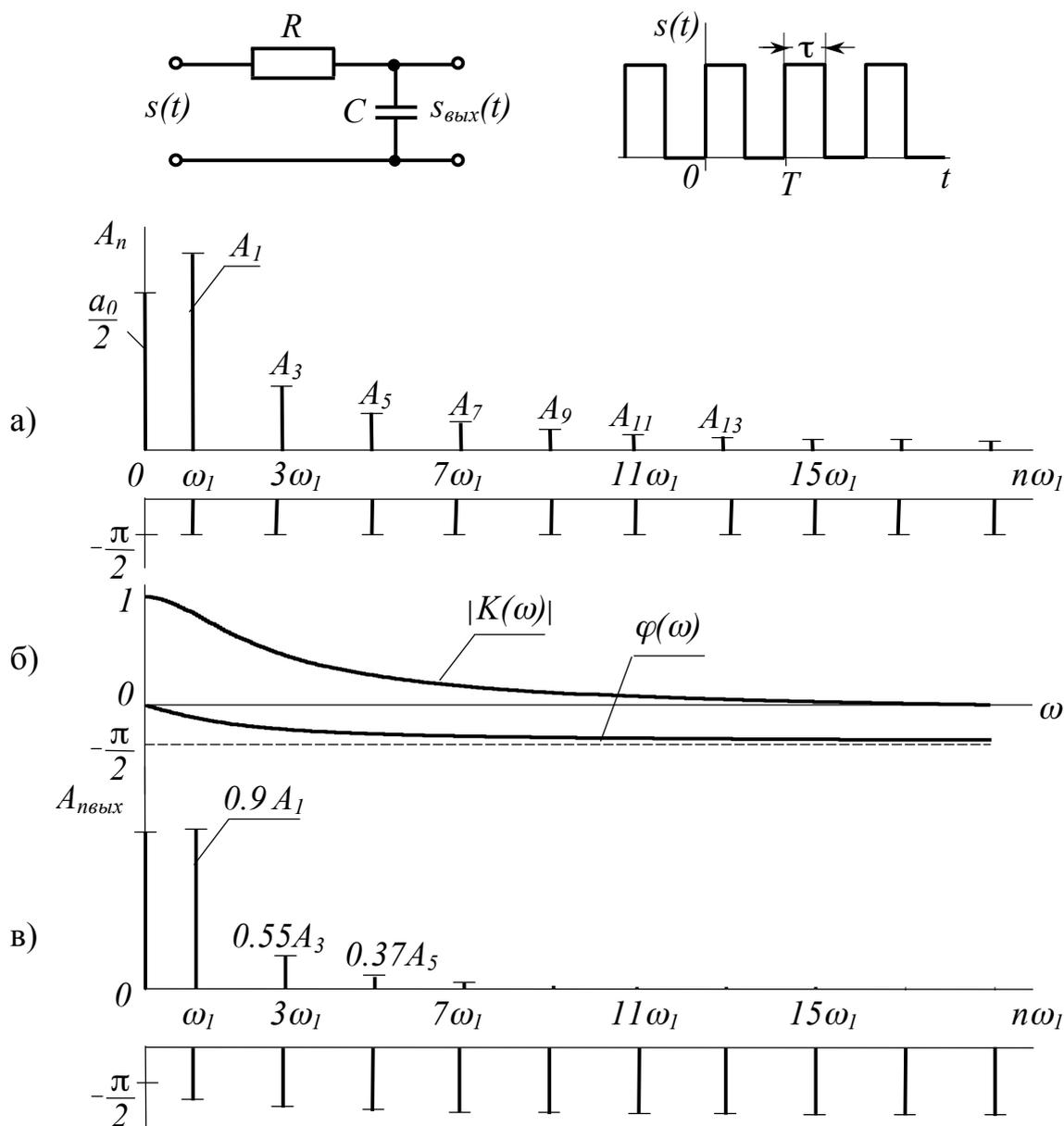


Рисунок 7.1– Прохождение периодического сигнала через ФНЧ:  
 а) спектр прямоугольных импульсов на входе ФНЧ;  
 б) амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики ФНЧ;  
 в) спектр сигнала на выходе ФНЧ

В таблице 7.1 представим численные значения амплитуд гармоник входного и выходного сигналов.

Таблица 7.1–Спектры амплитуд на входе и выходе ЛЭЦ

$n$	1	3	5	7	9	11	13
$A_n$	1	0.333	0.200	0.143	0.111	0.09	0.077
$K(n\omega_1)$	0.9	0.555	0.374	0.275	0.217	0.179	0.155
$A_{n_{\text{вых}}}$	0.9	0.185	0.074	0.039	0.024	0.016	0.012

Сравнивая скорость затухания спектров по таблице 7.1 и оценивая ширину спектра по пороговому критерию, видим, что полоса выходного сигнала приблизительно в три раза меньше полосы входного.

Рассмотренный метод позволяет исследовать качественные и оценить количественные изменения, происходящие в спектре сигнала.

Чтобы изучить изменения формы необходимо выполнить суммирование бесконечного количества гармоник с определенными амплитудами и начальными фазами.

## 7.2 Операторный метод расчета отклика на выходе линейной цепи при произвольном непериодическом воздействии

В основе этого метода лежит проведенная в параграфе 6.2 алгебраизация дифференциального уравнения электрического равновесия с помощью прямого преобразования Лапласа. Возвращаясь к привычным обозначениям сигналов на входе  $s(t)$  и на выходе  $s_{вых}(t)$ , перепишем уравнение (6.14) в виде

$$S_{вых}(p) = S(p) \cdot K(p).$$

Если передаточная функция цепи  $K(p)$  известна, то решение разбивается на 3 этапа:

- 1) расчет изображения входного сигнала  $S(p)$

$$S(p) = L[s(t)];$$

- 2) расчет изображения выходного сигнала  $S_{вых}(p)$

$$S_{вых}(p) = S(p) \cdot K(p);$$

- 3) расчет оригинала отклика на выходе ЛЭЦ

$$s_{вых}(t) = L^{-1}[S(p) \cdot K(p)].$$

Если на входе линейной системы действует произвольный непериодический сигнал, меняющий математическое описание несколько раз, то изображение будет представлять собой сумму изображений элементарных составляющих.

При исследовании прохождения сигналов через линейные системы следует помнить о принципе суперпозиции или о принципе независимости действия. Согласно этому принципу, входной сигнал сложной формы можно представлять суммой элементарных воздействий и определять отклик на каждое элементарное воздействие отдельно. Суммирование элементарных откликов даст выходной сигнал.

Следовательно, входной сигнал целесообразно разбивать на элементарные составляющие. Умножение изображения элементарной составляющей входного сигнала  $S_i(p)$  на передаточную функцию линейной цепи  $K(p)$  позволяет определить изображение элементарной составляющей выходного сигнала  $S_{iвых}(p)$ .

Обратное преобразование Лапласа позволит перейти от изображения элемента выходного сигнала к оригиналу.

$$s_{i\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\cdot\infty}^{c+j\cdot\infty} S_i(p) \cdot K(p) \cdot e^{pt} dp.$$

### Пример 7.2

На вход цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления  $R$  и емкости  $C$ , подается непериодический сигнал треугольной формы, изображенный на рисунке 7.2.

Определим аналитическое выражение напряжения на емкости при выполнении условий ( $\alpha\tau = 0.25, 1, 4$ ), где  $\alpha = \frac{1}{RC}$ .

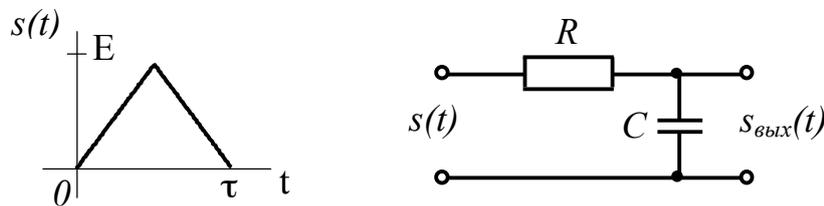


Рисунок 7.2

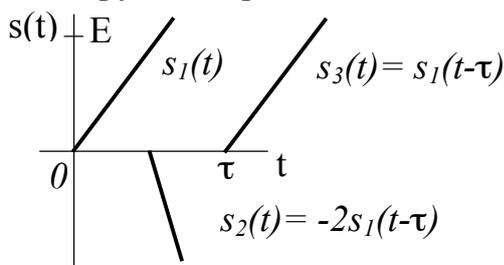
Аналитическое описание сигнала, изображенного на рисунке 6.5, представляет собой следующее выражение:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} \cdot t, & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \frac{2E}{T} \cdot (t - \tau), & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases}$$

Изображение входного сигнала по Лапласу найдем, применяя ППЛ.

$$S(p) = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2E}{\tau} \cdot t \cdot e^{-pt} dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{2E}{T} \cdot (t - \tau) \cdot e^{-pt} dt = \frac{2E}{\tau} \frac{1}{p^2} \cdot (1 - 2e^{-\frac{p\tau}{2}} + e^{-p\tau}).$$

Анализ изображения показывает, что входной сигнал можно представить взвешенной суммой трех одинаковых сигналов, сдвинутых друг относительно друга во времени.



$$\text{Здесь: } s_1(t) = \frac{E}{T} t \sigma(t);$$

$$s_2(t) = -\frac{2E}{T} (t - \tau/2) \sigma(t - \tau/2);$$

$$s_3(t) = \frac{E}{T} (t - \tau) \sigma(t - \tau).$$

Рисунок 7.3 – Разложение треугольного сигнала на элементарные составляющие

Выполним поинтервальное описание входного сигнала с помощью элементарных составляющих

$$S(t) = \begin{cases} S_1(t), & 0 \leq t < \tau/2, \\ S_1(t) - 2S_1(t - \tau/2), & \tau/2 \leq t < \tau, \\ S_1(t) - 2S_1(t - \tau/2) + S_1(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Определим передаточную функцию линейной цепи.

$$K(p) = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \text{ где } \alpha = 1/RC.$$

Определим изображение элементарного выходного сигнала  $S_{\text{вых}1}(p)$ :

$$S_{\text{вых}1}(p) = S_1(p) \cdot K(p),$$

$$S_{\text{вых}1}(p) = \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

Определим элементарный отклик.

$$s_{\text{вых}1}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2 \cdot (p + \alpha)} \cdot e^{p \cdot t} dt = \sum_{j=1}^2 \text{Res } j.$$

Подынтегральное выражение содержит две особые точки, называемые полюсами:

$$p^2 \cdot (p + \alpha) = 0,$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\alpha,$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 1.$$

Первый полюс  $p_1 = 0$  имеет кратность  $k_1 = 2$ , второй полюс  $p_2 = -\alpha$  — простой, т.е. кратность его равна 1. Определим вычеты в двух точках:

$$\text{Res}_1 = \lim_{p_1=0} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dp} \left[ \frac{2 \cdot E \cdot \alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2 \cdot (p + \alpha)} \cdot (p - p_1)^2 \cdot e^{p \cdot t} \right] =$$

$$= \frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{d}{dp} \left[ \frac{e^{p \cdot t}}{p + \alpha} \right] = \frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \left[ \frac{t \cdot e^{p \cdot t} \cdot (p + \alpha) - e^{p \cdot t}}{(p + \alpha)^2} \right] \Big|_{p_1=0} = \frac{2E}{\alpha \tau} (\alpha t - 1), t \geq 0;$$

$$\text{Res}_2 = \lim_{p_2=-\alpha} \left[ \frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2 \cdot (p + \alpha)} \cdot (p - p_2) \cdot e^{p \cdot t} \right] = \frac{2 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-\alpha t}, t \geq 0.$$

Суммируя вычеты, получим

$$s_{\text{вых}1}(t) = \text{Res}_1 + \text{Res}_2 = \frac{2 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot \left[ \alpha \cdot t - (1 - e^{-\alpha t}) \right], t \geq 0.$$

Выполним математическое описание отклика с помощью функции Хевисайда.

$$s_{\text{вх1}}(t) = \frac{2 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot \left[ \alpha \cdot t - (1 - e^{-\alpha \cdot t}) \right] \cdot \sigma(t).$$

Поинтервальное представление суммарного отклика запишем, применяя взвешенное суммирование и сдвиг во времени.

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} s_{\text{вх1}}(t) & , 0 \leq t \leq \tau/2 \\ s_{\text{вх1}}(t) - 2 \cdot s_{\text{вх1}}(t - \tau/2) & , \tau/2 \leq t \leq \tau \\ s_{\text{вх1}}(t) - 2 \cdot s_{\text{вх1}}(t - \tau/2) + s_{\text{вх1}}(t - \tau) & , t \geq \tau \end{cases}$$

Переходя к аналитическим выражениям и проведя преобразования, получим:

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot \left[ \alpha \cdot t - (1 - e^{-\alpha \cdot t}) \right], 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \frac{2 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot \left[ 1 - \alpha \cdot (t - \tau) + (1 - 2e^{\alpha \cdot \frac{\tau}{2}}) e^{-\alpha \cdot t} \right], \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \\ \frac{8 \cdot E}{\alpha \cdot \tau} \cdot \left[ sh^2 \frac{\alpha \tau}{4} \cdot e^{-\alpha \cdot \frac{\tau}{2}} \right] e^{-\alpha \cdot (t - \tau)}, t \geq \tau \end{cases}$$

Анализ рисунка 7.4 показывает, что если постоянная времени цепи много меньше длительности импульса, то напряжение на емкости повторяет напряжение на входе (цепь не искажает). Если постоянная времени цепи много больше длительности импульса, то цепь сглаживает быстрые изменения входного сигнала (т.е. интегрирует).

Важно помнить, что сигнал на выходе линейной цепи содержит вынужденную и свободную компоненты.

Вынужденная компонента равна сумме вычетов относительно полюсов изображения входного сигнала  $S(p)$ .

Свободная компонента равна сумме вычетов относительно полюсов передаточной функции цепи  $K(p)$ .

При расчете отклика цепи после окончания действия входного импульсного сигнала полезно учесть, что вынужденная компонента равна нулю, а свободная компонента определяется полюсами передаточной функции цепи.

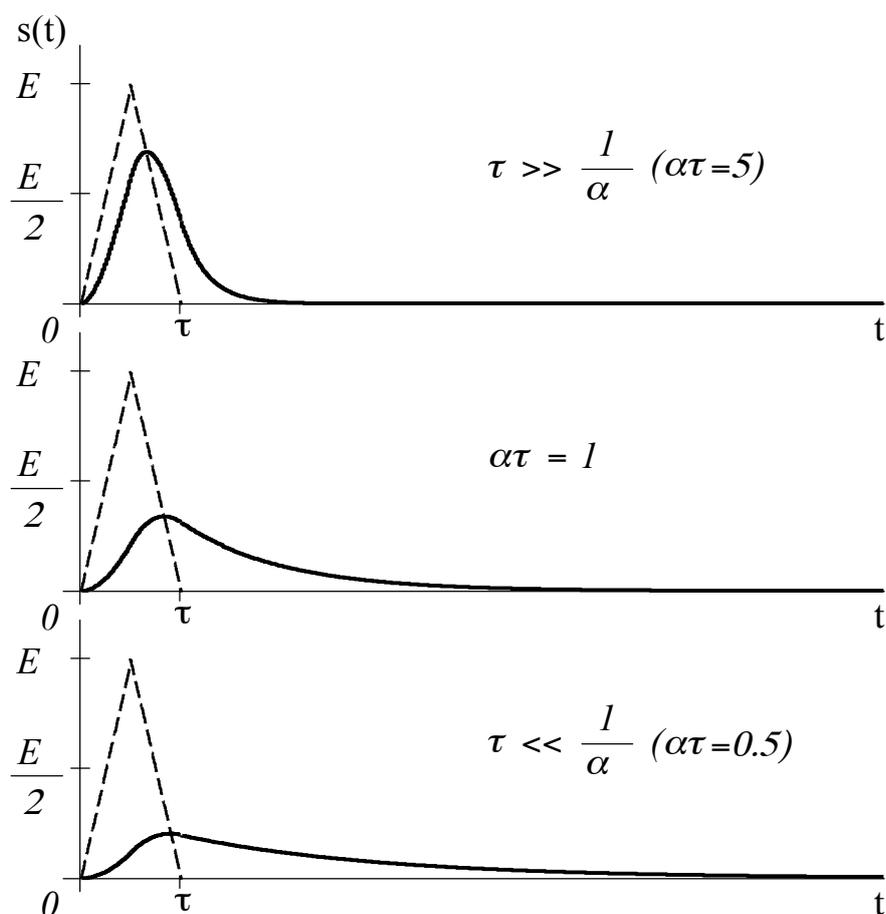


Рисунок 7.4 – Варианты откликов при различных соотношениях между длительностью импульса и постоянной времени цепи

### Пример 7.3

В условиях примера 7.2 определить напряжение на емкости при  $t \geq \tau$

1) Изображение входного импульсного сигнала преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 S(p) &= \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2} \left( e^{\frac{p\tau}{2}} - 2 + e^{-\frac{p\tau}{2}} \right) e^{-\frac{p\tau}{2}} = \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2} \left( e^{\frac{p\tau}{4}} - e^{-\frac{p\tau}{4}} \right) e^{-\frac{p\tau}{2}} = \\
 &= \frac{E\tau}{2} \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{p\tau}{4}}{\frac{p\tau}{4}} \right)^2 e^{-\frac{p\tau}{2}}.
 \end{aligned}$$

2) Изображение сигнала на выходе цепи  $S_{\text{вых}}(p)$  равно

$$S_{\text{вых}}(p) = \frac{E\tau}{2} \left( \frac{\text{sh} \frac{p\tau}{4}}{\frac{p\tau}{4}} \right)^2 e^{-\frac{p\tau}{2}} \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

3) Отклик цепи после окончания действия входного сигнала равен вычету в точке  $p_1 = -\alpha$ .

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t) &= L^{-1}[S_{\text{вых}}(p)] = \text{Re } s_{p_1 = -\alpha} = \\ &= \lim_{p_1 = -\alpha} \left[ \frac{E\tau}{2} \left( \frac{\text{sh} \frac{p\tau}{4}}{\frac{p\tau}{4}} \right)^2 e^{-\frac{p\tau}{2}} \cdot \frac{\alpha \cdot (p + \alpha)}{(p + \alpha)} e^{pt} \right] = E \frac{\alpha\tau}{2} \left( \frac{\text{sh} \frac{\alpha\tau}{4}}{\frac{\alpha\tau}{4}} \right)^2 e^{\frac{\alpha\tau}{2}} e^{-\alpha t}, \\ s_{\text{вых}}(t) &= \left[ \frac{8E}{\alpha\tau} \text{sh}^2 \frac{\alpha\tau}{4} e^{-\alpha\tau/2} \right] e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \end{aligned}$$

Анализ полученного выражения показывает, что после окончания входного сигнала отклик цепи содержит только свободную составляющую, которая представляет разряд емкости через сопротивление.

### 7.3 Операторный метод определения установившейся реакции линейной цепи на включение периодического сигнала

Одностороннее входное воздействие  $s(t)$  описывается бесконечной суммой непериодических сигналов  $s_T(t)$ , сдвинутых друг относительно друга на интервал времени, кратный периоду.

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_T(t - nT). \quad (7.6)$$

Применим прямое преобразование Лапласа к входной последовательности и, сворачивая геометрическую прогрессию, получим

$$\begin{aligned} S(p) &= L[s(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} L[s_T(t)] \cdot e^{-npT} = \\ &= S_T(p) \cdot \left[ 1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-npT} + \dots \right], \\ S(p) &= S_T(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Изображение выходного сигнала равно произведению изображения входного сигнала  $S(p)$  и передаточной функции цепи  $K(p)$ .

$$S_{вых}(p) = \frac{S_T(p)}{1 - e^{-pT}} \cdot K(p). \quad (7.8)$$

Полная реакция цепи на включение периодической последовательности представляет собой сумму вынужденной (установившейся) компоненты и свободной составляющей.

$$s_{вых}(t) = L^{-1} \left[ \frac{S_T(p)}{1 - e^{-pT}} \cdot K(p) \right] = s_{уст}(t) + s_{св}(t). \quad (7.9)$$

Вынужденная компонента  $s_{уст}(t)$  равна сумме вычетов относительно полюсов, содержащихся в изображении входного воздействия  $S_T(p) / (1 - e^{-pT})$ .

Свободная составляющая  $s_{св}(t)$  равна сумме вычетов относительно полюсов передаточной функции цепи  $K(p)$ .

Число полюсов изображения входного воздействия бесконечно велико, так как уравнению  $1 - e^{-pT} = 0$  соответствует бесконечное множество корней:  $p_n = jn2\pi/T$  (где  $n$  - целые числа).

Бесконечная сумма вычетов – не что иное как комплексный ряд Фурье, который свидетельствует о периодическом характере установившейся компоненты выходного сигнала.

Важно понимать, что свободная составляющая  $s_{св}(t)$  представляет собой затухающую функцию времени, так как реальная линейная цепь имеет потери. Установившаяся компонента  $s_{уст}(t)$  представляет собой периодическую функцию времени, и ее форма не меняется от периода к периоду, т.е.

$$s_{уст}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{Tуст}(t - nT), \quad (7.10)$$

где  $s_{Tуст}(t)$  - описание установившегося решения на периоде.

На рисунке 7.5 изображены модели входной периодической последовательности  $s(t)$ , полной реакции цепи  $s_{вых}(t)$ , а также двух составляющих полного отклика: свободной  $s_{св}(t)$  и вынужденной (или установившейся)  $s_{уст}(t)$ .

Полная реакция цепи на любом периоде, начиная с первого, содержит установившуюся компоненту и свободную составляющую.

$$s_{вых I}(t) = s_{Tуст}(t) + s_{св}(t). \quad (7.11)$$

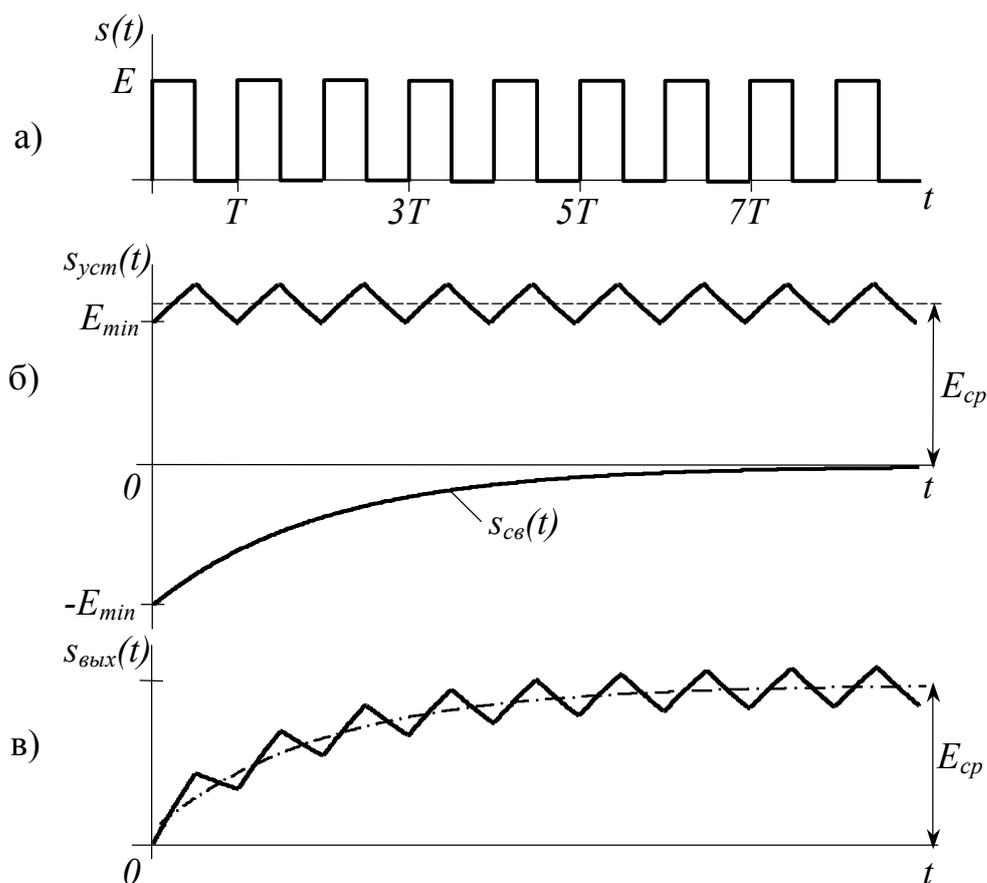


Рисунок 7.5 – Графическое представление входного (а) и выходного (в) сигналов, а также свободной и вынужденной (б) составляющих отклика

Поэтому описание установившейся компоненты на любом периоде можно получить путем вычитания свободной составляющей из полной реакции цепи на прохождение первого же непериодического сигнала  $s_T(t)$  из входной периодической последовательности  $s(t)$ :

$$s_{T \text{ усн}}(t) = s_{\text{вых}1}(t) - s_{\text{св}}(t); \quad (7.12)$$

$$s_{\text{вых}1}(t) = L^{-1}[S_T(p) \cdot K(p)]; \quad (7.13)$$

$$s_{\text{св}}(t) = \sum_{m=1}^M \text{Re} s_m = Z^{-1} \left[ \frac{S_T(p)}{1 - e^{-pT}} \cdot K(p) \right], \quad (7.14)$$

где  $M$  - количество полюсов передаточной функции  $K(p)$ .

#### Пример 7.4

Расчет установившейся реакции при включении периодической последовательности прямоугольных импульсов на вход  $RC$ -цепи (рисунок 7.6), передаточная функция которой равна  $K(p) = \alpha / (p + \alpha)$ .

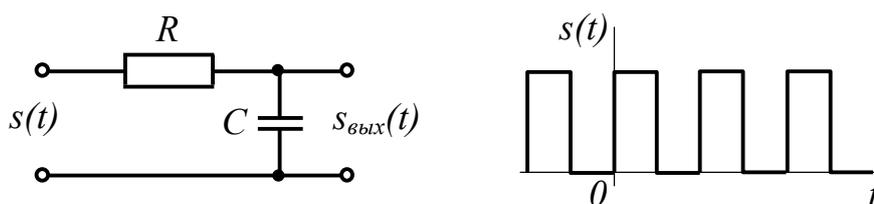


Рисунок 7.6

1) Выполняем математическое описание входного сигнала

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_T(t - nT), \text{ где } s_T(t) = E[\sigma(t) - \sigma(t - \tau)].$$

2) Определяем изображение первого одиночного импульса  $s_T(t)$

$$S_T(p) = L[s_T(t)] = \int_0^{\tau} E \cdot e^{-pt} dt = \frac{E}{p} \cdot (1 - e^{-p\tau}).$$

3) Определяем изображение первого одиночного импульса на выходе цепи

$$S_{\text{вых}}(p) = \frac{E}{p} \cdot (1 - e^{-p\tau}) \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

4) Определяем полную реакцию цепи  $s_{\text{вых}1}(t)$  на прохождение первого одиночного импульса

$$S_{\text{вых}1}(t) = \begin{cases} L^{-1}\left[\frac{E\alpha}{p(p+\alpha)}\right] = E(1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t \leq \tau \\ L^{-1}\left[\frac{E\alpha(1 - e^{-p\tau})}{p(p+\alpha)}\right] = E[1 - e^{\alpha\tau}]e^{-\alpha t}, & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

5) Определяем изображение периодической последовательности импульсов

$$S(p) = L\left[\sum_{n=0}^{\infty} s_T(t - nT)\right] = S_T(p) \cdot (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots),$$

$$S(p) = S_T(p) \cdot \frac{1}{(1 - e^{-pT})} = \frac{E}{p} \cdot \frac{(1 - e^{-p\tau})}{(1 - e^{-pT})}.$$

6) Определяем изображение периодической последовательности на выходе ЛЭЦ

$$S_{\text{вых}}(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{(1 - e^{-p\tau})}{(1 - e^{-pT})} \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

7) Определяем свободную составляющую отклика на выходе ЛЭЦ

$$s_{\text{св}}(t) = L^{-1} \left[ \frac{E}{p} \cdot \frac{(1 - e^{-p\tau})}{(1 - e^{-pT})} \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha} \right] = \operatorname{Re} s_1 \Big|_{p_1 = -\alpha},$$

$$s_{\text{св}}(t) = -E \cdot \frac{(1 - e^{\alpha\tau})}{(1 - e^{\alpha T})} \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Полагая  $\tau = T/2$ ,  $\alpha T = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha\tau = \frac{1}{4}$ , получим  $s_{\text{св}}(t) = -0.438Ee^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$

8) Определяем установившуюся реакцию  $s_{T \text{ усм}}(t)$  на периоде

$$s_{T \text{ усм}}(t) = s_{\text{вых}}(t) - s_{\text{св}}(t),$$

$$s_{T \text{ усм}}(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-\alpha t}) + 0.438Ee^{-\alpha t} = E(1 - 0.562e^{-\alpha t}), & 0 \leq t \leq T/2 \\ E(1 - e^{\alpha\tau} + 0.438)e^{-\alpha t} = 0.562E \cdot e^{-\alpha(t - T/2)}, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

9) Определяем минимальное, максимальное и среднее значение установившегося режима:

$$E_{\min} = 0.438E, \quad E_{\max} = 0.562E, \quad E_{\text{ср}} = 0.5E.$$

## 7.4 Временные методы анализа (интегралы Дюамеля)

### 7.4.1 Операторный подход

Сигнал на выходе ЛЭЦ может быть найден в результате применения обратного преобразования Лапласа к произведению изображения сигнала  $S(p)$  и передаточной функции цепи  $K(p)$ , что соответствует свертке оригиналов во времени.

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c - j\infty}^{c + j\infty} S(p)K(p)e^{pt} dp = s(t) \otimes g(t). \quad (7.15)$$

Разделив и умножив подынтегральное выражение на  $p$ , получим:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c - j\infty}^{c + j\infty} S(p) \frac{K(p)}{p} \cdot p \cdot e^{pt} dp = \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)H(p) \cdot p \cdot e^{pt} dp,$$

где  $H(p)$ - изображение переходной характеристики.

Множитель  $p$  может быть отнесен либо к  $S(p)$ , либо к  $H(p)$ . Следовательно, при сворачивании дифференцируется любой из оригиналов  $s(t)$  или  $h(t)$ .

$$s_{\text{вых}}(t) = s'(t) \otimes h(t) = s(t) \otimes h'(t). \quad (7.17)$$

Учитывая односторонность временных характеристик ЛЭЦ, запишем интегралы свертки в виде:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t s(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t s(t-\tau)g(\tau)d\tau; \quad (7.18)$$

$$s_{\text{вых}}(t) = s(0)h(t) + \int_0^t s'(\tau)h(t-\tau)d\tau = s(0)h(t) + \int_0^t s'(t-\tau)h(\tau)d\tau, \quad (7.19)$$

где  $s(0) = \lim_{t \rightarrow +0} s(t)$ ;

$$s_{\text{вых}}(t) = s(t)h(0) + \int_0^t s(\tau)h'(t-\tau)d\tau = s(t)h(0) + \int_0^t s(t-\tau)h'(\tau)d\tau, \quad (7.20)$$

где  $h(0) = \lim_{t \rightarrow +0} h(t)$ .

В выражениях (7.19) и (7.20) функции  $s(t)$  и  $h(t)$  аналитичны во всех точках при  $0 < t < \infty$ , кроме  $t = 0$ . Ненулевые начальные условия приводят к появлению дополнительных слагаемых в уравнении (7.19) и (7.20).

#### 7.4.2 Временной подход

Динамическим представлением называется описание произвольного сигнала с помощью обобщенных функций (глава 1, п.1). Различают две разновидности динамического представления.

В первом случае входной сигнал представляется совокупностью (интегральной суммой) прямоугольных импульсов длительностью  $d\tau$ , возникающих в последовательные моменты времени  $\tau$ , причем амплитуды импульсов пропорциональны мгновенным значениям входного сигнала  $s(\tau)$  в эти моменты времени.

$$s(t) = \int_0^t s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \quad (7.21)$$

Во втором случае входной сигнал представляется интегральной суммой ступенчатых функций (единичных скачков), возникающих через равные моменты времени  $d\tau$ . Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на интервале  $d\tau$ , которое определяется скоростью изменения входного сигнала.

$$s(t) = s(0)\sigma(t) + \int_0^t s'(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau. \quad (7.22)$$

Подобное интегральное описание сигналов называют динамическим представлением, т.к. оно позволяет подчеркнуть развивающийся во времени характер сигнала.

В линейной цепи интегральная сумма дельта - функций преобразуется в интегральную сумму импульсных характеристик цепи с теми же коэффициентами пропорциональности.

$$s_{\text{вх}}(t) = \int_0^t s(\tau)\gamma(t - \tau)d\tau. \quad (7.23)$$

Интегральная сумма ступенчатых функций в линейной цепи преобразуется в интегральную сумму переходных характеристик цепи с теми же размерами ступеней.

$$s_{\text{вх}}(t) = s(0)h(t) + \int_0^t s'(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (7.24)$$

Произведя замену переменных, формулы (7.23) и (7.24) можно преобразовать к виду:

$$s_{\text{вх}}(t) = \int_0^t s(t - \tau)\gamma(\tau)d\tau; \quad (7.25)$$

$$s_{\text{вх}}(t) = s(0)h(t) + \int_0^t s'(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (7.26)$$

Применение формул Дюамеля для расчета отклика цепи не вызывает затруднений в том случае, если входной сигнал не меняет аналитического описания на интервале от некоторого начального момента времени до бесконечности.

Рекомендуется следующий порядок расчета сигнала на выходе линейной цепи методом временного интегрирования.

Вначале, пользуясь известными методами, рассчитывают передаточную функцию цепи, переходную и импульсную характеристики. При выборе формулы временного интегрирования исходят, как правило, из возможности достижения результата наиболее простым путем, при этом анализируют свойства сигнала и временных характеристик линейной цепи.

Затем выбирают расчетную формулу, уяснив смысл входящих в нее выражений. Выявляют “механизм работы” данной формулы, увязывая вид временного представления воздействия с нужной временной характеристикой цепи. И, наконец, вычисляют отклик цепи.

Если входной сигнал меняет аналитическое описание на интервале представления, то возникает необходимость в наложении решений. Наложение решений может быть выполнено двумя способами.

Во-первых, можно разложить входной сигнал на элементарные составляющие, каждая из которых не меняет аналитическое описание на интервале от момента включения и до бесконечности. Затем найти отклик на каждую составляющую и, наложив решения, составить поинтервальное описание выходного сигнала.

Во-вторых, можно, составив поинтервальное описание входного сигнала, находить выходной сигнал сначала на первом интервале, затем на втором интервале, накладывая на него решение, полученное на первом, затем на третьем интервале, накладывая на него решения, полученные на первом и втором, и так далее.

Подобную методику наложения рассмотрим на примере. Составим математическую модель реакции цепи, переходная характеристика которой равна  $h(t)$ .

Внешнее воздействие задается функцией, графическое представление которой изображено на рисунке 7.7.

При  $t < 0$  отклик цепи равен нулю, т.к. реакция не может опережать воздействие.

На интервале  $0 < t < t_1$  функция  $s_1(t)$  непрерывна, поэтому реакция цепи находится непосредственно по формуле (7.24) с учетом ненулевых начальных условий:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t [s_1(0)\delta(\tau) + s'_1(\tau)]h(t-\tau)d\tau = s_1(0)h(t) + \int_0^t s'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где  $0 \leq t \leq t_1$ .

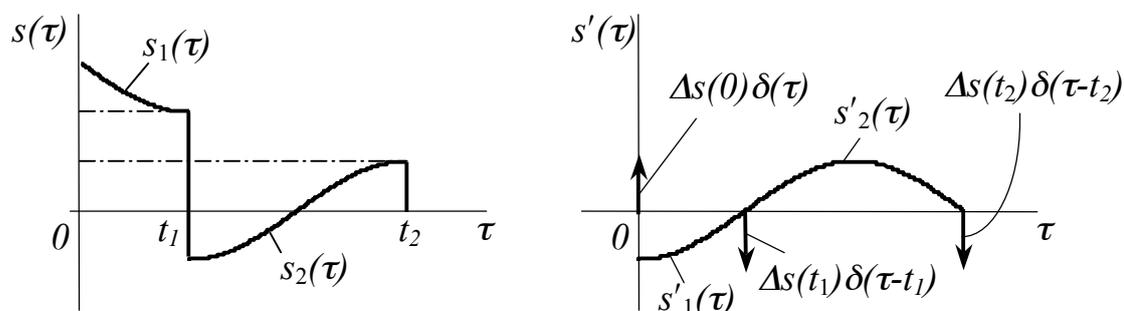


Рисунок 7.7—Произвольный сигнал  $s(t)$  и его производная  $s'(t)$  с параметрами:  $\Delta s(0) = s_1(0)$ ,  $\Delta s(t_1) = s_2(t_1) - s_1(t_1)$ ,  $\Delta s(t_2) = -s_2(t_2)$

На интервале  $t_1 < t < t_2$  сигнал  $s(t)$  задан функцией  $s_2(t)$ . В точке  $t = t_1$  имеет место разрыв сигнала  $s(t)$ , величина которого равна  $[s_2(t_1) - s_1(t_1)]$ .

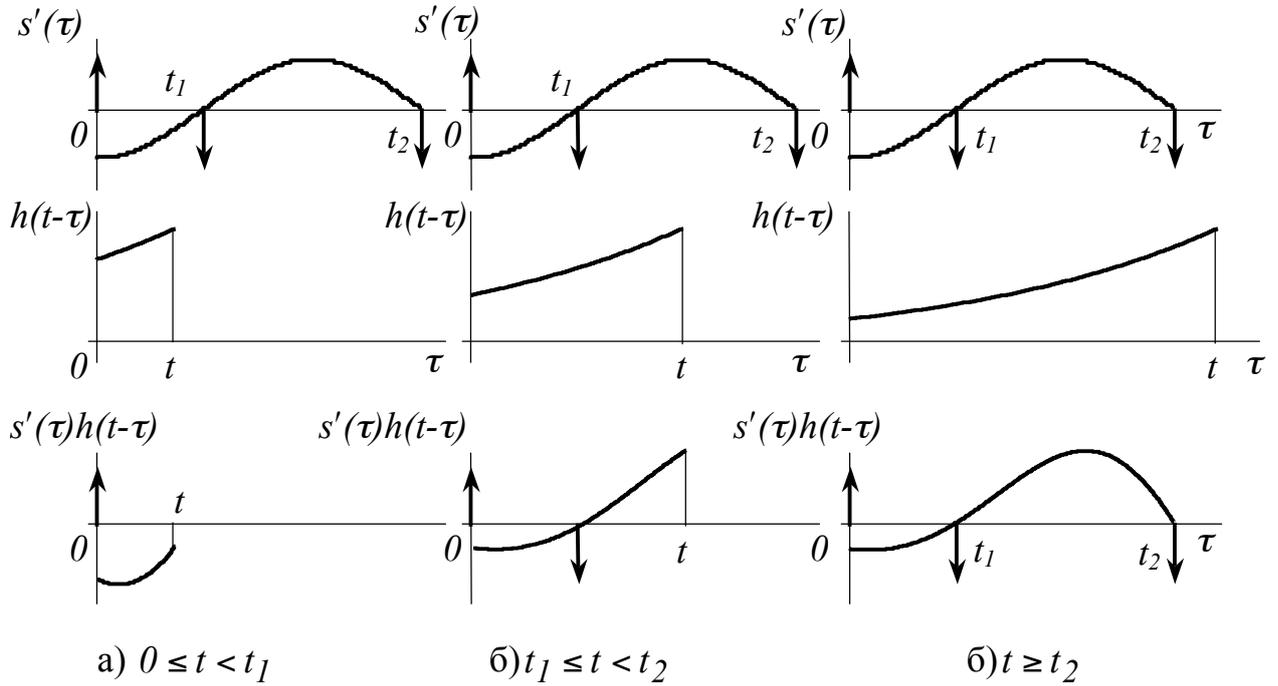


Рисунок 7.8 – Взаимодействия производной сигнала  $s'(t)$  и переходной характеристики  $h(t)$  в процессе прохождения сигнала через ЛЭЦ

Для расчета отклика на интервале  $t_1 < t < t_2$  разбиваем интервал интегрирования  $[0, t]$  на два промежутка:  $[0, t_1]$  и  $[t_1, t]$ . С учетом реакции на два разрыва получим:

$$s_{\text{вых}}(t) = s_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} [s'_1(\tau)]h(t-\tau)d\tau + \\ + [(s_2(t_1) - s_1(t_1))]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t [s'_2(\tau)]h(t-\tau)d\tau.$$

При расчете отклика на интервале  $t \geq t_2$  следует учитывать, что в интервал интегрирования попадает еще один разрыв  $s(t)$  в точке  $t = t_2$ , величина которого равна  $[0 - s_2(t_2)]$ .

$$s_{\text{вых}}(t) = s_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} s'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + [s_2(t_1) - s_1(t_1)]h(t-t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} s'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau + [0 - s_2(t_2)]h(t-t_2), \quad t \geq t_2.$$

На рисунке 7.8 представлена графическая интерпретация процесса наложения решений.

### Пример 7.5

Применяя формулы интегрирования Дюамеля, рассчитать прохождение сигнала, изображенного на рисунке 7.9, через дифференцирующую  $RC$  – цепь. Передаточная функция и временные характеристики анализируемой цепи приведены в таблице 6.3.

$$K(p) = \frac{p}{p + \alpha}, \quad h(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t), \quad g(t) = -\alpha e^{-\alpha t} \sigma(t) + \delta(t).$$

Рассмотрим первый способ наложения решений. Для этого представим данный сигнал суммой элементарных составляющих:

$$s(t) = \frac{E}{T} t \sigma(t) - \frac{E}{T} (t - T) \sigma(t - T).$$

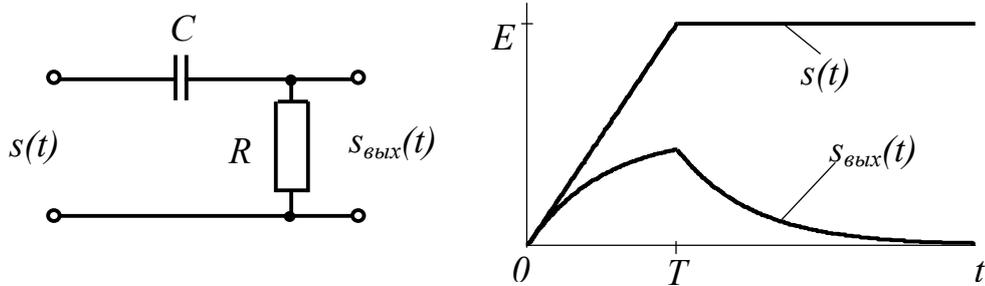


Рисунок 7.9

Для расчета отклика цепи на воздействие первой составляющей целесообразно воспользоваться формулой (7.19), т.к. дифференцирование сигнала приводит к упрощению выражения, а именно:

$$s_{\text{вых}1}(t) = \int_0^t \left[ \frac{E}{T} \tau \right]' e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{E}{T} e^{-\alpha t} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \Big|_0^t \right] = \frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha t}), \quad t \geq 0.$$

Вторая составляющая воздействия отличается знаком и сдвинута на интервал времени  $T$ , поэтому без расчета записываем вторую составляющую отклика

$$s_{\text{вых}2}(t) = -\frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha(t-T)}), \quad t \geq T.$$

Объединяя решения, составляем поинтервальное описание выходного сигнала:

$$s_{\text{вых}}(t) = \begin{cases} s_{\text{вых}1}(t) = \frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t \leq T, \\ s_{\text{вых}1}(t) + s_{\text{вых}2}(t) = \frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha t}) e^{-\alpha(t-T)}, & t \geq T. \end{cases}$$

Рассмотрим второй способ наложения решений. Для этого воспользуемся поинтервальным описанием входного воздействия.

$$s(t) = \begin{cases} \frac{E}{T}t, & 0 \leq t \leq T \\ E, & t \geq T \end{cases}$$

Учитывая нулевые начальные условия, определяем отклик на интервале времени  $0 \leq t \leq T$ .

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t \left[ \frac{E}{T} \tau \right]' e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \frac{E}{T} e^{-\alpha t} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \Big|_0^t \right] = \frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha t}), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Рассчитываем отклик на интервале времени  $t \geq T$ .

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^T \left[ \frac{E}{T} \tau \right]' e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \int_T^t (E)' e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq T.$$

Второе слагаемое в условиях этой задачи равно нулю, поэтому

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{E}{T} e^{-\alpha t} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \Big|_0^T \right] = \frac{E}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha(t-T)}, \quad t \geq T.$$

Таким образом, решение задач методами временного интегрирования позволяет получить результат более коротким путем.

## 7.5 Практическое приложение к седьмой главе

### 7.5.1 Расчет реакции дифференцирующей $RC$ -цепи на включение гармонического сигнала

Расчет реакции дифференцирующей  $RC$ -цепи на включение гармонического сигнала

$$s(t) = A_0 \sigma(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

1) Определяем изображение входного сигнала.

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^{\infty} A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} A_0 \cos \varphi_0 \cos \omega_0 t \cdot e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} A_0 \sin \varphi_0 \sin \omega_0 t \cdot e^{-pt} dt = A_0 \frac{p \cos \varphi_0 - \omega_0 \sin \varphi_0}{p^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

2) Находим передаточную функцию дифференцирующей  $RC$ -цепи

$$K(p) = \frac{R}{R + 1/pC} = \frac{p}{p + 1/\tau},$$

где  $\tau = RC$ .

3) Рассчитываем изображение сигнала на выходе цепи

$$S_{\text{вых}}(p) = S(p) \cdot K(p).$$

4. Определяем оригинал (отклик цепи на гармоническое воздействие)

$$s_{\text{вых}}(t) = L^{-1} \left[ A_0 \frac{(p \cos \varphi_0 - \omega_0 \sin \varphi_0)}{(p^2 + \omega_0^2)} \cdot \frac{p}{(p + 1/\tau)} \right].$$

Приравнивая нулю знаменатель, находим полюса

$$\begin{aligned} (p^2 + \omega_0^2)(p + 1/\tau) &= 0, \\ p^2 + \omega_0^2 &= 0, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0, \\ p + 1/\tau &= 0, \quad p_3 = -1/\tau. \end{aligned}$$

Решение представляет собой сумму трех вычетов, два из которых представляют собой комплексно – сопряженные функции, т.е.

$$s_{\text{вых}}(t) = \text{Re} s_1 + \text{Re} s_2 + \text{Re} s_3 = 2 \text{Re}[\text{Re} s_1] + \text{Re} s_3.$$

С другой стороны, выходной сигнал равен сумме свободной и вынужденной составляющих

$$s_{\text{вых}}(t) = s_{\text{усл}}(t) + s_{\text{св}}(t),$$

где  $s_{\text{усл}}(t) = 2 \text{Re}[\text{Re} s_1]$ ,  $s_{\text{св}}(t) = \text{Re} s_3$ .

Расчет вынужденной составляющей отклика

$$\begin{aligned} \text{Re} s_1 &= \lim_{p=p_1=j\omega_0} \left[ A_0 \frac{(p \cos \varphi_0 - \omega_0 \sin \varphi_0)}{(p - j\omega_0)(p + j\omega_0)} \cdot \frac{p}{(p + 1/\tau)} (p - j\omega_0) e^{pt} \right] = \\ &= A_0 \frac{j\omega_0 \cos \varphi_0 - \omega_0 \sin \varphi_0}{2j\omega_0} \cdot \frac{j\omega_0}{(j\omega_0 + 1/\tau)} e^{j\omega_0 t} = \\ &= A_0 \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega_0^2 + (1/\tau)^2}} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2 - \Psi)}, \end{aligned}$$

где  $\Psi = \arctg \omega_0 \tau$ ;

$$s_{\text{усл}}(t) = -A_0 \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + (1/\tau)^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_0 - \Psi).$$

Получили вынужденную (установившуюся) составляющую отклика, расчет которой можно проверить методом комплексных амплитуд:

$$s(t) = \operatorname{Re} A_o e^{j\varphi_o} e^{j\omega_o t};$$

$$\dot{K}(\omega = \omega_o) = \frac{j\omega_o}{j\omega_o + 1/\tau} = \frac{\omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 + (1/\tau)^2}} e^{j(\pi/2 - \Psi)};$$

$$\dot{A}_{\text{вых}} = \frac{A_o \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 + (1/\tau)^2}} e^{j(\pi/2 + \varphi_o - \Psi)};$$

$$s_{\text{учм}}(t) = -\frac{A_o \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 + (1/\tau)^2}} \sin(\omega_o t + \varphi_o - \Psi).$$

Расчет свободной составляющей отклика.

$$s_{\text{св}}(t) = \operatorname{Re} s_3 = \lim_{p=p_3=-1/\tau} \left[ A_o \frac{(p \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o)}{(p^2 + \omega_o^2)} \frac{p}{(p + 1/\tau)} (p + 1/\tau) e^{pt} \right] =$$

$$= A_o \frac{(-1/\tau \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o)(-1/\tau)}{(1/\tau)^2 + \omega_o^2} e^{-t/\tau} = \frac{A_o 1/\tau}{\sqrt{\omega_o^2 + (1/\tau)^2}} \cos(\varphi_o - \Psi) e^{-t/\tau},$$

где  $\Psi = \operatorname{arctg} \omega_o \tau$ .

Суммируя свободную и вынужденную составляющие, получим

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{A_o \sigma(t)}{\sqrt{\omega_o^2 + (1/\tau)^2}} \left[ 1/\tau \cdot \cos(\varphi_o - \Psi) e^{-t/\tau} - \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi_o - \Psi) \right].$$

### 7.5.2 Расчет реакции параллельного контура на включение гармонического сигнала

Расчитать реакцию параллельного контура на прохождение гармонического сигнала (тока), математическая модель которого имеет вид

$$s(t) = A_o \cdot \sigma(t) \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o).$$

Системная функция и изображения сигналов на входе и выходе цепи известны:

$$S(p) = A_o \frac{p \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o}{p^2 + \omega_o^2};$$

$$Z(p) = \frac{p + 2\alpha}{C(p^2 + 2p\alpha + \omega_o^2)};$$

$$S_{\text{вых}}(p) = S(p) \cdot Z(p).$$

Применим формулы обращения, учитывая, что полюсы изображения сигнала и системной функции цепи образуют комплексно-сопряженные пары:

$$p^2 + \omega_o^2 = 0, \quad p_{1,2} = \pm j\omega_o;$$

$$p^2 + 2p\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad p_{3,4} = -\alpha \pm j\omega_{c\phi};$$

$$\omega_{c\phi}^2 = \omega_0^2 - \alpha^2.$$

Реакция цепи в общем случае представляет собой сумму свободной и вынужденной составляющих

$$s_{\text{ввых}}(t) = s_{\text{узм}}(t) + s_{c\phi}(t).$$

Вынужденная составляющая отклика, определяемая суммой вычетов в полюсах изображения входного сигнала  $S(p)$ , равна

$$s_{\text{узм}}(t) = \text{Res}_1 + \text{Res}_2 = 2\text{Re}(\text{Res}_1).$$

Свободная составляющая отклика, определяемая суммой вычетов в полюсах системной функции цепи  $Z(p)$ , равна

$$s_{c\phi}(t) = \text{Res}_3 + \text{Res}_4 = 2\text{Re}(\text{Res}_3).$$

Расчет вынужденной составляющей отклика.

$$\begin{aligned} \text{Res}_1 &= \lim_{p=p_1=j\omega_0} \left[ \frac{A_o}{C} \frac{(p \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o)}{(p - j\omega_o)(p + j\omega_o)} \frac{(p + 2\alpha)}{(p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2)} (p - j\omega_o) e^{pt} \right] = \\ &= \frac{A_o}{C} \frac{\omega_o (j \cos \varphi_o - \sin \varphi_o)}{j2\omega_o} \frac{(2\alpha + j\omega_o)}{(-\omega_o^2 + j2\omega_o\alpha + \omega_p^2)} e^{j\omega_o t}, \end{aligned}$$

$$s_{\text{узм}}(t) = A_{\text{узм}} \cos(\omega_o t + \varphi_o + \varphi_{\text{узм}}) \cdot \sigma(t),$$

$$\text{где } A_{\text{узм}} = \frac{A_o}{2C} \frac{\sqrt{(2\alpha)^2 + \omega_o^2}}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_o^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_o^2}}, \quad \varphi_{\text{узм}} = \text{arctg} \frac{\omega_o}{2\alpha} - \text{arctg} \frac{2\omega_o\alpha}{\omega_p^2 - \omega_o^2}.$$

Расчет свободной составляющей отклика.

$$\begin{aligned} \text{Res}_3 &= \lim_{p=p_3} \left[ \frac{A_o}{C} \frac{(p \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o)}{(p^2 + \omega_o^2)} \frac{(p + 2\alpha)}{(p - p_3)(p - p_4)} (p - p_3) e^{pt} \right] = \\ &= \frac{A_o}{C} \frac{[(-\alpha + j\omega_{c\phi}) \cos \varphi_o - \omega_o \sin \varphi_o] (\alpha + j\omega_{c\phi})}{[(-\alpha + j\omega_{c\phi})^2 + \omega_o^2]} \frac{e^{(-\alpha + j\omega_{c\phi})t}}{2j\omega_{c\phi}}, \end{aligned}$$

$$s_{c\phi}(t) = A_{c\phi} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega_{c\phi} t + \varphi_{c\phi}) \cdot \sigma(t),$$

где 
$$A_{c\beta} = \frac{A_o \omega_p}{C \omega_{c\beta}} \frac{\sqrt{(\alpha \cos \varphi_o + \omega_o \sin \varphi_o)^2 + \omega_{c\beta}^2 \cos^2 \varphi_o}}{\sqrt{(\alpha^2 + \omega_o^2 - \omega_{c\beta}^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_{c\beta}^2}},$$

$$\varphi_{c\beta} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_{c\beta} \cos \varphi_o}{\alpha \cos \varphi_o + \omega_o \sin \varphi_o} + \operatorname{arctg} \frac{\omega_{c\beta}}{\alpha} + \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \omega_{c\beta}}{\alpha^2 + \omega_o^2 - \omega_{c\beta}^2}.$$

Реакция цепи в общем случае равна

$$s_{\text{вых}}(t) = \left[ A_{ycm} \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o + \varphi_{ycm}) + A_{c\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_{c\beta} t + \varphi_{c\beta}) \right] \cdot \sigma(t).$$

Реакция контура на гармоническое воздействие представляет собой сумму двух односторонних гармонических колебаний с разными амплитудами, частотами и начальными фазами, причем свободная составляющая затухает по экспоненциальному закону. Запишем результирующее колебание, суммируя составляющие (по правилу параллелограмма для векторного представления)

$$s_{\text{вых}}(t) = A_{\Sigma}(t) \cdot \cos[\omega_o t + \Psi_{\Sigma}(t)] \cdot \sigma(t),$$

$$A_{\Sigma}(t) = \sqrt{A_{ycm}^2 + A_{c\beta}^2 \cdot e^{-2\alpha t} + 2A_{ycm} A_{c\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cos[(\omega_o - \omega_{c\beta})t + \varphi_o + \varphi_{ycm} - \varphi_{c\beta}]},$$

$$\Psi_{\Sigma}(t) = \operatorname{arctg} \frac{A_{ycm} \cdot \sin(\varphi_o + \varphi_{ycm}) + A_{c\beta} \cdot e^{-\alpha t} \sin[(\omega_{c\beta} - \omega_o)t + \varphi_{c\beta}]}{A_{ycm} \cdot \cos(\varphi_o + \varphi_{ycm}) + A_{c\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cos[(\omega_{c\beta} - \omega_o)t + \varphi_{c\beta}]}.$$

Математическое описание отклика существенно упрощается, если ограничить полосу пропускания контура, т.е. рассмотреть только высокодобротные избирательные цепи, у которых потери малы, т.е.

$$\alpha \ll \omega_p, \quad \omega_p \approx \omega_{c\beta},$$

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{A_o}{C} \cdot \frac{1}{\omega_p^2 - \omega_o^2} \left\{ \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi_o) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{(\omega_o \sin \varphi_o)^2 + (\omega_p \cos \varphi_o)^2} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \left[ \omega_p t + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_o}{\omega_p} \operatorname{tg} \varphi_o \right) \right] \right\}.$$

Наконец, исключая расстройку, т.е. приравнивая частоту сигнала  $\omega_o$  резонансной частоте контура  $\omega_p$ , получим

$$s_{\text{вых}}(t) = A_o \cdot R_{\text{рез}} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) \cdot \sigma(t),$$

где  $R_{\text{рез}} = \frac{1}{2\alpha C}.$

Графики откликов при  $\Delta\omega \neq 0$  и  $\Delta\omega = 0$  показаны на рисунке 11.7 (стр. 249).

## 7.6 Выводы

1. Спектральная плотность сигнала на выходе линейной цепи равна произведению спектральной плотности сигнала на входе и частотного коэффициента передачи.

2. Изображение выходного сигнала по Лапласу равно произведению изображения сигнала на входе и передаточной функции цепи в операторной форме записи.

3. Сигнал на выходе линейной цепи представляет собой свертку входного сигнала и импульсной характеристики цепи.

4. Сигнал на выходе линейной цепи можно рассчитать любым из четырех методов:

методом дифференциальных уравнений (классический переход);  
частотным методом (основанном на преобразованиях Фурье);  
операторным методом (использующим преобразования Лапласа);  
временным методом (с применением формул Дюамеля).

5. При анализе прохождения периодических сигналов через линейные цепи чаще других применяют частотный метод (метод комплексных амплитуд).

6. При расчете отклика линейной цепи на импульсные сигналы широко используют интегралы свертки (формулы Дюамеля).

7. Разнообразие задач, решаемых операторным методом, обуславливается простотой свойств преобразований Лапласа и доступностью таблиц оригиналов и изображений.

## 8 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 8.1 Основные определения

В процессе модуляции принимают участие два колебания: управляющее  $s_y(t)$  и несущее  $s_o(t)$ . Модулированное колебание  $s_m(t)$  является результатом.

Управляющие сигналы, поступающие от источников сообщения (микрофон, телевизионная камера и др.), представляют собой относительно “медленные” процессы, энергия которых сосредоточена в низкочастотной части спектра. Их нельзя излучить, так как длина волны несоизмерима с размерами антенны, кроме того, они не обладают способностью распространяться на расстояние, преодолевать препятствия и т.д.

Несущее колебание, легко излучаемое и хорошо распространяющееся на расстояние, используется в качестве переносчика управляющего сигнала.

Процесс преобразования несущего колебания, суть которого заключается в изменении одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с управляющим сигналом, называется модуляцией.

Модулированные колебания – это высокочастотные узкополосные сигналы, которые можно представить в виде

$$s_m(t) = A(t) \cdot \cos \Psi(t). \quad (8.1)$$

Здесь  $A(t)$  – медленно изменяющаяся по сравнению с  $\cos \Psi(t)$  функция, называемая огибающей, а  $\Psi(t)$  – обобщенная фаза.

За интервал времени, в течение которого  $\Psi(t)$  изменится на  $2\pi$ , функцию  $A(t)$  можно считать постоянной.

Если положить  $\Psi(t) = \omega_o t + \varphi_o$ , а  $A(t) = A_o$ , то сигнал (8.1) преобразуется в высокочастотное гармоническое колебание, обычно используемое в качестве несущего колебания

$$s_o(t) = A_o \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) = A_o \cos \Psi_o(t). \quad (8.2)$$

Амплитудной модуляцией называется изменение амплитуды несущего колебания в соответствии с управляющим сигналом. При амплитудной модуляции огибающая амплитудно-модулированного сигнала (АМ-сигнала) получается в результате суммирования амплитуды несущего колебания  $A_o$  и взвешенного управляющего сигнала  $s_y(t)$  (рисунок 8.1).

$$A(t) = A_o + k_{ам} \cdot s_y(t), \quad (8.3)$$

где  $k_{ам}$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров амплитудного модулятора.

Если  $A_o$  и  $s_y(t)$  одномерные величины, то  $k_{ам}$  – безразмерный коэффициент. Для АМ–сигнала общее выражение (8.1) можно заменить следующим:

$$s_{ам}(t) = [A_o + k_{ам} \cdot s_y(t)] \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o). \quad (8.4)$$

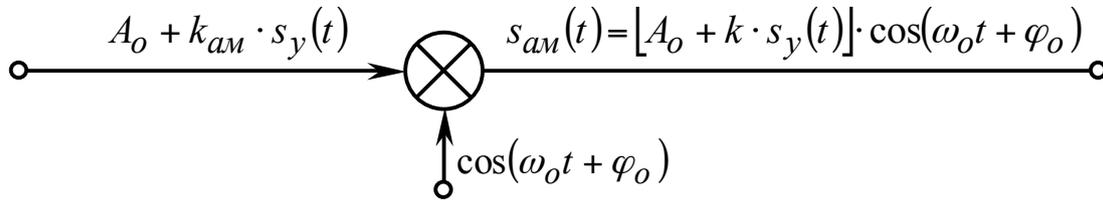


Рисунок 8.1 – Реализация амплитудной модуляции с помощью множителя

Чтобы огибающая  $A(t)$  сохраняла однозначную связь с управляющим колебанием  $s_y(t)$ , необходимо выполнение условия

$$A(t) \geq 0, \text{ или } A_o \geq |k_{ам} \cdot s_y(t)|. \quad (8.5)$$

Если амплитуда несущего колебания  $A_o$  меньше  $|k_{ам} \cdot s_y(t)|$ , возникает явление, называемое “перемодуляцией”.

На рисунке 8.2 изображены модулированные колебания для двух случаев:  $A_o \geq |k_1 \cdot s_y(t)|$  и  $A_o < |k_2 \cdot s_y(t)|$ .

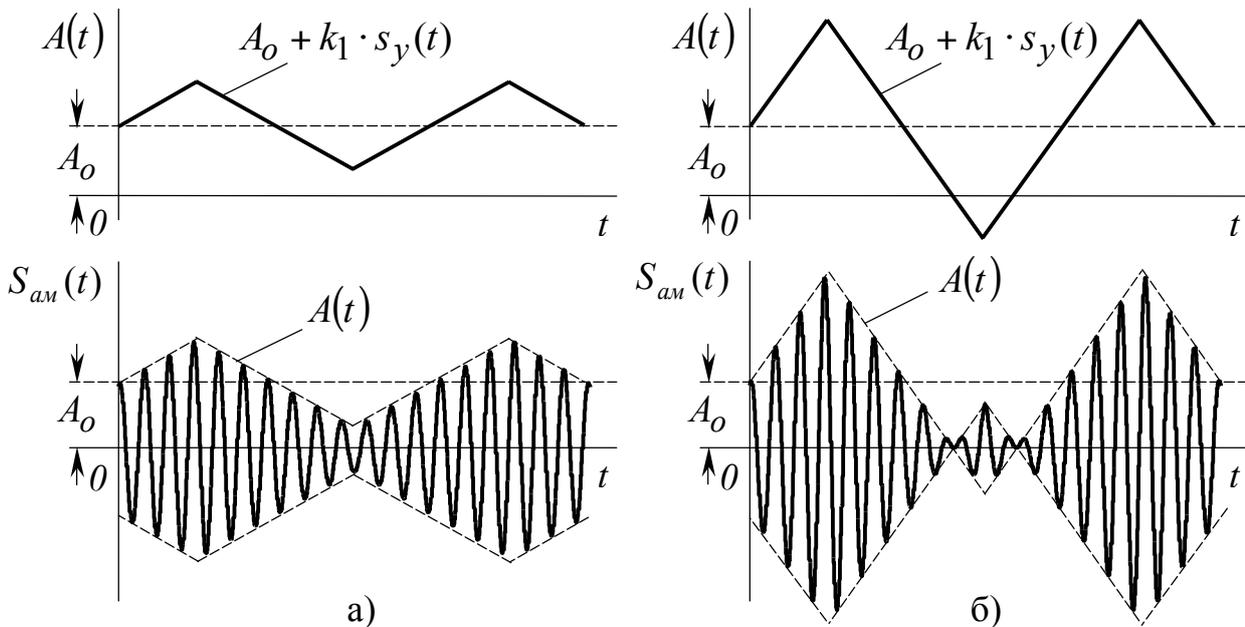


Рисунок 8.2 – Амплитудно-модулированные колебания:

а)  $A(t) \geq 0$  неискаженная амплитудная модуляция; б) ”перемодуляция”

Перемодуляция приводит к появлению искажений огибающей АМ-сигнала.

## 8.2 Тональная амплитудная модуляция гармонического несущего колебания

Несущее и управляющее колебания описываются гармоническими моделями вида:

$$\begin{aligned} s_y(t) &= B \cos(\Omega t + \varphi_y); \\ s_o(t) &= A_o \cos(\omega_o t + \varphi_o). \end{aligned}$$

Здесь  $A_o$ ,  $B$  – амплитуды;  $\omega_o$ ,  $\Omega$  – частоты;  $\varphi_o$ ,  $\varphi_y$  – начальные фазы.

Амплитудно-модулированное колебание получим, используя (8.3) и (8.4).

$$s_{ам}(t) = A_o [1 + M \cdot \cos(\Omega t + \varphi_y)] \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o), \quad (8.6)$$

где  $M$  – коэффициент амплитудной модуляции (иногда называют глубиной модуляции).

$$M = \frac{k_{ам} \cdot B}{A_o}. \quad (8.7)$$

При неискаженной модуляции ( $M \leq 1$ ) амплитуда модулированного колебания меняется в пределах от максимальной  $A_{\max}$  до минимальной  $A_{\min}$  (при  $\cos(\Omega t + \varphi_y) = \pm 1$  соответственно)

$$\left. \begin{aligned} A_{\max} &= A_o (1 + M) \\ A_{\min} &= A_o (1 - M) \end{aligned} \right\}. \quad (8.8)$$

Анализируя временное представление АМ-сигнала, можно рассчитать параметры  $A_o$  и  $M$

$$M = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}, \quad (8.9)$$

$$A_o = \frac{1}{2} (A_{\max} + A_{\min}). \quad (8.10)$$

Раскрывая скобки в выражении (8.6) и используя формулы тригонометрических преобразований, получим сумму трех гармонических колебаний

$$\begin{aligned} s_{ам}(t) &= A_o \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) + \\ &+ \frac{A_o M}{2} \cdot \cos[(\omega_o + \Omega)t + \varphi_o + \varphi_y] + \frac{A_o M}{2} \cdot \cos[(\omega_o - \Omega)t + \varphi_o - \varphi_y]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Первое слагаемое в (8.11) представляет собой несущее колебание, два других (продукты модуляции) имеют равные амплитуды и симметричные относительно  $\omega_o$  частоты, которые называют верхней боковой частотой ( $\omega_o + \Omega$ ) и нижней боковой частотой ( $\omega_o - \Omega$ ). На рисунке 8.3 изображено

временное и спектральное представления АМ–сигнала при тональной модуляции.

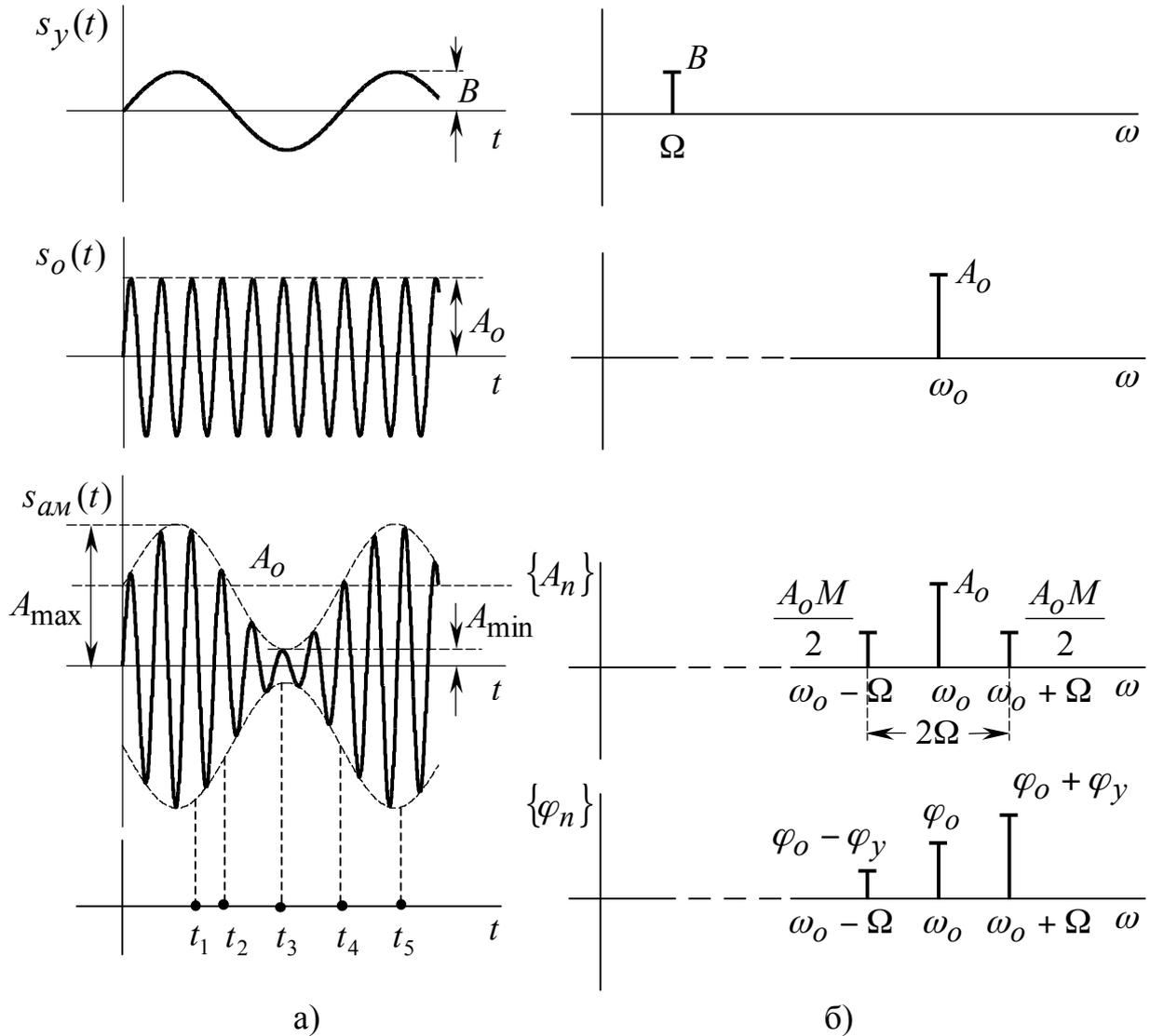


Рисунок 8.3 – Временное (а) и спектральное (б) представления тональной амплитудной модуляции

Анализируя временное представление, отмечаем однозначную связь между управляющим сигналом  $s_y(t)$  и огибающей АМ–сигнала. Если глубина модуляции  $M = 0$  (или  $s_y(t) = 0$ ), то АМ–сигнал превращается в несущее колебание. Если  $M = 1$ , то наступает 100% модуляция, при которой  $A_{\max} = 2A_o$ ,  $A_{\min} = 0$ .

Обсуждая спектральное представление, обращаем внимание на четную симметрию спектра амплитуд относительно несущего колебания. Амплитуды боковых колебаний равны между собой. Максимальное значение амплитуды

бокового колебания не превышает  $A_0/2$ . Ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенной частоте управляющего сигнала

$$\Delta\omega = 2\Omega.$$

Иногда полезно представление АМ-сигнала с помощью суммы векторов, вращающихся в комплексной плоскости.

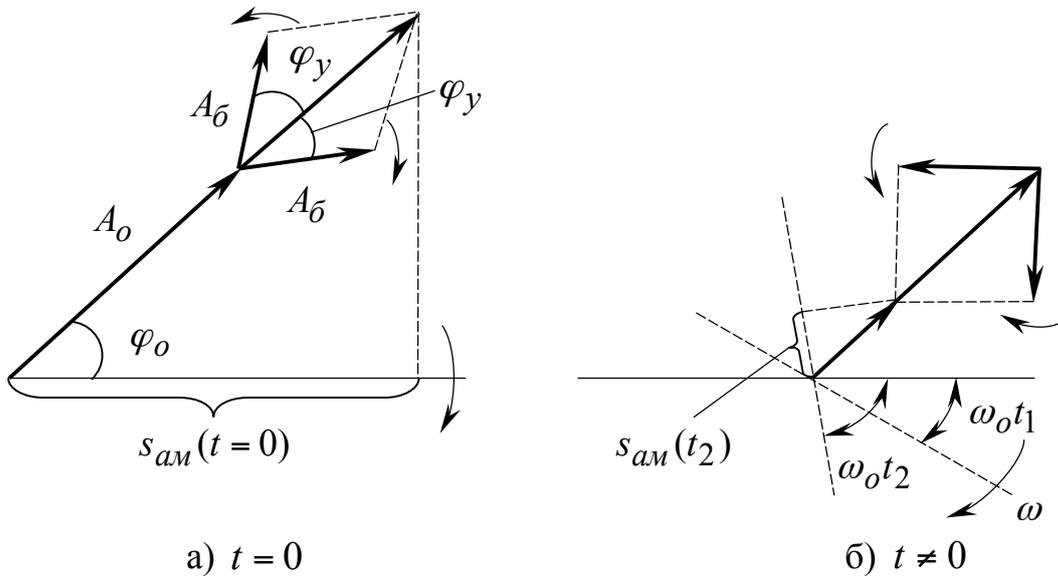


Рисунок 8.4 – Временные диаграммы однотонового АМ-сигнала:  
а)  $t = 0$ ; б)  $t \neq 0$

На рисунке 8.4 изображены векторные диаграммы суммы трех гармонических колебаний. Для простоты восприятия вектор несущего колебания находится в покое, а вращается комплексная плоскость по часовой стрелке. Мгновенное значение АМ-сигнала образуется в результате проекции суммарного вектора на вращающуюся ось абсцисс.

На рисунке 8.5 показаны характерные состояния векторных диаграмм для пяти моментов времени, обозначенных на осциллограмме АМ-сигнала (рисунок 8.3а).

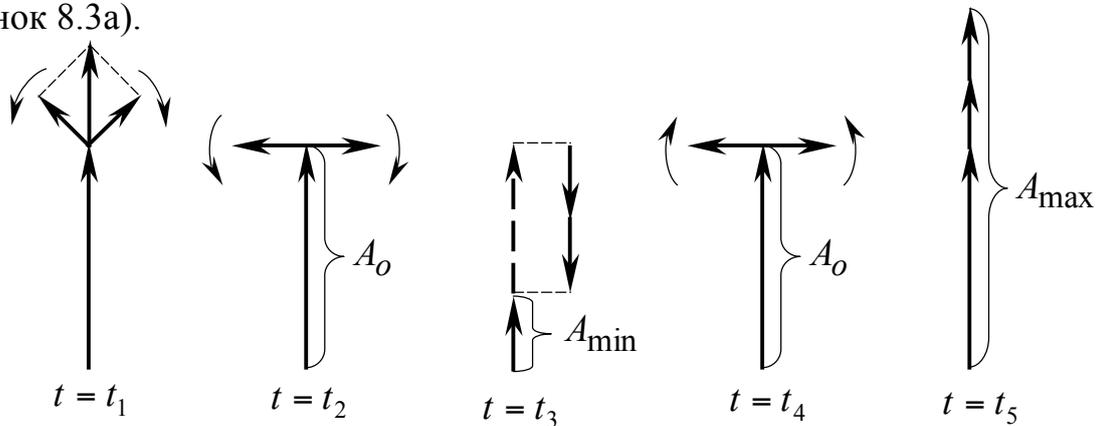


Рисунок 8.5 – Векторные диаграммы, фиксирующие четыре характерных состояния огибающей ( $A_0, A_{\min}, A_0, A_{\max}$ ) за период управляющего сигнала

Достоинством векторного представления является возможность анализа огибающей (а не мгновенного значения).

### 8.3 Энергетические характеристики АМ–сигнала

Средняя мощность периодического АМ–сигнала зависит от выбранного интервала усреднения.

Если интервал усреднения равен периоду управляющего сигнала, то все три гармонические составляющие ортогональны (т.е. энергетически независимы). В этом случае средняя мощность АМ–сигнала равна сумме средних мощностей отдельных гармонических составляющих.

Если  $A_0$  представляет амплитуду напряжения или тока, то мощность несущего колебания, выделяющаяся на сопротивлении 1 Ом, равна

$$P_o = \frac{1}{2} A_o^2. \quad (8.12)$$

Мощность любого бокового колебания равна

$$P_{\bar{o}} = \frac{1}{2} \left( \frac{A_o M}{2} \right)^2. \quad (8.13)$$

Мощность АМ–колебания при тональной модуляции равна

$$P = P_o + 2P_{\bar{o}} = P_o (1 + 0,5M^2) = \frac{A_o^2}{2} (1 + 0,5M^2). \quad (8.14)$$

С передачей информации связана только одна боковая составляющая

$$\eta = \frac{P_{\bar{o}}}{P} = \frac{M^2}{4(1 + 0,5M^2)},$$

где  $\eta$  - относительная доля мощности, связанная с передачей информации, максимальное значение которой при  $M = 1$  не превышает 1/6

$$\eta_{\max} \leq \frac{1}{6} \cdot 100\% = 16,6\%.$$

АМ-колебание вызывает разные тепловые потери в активном режиме ( $M \neq 0$ ) и в режиме “молчания” ( $M = 0$ ). Чтобы учесть возможные перегрузки, рассчитывают значение мощности при интервале усреднения, равном периоду несущего колебания.

$$P(t) = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} A^2(t) \cdot \cos^2(\omega_o t + \varphi_o) dt.$$

За период  $T_o$  огибающая  $A(t)$  практически не меняется, поэтому

$$P(t) \approx \frac{A^2(t)}{T_o} \int_0^{T_o} \cos^2(\omega_o t + \varphi_o) dt = \frac{1}{2} A^2(t). \quad (8.16)$$

Обычно принимают во внимание максимальное и минимальное значения мощности:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} A_o^2 (1 + M)^2 = P_o (1 + M)^2; \quad (8.17)$$

$$P_{\min} = \frac{1}{2} A_o^2 (1 - M)^2 = P_o (1 - M)^2. \quad (8.18)$$

Отношение  $\frac{P}{P_{\max}} = \frac{1,5P_o}{4P_o} = 0,375$  указывает на плохое использование мощности передатчика, так как его рассчитывают на максимальную мощность  $P_{\max}$ .

#### 8.4 Амплитудная модуляция произвольным периодическим и непериодическим сигналами

Математическую модель периодического управляющего сигнала сложной формы можно представить тригонометрическим рядом вида

$$s_y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos(n\Omega t + \varphi_n). \quad (8.19)$$

Запишем АМ-сигнал и получим его спектральный состав:

$$\begin{aligned} s_{ам}(t) &= \left[ A_o + k_{ам} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \right] \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) = \\ &= A_o \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \right] \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o), \end{aligned} \quad (8.20)$$

где  $M_n = \frac{B \cdot k_{ам}}{A_o}$  – парциальные (частичные) коэффициенты модуляции;

$$\begin{aligned} s_{ам}(t) &= A_o \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_o M_n}{2} \cos[(\omega_o + n\Omega)t + \varphi_o + \varphi_n] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_o M_n}{2} \cos[(\omega_o - n\Omega)t + \varphi_o - \varphi_n] \end{aligned} \quad (8.21)$$

В выражении (8.21) первое слагаемое – несущее колебание с частотой  $\omega_o$ , второе и третье – суммы колебаний с частотами  $\omega_o + n\Omega$  (верхняя боковая полоса) и  $\omega_o - n\Omega$  (нижняя боковая полоса). Нижняя боковая полоса (НБП) представляет зеркальное отображение верхней боковой полосы (ВБП) (рисунок 8.6). Каждая спектральная составляющая управляющего сигнала формирует две боковые частоты в спектре АМ-сигнала.

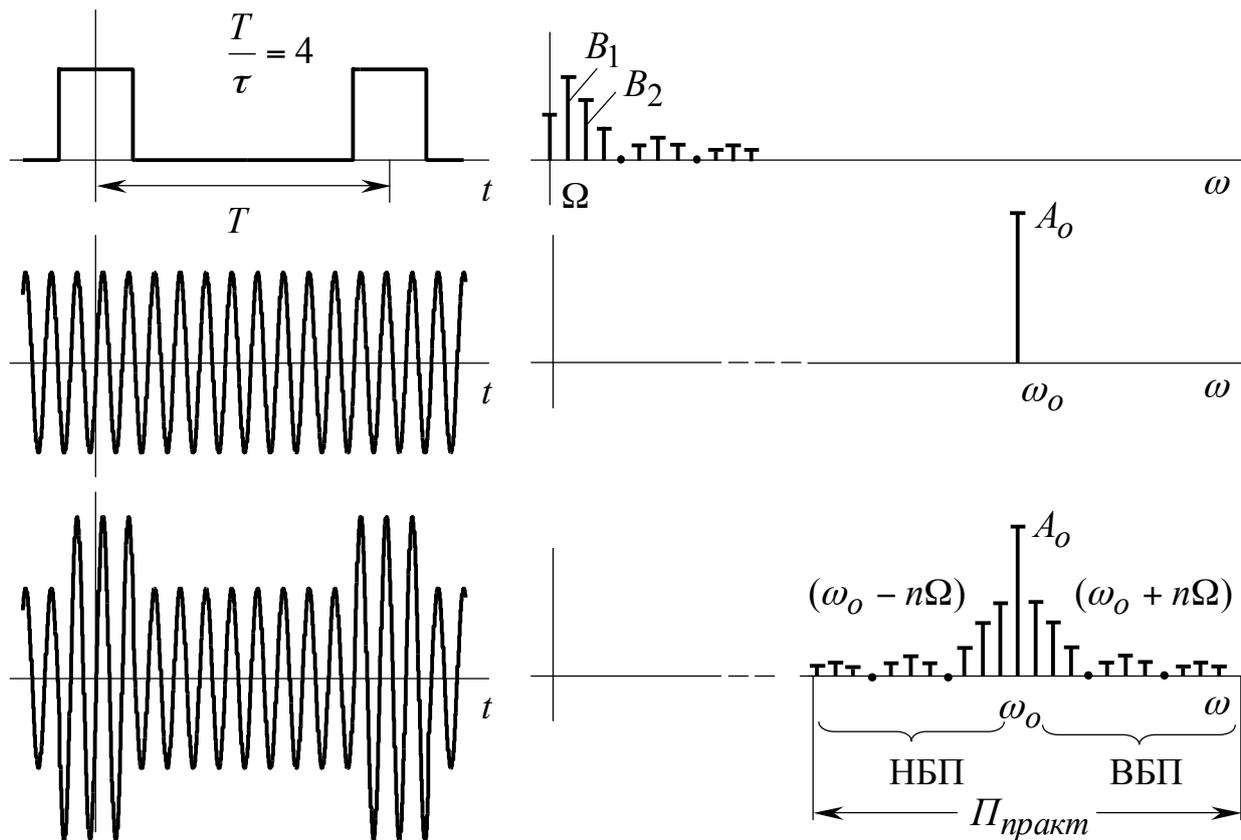


Рисунок 8.6 – Временное и спектральное представления радиосигнала при амплитудной модуляции периодическим управляющим сигналом

Практическая ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенной максимальной частоте (учитываемой в спектре управляющего сигнала)

$$P_{\text{практик}} = 2\Omega_{\text{max}} = 2n_{\text{max}}\Omega.$$

В случае модуляции непериодическим сигналом  $s_y(t)$  со спектральной плотностью  $\dot{S}_y(\omega)$  огибающую  $A(t)$  и модулированное колебание  $s_{\text{ам}}(t)$  согласно (8.3) и (8.4) можно записать в виде:

$$A(t) = A_0 + k_{\text{ам}} \cdot s_y(t);$$

$$s_{\text{ам}}(t) = [A_0 + k_{\text{ам}} \cdot s_y(t)] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Спектральную плотность модулированного колебания  $\dot{S}_{\text{ам}}(\omega)$  найдем с помощью прямого преобразования Фурье. Используем теорему о сложении и применим дельта-функции для описания спектральной плотности неинтегрируемых сигналов.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{am}(\omega) &= \Phi[s_{am}(t)] = \Phi[A_o \cos(\omega_o t + \varphi_o)] + \Phi[k_{am} \cdot s_y(t) \cos(\omega_o t + \varphi_o)] = \\ &= \pi \cdot A_o e^{-j\varphi_o} \delta(\omega + \omega_o) + \pi \cdot A_o e^{j\varphi_o} \delta(\omega - \omega_o) + \\ &+ \frac{1}{2} k_{am} \cdot e^{-j\varphi_o} \dot{S}_y(\omega + \omega_o) + \frac{1}{2} k_{am} \cdot e^{j\varphi_o} \dot{S}_y(\omega - \omega_o). \end{aligned} \quad (8.22)$$

На рисунке 8.7 изображено временное и спектральное представления сигналов при амплитудной модуляции неперiodическим сигналом.

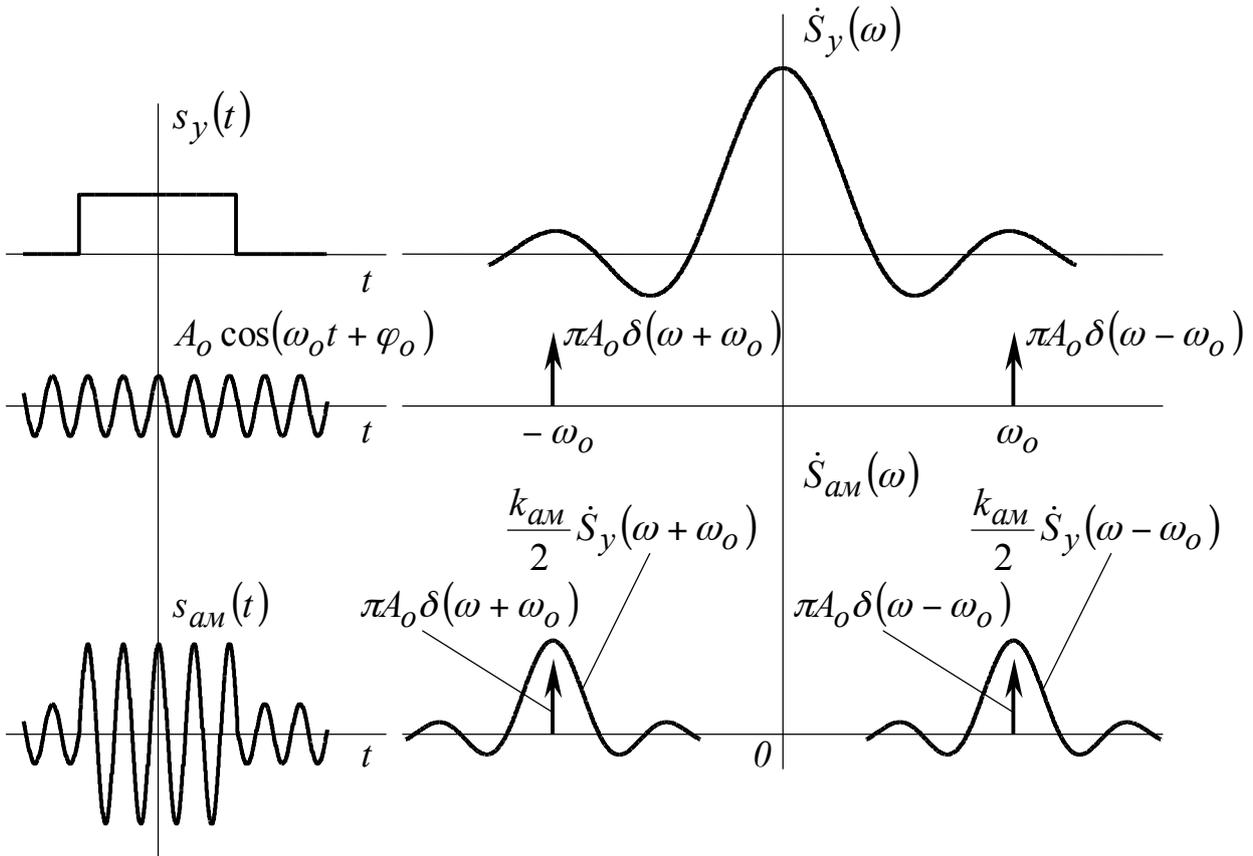


Рисунок 8.7 – Временное и спектральное представления неперiodического управляющего, несущего и модулированного сигналов (при  $\varphi_o = 0$ )

### 8.5 Балансная и однополосная модуляция

Кроме обычной АМ, применяется амплитудная модуляция с подавлением несущей – балансная модуляция (БМ).

Балансно–модулированное колебание (БМ-колебание) можно записать как

$$\begin{aligned} s_{\bar{b}m}(t) &= k_{\bar{b}m} \cdot s_y(t) \cdot s_o(t) = k_{\bar{b}m} \cdot s_y(t) \cdot A_o \cos(\omega_o t + \varphi_o) = \\ &= A_{\bar{b}m}(t) \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Здесь  $A_{\bar{b}m}(t) = k_{\bar{b}m} \cdot A_o \cdot s_y(t)$  – огибающая модулированного колебания (8.23);  $k_{\bar{b}m}$  – коэффициент пропорциональности.

Если управляющий сигнал  $s_y(t)$  и несущее колебание  $s_o(t)$  одномерные величины, например напряжения (или токи), то

$$[k_{\bar{o}M}] = \frac{1}{B} \left( \text{или} \frac{1}{A} \right).$$

Пусть  $s_y(t) = B \cos(\Omega t + \varphi_y)$ . Полагая  $\varphi_0 = \varphi_y = -\pi/2$ , представим БМ-колебание в виде

$$\begin{aligned} s_{\bar{o}M}(t) &= k_{\bar{o}M} \cdot A_0 \cdot B \cdot \cos(\Omega t - \pi/2) \cdot \cos(\omega_0 t - \pi/2) = \\ &= A_{\bar{o}M} \cos(\omega_0 - \Omega)t + A_{\bar{o}M} \cos[(\omega_0 + \Omega)t - \pi], \end{aligned} \quad (8.24)$$

где  $A_{\bar{o}M} = k_{\bar{o}M} A_0 B$  - амплитуда боковой составляющей.

Для сравнения на рисунке 8.8 изображены временные диаграммы и спектральный состав двух сигналов  $s_{aM}(t)$  и  $s_{\bar{o}M}(t)$  при модуляции гармоническим управляющим сигналом  $s_y(t)$ .

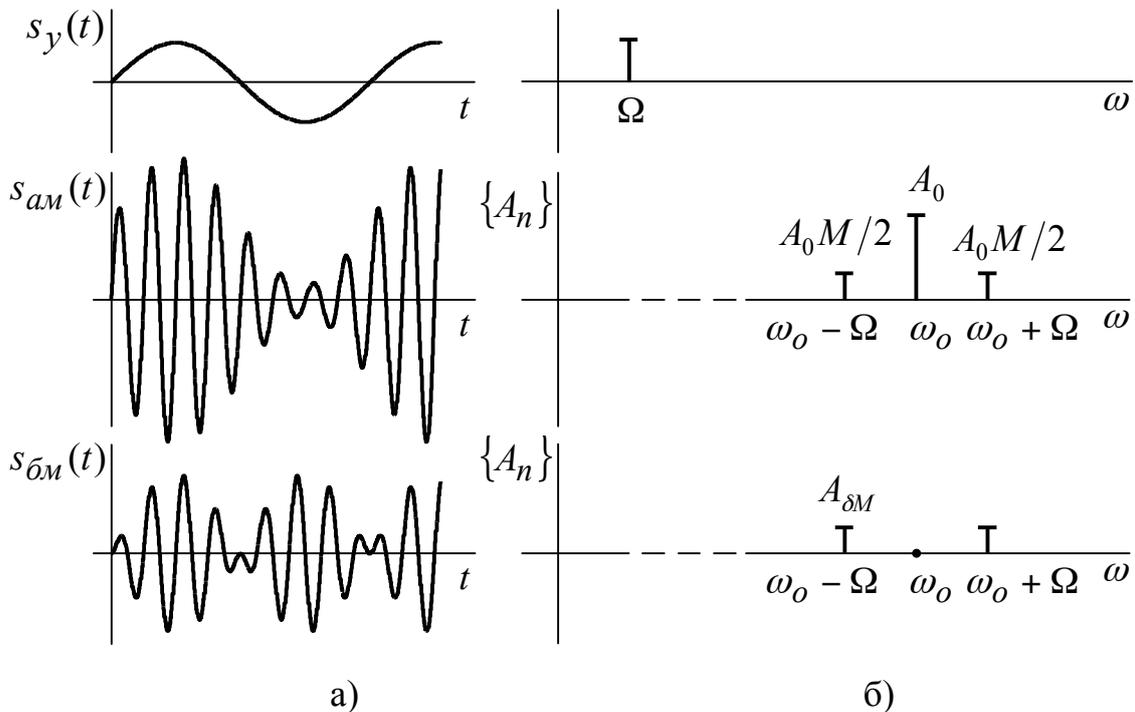


Рисунок 8.8 – Временное (а) и спектральное (б) представления радиосигнала при выполнении АМ и БМ

Главным достоинством простой амплитудной модуляции является то, что форма огибающей точно повторяет закон изменения  $s_y(t)$  (информативный сигнал). Поэтому для детектирования такого сигнала достаточно применить однополупериодный диодный детектор.

Спектральную плотность БМ-колебания  $\dot{S}_{\bar{o}M}(\omega)$ , так же как и АМ-колебания при модуляции произвольным непериодическим сигналом  $s_y(t)$ ,

можно выразить через спектральную плотность огибающей. Полагая, что сигналу  $s_y(t)$  соответствует спектральная плотность  $\dot{S}_y(\omega)$ , получим

$$\dot{S}_{\bar{m}}(\omega) = \frac{1}{2} k_{\bar{m}} \cdot A_o [\dot{S}_y(\omega - \omega_o) + \dot{S}_y(\omega + \omega_o)]. \quad (8.25)$$

Таким образом, спектр модулирующего сигнала в результате модуляции “раздваивается”, т.е. смещается по оси частот на  $\pm \omega_o$ . Ширина спектра БМ-колебания увеличивается в 2 раза по сравнению с шириной спектра управляющего сигнала.

При балансной модуляции нарушается однозначная связь между управляющим сигналом и огибающей. В частности (при гармоническом управляющем сигнале), на выходе БМ возникают “биения” в результате сложения двух гармонических колебаний с близкими частотами ( $\omega_o \pm \Omega$ ). Период “биений” в два раза меньше периода управляющего сигнала.

При БМ увеличивается относительная доля мощности, связанная с передачей информации до 50%. Это связано с тем, что БМ позволяет сократить расход мощности на передачу колебания несущей частоты. Если модулирующий сигнал  $s_y(t)$  содержит постоянную составляющую, то в спектре БМ-колебания возникает компонента несущей частоты.

Дальнейшее снижение энергозатрат связано с применением однополосной амплитудной модуляции, для осуществления которой подавляют, помимо несущего колебания, одну из боковых полос в спектре БМ-сигнала (рисунок 8.9).

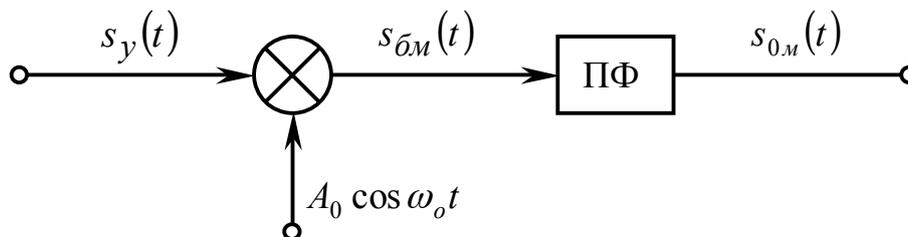


Рисунок 8.9 – Реализация балансной и однополосной модуляции с помощью умножителя и полосового фильтра (ПФ)

Для восстановления модулирующего сигнала достаточно сохранить в спектре модулированного сигнала лишь одну боковую полосу: либо верхнюю, либо нижнюю. Для передачи боковых полос требуется только половина полосы частот ( $\Delta\omega$  вместо  $2\Delta\omega$ ). Такой способ передачи, называемый однополосной амплитудной модуляцией (ОМ) с подавлением несущей, позволяет максимально сократить полосу частот, занимаемую сигналом.

При приеме ОМ-колебаний необходимо восстанавливать колебание несущей частоты ( $A_o \cos \omega_o t$ ) и нижнюю боковую полосу частот (НБП), что усложняет приемник. Затруднения устраняются с развитием элементной базы (схемы восстановления несущего колебания, схемы восстановления НБП).

## 8.6 Амплитудно-импульсная модуляция

Если в качестве несущего колебания (переносчика) выбрана периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 8.10б), то модулируемыми параметрами могут быть: амплитуда (высота) импульса, его длительность (ширина), частота повторения импульсов и фаза (положение) импульса относительно начала периода. Изменение в соответствии с управляющим сигналом одного (или нескольких) параметров несущего колебания приводят к возникновению различных импульсных модуляций.

Простейшим видом импульсной модуляции является амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), при которой амплитуда импульсов изменяется в соответствии с модулирующим сигналом. Определим спектр АИМ при модуляции видеоимпульсов, имеющих прямоугольную форму, произвольным периодическим сигналом (например, пилообразным)

$$s_y(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\Omega_1 t + \Psi_n). \quad (8.26)$$

Представим периодическую последовательность импульсов  $s_o(t)$  рядом Фурье

$$s_o(t) = E \left[ \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{E} \cdot \cos(n\omega_o t + \varphi_n) \right]. \quad (8.27)$$

В выражении (8.26)  $\omega_o = 2\pi/T$  – тактовая частота импульсов, имеющих длительность  $\tau$  и амплитуду  $E$ .

Модулированную последовательность видеоимпульсов  $s_{aим}(t)$  можно записать в виде:

$$s_{aим}(t) = \underbrace{\left[ E + k \left( \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\Omega_1 t + \Psi_n) \right) \right]}_{E(t)} \underbrace{\left[ \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{E} \cos(n\omega_o t + \varphi_n) \right]}_{\frac{s_o(t)}{E}}. \quad (8.28)$$

где  $E(t) = E + k \cdot s_y(t)$  – изменение амплитуд импульсов (огibaющей).

На основании выражений (8.26), (8.27) и (8.28) на рисунке 8.10 изображено временное и спектральное представление  $s_y(t)$ ,  $s_o(t)$  и  $s_{aим}(t)$ . Несущее колебание  $s_o(t)$  на частотной оси располагается на фиксированных частотах, кратных  $\omega_o$ . При импульсной модуляции спектр управляющего сигнала переносится на всю совокупность фиксированных частот  $n\omega_o$ . Спектр АИМ–сигнала дискретный и почти периодический. Почти периодический характер спектра определяется конечной длительностью импульсов несущей последовательности.

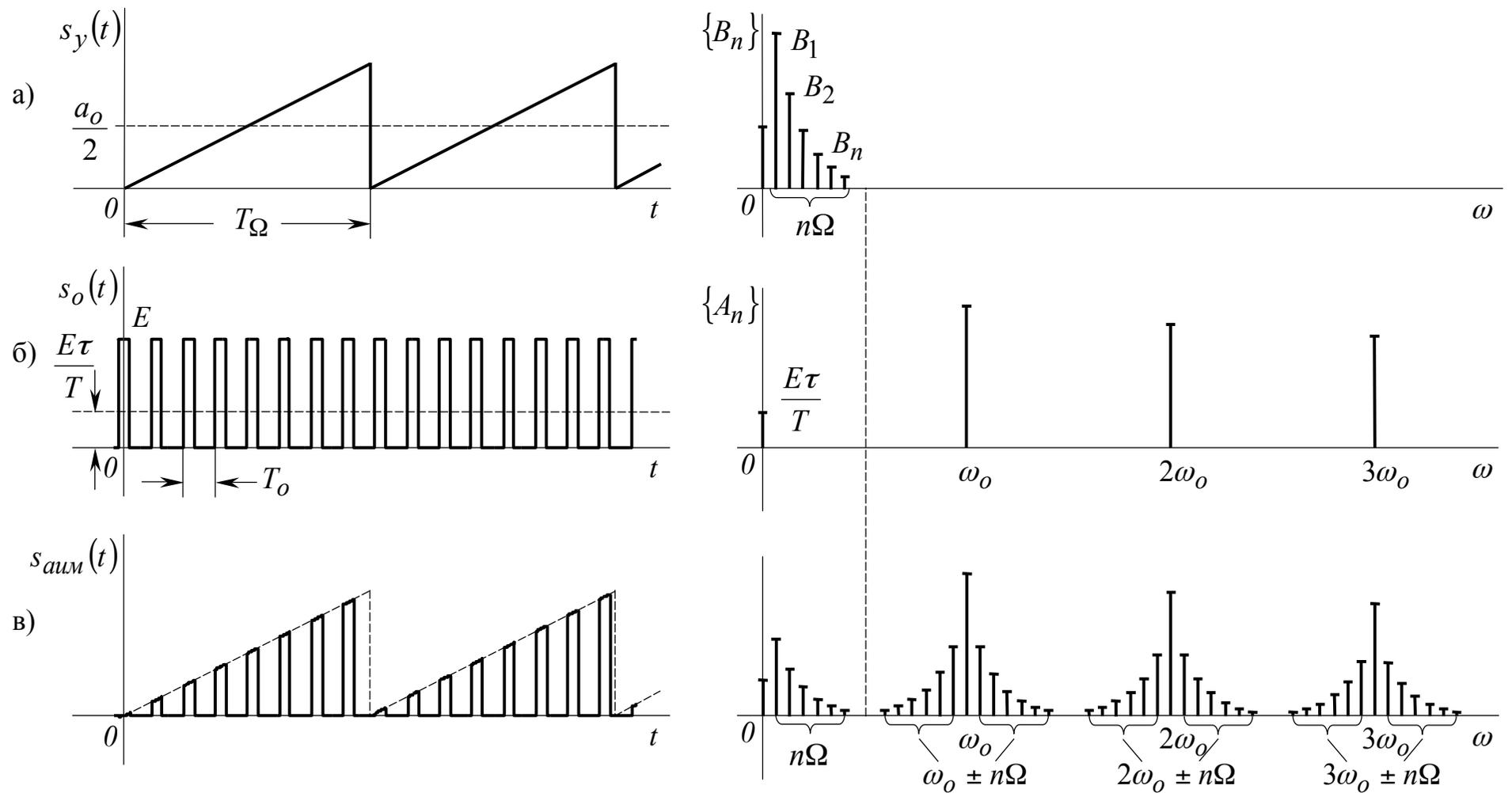


Рисунок 8.10 – Временное и спектральное представления АИМ-сигналов: а) управляющий периодический сигнал; б) несущее колебание (периодическая последовательность прямоугольных импульсов малой длительности); в) периодическое АИМ-колебание

При модуляции непериодическим сигналом (обладающим спектральной плотностью  $\dot{S}_y(\omega)$ ) вместо отдельных боковых составляющих наблюдаются сплошные боковые полосы.

Поскольку управляющее колебание заложено в низкочастотную часть спектра АИМ–сигнала, прилегающую к нулевой частоте, то для его восстановления можно использовать фильтр нижних частот.

## 8.7 Выводы

1. При амплитудной модуляции происходит линейный перенос спектра управляющего сигнала в область высоких частот.

2. Спектр АМ–сигнала содержит несущее колебание и две симметричные составляющие: верхнюю боковую полосу (ВБП) и нижнюю боковую полосу (НБП) частот.

3. Ширина спектра АМ–сигнала увеличивается в два раза по сравнению с шириной спектра управляющего сигнала.

4. Информация об управляющем сигнале в полном объеме содержится в ВБП частот. В НБП частот (симметричной относительно ВБП частот) располагается избыточная информация. Амплитудная модуляция характеризуется большой потребляемой мощностью ( $P_{\max} = 16 \cdot P_0$ ).

5. Балансная модуляция характеризуется подавлением несущего колебания, снижением энергозатрат в 4 раза ( $P_{\max} = 4 \cdot P_0$ ). Полоса частот остается неизменной.

6. Однополосная модуляция характеризуется подавлением несущего колебания и нижней боковой полосы частот, минимальновозможными энергозатратами ( $P_{\max} \approx P_0$ ), шириной спектра, равной полосе частот управляющего сигнала, существенным усложнением схемы приемного устройства.

7. При амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) в соответствии с управляющим сигналом меняется амплитуда прямоугольных импульсов малой длительности. Управляющий сигнал из аналогового (непрерывного) становится дискретным (амплитудно-импульсно-модулированным). Спектр АИМ–сигнала представляет собой почти периодическую функцию частоты (дискретную или непрерывную). Каждая гармоническая составляющая управляющего сигнала формирует две боковые полосы вокруг совокупности несущих ( $n\omega_0 \pm k\Omega_1$ ). АИМ–сигнал является широкополосным.

## 9 РАДИОСИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

### 9.1 Основные определения

При угловой модуляции в соответствии с управляющим сигналом меняются параметры несущего колебания: частота и фаза.

При частотной модуляции

$$\omega(t) = \omega_o + k_{\text{чМ}} s_y(t). \quad (9.1)$$

При фазовой модуляции

$$\Psi(t) = \omega_o t + \varphi_o + k_{\text{фМ}} s_y(t). \quad (9.2)$$

Здесь  $k_{\text{чМ}}$ ,  $k_{\text{фМ}}$  – коэффициенты пропорциональности, характеризующие крутизну преобразования частотного и фазового модуляторов соответственно. Размерность этих коэффициентов:

$$[k_{\text{чМ}}] = \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{В}} \right]; \quad [k_{\text{фМ}}] = \left[ \frac{\text{рад}}{\text{В}} \right].$$

Изменение частоты несущего колебания в соответствии с управляющим сигналом приводит к изменению фазы

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_o = \omega_o t + k_{\text{чМ}} \int_0^t s_y(t) dt + \varphi_o. \quad (9.3)$$

Изменение фазы несущего колебания в соответствии с управляющим сигналом приводит к изменению частоты

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} [\Psi(t)] = \omega_o + k_{\text{фМ}} \frac{d}{dt} [s_y(t)]. \quad (9.4)$$

Аналитическое выражение радиосигналов с частотной и фазовой модуляциями:

$$s_{\text{чМ}}(t) = A_o \cos \left[ \omega_o t + k_{\text{чМ}} \int_0^t s_y(t) dt + \varphi_o \right]; \quad (9.5)$$

$$s_{\text{фМ}}(t) = A_o \cos [\omega_o t + k_{\text{фМ}} s_y(t) + \varphi_o]. \quad (9.6)$$

### 9.2 Тональная угловая модуляция

Пусть управляющий сигнал описывается гармоническим колебанием.

$$s_y(t) = B \cos(\Omega t + \varphi_y).$$

Выведем основные соотношения для частотно-модулированного (ЧМ) сигнала:

$$\omega(t) = \omega_o + \omega_\Delta \cos(\Omega t + \varphi_y); \quad (9.7)$$

$$\omega_\Delta = k_{\text{чМ}} \cdot B. \quad (9.7a)$$

Здесь  $\omega_{\partial}$  – девиация частоты ЧМ-колебания (максимальное отклонение мгновенного значения частоты от частоты несущего колебания).

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_o t + m \sin(\Omega t + \varphi_y) + \varphi_o, \quad (9.8)$$

$$m = \frac{\omega_{\partial}}{\Omega} = \frac{k_{\text{чм}} B}{\Omega}. \quad (9.9)$$

Здесь  $m$  – индекс частотной модуляции (максимальное отклонение мгновенного значения обобщенной фазы от фазы несущего колебания).

$$s_{\text{чм}}(t) = A_o \cos[\omega_o t + m \sin(\Omega t + \varphi_y) + \varphi_o]. \quad (9.10)$$

Выведем основные соотношения для фазомодулированного (ФМ) сигнала

$$\Psi(t) = \omega_o t + \varphi_o + m \cos(\Omega t + \varphi_y), \quad (9.11)$$

где  $m$  – индекс фазовой модуляции.

$$m = k_{\text{фм}} B, \quad (9.12)$$

$$\omega(t) = \omega_o - \omega_{\partial} \sin(\Omega t + \varphi_y), \quad (9.13)$$

где  $\omega_{\partial}$  – девиация частоты ФМ- колебания.

$$\omega_{\partial} = m \Omega = k_{\text{фм}} B \Omega, \quad (9.14)$$

$$s_{\text{фм}}(t) = A_o \cos[\omega_o t + \varphi_o + m \cos(\Omega t + \varphi_y)]. \quad (9.15)$$

В таблице 9.1 проведено сравнение основных свойств ФМ– и ЧМ– колебаний при гармоническом управляющем сигнале.

Таблица 9.1 – Основные характеристики ФМ – и ЧМ – колебаний

	ФМ-колебание	ЧМ-колебание
Управляющий сигнал	$B \cos(\Omega t + \varphi_y)$	
Аналитическое выражение	$A_o \cos[\omega_o t + \varphi_o + m \cos(\Omega t + \varphi_y)]$	$A_o \cos[\omega_o t + \varphi_o + m \sin(\Omega t + \varphi_y)]$
Отклонение фазы	$m \cos(\Omega t + \varphi_y)$	$m \sin(\Omega t + \varphi_y)$
Индекс модуляции	$m = k_{\text{фм}} B$	$m = \frac{k_{\text{чм}} B}{\Omega}$
Отклонение частоты	$-\omega_{\partial} \sin(\Omega t + \varphi_y)$	$\omega_{\partial} \cos(\Omega t + \varphi_y)$
Девиация частоты	$\omega_{\partial} = k_{\text{фм}} B \Omega$	$\omega_{\partial} = k_{\text{чм}} B$

Сравнительный анализ математических моделей (9.10) и (9.15) показывает, что при гармоническом управляющем сигнале по осциллограммам ФМ- и ЧМ-сигналов нельзя определить вид угловой модуляции. Различие между ФМ- и ЧМ- сигналами можно выявить, только **изменяя частоту модуляции  $\Omega$** . Причем, при ЧМ девиация частоты  $\omega_\delta$  остается постоянной, а при ФМ индекс угловой модуляции  $m$  не зависит от частоты  $\Omega$ . Зависимости основных параметров ФМ- и ЧМ-сигналов от частоты  $\Omega$  изображены на рисунке 9.1

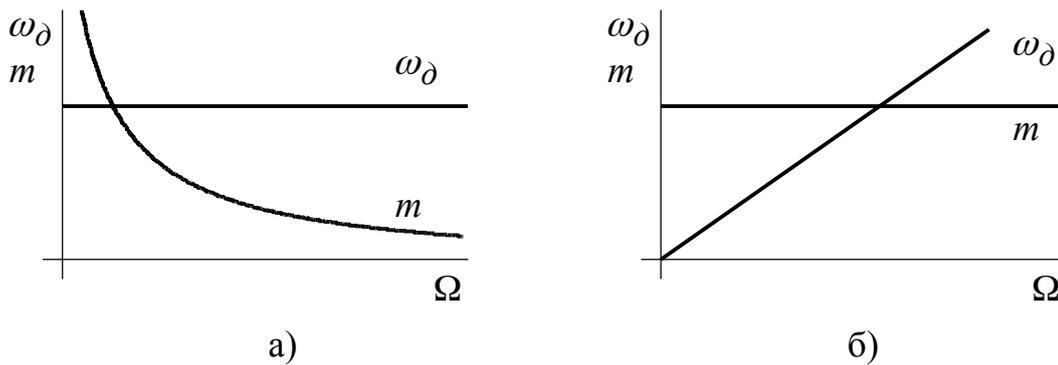


Рисунок 9.1 – Зависимость девиации частоты  $\omega_\delta$  и индекса угловой модуляции  $m$  от частоты управляющего сигнала:  
а) при частотной модуляции; б) при фазовой модуляции

Векторная диаграмма радиосигнала с угловой модуляцией представляет собой вектор постоянной длины, вращающийся с непостоянной угловой скоростью (рисунок 9.2).

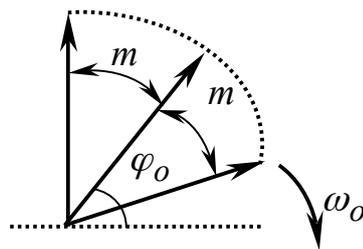


Рисунок 9.2 – Векторная диаграмма радиосигнала с угловой модуляцией

Если модулирующий сигнал  $s_y(t)$  негармонический, то ФМ- и ЧМ-колебания различаются по характеру изменения параметров  $\omega(t)$  и  $\varphi(t)$ . На рисунке 9.3 приведены графики изменения мгновенной частоты  $\omega(t)$  и обобщенного фазового сдвига  $\Psi(t)$  ФМ- и ЧМ-сигналов для случая, когда управляющий сигнал имеет вид периодической треугольной функции (рисунок 9.3а).

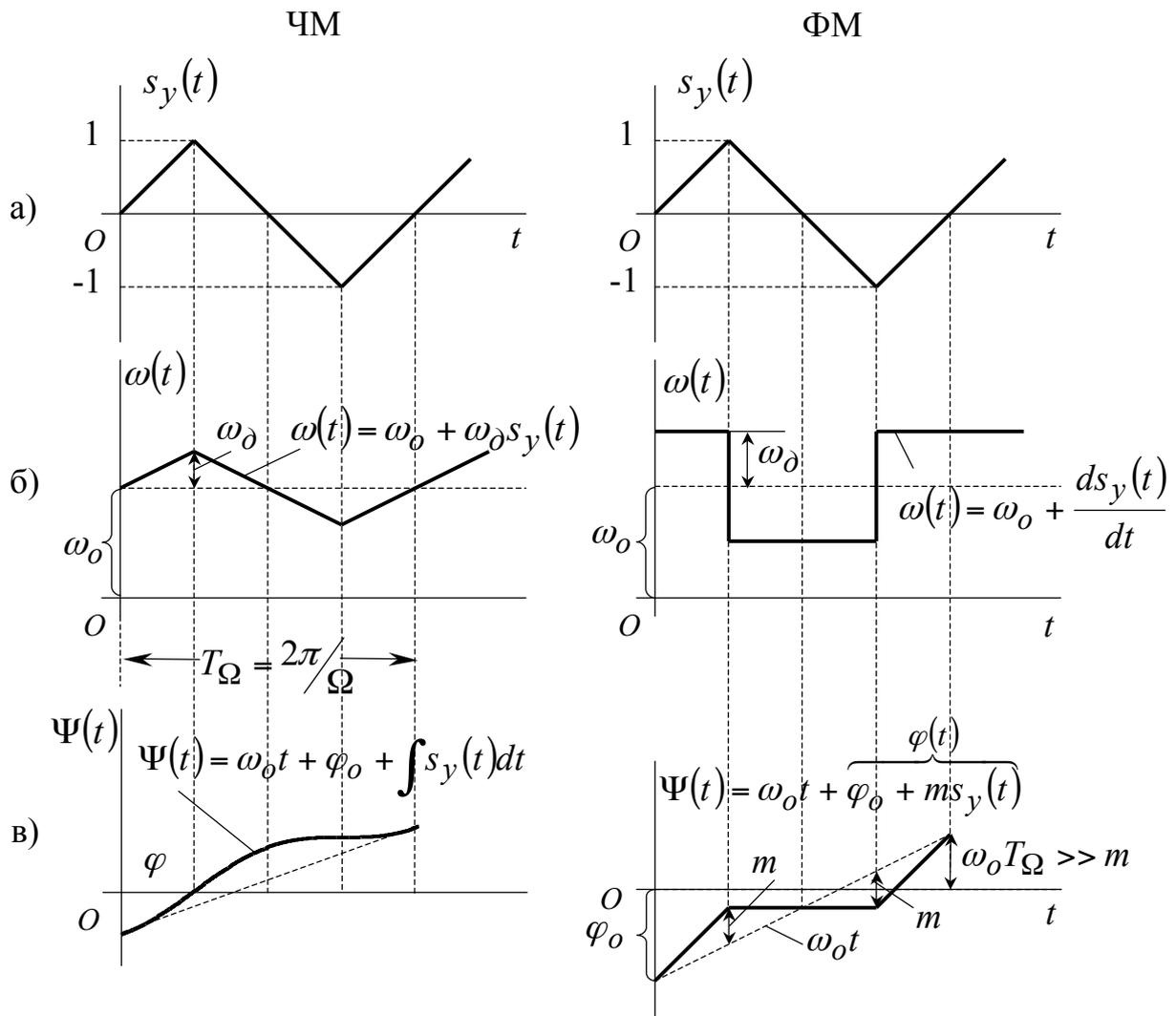


Рисунок 9.3 – Графическое представление: а) управляющего сигнала; б) изменения мгновенного значения частоты ЧМ– и ФМ– сигналов; в) изменения мгновенного значения фазы ЧМ– и ФМ– сигналов

При линейном изменении фазы частота сигнала является постоянной величиной. Смена направления изменения фазы сопровождается дискретным скачком частоты.

Линейное изменение частоты сопровождается изменением фазы по квадратичному закону.

**Замечание.** Если фаза сигнала переключается на  $\Delta\varphi$ , то в этот момент времени в математической модели мгновенной частоты появится дельта-функция.

### 9.3 Спектр сигнала с угловой тональной модуляцией при малых индексах

Рассмотрим модель сигнала с угловой модуляцией, полагая  $\varphi_o = \varphi_y = 0$ .

$$s_{yM}(t) = A_o \cos(\omega_o t + m \sin \Omega t). \quad (9.16)$$

Применяя тригонометрические преобразования, получим

$$s_{yM}(t) = A_o \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_o t - A_o \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_o t.$$

Поскольку индекс угловой модуляции мал ( $m \ll 1$ ), воспользуемся приближенными выражениями:

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1; \quad \sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t. \quad \text{Откуда}$$

$$s_{yM}(t) \approx A_o \cos \omega_o t - A_o m \sin \Omega t \sin \omega_o t. \quad (9.17)$$

Реализовать фазовую модуляцию с малым индексом (9.17) можно с помощью генератора гармонических колебаний ( $\Gamma \omega_o$ ), фазосдвигающей цепи ( $\pi/2$ ), перемножителя и сумматора, изображенных на рисунке 9.4.

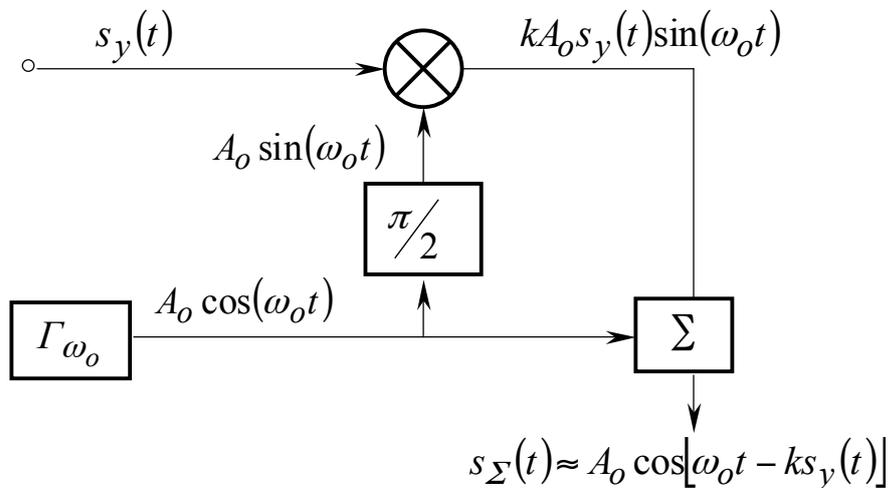


Рисунок 9.4 – Фазовый модулятор при  $m \ll 1$

Сигнал на выходе сумматора описывается следующим образом:

$$s_{\Sigma}(t) = A_o [k s_y(t) \sin(\omega_o t) + \cos(\omega_o t)] = A(t) \cos[\omega_o t + \Psi(t)]; \quad (9.18)$$

$$A(t) = A_o \sqrt{1 + k^2 s_y^2(t)} \approx A_o, \quad \text{при } k s_y(t) \ll 1;$$

$$\Psi(t) = \arctg(-k s_y(t)) \approx -k s_y(t);$$

$$s_{\Sigma}(t) \approx A_o \cos[\omega_o t - k s_y(t)]. \quad (9.19)$$

Схема, показанная на рисунке 9.4, пригодна для произвольного модулирующего сигнала, а не только гармонического, при выполнении условия  $ks_y(t) \ll 1$ .

Преобразуя (9.17), получим спектральный состав сигнала с угловой модуляцией при  $m \ll 1$

$$s_{ym}(t) \approx A_o \cos \omega_o t + \frac{A_o m}{2} \cos(\omega_o + \Omega)t - \frac{A_o m}{2} \cos(\omega_o - \Omega)t. \quad (9.20)$$

Таким образом, в спектре сигнала с угловой модуляцией при  $m \ll 1$  содержатся три колебания: несущее и два боковых (на частотах  $\omega_o$  и  $\omega_o \pm \Omega$ ). Индекс  $m$  играет такую же роль, как коэффициент амплитудной модуляции  $M$ . Принципиальное отличие состоит в том, что нижнее боковое колебание имеет дополнительный фазовый сдвиг  $180^\circ$ .

На рисунках 9.5 и 9.6 изображены спектральная и векторные диаграммы сигнала с угловой модуляцией.

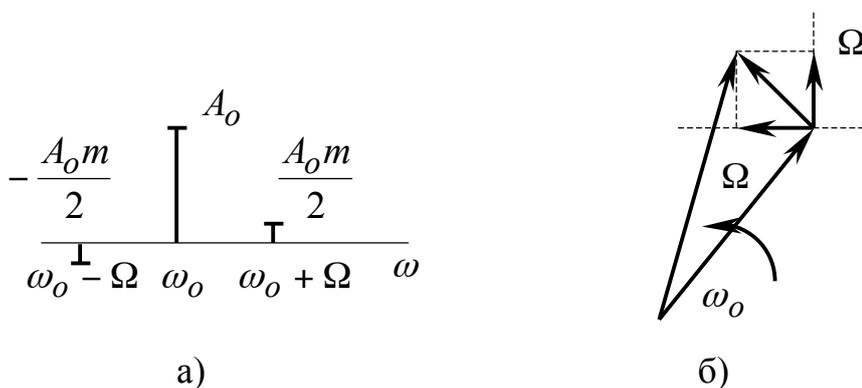


Рисунок 9.5 – Спектральное (а) и векторное (б) представление сигнала с угловой модуляцией

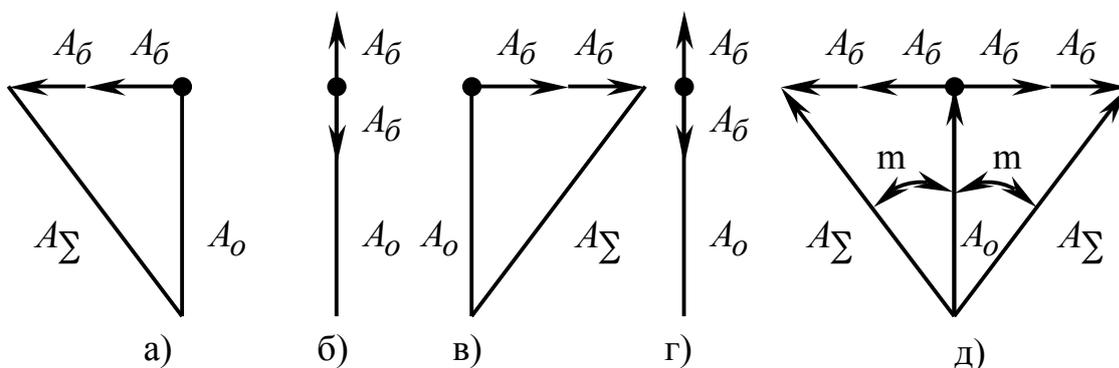


Рисунок 9.6 – Характерные состояния векторной диаграммы (а, б, в, г), следующие через четверть периода управляющего сигнала; д) результирующая диаграмма

Сумма векторов, отображающих боковые колебания, всегда перпендикулярна вектору несущего колебания  $A_o$ .

Результирующий вектор  $A_\Sigma$  будет "качаться" вокруг центрального положения. Относительное значение погрешности представления характеризует "паразитную" амплитудную модуляцию

$$\delta = \frac{\Delta A}{A_o} = \frac{A_\Sigma - A_o}{A_o} = \frac{A_o \sqrt{1 + m^2} - A_o}{A_o} \approx \frac{m^2}{2}.$$

#### 9.4 Спектр радиосигнала с угловой тональной модуляцией при произвольном индексе

Пусть модель сигнала с угловой модуляцией описывается выражением

$$s_{ym}(t) = A_o \cos(\omega_o t + m \sin \Omega t), \varphi_o = \varphi_y = 0.$$

Используя формулу Эйлера, представим колебание (9.18) реальной частью комплексной функции

$$s_{ym}(t) = \operatorname{Re}(A_o \cdot e^{j\omega_o t} \cdot e^{jm \sin \Omega t}). \quad (9.21)$$

Эта модель полезна тем, что быстроосциллирующая составляющая  $e^{j\omega_o t}$  и медленно меняющаяся составляющая  $e^{jm \sin \Omega t}$  разделены на сомножители. Разложим периодическую функцию  $e^{jm \sin \Omega t}$  в комплексный ряд Фурье:

$$e^{jm \sin \Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t}; \quad (9.22)$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T_\Omega} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{jm \sin \Omega t} \cdot e^{-jn\Omega t} dt = I_n(m). \quad (9.23)$$

Здесь  $I_n(m)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка от действительного аргумента  $m$ .

Интеграл (9.23) можно преобразовать к виду

$$I_n(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[m \sin \Omega t - n\Omega t] d(\Omega t). \quad (9.24)$$

При целом  $n$  имеет место равенство:

$$I_{-n}(m) = (-1)^n I_n(m). \quad (9.25)$$

Группируем в сумме (9.22) отдельно положительные и отрицательные значения  $n$ . Выделяя  $n=0$  и учитывая (9.25), получим

$$e^{jm \sin \Omega t} = I_0(m) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(m) \left[ e^{jn\Omega t} + (-1)^n e^{-jn\Omega t} \right]. \quad (9.26)$$

Подставляя (9.26) в (9.21), получим

$$s_{ym}(t) = \operatorname{Re} \left\{ A_o I_0(m) e^{j\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_o I_n(m) \left[ e^{j(\omega_o + n\Omega)t} + (-1)^n e^{j(\omega_o - n\Omega)t} \right] \right\} \quad (9.27)$$

Выполняя переход к действительной части, найдем

$$s_{ym}(t) = A_o I_0(m) \cos(\omega_o t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_o I_n(m) \cos(\omega_o + n\Omega)t + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_o I_n(m) \cos(\omega_o - n\Omega)t. \quad (9.28)$$

Спектр сигнала с тональной угловой модуляцией в общем случае содержит бесконечное число попарно симметричных составляющих, частоты которых равны  $\omega_o \pm n\Omega$ . Амплитуда любой спектральной составляющей равна произведению амплитуды несущего колебания  $A_o$  и функции Бесселя соответствующего порядка  $n$  от аргумента  $m$ .

Начальные фазы боковых колебаний с частотами  $\omega_o + n\Omega$  и  $\omega_o - n\Omega$  совпадают при четных  $n$  и отличаются на  $180^\circ$  при нечетных  $n$ .

В таблице 9.2 приведены значения функций Бесселя, а на рисунке 9.7 представлены графики функций Бесселя, рассчитанные по формуле 9.24.

Таблица 9.2 – Значения функций Бесселя

n \ m	1	2	3	4	5
0	0.765	0.224	-0.260	-0.397	-0.178
1	0.440	0.557	0.339	-0.066	-0.328
2	0.115	0.353	0.486	0.364	0.047
3	0.020	0.129	0.309	0.430	0.365
4	0.002	0.034	0.132	0.281	0.391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0.007	0.043	0.132	0.261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0.001	0.011	0.049	0.131
7	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0.003	0.015	0.053

При  $m \ll 1$   $J_1(m) \approx 0.5m$ , а функции Бесселя всех порядков, кроме первого, пренебрежимо малы.

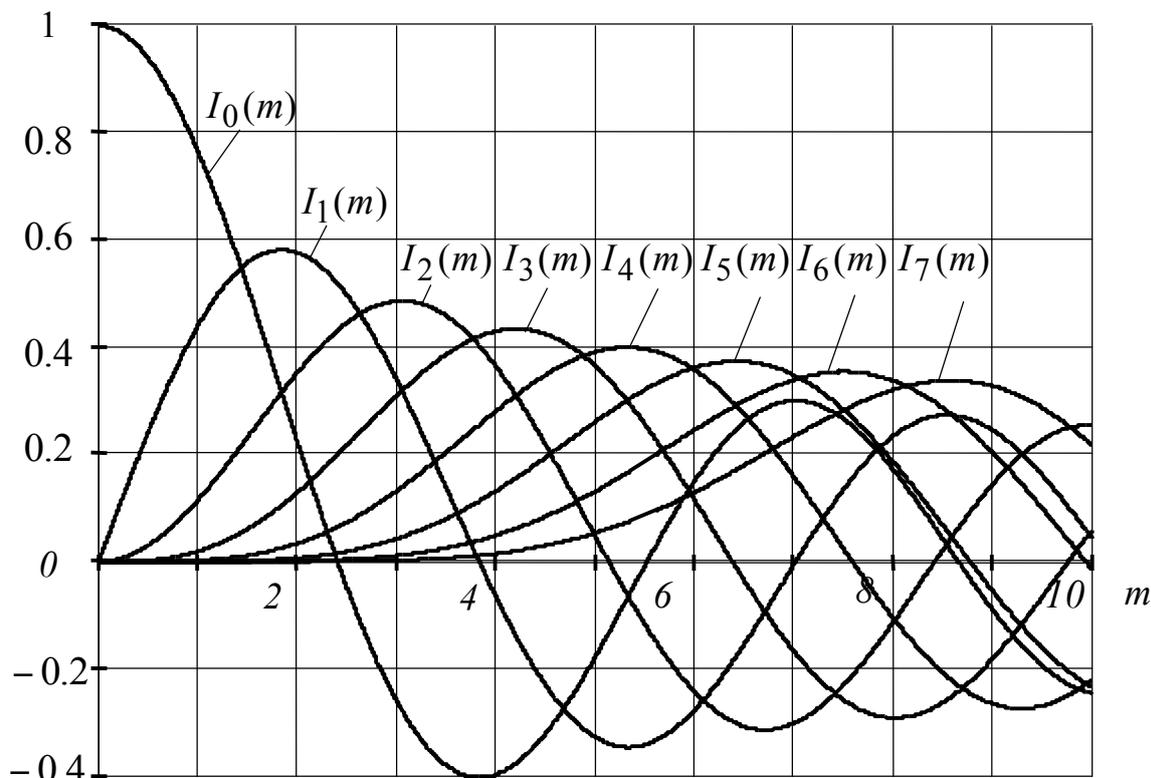


Рисунок 9.7 – Графики функций Бесселя  $I_n(m)$

На рисунке 9.8 изображены спектры амплитуд сигналов с угловой модуляцией для различных индексов. С увеличением индекса модуляции расширяется эффективная полоса частот, занимаемая сигналом.

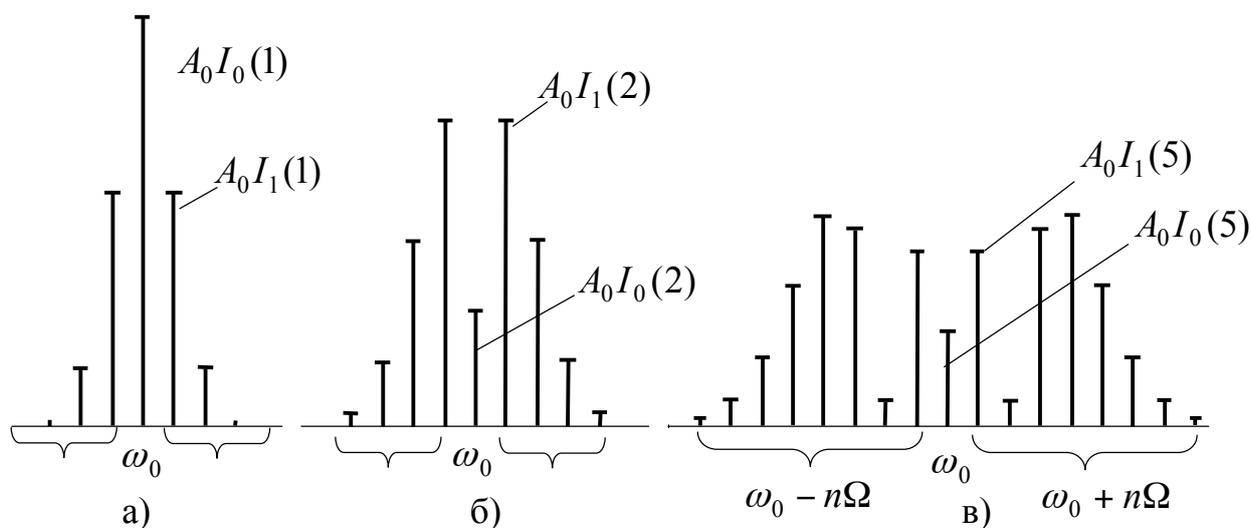


Рисунок 9.8 – Спектры амплитуд радиосигналов с угловой модуляцией для различных индексов: а)  $m = 1$ , б)  $m = 2$ , в)  $m = 5$

Амплитуды спектральных составляющих с ростом  $n$  убывают не монотонно, т.к. функции Бесселя осциллируют с изменением  $m$  (рисунок 9.7).

Для оценки практической ширины спектра радиосигналов с угловой модуляцией используются приближенные соотношения. При значениях индекса  $m$ , лежащих в пределах от 0 до 25, применяют формулу

$$P_{\text{практ}} \cong 2\Omega(1 + m + \sqrt{m}). \quad (9.29)$$

$$\text{При } m \ll 1 \quad P_{\text{практ}} \cong 2\Omega. \quad (9.30)$$

$$\text{При } m \gg 1 \quad P_{\text{практ}} \cong 2\Omega m = 2\omega_{\Delta}. \quad (9.31)$$

На рисунке 9.9 показан общий характер зависимости огибающей спектра от порядкового номера  $n$  при больших значениях индекса угловой модуляции  $m$ . Из рисунка видно, что огибающая спектра имеет почти прямоугольную форму. На частотах, близких  $\omega_0 \pm n_{\text{max}} \Omega$  ( $n_{\text{max}} \approx m$ ), образуется всплеск, а затем быстрое затухание до нуля. Наивысший номер боковой частоты, которую еще необходимо брать в расчет, приблизительно равен индексу модуляции.

Иногда угловую модуляцию с малым индексом называют *быстрой* угловой модуляцией

$$\omega_{\Delta} \ll \Omega, \quad P_{\text{практ}} = 2\Omega.$$

Угловую модуляцию с большим индексом называют *медленной* угловой модуляцией

$$\omega_{\Delta} \gg \Omega, \quad P_{\text{практ}} = 2\omega_{\Delta}.$$

0,16

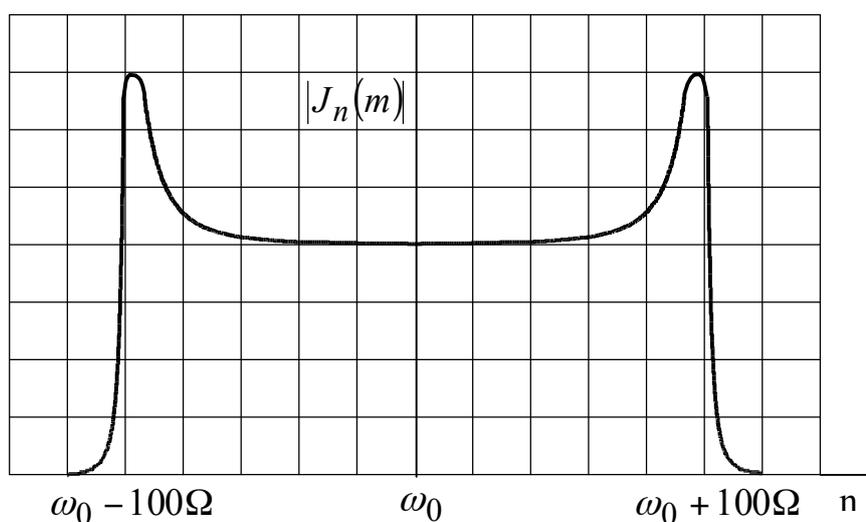


Рисунок 9.9 – Общий характер зависимости  $|J_n(m)|$  при  $m=100$  (огибающая спектра сигнала с угловой модуляцией)

### 9.5 Угловая модуляция сигналом сложной формы

Рассмотрим частотно-модулированный сигнал, у которого в качестве управляющего  $s_y(t)$  использовано периодическое колебание прямоугольной формы:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_o + k_{\text{ЧМ}} \cdot s_y(t), \\ \Psi(t) &= \int \omega(t) dt + \varphi_o = \omega_o t + k_{\text{ЧМ}} \int s_y(t) dt + \varphi_o, \\ s_{\text{ЧМ}}(t) &= A_o \cos \left[ \omega_o t + k_{\text{ЧМ}} \int s_y(t) dt + \varphi_o \right].\end{aligned}$$

На рисунке 9.10 изображены изменения мгновенной частоты  $[\omega(t) - \omega_o]$  и обобщенной фазы  $[\Psi(t) - \omega_o t]$  от времени.

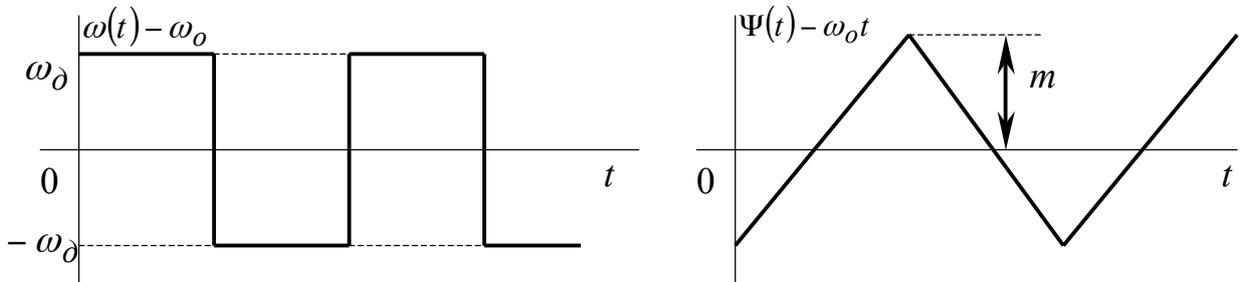


Рисунок 9.10 – Мгновенная частота и обобщенная фаза ЧМ-сигнала

Аппаратурным путем ЧМ-модулятор можно реализовать с помощью двух генераторов ( $\Gamma_{\omega_1}$ ,  $\Gamma_{\omega_2}$ ), двух ключей, сумматора и схемы управления (рисунок 9.11).

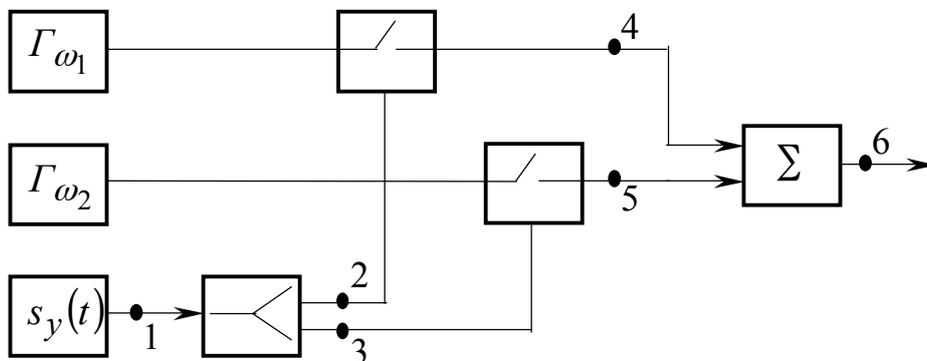
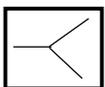


Рисунок 9.11 – Аппаратурная реализация двухуровневой цифровой частотной модуляции



– Устройство формирования двух управляющих сигналов  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$ .

На рисунке 9.12 изображено временное и спектральное представления сигналов на выходах функциональных узлов схемы, изображенной на рисунке 9.11.

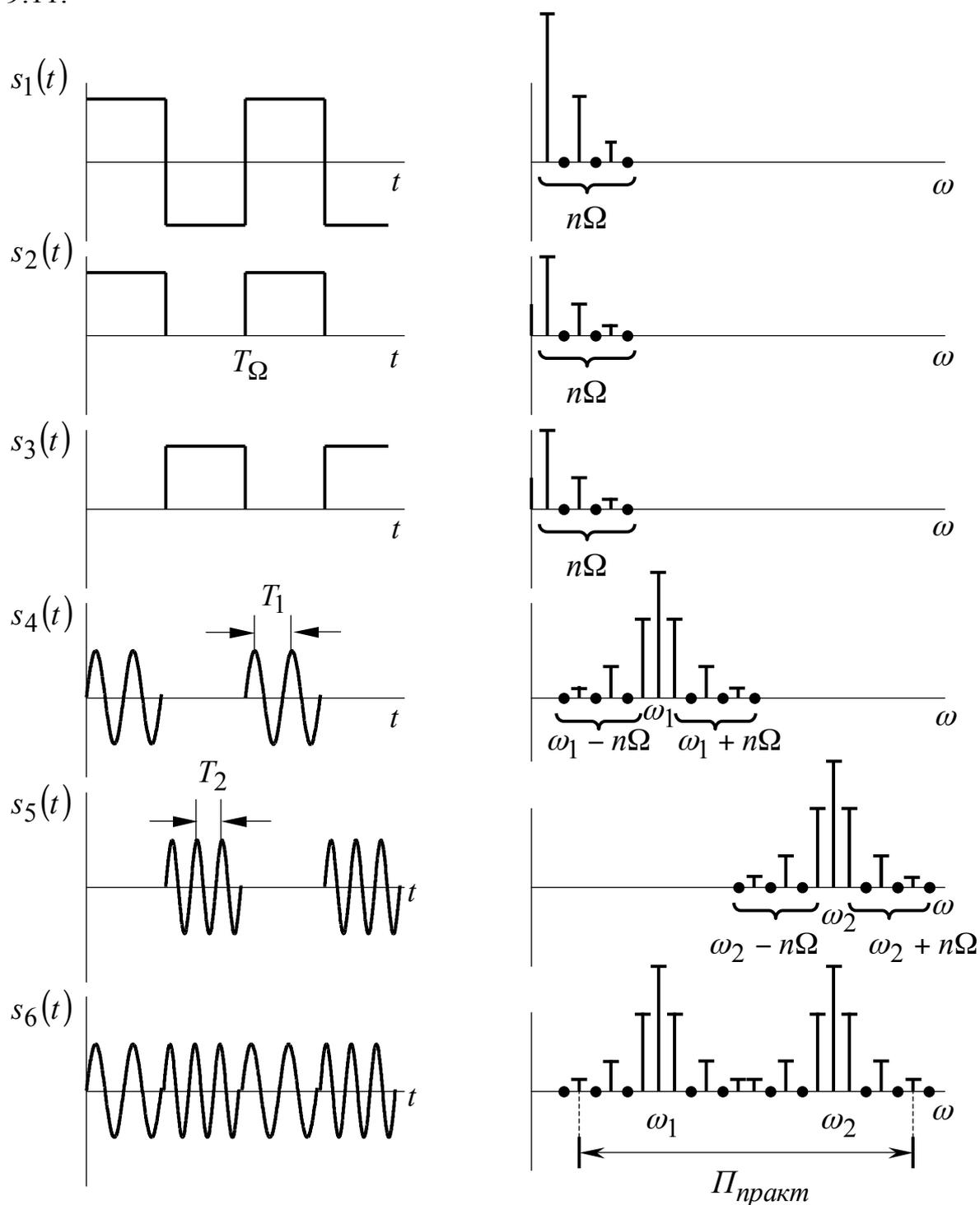


Рисунок 9.12 – Временное и спектральное представления сигналов на выходах функциональных узлов схемы (рисунок 9.11)

## 9.6 Квадратурная амплитудная модуляция

Амплитудная модуляция ортогональных несущих ( $\cos \omega_o t, \sin \omega_o t$ ) называется квадратурной амплитудной модуляцией (КАМ). Аббревиатура КАМ соответствует английский QAM – Quadrature Amplitude Modulation.

Квадратурная модуляция предназначена для одновременной передачи двух независимых сигналов по одному частотному каналу. На рисунке 9.13 показана схема получения КАМ – сигналов.

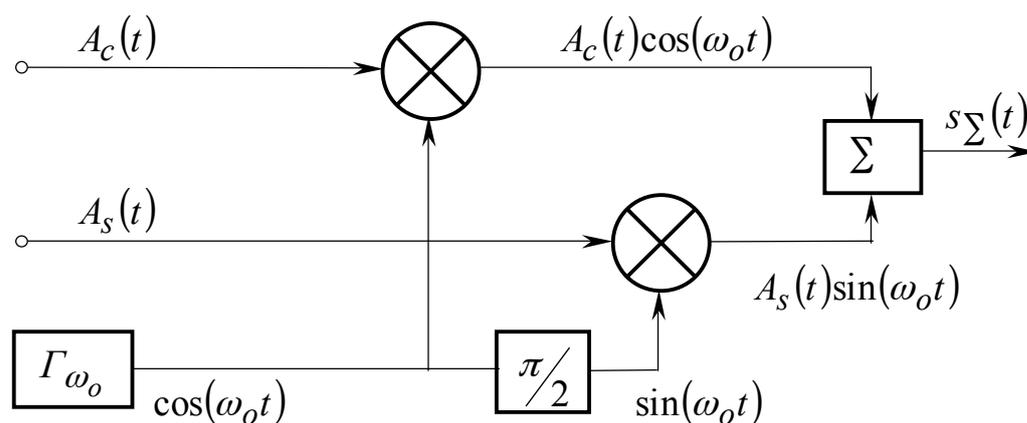


Рисунок 9.13 – Структурная схема формирования КАМ – сигнала

На вход преобразователя поступает два произвольных низкочастотных колебания  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  с ограниченным спектром.

Ортогональные несущие колебания формируются с помощью генератора  $\Gamma_{\omega_o}$  и фазосдвигающей цепи ( $\pi/2$ ).

В перемножителях осуществляется балансная модуляция ортогональных несущих по законам  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$ . На выходе сумматора образуется КАМ – сигнал, который представляет собой высокочастотное колебание со смешанной модуляцией:

$$s_{\Sigma}(t) = A_c(t)\cos\omega_o t + A_s(t)\sin\omega_o t;$$

$$s_{\Sigma}(t) = A_{\Sigma}(t)\cos(\omega_o t - \varphi_{\Sigma}(t)); \quad (9.32)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{\Sigma}(t) &= \sqrt{A_s^2(t) + A_c^2(t)} \\ \varphi_{\Sigma}(t) &= \operatorname{arctg} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Чтобы из сигнала  $s_{\Sigma}(t)$  выделить низкочастотные колебания  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$ , применяют обратное преобразование (квадратурно-амплитудную демодуляцию), изображенную на рисунке 9.14

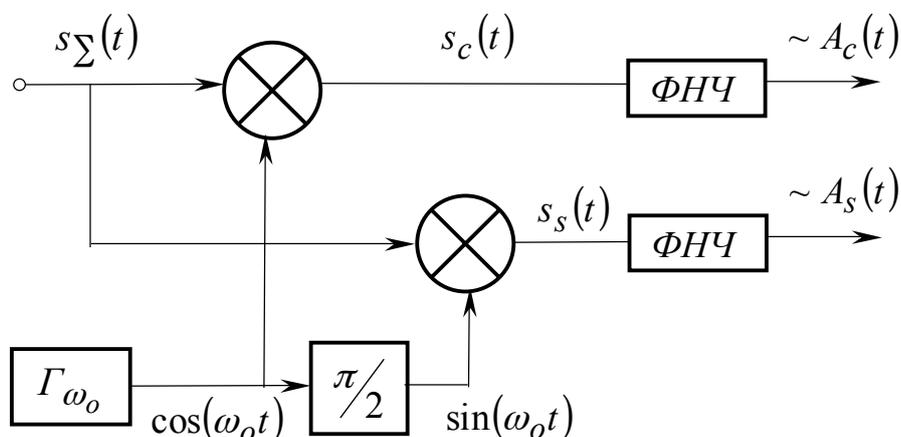


Рисунок 9.14 – Структурная схема обработки КАМ – сигнала при приеме

Сигналы на выходе умножителей  $s_c(t)$  и  $s_s(t)$  можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= [A_c(t)\cos\omega_0t + A_s(t)\sin\omega_0t]\cos\omega_0t = \\ &= A_c(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0t\right] + A_s(t)\frac{1}{2}\sin 2\omega_0t; \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} s_s(t) &= [A_c(t)\cos\omega_0t + A_s(t)\sin\omega_0t]\sin\omega_0t = \\ &= A_s(t)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega_0t\right] + A_c(t)\frac{1}{2}\sin 2\omega_0t. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Высокочастотные компоненты сигналов  $s_c(t)$  и  $s_s(t)$  фильтруются с помощью ФНЧ.

$$s_{\text{фнч}_1}(t) \approx A_c(t).$$

$$s_{\text{фнч}_2}(t) \approx A_s(t).$$

Качество работы квадратурной схемы зависит от когерентности опорных сигналов. Квадратурную модуляцию используют в современных модемах цифровых систем связи для получения многоуровневых фазоманипулированных сигналов (КАМ-4, 16, 32, 64...), для реализации частотной модуляции с непрерывной фазой и т.д.

Рассмотрим четырехуровневую фазовую манипуляцию КАМ-4.

В цифровых системах передачи сообщение представлено двоичным кодом, т.е. случайной последовательностью “единиц” и “нулей”. При двухуров-

невой модуляции в течение одной посылки передается либо “единица”, либо “ноль”.

Четырехуровневая фазовая манипуляция (4ФМ) позволяет передавать в течение одной элементарной посылки одну из четырех возможных комбинаций “единиц” и “нулей” в соответствии с модуляционным кодом, представленным в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Правило формирования 4ФМ–сигнала

Комбинация кода	00	01	11	10
Начальная фаза, $\Delta\varphi_i^\circ$	$45^\circ$	$135^\circ$	$225^\circ$	$315^\circ$

Сигнал на выходе модулятора представляет собой квазигармоническое колебание вида:

$$\begin{aligned}
 s_{\text{ФМ}}(t) &= A_o \cos(\omega_o t - \Delta\varphi_i) = \\
 &= A_o \cos \Delta\varphi_i \cos \omega_o t + A_o \sin \Delta\varphi_i \sin \omega_o t.
 \end{aligned}
 \tag{9.36}$$

Весовое суммирование ортогональных несущих  $\cos \omega_o t$  и  $\sin \omega_o t$  позволяет получить любое значение начальной фазы результирующего гармонического сигнала (рисунок 9.15в). В таблице 9.4 представлено правило определения весовых коэффициентов.

Таблица 9.4 – Соответствие значений кода и весовых коэффициентов

Значение кода	Весовые коэффициенты		Модель выходного сигнала
	$A_s(t)$	$A_c(t)$	
00	0.707	0.707	$\cos(\omega_o t - 45^\circ)$
01	0.707	-0.707	$\cos(\omega_o t - 135^\circ)$
11	-0.707	-0.707	$\cos(\omega_o t - 225^\circ)$
10	-0.707	0.707	$\cos(\omega_o t - 315^\circ)$

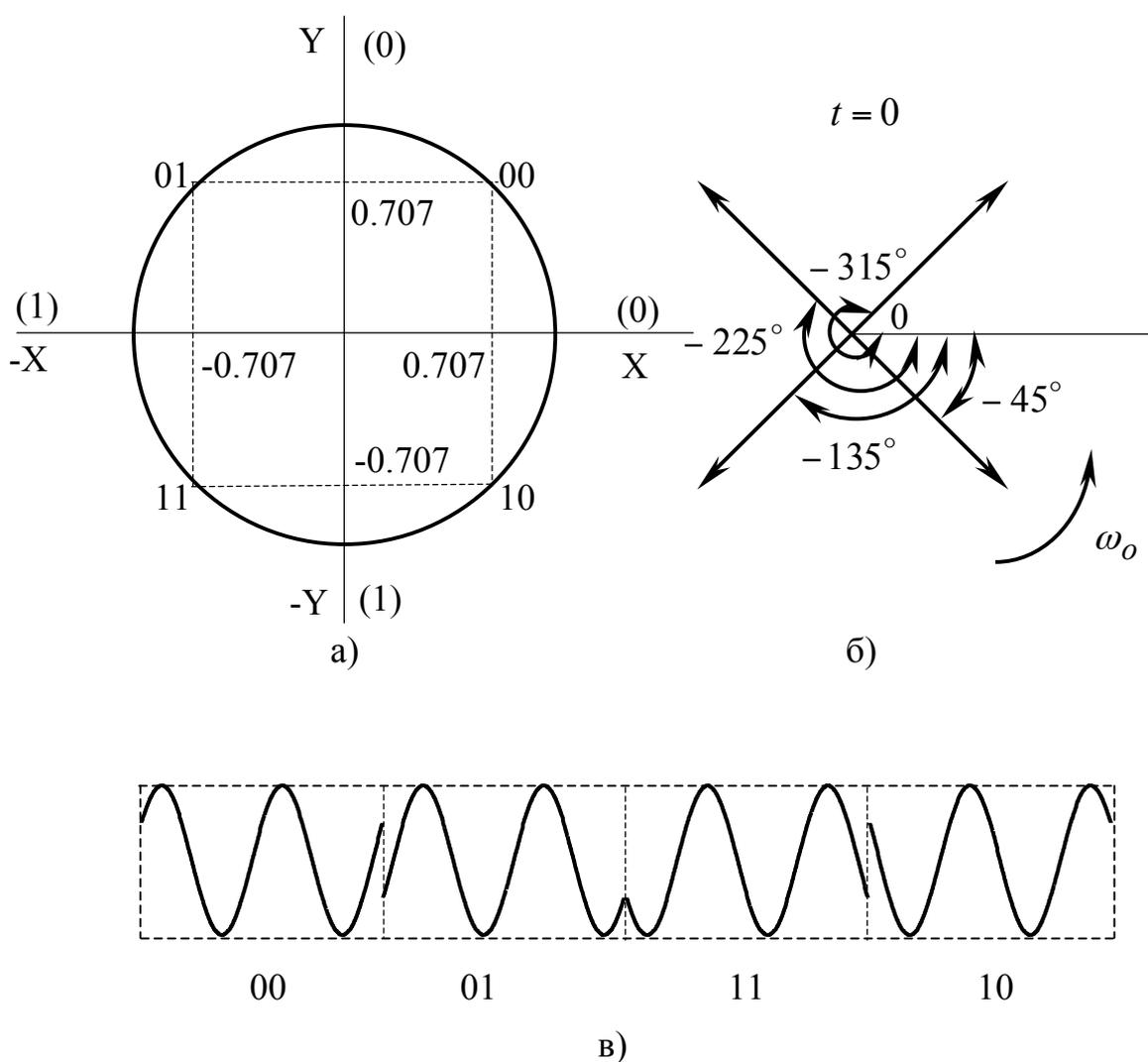


Рисунок 9.15 – Графическое представление: а)соответствия значений кода и весовых коэффициентов; б) четырех состояний векторной диаграммы модулированного сигнала в момент времени  $t = 0$ ; в) четырех вариантов осциллограммы четырехуровневого ФМ сигнала

Амплитуда сигнала на выходе модулятора остается постоянной, а начальная фаза переключается в начале тактового интервала в соответствии с кодом. Разность фаз между двумя соседними позициями кода может быть либо  $\pm 90^\circ$ , либо  $\pm 180^\circ$ . При этом в модели сигнала появляются разрывы или изломы. Абсолютная величина разрыва в  $\sqrt{2}$  превышает уровень амплитуды несущего колебания. Наличие разрывов определяет довольно-таки большую полосу частот, занимаемую 4ФМ-сигналом. Сужение полосы частот возможно с переходом на частотную манипуляцию с непрерывной фазой и малым индексом ( $m = 0.5$ ).

## 9.7 Выводы

1. При угловой модуляции информация об управляющем сигнале заключена в законе изменения фазового угла. При фазовой модуляции фазовый угол пропорционален управляющему сигналу, при частотной модуляции – интегралу от управляющего сигнала.

2. Основным параметром сигнала с угловой модуляцией является максимальное отклонение фазового угла, называемое индексом угловой модуляции. Если значение индекса не зависит от частоты управляющего сигнала, то речь идет о фазомодулированном сигнале. Если индекс увеличивается с ростом частоты управляющего сигнала, то имеет место частотно-модулированное колебание.

3. При угловой модуляции происходит нелинейное преобразование спектра управляющего сигнала. Теоретически ширина спектра сигнала с угловой модуляцией бесконечно велика. Практическая ширина спектра зависит от значения индекса угловой модуляции. Если индекс мал, то ширина спектра равна удвоенной максимальной частоте управляющего сигнала. Если величина индекса много больше единицы, то ширина спектра равна удвоенной девиации частоты.

4. Фазовую (и частотную) модуляцию можно реализовать с помощью амплитудной модуляции ортогональных несущих (квадратурной модуляции). Квадратурная модуляция предназначена для одновременной передачи двух независимых сигналов по одному частотному тракту. В общем случае квадратурно-модулированный сигнал представляет собой квазигармоническое колебание со смешанной (амплитудной и угловой) модуляцией. В частном случае, например, при дискретном переключении начальной фазы амплитуда несущего колебания не меняется.

5. В результате угловой модуляции при любом значении индекса происходит перераспределение мощности между несущим колебанием и всеми боковыми составляющими. Суммарная мощность сигнала с угловой модуляцией равна мощности немодулированного несущего колебания.

## 10 ОГИБАЮЩАЯ, ЧАСТОТА И ФАЗА УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

### 10.1 Физическая огибающая радиосигнала

Узкополосным называется сигнал, все спектральные составляющие которого группируются в относительно узкой полосе частот по сравнению с некоторой центральной частотой.

Узкополосный сигнал представляет собой сложное колебание, получающееся при одновременной модуляции несущего колебания как по амплитуде, так и по фазовому углу

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (10.1)$$

Здесь  $A(t)$  – физическая (естественная) огибающая узкополосного процесса;  $[\omega_0 t + \varphi(t)]$  – обобщенная фаза радиосигнала.

Обобщенная фаза равна сумме линейной компоненты  $\omega_0 t$  и фазового угла  $\varphi(t)$ , являющегося результатом возможной угловой модуляции.

Физическая огибающая радиосигнала характеризуется тремя основными свойствами:

1) физическая огибающая – неотрицательная величина

$$A(t) \geq s(t); \quad (10.2)$$

2) мгновенное значение огибающей равно мгновенному значению сигнала  $s(t)$  в моменты времени, когда

$$\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = 1;$$

3) скорость изменения огибающей и сигнала совпадают в эти же моменты времени, т.е.

$$A'(t) = s'(t), \text{ при } \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = 1. \quad (10.3)$$

### 10.2 Комплексная огибающая радиосигнала

Математическую модель узкополосного радиосигнала удобно представлять в виде суммы ортогональных составляющих

$$\begin{aligned} s(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - A(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t = \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Огибающая  $A(t)$  и фазовый угол  $\varphi(t)$  – относительно “медленно” меняются во времени по сравнению с высокочастотным несущим колебанием  $\cos(\omega_0 t)$  и образуют квадратурные компоненты  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$ .

$$\left. \begin{aligned} A_c(t) &= A(t) \cdot \cos \varphi(t) \\ A_s(t) &= A(t) \cdot \sin \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

По аналогии с гармоническими колебаниями выражение (10.1) можно записать в комплексной форме

$$s(t) = \operatorname{Re} \left( A(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_o t} \right) = \operatorname{Re} \left( \dot{A}(t) e^{j\omega_o t} \right). \quad (10.6)$$

Комплексная огибающая  $\dot{A}(t)$  радиосигнала содержит полную информацию о смешанной модуляции.

$$\dot{A}(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} = A(t) \cos \varphi(t) + jA(t) \sin \varphi(t) = A_c(t) + jA_s(t). \quad (10.7)$$

Зная комплексную огибающую  $\dot{A}(t)$  узкополосного радиосигнала, можно определить амплитудную и угловую модуляции.

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= |\dot{A}(t)| = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \varphi(t) &= \arg \dot{A}(t) = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Установим связь между спектральными плотностями комплексной огибающей  $\dot{A}(t)$  и радиосигнала  $s(t)$ .

Спектральная плотность комплексной огибающей располагается в окрестности нуля, т.к. физическая огибающая  $A(t)$  и фазовый угол  $\varphi(t)$  – “медленные” функции времени, повторяющие в той или иной мере низкочастотный управляющий сигнал.

$$\Phi[\dot{A}(t)] = \dot{A}(\omega). \quad (10.9)$$

Умножение  $\dot{A}(t)$  на  $e^{j\omega_o t}$  означает перенос спектральной плотности огибающей на частоту  $\omega_o$ , поэтому принято рассматривать  $\dot{A}(t)$  как низкочастотный эквивалент комплексной функции  $\dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_o t}$

$$\Phi[\dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_o t}] = \dot{A}(\omega - \omega_o). \quad (10.10)$$

Радиосигнал  $s(t)$  можно описать полусуммой двух комплексно – сопряженных временных функций

$$s(t) = \frac{1}{2} \left[ \dot{A}(t) e^{j\omega_o t} + \dot{A}^*(t) e^{-j\omega_o t} \right]. \quad (10.11)$$

Применяя прямое преобразование Фурье к (10.11), получим спектральную плотность радиосигнала, которая равна полусумме смещенных в окрестность точек  $\pm \omega_o$  комплексно–сопряженных спектральных плотностей огибающей

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \dot{A}(\omega - \omega_o) + \dot{A}^*(\omega + \omega_o) \right]. \quad (10.12)$$

Формула (10.12) полезна еще и тем, что по известной спектральной плотности узкополосного сигнала позволяет найти спектральную плотность комплексной огибающей. Затем с помощью обратного преобразования Фурье можно рассчитать временное представление комплексной огибающей  $\dot{A}(t)$ ,

которая, в свою очередь, определяет физическую огибающую  $A(t)$  и фазовый угол  $\varphi(t)$ .

На рисунке 10.1 изображены условные модели рассматриваемых спектральных плотностей.

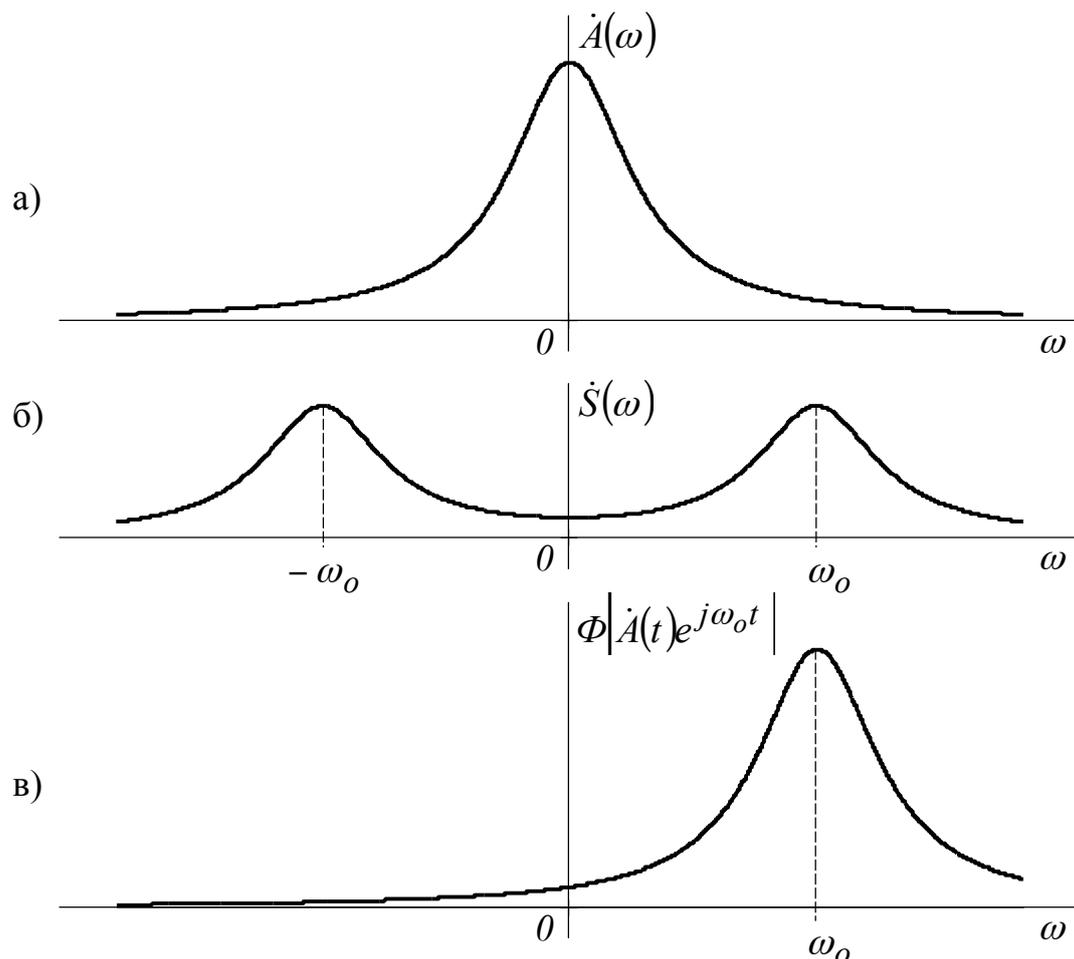


Рисунок 10.1 – Спектральные плотности: а) комплексной огибающей; б) вещественного радиосигнала; в) комплексного радиосигнала

### Пример 10.1

Расчет комплексной огибающей радиосигнала, изображение которого описывается функцией  $S(p) = \frac{(p + \alpha)\cos\varphi_0 - \omega_0 \sin\varphi_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ .

1) Приравняв знаменатель нулю, определяем полюса:

$$(p + \alpha)^2 + \omega_0^2 = 0;$$

$$p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0;$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0.$$

2) Представим  $S(p)$  суммой простых дробей

$$S(p) = \frac{H_1(p)}{H_2(p)} = \frac{H_1(p)}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A_1(p_1)}{(p-p_1)} + \frac{A_2(p_2)}{(p-p_2)}.$$

Здесь

$$A_1(p_1) = \frac{H_1(p_1)}{(p_1-p_2)} = \frac{\omega_o(j \cos \varphi_o - \sin \varphi_o)}{2j\omega_o} = \frac{1}{2}(\cos \varphi_o + j \sin \varphi_o) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_o};$$

$$A_2(p_2) = \frac{H_1(p_2)}{(p_2-p_1)} = \frac{\omega_o(j \cos \varphi_o + \sin \varphi_o)}{2j\omega_o} = \frac{1}{2}(\cos \varphi_o - j \sin \varphi_o) = \frac{1}{2}e^{-j\varphi_o}.$$

3) Заменяя комплексную частоту  $p$  на действительную частоту  $j\omega$ , получим спектральную плотность радиосигнала в виде (10.12):

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{2}e^{j\varphi_o} \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_o)} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_o} \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_o)} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{A}(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}\dot{A}^*(\omega + \omega_o); \\ \dot{A}(\omega - \omega_o) &= e^{j\varphi_o} \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_o)}. \end{aligned}$$

4) Выполняя замену переменных  $\omega = \Omega + \omega_o$ , найдем спектральную плотность комплексной огибающей

$$\dot{A}(\Omega) = e^{j\varphi_o} \frac{1}{\alpha + j\Omega}.$$

5) Применяя обратное преобразование Фурье (или Лапласа, при  $j\Omega = p$ ), определим комплексную огибающую радиосигнала

$$\dot{A}(t) = L^{-1} \left[ e^{j\varphi_o} \frac{1}{\alpha + p} \right] = e^{j\varphi_o} \cdot e^{-\alpha t} \sigma(t).$$

6) Восстановим радиосигнал

$$s(t) = \operatorname{Re} \left[ \dot{A}(t) e^{j\omega_o t} \right] = e^{-\alpha t} \cos(\omega_o t + \varphi_o) \sigma(t).$$

Квадратурные составляющие комплексной огибающей радиосигнала можно выделить из состава радиосигнала аппаратным способом с помощью генератора опорного сигнала  $\cos(\omega_o t)$ , умножителей и фильтров нижних частот (ФНЧ), изображенных на рисунке 10.2.

Сигнал на выходе каждого из умножителей представляет собой сумму “медленной” и быстроосциллирующей (высокочастотной) составляющих

$$s_{\text{ввх}1}(t) = \frac{1}{2} A_c(t) + \frac{1}{2} A(t) \cos[2\omega_o t + \varphi(t)]. \quad (10.13)$$

$$s_{\text{ввх}2}(t) = -\frac{1}{2} A_s(t) + \frac{1}{2} A(t) \sin[2\omega_o t + \varphi(t)]. \quad (10.14)$$

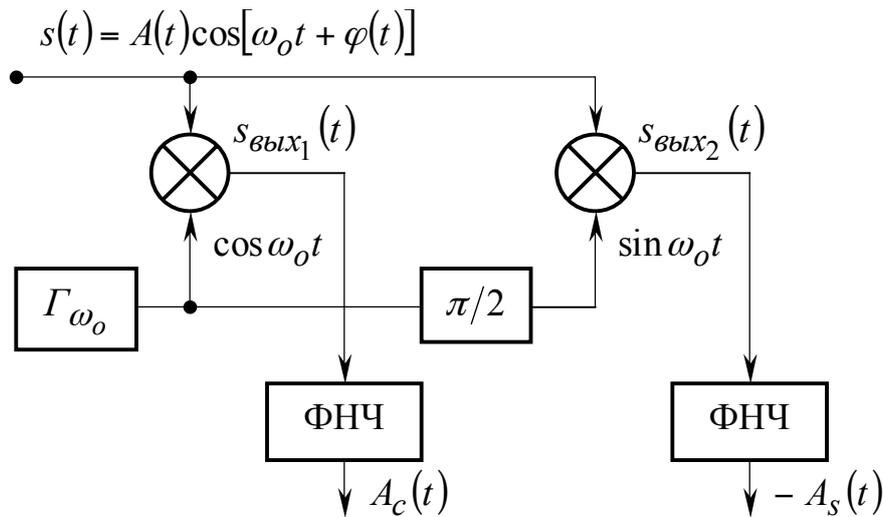


Рисунок 10.2 – Структурная схема выделения квадратурных составляющих радиосигнала

Приведенный убедительный математический аппарат и рассмотренная структурная схема дают возможность однозначно определить закон изменения огибающей  $A(t)$  и фазового угла  $\varphi(t)$  только в том случае, если известна центральная частота радиосигнала  $\omega_0$ .

При приеме радиосигнала либо центральная частота известна с погрешностью  $\Delta\omega$ , либо опорный генератор вырабатывает синхронные колебания с погрешностью, т.е.

$$s(t) = A(t)\cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi(t)] = \\ = A(t)\cos[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)]\cos(\omega_0 t) - A(t)\sin[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)]\sin(\omega_0 t), \quad (10.15)$$

$$s(t) = \operatorname{Re} A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\Delta\omega t}e^{j\omega_0 t}, \quad (10.16)$$

$$\dot{A}^\Delta(t) = \dot{A}(t)e^{j\Delta\omega t}, \quad (10.17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_c^\Delta(t) &= A(t)\cos[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)] \\ A_s^\Delta(t) &= A(t)\sin[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)] \end{aligned} \right\}. \quad (10.18)$$

Обработка квадратурных составляющих  $A_c^\Delta(t)$  и  $A_s^\Delta(t)$  позволяет определить закон изменения огибающей

$$A(t) = \sqrt{[A_c^\Delta(t)]^2 + [A_s^\Delta(t)]^2}. \quad (10.19)$$

В закон изменения фазового угла входит линейно нарастающая ошибка

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sin[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)]}{\cos[\Delta\omega \cdot t + \varphi(t)]} = \varphi(t) + \Delta\omega t. \quad (10.20)$$

Извлечение информации становится невозможным.

### 10.3 Применение преобразования Гильберта для определения огибающей и фазового угла узкополосного сигнала

Чтобы исключить зависимость определения огибающей  $A(t)$  и фазового угла  $\Psi(t)$  от центральной частоты  $\omega_o$ , запишем модель сигнала в более общем по сравнению с (10.1) виде

$$s(t) = A(t)\cos\Psi(t). \quad (10.21)$$

Поставим задачу однозначного определения параметров  $A(t)$  и обобщенного фазового угла  $\Psi(t)$ . Полагая, что выражение (10.17) аналитически описывает проекцию вектора  $A(t)$  на ось абсцисс, составим дополнительное уравнение как проекцию вектора  $A(t)$  на ось ординат (рисунок 10.3 б).

$$v(t) = A(t)\sin\Psi(t). \quad (10.22)$$

Получившееся колебание  $v(t)$  называют сопряженным сигналом в отличие от физического сигнала  $s(t)$ .

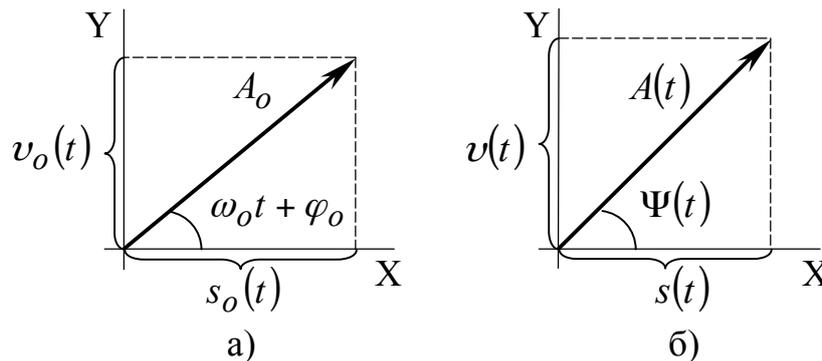


Рисунок 10.3 – Представление узкополосного сигнала в виде двух проекций в декартовой системе координат: а) несущее колебание; б) модулированное колебание

Решение системы уравнений (10.21) и (10.22) относительно  $A(t)$  и  $\Psi(t)$  дает:

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + v^2(t)}; \quad (10.23)$$

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{v(t)}{s(t)}. \quad (10.24)$$

Дифференцирование  $\Psi(t)$  по времени позволяет определить закон изменения мгновенной частоты

$$\omega(t) = \frac{v'(t)s(t) - s'(t)v(t)}{s^2(t) + v^2(t)}. \quad (10.25)$$

Однако, ни аналитическим, ни аппаратным путем не удастся произвольному физическому сигналу (10.21) поставить в соответствие сопряжен-

ный сигнал (10.22). Такую задачу можно решить либо для одного гармонического колебания, либо для суммы гармонических колебаний, иными словами, для сигналов с ограниченным спектром.

Пусть узкополосный сигнал представляет собой сумму гармонических колебаний общего вида.

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos \Psi_i(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \quad (10.26)$$

Произведя сложение векторов, представим сигнал (10.26) в форме квазигармонического колебания с параметрами  $A_\Sigma(t)$  и  $\Psi_\Sigma(t)$  (рисунок 10.4).

$$s(t) = A_\Sigma(t) \cos \Psi_\Sigma(t). \quad (10.27)$$

Для определения результирующих параметров  $A_\Sigma(t)$  и  $\Psi_\Sigma(t)$  введем сопряженный сигнал  $v(t)$  как проекцию суммы слагаемых на ось ординат.

$$v(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin \Psi_i(t) = A_\Sigma(t) \cdot \sin \Psi_\Sigma(t). \quad (10.28)$$

Решая систему из двух уравнений (10.27) и (10.28) относительно результирующих параметров  $A_\Sigma(t)$  и  $\Psi_\Sigma(t)$ , найдем:

$$A_\Sigma(t) = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N A_i \cos \Psi_i(t) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^N A_i \sin \Psi_i(t) \right]^2}; \quad (10.29)$$

$$\Psi_\Sigma(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=1}^N A_i \sin \Psi_i(t)}{\sum_{i=1}^N A_i \cos \Psi_i(t)}. \quad (10.30)$$

Сравним между собой физический  $s(t)$  и сопряженный  $v(t)$  сигнал (в рамках гармонической модели):

$$\begin{aligned} s_o(t) &= A_o \cos(\omega_o t + \varphi_o) = \frac{A_o}{2} \left[ e^{j(\omega_o t + \varphi_o)} + e^{-j(\omega_o t + \varphi_o)} \right] \\ v_o(t) &= A_o \sin(\omega_o t + \varphi_o) = \frac{A_o}{2} \left[ -j \cdot e^{j(\omega_o t + \varphi_o)} + j \cdot e^{-j(\omega_o t + \varphi_o)} \right] \end{aligned} \quad (10.31)$$

В частном случае для гармонического колебания сопряженный сигнал  $v_o(t)$  отличается от физического сигнала  $s_o(t)$  только сдвигом фазы на  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  в точке  $\omega = \omega_o$  и, соответственно, на  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  в точке  $\omega = -\omega_o$ .

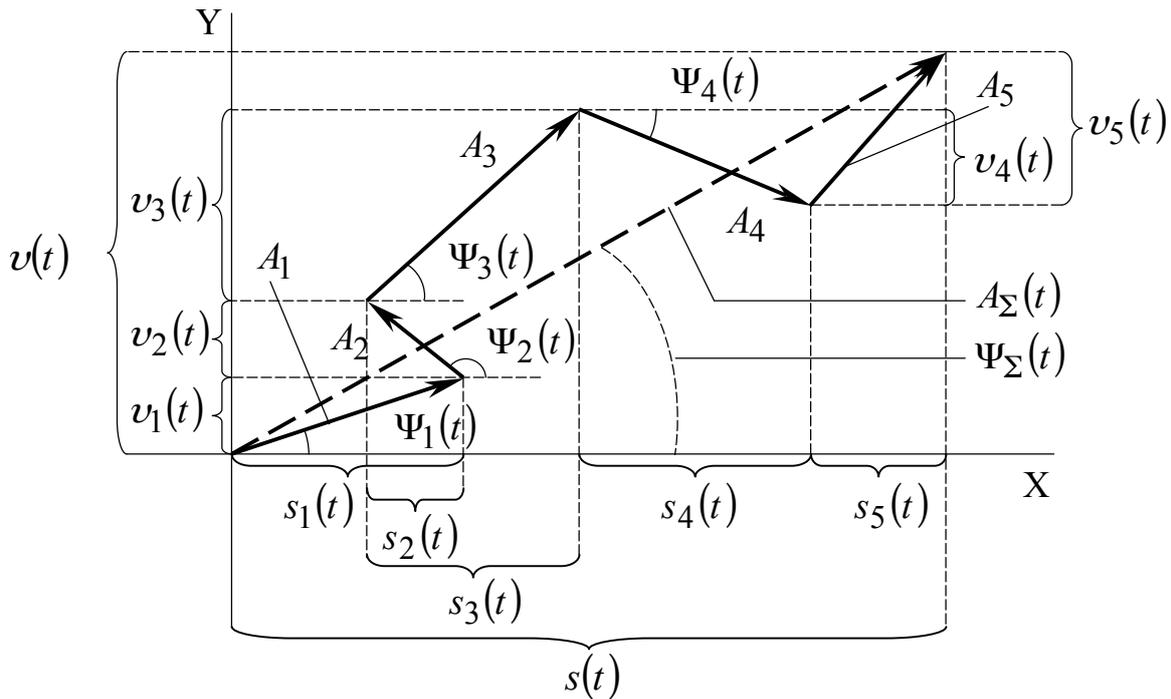


Рисунок 10.4 – Графическое представление суммы гармонических колебаний в виде проекции в декартовой системе координат

В более общем случае естественно определить сопряженный сигнал  $v(t)$  как результат поворота фаз всех гармонических составляющих с положительными частотами на  $(-\pi/2)$ , а с отрицательными – на  $(+\pi/2)$ .

Частотно – зависимая цепь, выполняющая поворот фаз, называется фильтром Гильберта (или преобразователем Гильберта).

Сопряженный сигнал  $v(t)$  можно представить как результат прохождения физического сигнала  $s(t)$  через фильтр Гильберта.

Комплексный коэффициент передачи  $\dot{K}_\Gamma(\omega)$  описывается выражением вида

$$\dot{K}_\Gamma(\omega) = -j \cdot \text{sign}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega \geq 0 \\ j, & \omega \leq 0 \end{cases} \quad (10.32)$$

Спектральные плотности физического и сопряженного сигналов на входе и выходе фильтра Гильберта (рисунок 10.5 а) связаны между собой следующим образом

$$\dot{V}(\omega) = -j \cdot \text{sign}(\omega) \cdot \dot{S}(\omega). \quad (10.33)$$

Зная спектральную плотность сопряженного сигнала  $\dot{V}(\omega)$ , можно из (10.33) найти спектральную плотность физического сигнала  $\dot{S}(\omega)$

$$\dot{S}(\omega) = j \cdot \text{sign}(\omega) \cdot \dot{V}(\omega). \quad (10.34)$$

На рисунке 10.5 изображены фильтры Гильберта, позволяющие преобразовать физический сигнал в сопряженный (а) и наоборот (б).

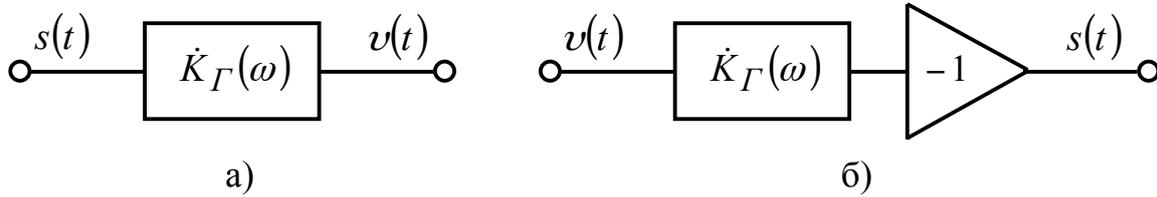


Рисунок 10.5 – Два фильтра Гильберта: а) прямой; б) обратный

Спектральные плотности физического и сопряженного сигналов содержат действительную и мнимую части, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \text{Re}\dot{S}(\omega) + j \text{Im}\dot{S}(\omega) \\ \dot{V}(\omega) &= \text{Re}\dot{V}(\omega) + j \text{Im}\dot{V}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

На рисунке 10.6 изображены действительные и мнимые части спектральных плотностей физического  $s(t)$  (а) и сопряженного  $v(t)$  (б) сигналов (сигналов, сопряженных по Гильберту).

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}\dot{V}(\omega) &= \text{sign}(\omega) \cdot \text{Im}[\dot{S}(\omega)] \\ \text{Im}\dot{V}(\omega) &= -\text{sign}(\omega) \cdot \text{Re}[\dot{S}(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

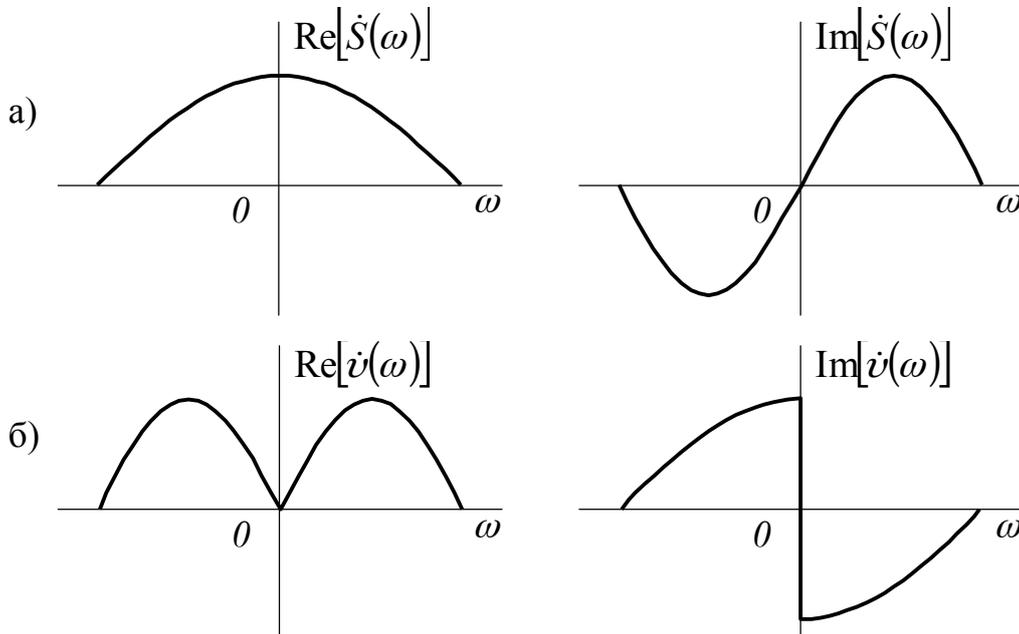


Рисунок 10.6 – Графическое представление действительной и мнимой частей спектральных плотностей: а) физического сигнала; б) сопряженного сигнала

Перейдем от частотного анализа к временному. Найдем импульсную характеристику фильтра Гильберта

$$g_{\Gamma}(t) = \Phi^{-1}[\dot{K}_{\Gamma}(\omega)] = -j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi \cdot t} \quad (10.37)$$

(при выполнении интегрирования использовались приемы, рассмотренные в примере 3.4, или см. таблицу 3.4, строку 4).

Сопряженный сигнал  $v(t)$  на выходе фильтра Гильберта определится как свертка физического сигнала  $s(t)$  с импульсной характеристикой фильтра Гильберта

$$v(t) = s(t) \otimes \left( \frac{1}{\pi \cdot t} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (10.38)$$

Выражение (10.38) называется прямым преобразованием Гильберта. Зная сопряженный сигнал  $v(t)$ , нетрудно определить физический сигнал  $s(t)$  с помощью обратного преобразование Гильберта

$$s(t) = v(t) \otimes \left( -\frac{1}{\pi \cdot t} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (10.39)$$

Применение преобразований Гильберта позволяет однозначно определить огибающую, мгновенную частоту и полную фазу сигнала  $s(t)$  по Гильберту (рисунок 10.7)

$$A_{\Gamma}(t) = \sqrt{s^2(t) + v^2(t)}, \quad \omega_{\Gamma}(t) = \frac{d}{dt} \Psi(t), \quad \Psi_{\Gamma}(t) = \arctg \frac{v(t)}{s(t)} \quad (10.40)$$

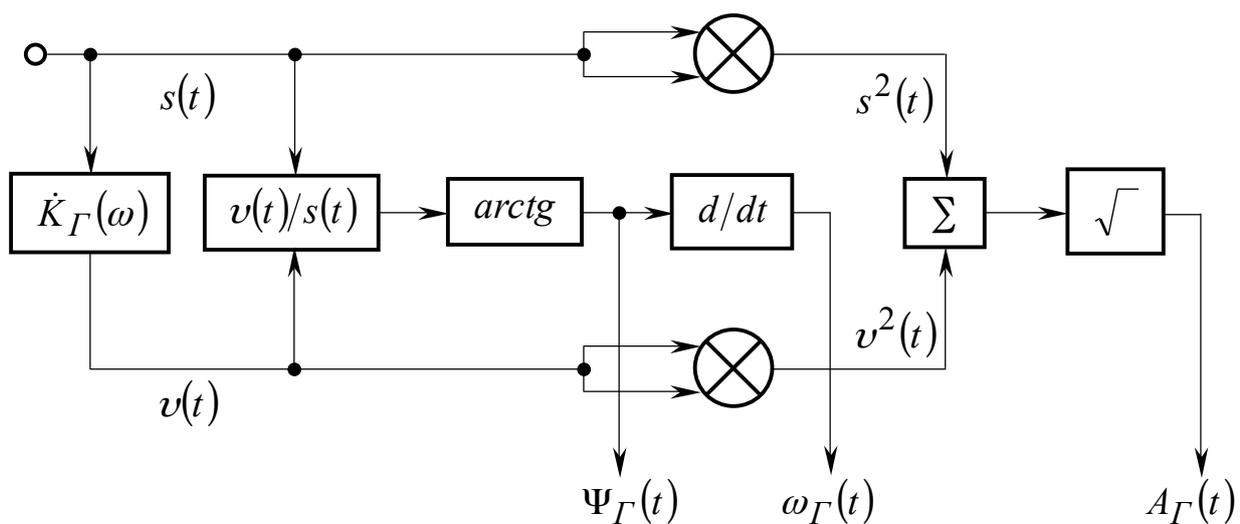


Рисунок 10.7 – Структурная схема, реализующая алгоритм выделения огибающей, частоты и фазы узкополосного сигнала по Гильберту

### 10.4 Аналитический сигнал и его свойства

Обобщением символического метода является представление любого сложного сигнала  $s(t)$  с изменяющимися амплитудой и фазой комплексной функцией  $\dot{Z}(t)$ .

Комплексная функция  $\dot{Z}(t)$ , у которой реальная и мнимая части связаны между собой парой преобразований Гильберта, называется *аналитическим сигналом*.

$$\dot{Z}(t) = s(t) + jv(t), \quad (10.41)$$

где  $\text{Re}[\dot{Z}(t)] = s(t)$ , а  $\text{Im}[\dot{Z}(t)] = v(t)$ .

Модуль и аргумент аналитического сигнала определяют огибающую и полную фазу по Гильберту.

$$\left. \begin{aligned} |\dot{Z}(t)| &= \sqrt{s^2(t) + v^2(t)} = A_{\Gamma}(t) \\ \arg \dot{Z}(t) &= \text{arctg} \frac{v(t)}{s(t)} = \Psi_{\Gamma}(t) \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

Спектральная плотность аналитического сигнала равна

$$\begin{aligned} \Phi^+[\dot{Z}(t)] &= \dot{Z}(\omega) = \dot{S}(\omega) + j[-j \cdot \text{sign}(\omega)] \cdot \dot{S}(\omega). \\ \dot{Z}(\omega) &= \dot{S}(\omega)[1 + \text{sign}(\omega)] = \begin{cases} 2\dot{S}(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.43)$$

Чтобы понять, чем огибающая по Гильберту  $A_{\Gamma}(t)$  отличается от физической огибающей  $A(t)$ , сравним частотные характеристики физического сигнала  $s(t)$  и аналитического сигнала  $\dot{Z}(t) = s(t) + jv(t)$  (рисунок 10.8).

Анализируя частотные модели, изображенные на рисунке 10.8, можно сказать, что огибающая по Гильберту только в том случае совпадает с физической огибающей, если комплексная огибающая физического сигнала будет обладать ограниченным спектром (на рисунке 10.8 изображен пунктиром). Наивысшая частота в спектре огибающей не превышает  $\omega_{\max}$ , а частота несущего колебания  $\omega_0$  больше, чем  $\omega_{\max}$ .

Выражение (10.12) для спектральной плотности радиосигнала целесообразно представить в виде:

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{A}(\omega - \omega_0) & , \quad \omega > 0 \\ \frac{1}{2} \dot{A}^*(\omega + \omega_0) & , \quad \omega < 0 \end{cases} \quad (10.44)$$

Спектральная плотность сигнала, сопряженного по Гильберту с учетом (10.33), запишется аналогично

$$\dot{v}(\omega) = \begin{cases} -j\frac{1}{2}\dot{A}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ j\frac{1}{2}\dot{A}^*(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (10.45)$$

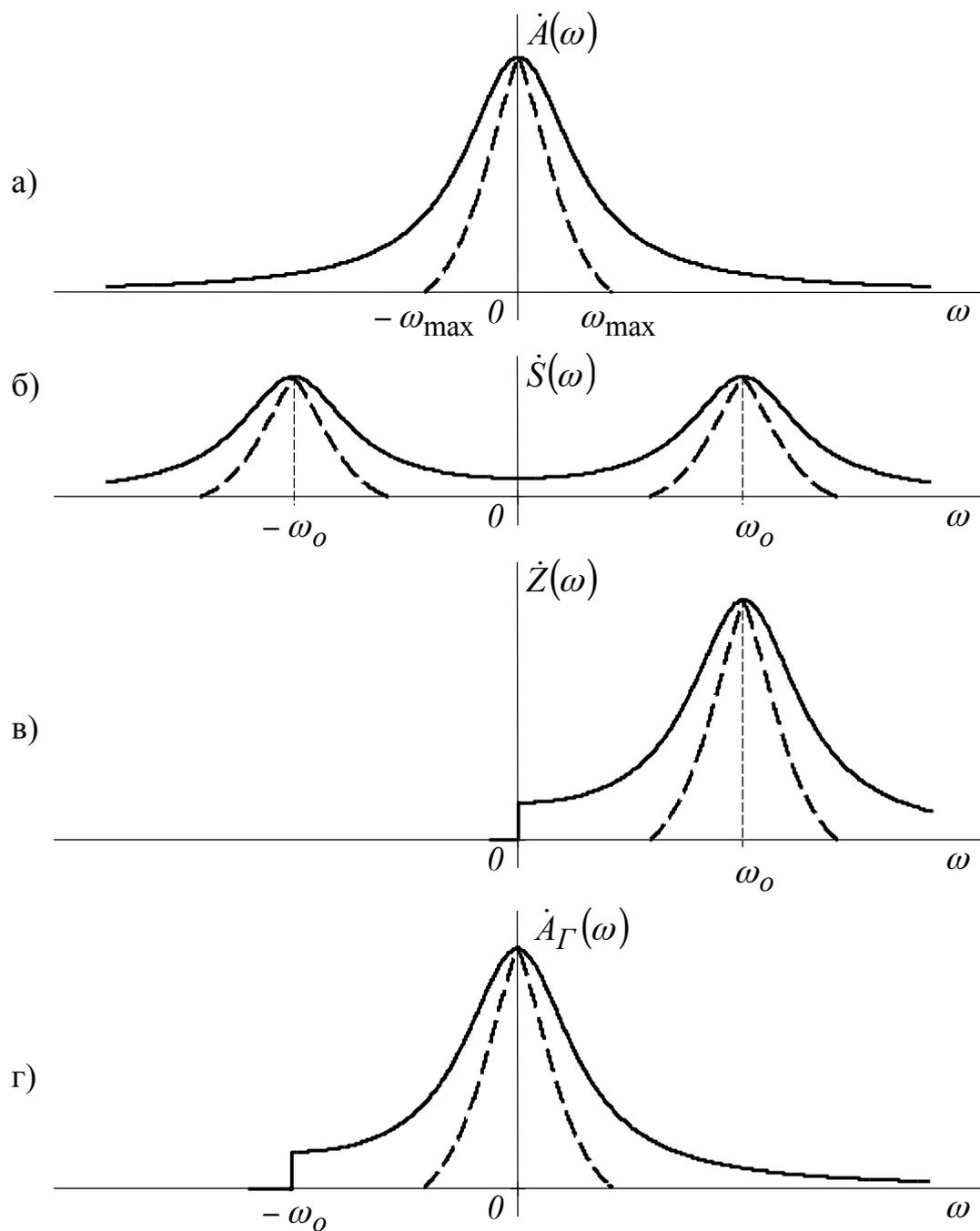


Рисунок 10.8 – Спектральные плотности: а) комплексной огибающей  $A(t)$ ; б) физического сигнала  $s(t)$ ; в) аналитического сигнала  $\dot{Z}(t)$ ; г) комплексной огибающей по Гильберту  $A_\Gamma(t)$

Переходя к спектральным плотностям комплексных огибающих физического  $\dot{A}(t)$  и сопряженного  $\dot{A}_v(t)$  сигналов, получим

$$\dot{A}_v(\omega) = -j\dot{A}(\omega). \quad (10.46)$$

Физический узкополосный радиосигнал представляет собой сумму квадратурных составляющих (10.4)

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\left[\dot{A}(t)e^{j\omega_0 t}\right] = \operatorname{Re}\left\{[A_c(t) + jA_s(t)] \cdot (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)\right\} = \\ &= A_c(t) \cdot \cos \omega_0 t - A_s(t) \cdot \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Сигнал, сопряженный по Гильберту, – также узкополосный. Он будет иметь комплексную огибающую, отличающуюся умножением на  $(-j)$ .

$$\dot{A}_v(t) = -j[\dot{A}(t)] = A_s(t) - jA_c(t). \quad (10.47)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{Re}\left[\dot{A}_v(t)e^{j\omega_0 t}\right] = \operatorname{Re}\left\{[A_s(t) - jA_c(t)] \cdot (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)\right\} = \\ &= A_s(t) \cdot \cos \omega_0 t + A_c(t) \cdot \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить другим путем.

Если  $\omega_0 > \omega_{\max}$ , то комплексная функция  $\left|\dot{A}(t)e^{j\omega_0 t}\right|$  является аналитическим сигналом, т.к. ее спектр расположен только в области положительных частот, т.е.

$$\dot{Z}(t) = \dot{A}(t)e^{j\omega_0 t} = s(t) + jv(t). \quad (10.48)$$

Представим аналитический сигнал суммой действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= [A_c(t) + jA_s(t)] \cdot [\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t] = \\ &= \underbrace{A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t}_{s(t)} + j \left[ \underbrace{A_c(t) \sin \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t}_{v(t)} \right]. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Выполняя расчет огибающей, полной фазы и мгновенной частоты, получим:

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + v^2(t)} = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}; \quad (10.50)$$

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{v(t)}{s(t)} = \omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{A_s(t)}{A_c(t)}; \quad (10.51)$$

$$\omega(t) = \Psi'(t) = \omega_0 + \frac{A_s'(t) \cdot A_c(t) - A_c'(t) \cdot A_s(t)}{A_s^2(t) + A_c^2(t)}. \quad (10.52)$$

### Пример 10.2

Рассчитать огибающую, полную фазу и мгновенную частоту идеально-го полосового сигнала, спектр которого ограничен интервалом частот  $[\omega_1, \omega_2]$ .

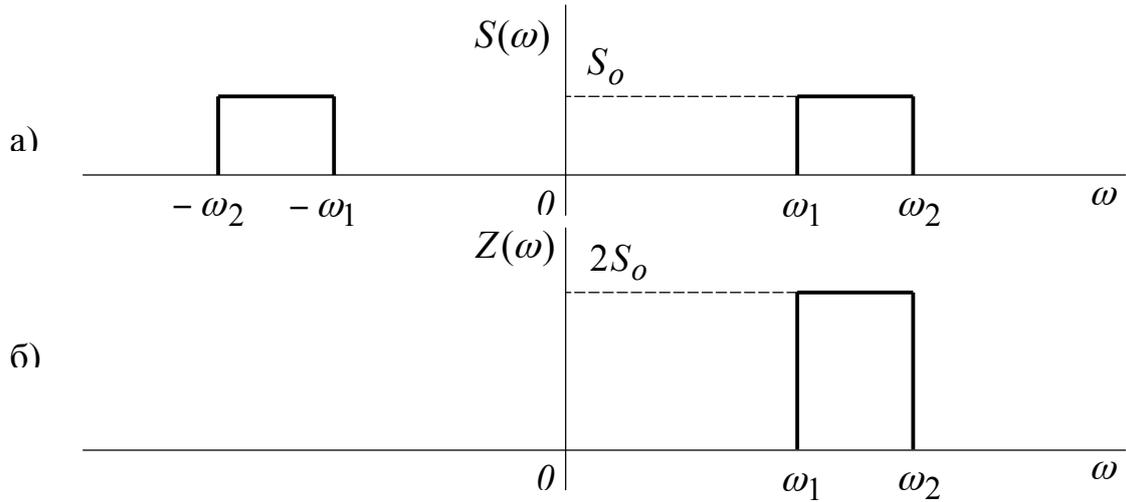


Рисунок 10.9 – Спектральное представление физического (а) и аналитического (б) сигналов

Спектральной плотности  $Z(\omega)$ , изображенной на рисунке 10.9 б), соответствует аналитический сигнал  $\dot{Z}(t)$

$$\dot{Z}(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega t} = \frac{S_0}{\pi \cdot t} [(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) - j(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)].$$

Физическая огибающая исходного полосового сигнала совпадает с огибающей аналитического сигнала

$$A(t) = \frac{S_0}{\pi \cdot t} \sqrt{(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t)^2 + (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)^2} = \frac{S_0(\omega_2 - \omega_1)}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t} \right|.$$

Полная фаза полосового сигнала определится по формуле (10.51)

$$\Psi(t) = -\operatorname{arctg} \frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t} = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sin \frac{\omega_2 t + \omega_1 t}{2} \cdot \sin \frac{\omega_2 t - \omega_1 t}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\omega_2 t + \omega_1 t}{2} \cdot \sin \frac{\omega_2 t - \omega_1 t}{2}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t.$$

Наконец, мгновенная частота сигнала равна

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \Psi(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0.$$

Мгновенная частота не зависит от времени и равняется центральной частоте того интервала, в котором сосредоточен спектр.

## 10.5 Выводы

1. Узкополосные сигналы занимают диапазон частот, ширина которого значительно меньше центральной частоты. Узкополосные сигналы называют квазигармоническими, т.к. их огибающая и частота медленно меняются во времени.

2. Узкополосные сигналы удобно представлять через квадратурные компоненты, а огибающую и фазу – через комплексную огибающую. Понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексных амплитуд гармонических колебаний. Комплексная огибающая объединяет все “медленные” процессы и является низкочастотным эквивалентом узкополосного радиосигнала.

Естественная огибающая узкополосного сигнала равна модулю комплексной огибающей и не зависит от значения центральной частоты.

Обобщенная фаза узкополосного сигнала равна сумме аргумента комплексной огибающей и линейного слагаемого, значения которого прямо пропорционально центральной частоте.

3. Квадратурная обработка узкополосных сигналов позволяет найти огибающую и фазовый угол узкополосного процесса.

Определение закона изменения фазового угла с помощью квадратурной обработки характеризуется линейно нарастающей погрешностью, если опорная частота приемника не совпадает с центральной частотой спектра сигнала.

4. Определение огибающей и фазы с помощью аналитического сигнала не зависит от центральной частоты. Аналитический сигнал имеет мнимую и вещественную части, связанные парой преобразований Гильберта. Физический узкополосный сигнал равен реальной части аналитического сигнала. Спектр аналитического сигнала лежит полностью в области положительных частот. Спектр комплексно–сопряженного аналитического сигнала лежит полностью в области отрицательных частот.

5. Модуль и аргумент аналитического сигнала называют огибающей и обобщенной фазой узкополосного процесса по Гильберту.

Огибающая по Гильберту совпадает с физической огибающей в том случае, если комплексная огибающая сигнала характеризуется ограниченным спектром, причем верхняя частота в спектре огибающей меньше центральной частоты узкополосного сигнала.

Мгновенная частота узкополосного сигнала равна производной от аргумента аналитического сигнала.

6. Преобразователь (фильтр) Гильберта, связывающий между собой физически узкополосный сигнал и сигнал, сопряженный по Гильберту, представляет собой частотно–независимый фазовращатель, который осуществляет поворот фазы всех гармонических колебаний на одинаковый угол  $-\pi/2$ .

Операции, связанные с преобразованиями Гильберта, становятся физически реализуемыми и существенно упрощаются, если узкополосный сигнал представлен квадратурными компонентами.

## 11 МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

### 11.1 Понятие низкочастотного эквивалента избирательной цепи

При передаче информации на расстояние широкое применение получил способ частотного разделения сигналов. Для этой цели применяются узкополосные сигналы, которые занимают полосу частот много меньше некоторой центральной частоты  $\omega_0$ . Выделение нужного сигнала при приеме осуществляется с помощью частотно-избирательных цепей, полоса пропускания которых располагается в окрестности резонансной частоты  $\omega_p$ . Примером простейших полосовых фильтров являются последовательные и параллельные контуры. Анализ прохождения узкополосных сигналов через избирательные цепи существенно упрощается при использовании комплексных огибающих узкополосных процессов, анализу которых посвящена предыдущая глава.

В комплексной форме можно представить не только узкополосный сигнал, но и импульсную характеристику избирательной цепи

$$g(t) = \operatorname{Re} \left[ \dot{G}(t) \cdot e^{j\omega_p t} \right], \quad (11.1)$$

где  $\dot{G}(t)$  – комплексная огибающая импульсной характеристики;

$e^{j\omega_p t}$  – быстро осциллирующая функция времени;

$\omega_p$  – резонансная частота контура, близкая к частоте свободных колебаний.

Комплексную огибающую  $\dot{G}(t)$  называют низкочастотным эквивалентом импульсной характеристики избирательной цепи.

По аналогии с сигналом импульсную характеристику цепи можно описать полусуммой комплексно-сопряженных функций

$$g(t) = \frac{1}{2} \dot{G}(t) \cdot e^{j\omega_p t} + \frac{1}{2} \dot{G}^*(t) \cdot e^{-j\omega_p t}. \quad (11.2)$$

Применение прямого преобразования Фурье к (11.2), позволяет получить комплексную передаточную функцию избирательной цепи в виде суммы комплексно-сопряженных составляющих, смещенных в окрестность точек  $\pm \omega_p$ .

$$\Phi[g(t)] = \dot{K}(\omega) = \dot{K}(\omega - \omega_p) + \dot{K}^*(\omega + \omega_p), \quad (11.3)$$

где

$$\dot{K}(\omega - \omega_p) = \frac{1}{2} \dot{G}(\omega - \omega_p), \quad (11.4)$$

$$\dot{K}^*(\omega + \omega_p) = \frac{1}{2} \dot{G}^*(\omega + \omega_p). \quad (11.5)$$

Спектральная плотность комплексной огибающей  $\dot{G}(t)$  сосредоточена внутри полосы пропускания в окрестности резонансной частоты и быстро затухает по мере удаления от нее. Поэтому для высокодобротных избирательных систем взаимным влиянием комплексно-сопряженных слагаемых  $\dot{K}(\omega)$  можно пренебречь

$$\dot{K}(\omega) = \begin{cases} \dot{K}(\omega - \omega_p) = \frac{1}{2} \dot{G}(\omega - \omega_p), \omega < 0, \\ \dot{K}^*(\omega + \omega_p) = \frac{1}{2} \dot{G}^*(\omega + \omega_p), \omega > 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

Низкочастотным эквивалентом (НЧ - эквивалентом) избирательной цепи называют воображаемую цепь, комплексная передаточная функция которой получается путем смещения одной из двух комплексных компонент, например,  $\dot{K}(\omega - \omega_p)$  из окрестности частоты  $\omega_p$  в окрестность нуля. Для перехода к НЧ - эквиваленту достаточно выполнить в (11.4) замену переменных  $\omega = \omega_p + \Omega$

$$\dot{K}_{НЧ}(\Omega) = \frac{1}{2} \dot{G}(\Omega). \quad (11.7)$$

Импульсная характеристика НЧ - эквивалента с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2}$  совпадает с комплексной огибающей импульсной характеристики избирательной цепи

$$g_{НЧ}(t) = \Phi^{-1}[\dot{K}_{НЧ}(\Omega)] = \frac{1}{2} \dot{G}(t). \quad (11.8)$$

## 11.2 Расчет НЧ – эквивалентов простейших колебательных цепей

Простейшие последовательные и параллельные колебательные контуры изучают в курсе «Основы теории цепей».

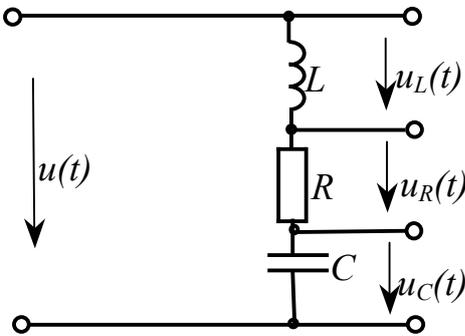
Частотные характеристики избирательных цепей зависят от главного параметра, называемого обобщенной расстройкой.

$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega} \right). \quad (11.9)$$

От точной модели обобщенной расстройки легко перейти к приближенной, т.к. в пределах полосы пропускания контура текущая частота  $\omega$  практически не отличается от резонансной  $\omega_P$ , т.е.  $\omega + \omega_P \approx 2\omega$ .

$$\xi \approx Q \frac{(\omega - \omega_P)(\omega + \omega_P)}{\omega \cdot \omega_P} \approx 2 \frac{Q}{\omega_P} (\omega - \omega_P). \quad (11.10)$$

**Пример 11.1** – Расчет НЧ-эквивалента последовательного колебательно-го контура.



Комплексные передаточные функции трех возможных вариантов построения последовательного колебательного контура запишутся в виде:

Рисунок 11.1

$$\dot{K}_R(\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega}\right)},$$

$$\dot{K}_L(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{j\omega L/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega}\right)},$$

$$\dot{K}_C(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{j \cdot 1/\omega C R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega}\right)}.$$

Переходя от точной модели обобщенной расстройки к приближенной, получим смещенную в точку  $\omega_P$  составляющую каждой из трех комплексных передаточных функций.

$$\dot{K}_R(\omega - \omega_P) \approx \frac{1}{1 + j \frac{2Q}{\omega_P}(\omega - \omega_P)} = \frac{\alpha}{\alpha + j(\omega - \omega_P)},$$

$$\dot{K}_L(\omega - \omega_P) \approx \frac{jQ}{1 + j \frac{2Q}{\omega_P}(\omega - \omega_P)} = jQ \frac{\alpha}{\alpha + j(\omega - \omega_P)},$$

$$\dot{K}_C(\omega - \omega_P) \approx -\frac{jQ}{1 + j \frac{2Q}{\omega_P}(\omega - \omega_P)} = -jQ \frac{\alpha}{\alpha + j(\omega - \omega_P)},$$

$$\text{где } \alpha = \omega_P / 2Q, \quad \omega L / R \approx \omega_P L / R = Q, \quad 1 / \omega C R \approx 1 / \omega_P C R = Q.$$

Выполняя замену переменных  $\omega = \omega_P + \Omega$ , найдем НЧ – эквиваленты трех цепей. Пользуясь обратным преобразованием Фурье, рассчитаем импульсные характеристики.

$$\dot{K}_{R_{НЧ}}(\Omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\Omega}, \quad g_{R_{НЧ}}(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

$$\dot{K}_{L_{НЧ}}(\Omega) = jQ \frac{\alpha}{\alpha + j\Omega}, \quad g_{L_{НЧ}}(t) = jQ\alpha \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

$$\dot{K}_{C_{НЧ}}(\Omega) = -jQ \frac{\alpha}{\alpha + j\Omega}, \quad g_{C_{НЧ}}(t) = -jQ\alpha \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Все три НЧ – эквивалента с точностью до постоянного множителя совпадают с простейшим фильтром нижних частот первого порядка. На рисунке 11.2 изображены частотные характеристики трех моделей  $\dot{K}_C(\omega)$ ,  $\dot{K}_C(\omega - \omega_P)$ ,  $\dot{K}_{C_{НЧ}}(\Omega)$  (Расчет выполнен для  $Q=5$  специально, чтобы показать поведение частотных характеристик, не меняя масштаба).

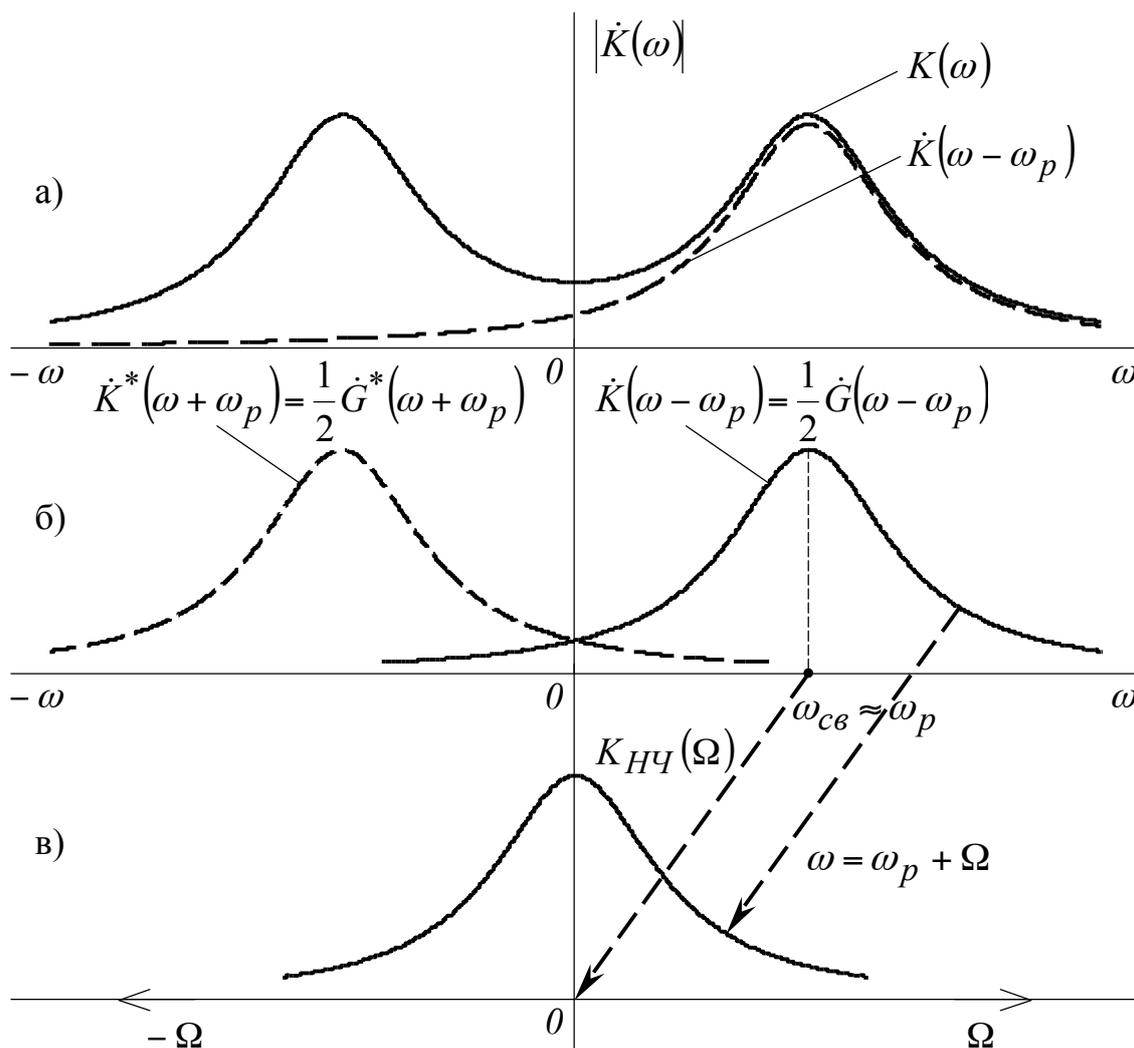


Рисунок 11.2 – Частотные характеристики избирательных цепей:  
 а) амплитудно-частотная характеристика; б) представление комплексной передаточной функции суммой двух комплексно-сопряженных составляющих;  
 в) низкочастотный эквивалент избирательной цепи

### 11.3 Расчет НЧ – эквивалента произвольной частотно-избирательной цепи

Коэффициент передачи полосового фильтра в операторной форме записи представляет собой дробно-рациональную функцию вида

$$K(p) = \frac{H_1(p)}{H_2(p)} = \frac{H_1(p)}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)\dots}, \quad (11.11)$$

где  $p_1, p_3$  – комплексные полюса, расположенные во второй четверти  $p$  – плоскости;

$p_2, p_4$  – комплексно-сопряженные полюса, расположенные в третьей четверти  $p$  – плоскости.

Представим  $K(p)$  суммой простых дробей

$$K(p) = \sum_{n=1}^N A_n(p_n) \cdot \frac{1}{p - p_n}, \quad (11.12)$$

где  $N$  – количество полюсов, составляющих комплексно-сопряженные пары.

$$A_n(p_n) = \left. \frac{H_1(p)}{H_2(p)} (p - p_n) \right|_{p=p_n} \quad (11.13)$$

Разложение передаточной функции на простые дроби позволяет сформировать  $K(p)$  на две подгруппы  $K_+(p)$  и  $K_-(p)$ , одна из которых  $K_+(p)$  объединяет нечетные полюса, а другая – четные (комплексно-сопряженные полюса).

$$K(p) = K_+(p) + K_-(p). \quad (11.14)$$

Индексы (+) и (-) соответствуют положительным и отрицательным частотам.

$$K_+(p) = \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n-1}(p_{2n-1}) \frac{1}{p - p_{2n-1}}, \quad (11.15)$$

$$K_-(p) = \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n}(p_{2n}) \frac{1}{p - p_{2n}}. \quad (11.16)$$

Отбрасывая  $K_-(p)$ , переходим к так называемой укороченной функции

$$K_+(p) = \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n-1}(p_{2n-1}) \frac{1}{p - p_{2n-1}}.$$

Заменяя  $p$  на  $j\omega$  и подставляя значения полюсов  $p_{2n-1} = -\alpha_{2n-1} + j\omega_{2n-1}$ , получаем математическое описание частотной характеристики, смещенной в окрестность центральной частоты  $\omega_{Ц}$

$$\dot{K}_{HЧ}(\omega - \omega_{Ц}) = \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n-1}(-\alpha_{2n-1} + j\omega_{2n-1}) \frac{1}{j\omega + -(-\alpha_{2n-1} + j\omega_{2n-1})} \quad (11.17)$$

Выполняя замену переменных  $\omega = \omega_{Ц} + \Omega$ , получим НЧ – эквивалент избирательной цепи

$$\dot{K}_{НЧ}(\Omega) = \sum_{n=1}^{N/2} A_{2n-1}(-\alpha_{2n-1} + j\omega_{2n-1}) \frac{1}{j\Omega + \alpha_{2n-1} + j(\omega_{Ц} - \omega_{2n-1})}. \quad (11.18)$$

**Пример 11.2** – Расчет НЧ – эквивалента параллельного избирательного контура, рассмотренного в подразделе 6.4.3

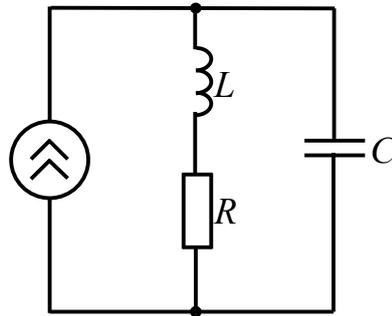


Рисунок 11.3

Воспользуемся найденной в подразделе 6.4.3 системной функцией параллельного контура в операторной форме записи

$$Z(p) = \frac{p + 2\alpha}{p^2 + 2p\alpha + \omega_p^2} = \frac{p + 2\alpha}{(p - p_1)(p - p_2)},$$

$$\text{где } p_1, p_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_p^2} \approx -\alpha \pm j\omega_p.$$

Представим  $Z(p)$  суммой простых дробей.

$$Z(p) = Z_+(p) + Z_-(p) = A_1(p_1) \frac{1}{p - p_1} + A_2(p_2) \frac{1}{p - p_2}.$$

Отбрасывая  $Z_-(p)$ , перейдем к укороченной функции  $Z_+(p)$

$$Z_+(p) = A_1(p_1) \frac{1}{p - p_1}.$$

Коэффициент  $A_1(p_1)$  найдем по формуле (11.13)

$$A_I(p_1) = \frac{p + 2\alpha}{C(p - p_1)(p - p_2)}(p - p_1) \Big|_{p=p_1} = \frac{\alpha + j\omega_P}{2j\omega_P C} \approx \frac{1}{2C} = \alpha R_{рез}.$$

В числителе  $(\alpha + j\omega_P) \approx j\omega_P$ , т.к.  $\alpha \ll \omega_P$ . Заменяя  $p$  на  $j\omega$ , получим комплексную функцию  $\dot{Z}_+(\omega - \omega_P)$ , смещенную в точку  $\omega_P$ .

$$\dot{Z}_+(\omega - \omega_P) = R_{рез} \frac{\alpha}{\alpha + j(\omega - \omega_P)}$$

**Замечание.** К такому же результату можно подойти, пользуясь переходом от точной модели обобщенной расстройки к приближенной (как было показано в примере 11.1)

Обратим внимание, что смещенная в точку  $\omega_P$  составляющая частотной модели избирательной цепи с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2}$  совпадает со (смещенной в точку  $\omega_P$ ) спектральной плотностью комплексной огибающей импульсной характеристики параллельного контура.

$$\dot{Z}(\omega - \omega_P) = \frac{1}{2} \dot{G}(\omega - \omega_P)$$

К НЧ - эквиваленту параллельного контура перейдем с помощью подстановки  $\omega = \omega_P + \Omega$

$$\dot{Z}_{НЧ}(\Omega) = R_{рез} \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

Импульсную характеристику НЧ - эквивалента  $g_{НЧ}(t)$  определим, применяя обратное преобразование Фурье.

$$g_{НЧ}(t) = \Phi^{-1}[Z_{НЧ}(\Omega)] = R_{рез} \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

Импульсная характеристика параллельного избирательного контура, найденная с помощью НЧ - эквивалента, запишется следующим образом

$$g(t) = \operatorname{Re}[\dot{G}(t) \cdot e^{j\omega_P t}] = \operatorname{Re}[2g_{НЧ}(t) \cdot e^{j\omega_P t}] = 2R_{рез}\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega_P t, \quad t \geq 0$$

Сравним полученный приближенный результат с точной импульсной характеристикой, рассчитанной в подразделе 6.4.3. В таблице 11.1 представлены результаты расчета погрешностей определения огибающей фазового угла импульсной характеристики методом НЧ - эквивалента.

Таблица 11.1 – Погрешности расчета  $g(t)$  методом НЧ – эквивалента

Добротность	Погрешности расчетов	
	Погрешность огибающей, %	Погрешность фазового угла $\psi$ , °
10	0,1	3
20	0,03	1,4
30	0,01	1
50	0,005	0,6

На рисунке 11.4 изображены частотные характеристики параллельного избирательного контура  $|\dot{Z}(\omega)|$  и  $|\dot{Z}(\omega - \omega_p)|$ , рассчитанные для различных добротностей.

Анализ графиков показывает, что начиная с  $Q=30$ , смещённая частотная характеристика  $\dot{Z}(\omega - \omega_p)$  практически не проникает в область отрицательных частот. Следовательно, выражение (11.7) применимо для анализа переходных процессов при прохождении сигнала через избирательную цепь при  $Q \gg 1$ .

#### 11.4 Анализ связи между комплексными огибающими узкополосных сигналов на входе и выходе избирательной цепи

Спектральная плотность узкополосного входного сигнала представляет собой полусумму спектральных плотностей комплексной огибающей, смещённых в окрестность точек  $\pm \omega_0$  по оси частот

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{A}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{A}^*(\omega + \omega_0) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{A}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2} \dot{A}^*(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (11.19)$$

Избирательная цепь описывается комплексной передаточной функцией вида:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{G}(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} \dot{G}(\omega + \omega_p) = \dot{K}(\omega - \omega_p) + \dot{K}(\omega + \omega_p) \approx \begin{cases} \dot{K}(\omega - \omega_p), & \omega > 0 \\ \dot{K}^*(\omega + \omega_p), & \omega < 0 \end{cases} \quad (11.20)$$

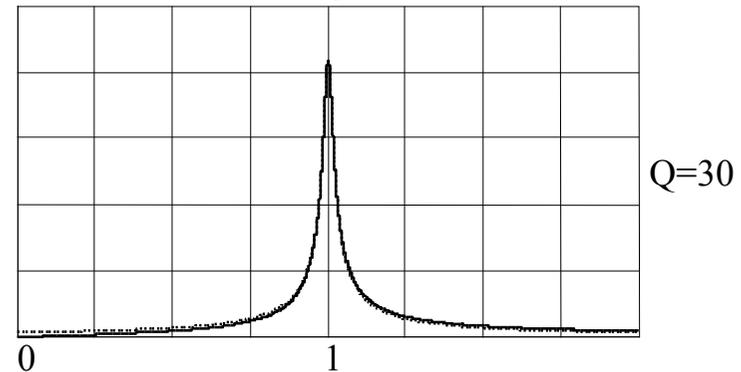
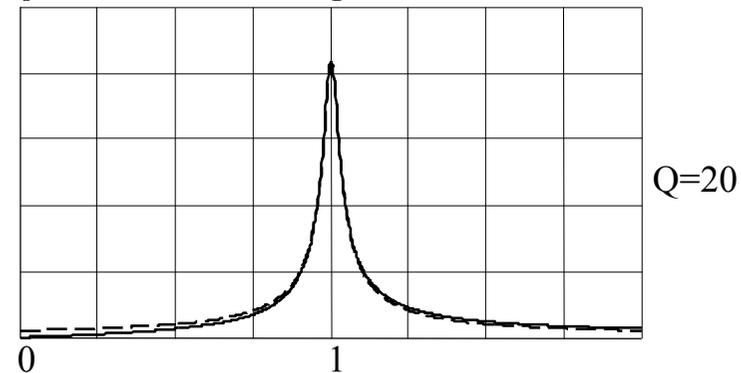
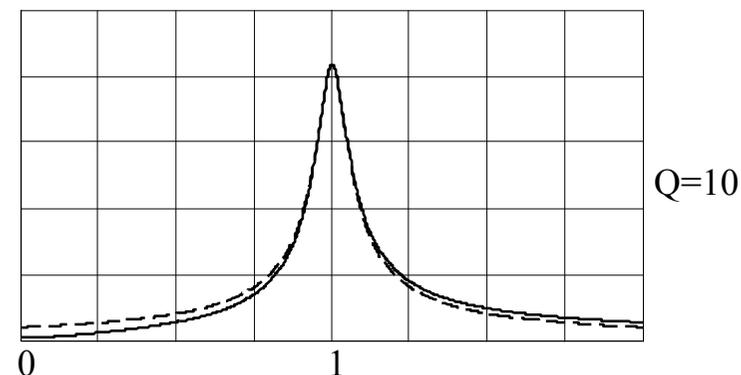
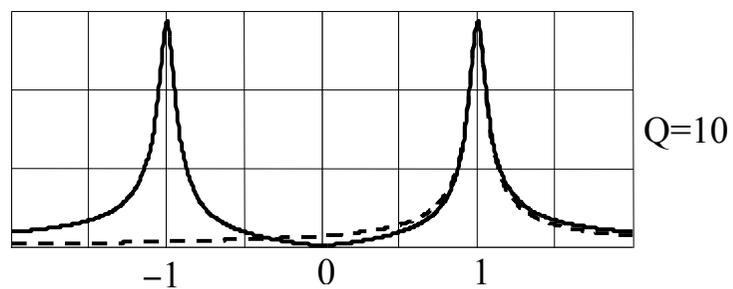
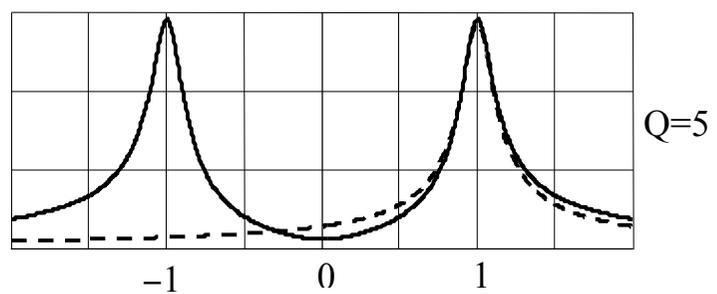
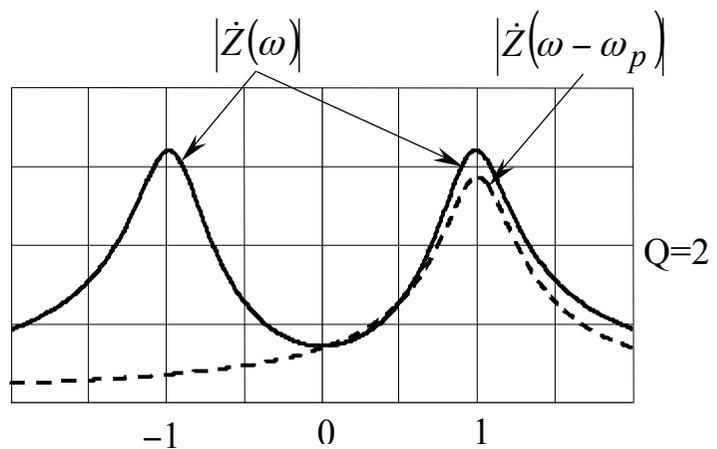


Рисунок 11.4 – Частотные характеристики параллельного избирательного контура для различных добротностей ( $Q=2; 5; 10; 20; 30$ ).  $|\dot{Z}(\omega)|$  – отображены сплошной линией,  $|\dot{Z}(\omega - \omega_p)|$  – отображены пунктиром

Спектральную плотность выходного узкополосного процесса также уместно представить через комплексную огибающую с помощью односторонних спектральных функций

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{вых}}(\omega) &= \frac{1}{2} \dot{A}_{\text{вых}}(\omega - \omega_P) + \frac{1}{2} \dot{A}_{\text{вых}}^*(\omega + \omega_P) \approx \\ &\approx \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{A}_{\text{вых}}(\omega - \omega_P), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2} \dot{A}_{\text{вых}}^*(\omega + \omega_P), & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11.21)$$

В реальной цепи (рисунок 11.5а) при прохождении сигнала перемножаются спектральная плотность и комплексная передаточная функция.

$$S_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega).$$

В воображаемой цепи (рисунок 11.5б) перемножаются спектральные плотности комплексной огибающей и частотный коэффициент передачи НЧ – эквивалента.

$$\dot{A}_{\text{вых}}(\Omega) = \dot{A}(\Omega) \dot{K}_{\text{НЧ}}(\Omega).$$

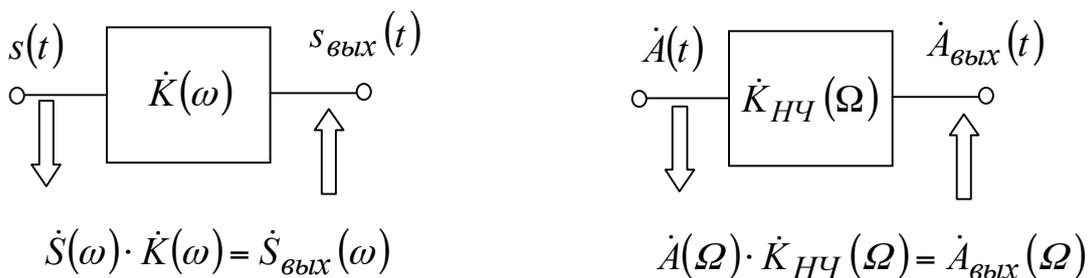


Рисунок 11.5 – а) избирательная цепь; б) НЧ – эквивалент избирательной цепи

Спектральная плотность выходного сигнала с учетом односторонности комплексно-сопряженных составляющих запишется следующим образом:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4} \dot{A}(\omega - \omega_0) \dot{G}(\omega - \omega_P), & \omega > 0 \\ \frac{1}{4} \dot{A}^*(\omega + \omega_0) \dot{G}^*(\omega + \omega_P), & \omega < 0 \end{cases} \quad (11.22)$$

На рисунке 11.6 показаны спектральные плотности входного и выходного сигналов. Переход к НЧ-эквиваленту изображен пунктиром.

Переносим начало координат из нуля в точку  $\omega_p$  ( замена переменной  $\omega = \omega_p + \Omega$  ), перейдем к приближенному частотному методу расчета комплексной огибающей выходного сигнала. В новых координатах, с учетом несовпадения частот  $\omega_0 \neq \omega_p$ , получим

$$\frac{1}{2} A_{\text{вых}}(\Omega) = \frac{1}{4} \dot{A}(\Omega + \Delta\omega) \cdot \dot{G}(\Omega),$$

$$A_{\text{вых}}(\Omega) = \frac{1}{2} \dot{A}(\Omega + \Delta\omega) \cdot \dot{G}(\Omega), \quad (11.23)$$

$$A_{\text{вых}}(\Omega) = \dot{A}(\Omega + \Delta\omega) \cdot \dot{K}_{\text{НЧ}}(\Omega), \quad (11.24)$$

где  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_p$  - расстройка.

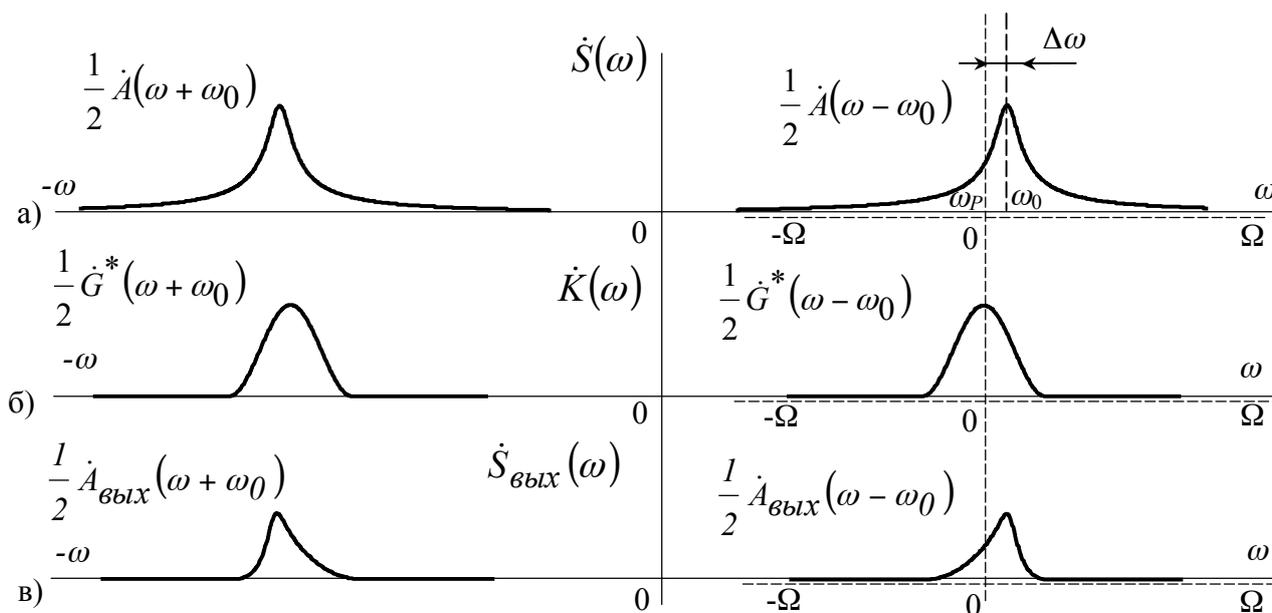


Рисунок 11.6 – Частотное представление: а) сигнала на входе цепи; б) коэффициента передачи избирательной цепи; в) сигнала на выходе цепи

**Замечание.** Если способ получения сигнала на входе избирательной цепи полностью известен, то расчет комплексной огибающей и ее спектральной плотности не вызывает проблем, т.е.

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0] = \text{Re} \left[ \dot{A}(t) e^{j\omega_p t} \right],$$

$$\text{где } \dot{A}(t) = A(t) e^{j\Delta\omega t} \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j\varphi_0};$$

$$\Phi^+[\dot{A}(t)] = \dot{A}(\Omega + \Delta\omega).$$

Комплексную огибающую выходного сигнала определим с помощью обратного преобразования Фурье.

$$\dot{A}_{\text{вых}}(t) = \Phi^-[\dot{A}_{\text{вых}}(\Omega)] = \Phi^-[\dot{A}(\Omega + \Delta\omega) \cdot \dot{K}_{\text{НЧ}}(\Omega)], \quad (11.25)$$

$$s_{\text{вых}}(t) = \text{Re}[\dot{A}_{\text{вых}}(t)e^{j\omega_{\text{р}}t}]. \quad (11.26)$$

### 11.5 Расчет комплексной огибающей узкополосного сигнала на выходе избирательной цепи приближенным операторным методом

Операторное уравнение, связывающее между собой изображения огибающих узкополосных сигналов на входе и выходе избирательной цепи, имеет вид:

$$A_{\text{вых}}(p) = \dot{A}(p) \cdot K_{\text{НЧ}}(p), \quad (11.27)$$

где  $\dot{A}(p) = \int_0^{\infty} \dot{A}(t)e^{-pt} dt$ ,  $K_{\text{НЧ}}(p) = \dot{K}_{\text{НЧ}}(\Omega)$ , при  $j\Omega = p$ .

$$\dot{A}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{A}(p) \cdot K_{\text{НЧ}}(p) e^{pt} dp \quad (11.28)$$

### 11.6 Расчет комплексной огибающей узкополосного сигнала на выходе избирательной цепи приближенным временным методом

Комплексная огибающая на выходе может быть определена сверткой комплексной огибающей на входе с низкочастотным эквивалентом импульсной характеристики избирательной цепи.

$$\dot{A}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} \dot{A}(t) \otimes \dot{G}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{A}(\tau) \cdot \dot{G}(t-\tau) d\tau = \int_0^t A(\tau) \cdot g_{\text{НЧ}}(t-\tau) d\tau, \quad (11.29)$$

где  $g_{\text{НЧ}}(t) = \frac{1}{2} \dot{G}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K_{\text{НЧ}}(p) e^{pt} dp$ . (11.30)

**Пример 11.3**

Применяя приближенный операторный метод анализа, рассчитать воздействие одиночного прямоугольного радиоимпульса на параллельный избирательный контур, настроенный на частоту  $\omega_p$ . На вход контура поступает ток

$$i(t) = I_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0] \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - \tau_u)),$$

$$\text{где } \omega_0 = \omega_p + \Delta\omega, \quad \tau_u \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Осциллограмма входного сигнала показана на рисунке 11.7а. Представим ток  $i(t)$  реальной частью комплексной функции

$$i(t) = \operatorname{Re} \left[ I_m [\sigma(t) \sigma(t - \tau_u)] e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{I}(t) e^{j\omega_p t} \right],$$

$$\dot{I}(t) = I_m [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_u)] e^{j\Delta\omega t} e^{j\varphi_0}.$$

Находим изображение комплексной огибающей по Лапласу

$$\begin{aligned} \dot{I}(p) &= \int_0^{\tau_u} I_m e^{j\Delta\omega t} e^{j\varphi_0} e^{-pt} dt = I_m e^{j\varphi_0} \frac{1}{-(p - j\Delta\omega)} e^{-pt} \Big|_0^{\tau_u} = \\ &= I_m e^{j\varphi_0} \frac{1}{(p - j\Delta\omega)} (1 - e^{-p\tau_u}). \end{aligned}$$

Воспользуемся НЧ – эквивалентом избирательной цепи, рассчитанным в примере 11.2

$$Z_{НЧ}(\Omega) = R_{рез} \frac{\alpha}{\alpha + j\Omega}.$$

Перейдем к операторной форме записи, заменяя  $j\Omega$  на  $p$ .

$$Z_{НЧ}(p) = R_{рез} \frac{\alpha}{\alpha + p}.$$

Изображение комплексной огибающей напряжения на контуре равно

$$\dot{U}(p) = \dot{I}(p) Z_{НЧ}(p).$$

Переходим от изображения к оригиналу в два этапа:

$$1) \dot{U}(t) = U_m \cdot \alpha \cdot e^{j\varphi} \cdot L^{-1} \left[ \frac{1}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} \right], \quad 0 \leq t \leq \tau_u;$$

$$2) \dot{U}(t) = U_m \cdot \alpha \cdot e^{j\varphi} \cdot L^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-p\tau_u}}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} \right], \quad t \geq \tau_u.$$

Здесь  $U_m = I_m \cdot R_{рез}$ .

Изображение  $U(p)$  имеет два полюса:  $p_1 = j\Delta\omega$  и  $p_2 = -\alpha$ .

Решение на первом интервале представляет собой сумму вынужденной и свободной компонент. Вынужденная составляющая определяется полюсом  $p_1$ , а свободная – полюсом  $p_2$ .

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} \right] = Res_1 + Res_2,$$

$$Res_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[ \frac{1}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} (p - j\Delta\omega) e^{pt} \right] = \frac{1}{\alpha + j\Delta\omega} e^{j\Delta\omega t},$$

$$Res_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[ \frac{1}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} (p + \alpha) e^{pt} \right] = -\frac{1}{\alpha + j\Delta\omega} e^{-\alpha t},$$

$$\dot{U}(t) = U_m \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\omega^2}} \left[ e^{j\Delta\omega t} - e^{-\alpha t} \right] e^{j(\varphi_0 - \psi)}, \quad \psi = \arctg \Delta\omega / \alpha.$$

$$u(t) = Re \dot{U}(t) e^{j\omega_p t} = U_m \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\omega^2}} \left[ \cos(\omega_0 t + \varphi - \psi) - e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi - \psi) \right].$$

Первое слагаемое отклика является вынужденной составляющей, второе слагаемое – свободной составляющей.

При расчете отклика после окончания действия радиоимпульса следует помнить, что при  $t \geq \tau_u$  вынужденная компонента отсутствует, а свободная компонента определяется полюсом передаточной функции  $p_2 = -\alpha$ .

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= Res_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} \left\{ U_m \alpha e^{j\varphi} \left[ \frac{1 - e^{-p\tau_u}}{(p - j\Delta\omega)(p + \alpha)} (p + \alpha) e^{pt} \right] \right\} = \\ &= U_m \alpha e^{j\varphi} \frac{1 - e^{\alpha\tau_u}}{-(\alpha + j\Delta\omega)} e^{-\alpha t} = U_m \alpha e^{j\varphi} \frac{(e^{\alpha\tau_u} - 1) e^{-j\psi}}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\omega^2}} e^{-\alpha t}, \quad t \geq \tau_u. \end{aligned}$$

$$u(t) = \operatorname{Re}[\dot{U}(t)e^{j\omega_p t}] = U_m \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\omega^2}} (e^{\alpha\tau_u} - 1)e^{-\alpha t} \cos(\omega_p t + \varphi_0 - \psi) =$$

$$= U_m \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\omega^2}} (1 - e^{-\alpha\tau_u}) e^{-\alpha(t-\tau_u)} \cos(\omega_p t + \varphi_0 - \psi), \quad t \geq \tau_u.$$

На рисунке 11.7 показаны импульсный радиосигнал на входе и выходе избирательной цепи с расстройкой и без расстройки.

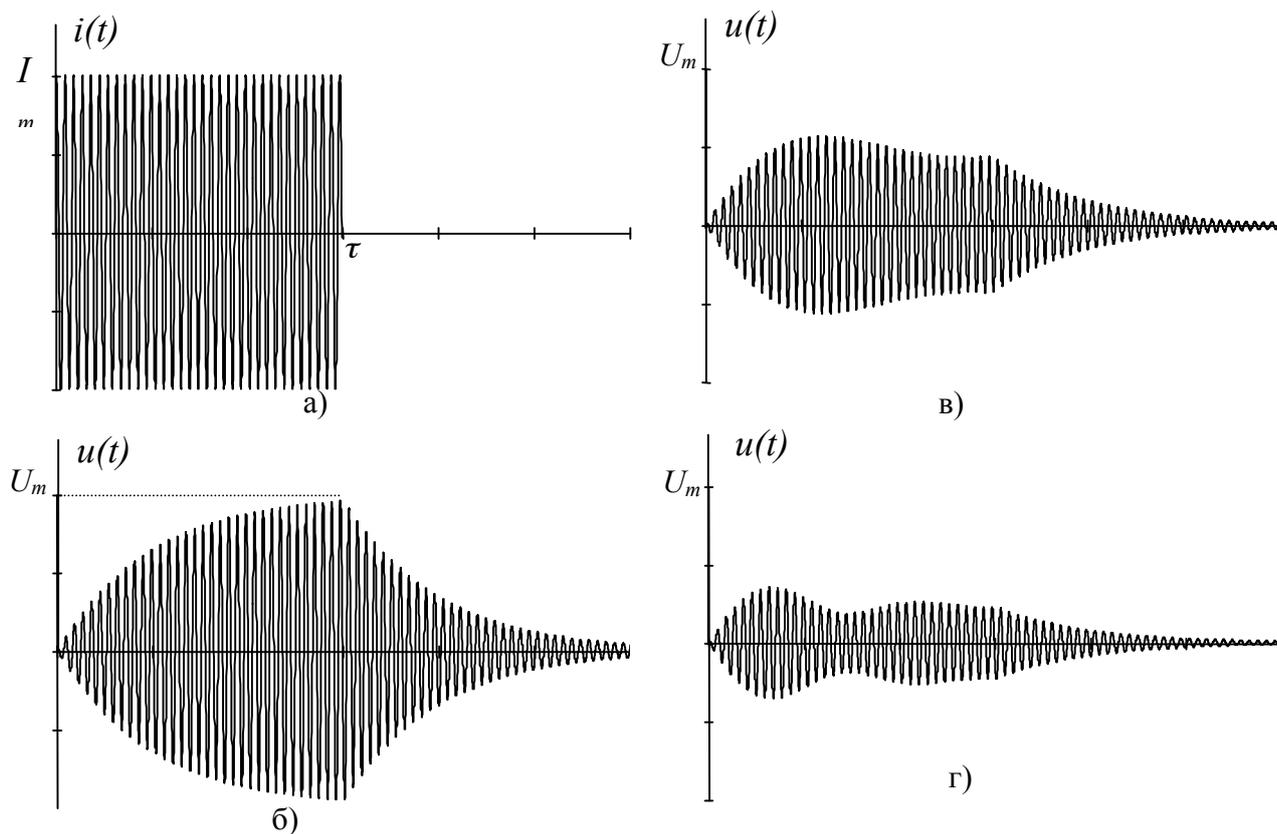


Рисунок 11.7 – Результат прохождения радиоимпульса через избирательную цепь: а) сигнал на входе цепи; б) сигнал на выходе избирательной цепи, настроенной на частоту исходного сигнала; в) сигнал на выходе избирательной цепи с расстройкой  $\Delta\omega = 2\alpha$ ; г) сигнал на выходе избирательной цепи с расстройкой  $\Delta\omega = 4\alpha$

#### Пример 11.4

Рассчитать прохождение фазоманипулированного сигнала через избирательную цепь при условии отсутствия расстройки, т.е.  $\omega_p = \omega_0$ .

Входной сигнал представляет собой сумму двух радиоимпульсов, сдвинутых друг относительно друга на  $\tau_u$ . Немодулированное высокочастотное заполнение радиоимпульсов имеет одинаковую частоту, но разную начальную фазу (рисунок 11.8а).

$$i(t) = I_m [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_u)] \cos(\omega_p t + \varphi_1) - I_m [\sigma(t - \tau_u) - \sigma(t - 2\tau_u)] \cos(\omega_p t + \varphi_2),$$

$$i(t) = \operatorname{Re} \dot{I}(t) \cdot e^{j\omega_p t}, \text{ где}$$

$$I(t) = \operatorname{Re} \left\{ I_m e^{j\varphi_1} [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_u)] + e^{j\varphi_2} [\sigma(t - \tau_u) - \sigma(t - 2\tau_u)] \right\}.$$

Выберем для расчета приближенный временной метод, для реализации которого определим импульсную характеристику НЧ – эквивалента избираемой цепи

$$g_{HЧ}(t) = L^{-1} [Z_{HЧ}(p)],$$

$$g_{HЧ}(t) = L^{-1} \left[ R_{pez} \frac{\alpha}{p + \alpha} \right] = R_{pez} \alpha \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

1. Расчет комплексной огибающей отклика на интервале  $0 \leq t < \tau_u$

$$\dot{U}(t) = \int_{0 \leq t < \tau_u}^t I(\tau) \cdot g_{HЧ}(t - \tau) d\tau = I_m R_{pez} \alpha e^{j\varphi_1} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U_m e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha t}).$$

2. Расчет комплексной огибающей отклика на интервале  $\tau_u \leq t < 2\tau_u$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= e^{j\varphi_1} \int_0^{\tau_u} U_m \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + e^{j\varphi_2} \int_{\tau_u}^t U_m \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U_m e^{j\varphi_1} (e^{\alpha\tau_u} - 1) \cdot e^{-\alpha t} + \\ &+ U_m e^{j\varphi_2} (1 - e^{\alpha\tau_u} \cdot e^{-\alpha t}) = U_m e^{j\varphi_2} + U_m \left[ e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha\tau_u}) - e^{j\varphi_2} \right] \cdot e^{-\alpha(t-\tau_u)}. \end{aligned}$$

3. Расчет комплексной огибающей отклика при  $2\tau_u \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= e^{j\varphi_1} \int_0^{\tau_u} U_m \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + e^{j\varphi_2} \int_{\tau_u}^{2\tau_u} U_m \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U_m e^{j\varphi_1} (e^{\alpha\tau_u} - 1) \cdot e^{-\alpha t} + \\ &+ U_m e^{j\varphi_2} (e^{2\alpha\tau_u} - e^{-\alpha t}) \cdot e^{-\alpha t} = U_m \left[ e^{j\varphi_1} (e^{-\alpha t} - e^{2\alpha\tau_u}) + e^{j\varphi_2} (1 - e^{-\alpha\tau_u}) \right] \cdot e^{-\alpha(t-2\tau_u)}. \end{aligned}$$

Получим выражение для комплексной огибающей, полагая, что при выполнении условий  $Q \gg 1$  ( $Q=30$ ) и  $\tau_u / T_P \gg 1$  ( $\tau_u = 30T_P$ ), слагаемые  $e^{-\alpha\tau_u}$  и  $e^{-2\alpha\tau_u}$  малы и ими можно пренебречь ( $e^{-\alpha\tau_u} \approx 0,04$ ).

$$\dot{U}(t) = \begin{cases} U_m e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t < \tau_u, \\ U_m e^{j\varphi_2} + U_m (e^{j\varphi_1} - e^{j\varphi_2}) e^{-\alpha(t-\tau_u)}, & \tau_u \leq t < 2\tau_u, \\ U_m e^{j\varphi_2} e^{-\alpha(t-2\tau_u)}, & 2\tau_u \leq t < \infty. \end{cases}$$

Большой интерес представляет коммутация фазы на  $180^\circ$  и  $90^\circ$ .  
Если  $\varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$ , то  $e^{j\varphi_2} = -e^{j\varphi_1}$ ,  $e^{j\varphi_1} - e^{j\varphi_2} = e^{j\varphi_1} (1 - e^{j180^\circ}) = 2e^{j\varphi_1}$ .

$$\dot{U}(t) = \begin{cases} U_m e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t < \tau_u, \\ U_m [2e^{-\alpha(t-\tau_u)} - 1], & \tau_u \leq t < 2\tau_u, \\ -U_m e^{j\varphi_1} e^{-\alpha(t-2\tau_u)}, & 2\tau_u \leq t < \infty. \end{cases}$$

Перейдем от комплексной огибающей к физическому сигналу  $u(t)$ .

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}(t) \cdot e^{j\omega_p t} \right\}.$$

$$u(t) = \begin{cases} U_m e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_p t + \varphi_1), & 0 \leq t < \tau_u \\ U_m [2e^{-\alpha(t-\tau_u)} - 1] \cos(\omega_p t + \varphi_1), & \tau_u \leq t < 2\tau_u \\ U_m e^{j\varphi_1} e^{-\alpha(t-2\tau_u)} \cos(\omega_p t + \varphi_1 + \pi), & 2\tau_u \leq t < \infty \end{cases}$$

На рисунке 11.8г показана осциллограмма отклика. Избирательный контур реагирует на коммутацию фазы (на  $180^\circ$ ) провалом огибающей до нуля. Интересно определить время задержки «провала» и время нарастающей огибающей до уровня  $0,9U_m$

$$2e^{-\alpha t_3} - 1 = 0, \quad -\alpha t_3 = \ln \frac{1}{2},$$

$$t_3 = \ln \frac{2}{\alpha} \approx 6,6T_P = 0,22\tau_u,$$

$$t_{yCT} = \ln \frac{10}{\alpha} \approx 22T_P = 0,73\tau_u.$$

На рисунке 118в показана комплексная огибающая отклика и отмечены время задержки  $t_3$  и время нарастания огибающей  $t_{yCT}$  до уровня  $0,9U_m$ .

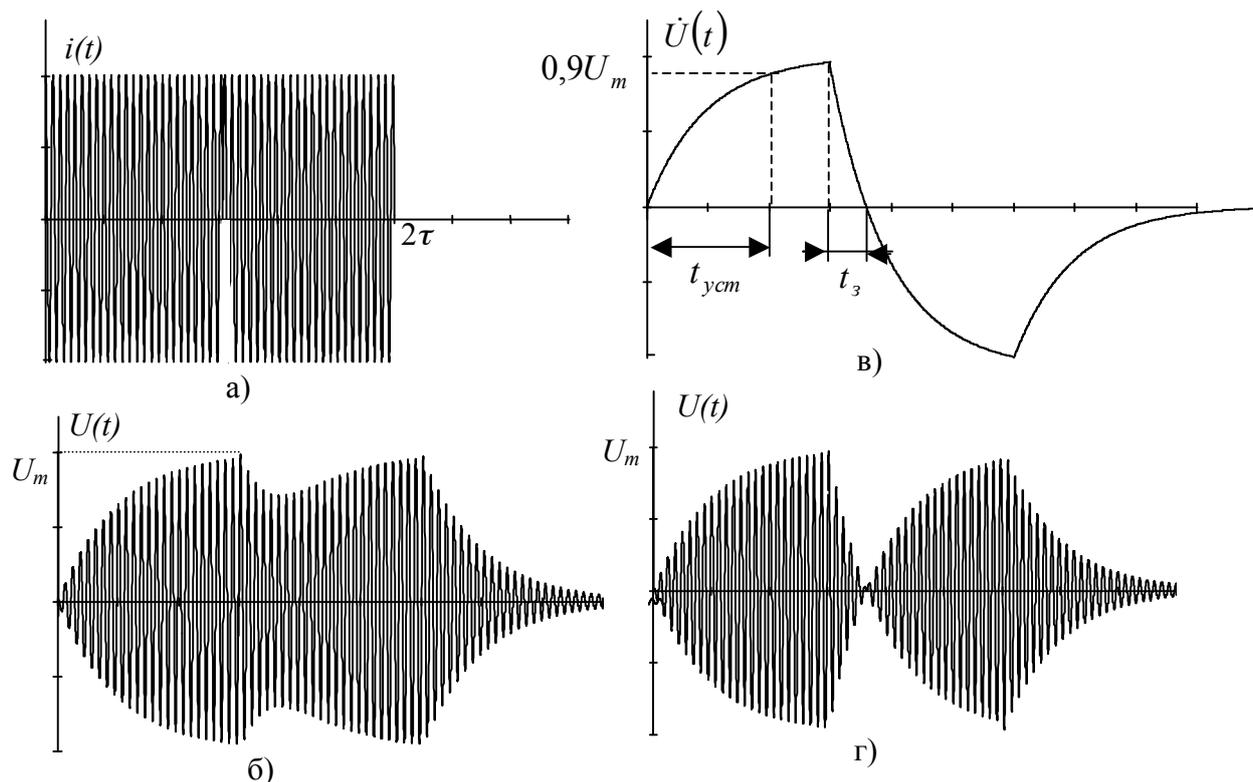


Рисунок 11.8 – Прохождение фазоманипулированного сигнала через избирательную цепь: а) сигнал на входе цепи; б) реакция избирательной цепи на сигнал с коммутацией фазы на  $90^0$ ; в) комплексная огибающая выходного сигнала с коммутацией фазы на  $180^0$ ; г) реакция избирательной цепи на сигнал с коммутацией фазы на  $180^0$

Если  $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ , то  $e^{j\varphi_2} = je^{j\varphi_1}$ ;  $e^{j\varphi_1} - e^{j\varphi_2} = e^{j\varphi_1}(1 - j) = \sqrt{2}e^{j(\varphi_1 - \pi/4)}$ .

$$\dot{U}(t) = \begin{cases} U_m e^{j\varphi_1} (1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t < \tau_u \\ U_m e^{j(\varphi_1 + \pi/2)} + U_m \cdot \sqrt{2} e^{j(\varphi_1 - \pi/4)} e^{-\alpha(t - \tau_u)}, & \tau_u \leq t < 2\tau_u \\ U_m e^{j(\varphi_1 + \pi/2)} e^{-\alpha(t - 2\tau_u)}, & 2\tau_u \leq t < \infty \end{cases}$$

$$|\dot{U}(t)| = \begin{cases} U_m (1 - e^{-\alpha t}), & 0 \leq t < \tau_u \\ U_m \sqrt{1 + 2e^{-2\alpha(t - \tau_u)} - 2e^{-\alpha(t - \tau_u)}}, & \tau_u \leq t < 2\tau_u \\ U_m e^{-\alpha(t - \tau_u)}, & 2\tau_u \leq t < \infty \end{cases}$$

Найдем модуль и фазу комплексной огибающей, полагая  $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$ .  
Рассмотрим интервал времени  $\tau_u \leq t < 2\tau_u$

$$\dot{U}(t) = |\dot{U}(t)|e^{j\psi(t)},$$

$$\dot{U}(t) = U_m e^{j\varphi_1} \left[ e^{j\Delta\varphi} + (1 - e^{j\Delta\varphi}) e^{-\alpha(t-\tau_u)} \right].$$

Пусть  $t - \tau_u = x$ , причем  $0 \leq x < \tau_u$

$$\begin{aligned} |\dot{U}(x)| &= U_m \sqrt{\left[ e^{-\alpha x} + (1 - e^{-\alpha x}) \cos(\Delta\varphi) \right]^2 + \left[ (1 - e^{-\alpha x}) \sin(\Delta\varphi) \right]^2} = \\ &= U_m \sqrt{(1 - e^{-\alpha x})^2 + e^{-2\alpha x} + 2 \cos(\Delta\varphi)(1 - e^{-\alpha x})}, \end{aligned}$$

$$\psi(x) = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{(1 - e^{-\alpha x}) \sin(\Delta\varphi)}{e^{-\alpha x} + (1 - e^{-\alpha x}) \cos(\Delta\varphi)}.$$

## 11.7 Выводы

1. Частотно-избирательные цепи характеризуются тем, что их полоса пропускания много меньше некоторой центральной частоты.

Любой широкополосный сигнал в результате прохождения через избирательную цепь становится узкополосным.

Дельта-функция, характеризующаяся бесконечной полосой, преобразуется избирательной цепью в узкополосную импульсную характеристику.

Комплексная огибающая является низкочастотным эквивалентом импульсной характеристики избирательной цепи.

2. При точном решении задачи о прохождении сигнала через цепь устанавливается взаимодействие узкополосного сигнала с импульсной характеристикой избирательной цепи.

При приближенном решении задачи о прохождении узкополосного сигнала через избирательную цепь определяется взаимодействие комплексной огибающей входного сигнала с комплексной огибающей импульсной характеристики.

3. Низкочастотный эквивалент избирательной цепи – воображаемая система, частотный коэффициент передачи которой получен путем переноса частотной характеристики исходной цепи в окрестность нулевой частоты.

Спектральная плотность комплексной огибающей с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2}$  совпадает с комплексным коэффициентом передачи низкочастотного эквивалента.

4. При прохождении радиоимпульса через расстроенный контур на выходе имеют место «биения» огибающей, зависящие от величины расстройки.

При прохождении радиоимпульса через настроенный контур огибающая плавно нарастает, достигая уровня 0.9 от стационарного значения за время  $t_{УСТ} = \ln 10 / \alpha$ .

С помощью избирательной цепи можно обнаружить переброс фазы на  $180^\circ$ , так как огибающая сигнала на выходе падает до нуля за время  $t_3 = \ln 2 / \alpha$ .

5. Приближенный операторный и приближенный временной методы дают одни и те же результаты.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Книги по радиотехнике

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.-М.: Высшая школа,1988.-448с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.-М.: Радио и связь,1986.-512с.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов / Под ред. К.А.Самойло.- М.: Радио и связь,1982.-528с.

### Задачники по радиотехнике

4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач.-М.: Высшая школа,1987.-208с.
5. Задачник по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”/ В.П.Жуков, В.Г.Карташев, А.М.Николаев.-М.: Высшая школа,1986.-192с.
6. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи: Учебное пособие для вузов./Под ред. И.С.Гоноровского.-М.: Радио и связь,1989.-248с.

### Книги зарубежных авторов

7. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер.с франц.-М.: Мир,1983.-Т.1.-312с.,Т.2. 256с.
8. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: в 2-х частях./Пер. с англ.-М.: Мир,1988.- 4.1.336с., 4.2.360с.
9. Френкс Л. Теория сигналов: /Пер.с англ.-М.: Советское радио, 1974.-344с.

### Книги по математике

10. Андре Анго. Математика для элетро- и радиоинженеров: /Пер. с франц.-М.: Наука,1965.-778с.
11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник для инженеров и учащихся ВТУзов.-М.: Наука,1986.-544с.
12. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление: -М.: Наука,1974.-542с.

### Специальная литература

13. Continuous and Discrete Signal and Sistem Analysis edited by C.D. McGillem and G.R.Cooper, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Orlando, 1990.-494.
14. Огибающие узкополосных сигналов. С.О.Райс. ТИИЭР:Пер.с англ.,1982,т.70,№7,с.5-13.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1 – Комплексные функции и действия над ними

Формы представления комплексных функций:		
Алгебраическая	Показательная	Тригонометрическая
$\dot{Z} = c + jd$	$\dot{Z} =  Z e^{j\varphi}$	$\dot{Z} =  Z \cos\varphi + j Z \sin\varphi$
Связь между ними:		
$ Z $ - модуль $\dot{Z}$		
$ Z  = \sqrt{c^2 + d^2}$ ; $c =  Z \cos\varphi$ ; $d =  Z \sin\varphi$		
$\varphi = \arg(Z)$ - аргумент $\dot{Z}$ ;		
$\varphi = \arg(Z) = \begin{cases} \arctg d/c, & c > 0 \\ \pi + \arctg d/c, & c < 0 \end{cases}$		
Комплексно-сопряженные функции:		
$\dot{Z}^* = c - jd$	$\dot{Z}^* =  Z e^{-j\varphi}$	$\dot{Z}^* =  Z \cos\varphi - j Z \sin\varphi$
Операции над комплексными функциями:		
$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = (c_1 + jd_1) + (c_2 + jd_2) = (c_1 + c_2) + j(d_1 + d_2)$		
$\dot{Z} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 =  Z_1  \cdot  Z_2  e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = \sqrt{(c_1^2 + d_1^2)(c_2^2 + d_2^2)} e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} =$ $= c_1c_2 - d_1d_2 + j(c_2d_1 + c_1d_2)$		
$\dot{Z} + \dot{Z}^* = (c + jd) + (c - jd) = 2c$		
$\dot{Z} \cdot \dot{Z}^* = (c + jd) \cdot (c - jd) = c^2 + d^2 =  Z ^2$		
$\frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{ Z_1 }{ Z_2 } e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}}{\sqrt{c_2^2 + d_2^2}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$		
$\frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2^*}{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_2^*} = \frac{(c_1 + jd_1)(c_2 - jd_2)}{c_2^2 + d_2^2} =$ $= \frac{(c_1c_2 + d_1d_2) + j(c_2d_1 - c_1d_2)}{c_2^2 + d_2^2} = \frac{c_1c_2 + d_1d_2}{c_2^2 + d_2^2} + j \frac{c_2d_1 - c_1d_2}{c_2^2 + d_2^2}$		
$\dot{Z}^K = (c + jd)^K = \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^K e^{jK\varphi} =$ $= \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^K \cos(K\varphi) + j \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^K \sin(K\varphi)$		
$\dot{Z}^{\frac{1}{K}} = (c + jd)^{\frac{1}{K}} = \left(\sqrt{c^2 + d^2}\right)^{\frac{1}{K}} e^{j\varphi/K} =$ $= \sqrt[K]{c^2 + d^2} \cos\left(\frac{\varphi}{K}\right) + j \sqrt[K]{c^2 + d^2} \sin\left(\frac{\varphi}{K}\right)$		

Таблица П.2 – Тригонометрические функции и их преобразования

$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$
$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$
$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$
$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)$
$\sin A - \sin B = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A + B)$
$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)$
$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B)$
$\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$
$\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)} \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)}$
$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \quad \cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$
$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad e^{jx} = \cos x + j \sin x$
$A \cdot \cos(\omega t + \psi_1) + B \cdot \cos(\omega t + \psi_2) = C \cdot \cos(\omega t + \psi_3),$ $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2)}$ $\psi_3 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{A \cdot \sin \psi_1 + B \cdot \sin \psi_2}{A \cdot \cos \psi_1 + B \cdot \cos \psi_2} \right]$
$\sin(\omega t + \psi) = \cos(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Таблица П.3 – Дифференцирование функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$C(const)$	0	$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$x$	1	$\sin x$	$\cos x$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\lg x$	$\frac{1}{x} \cdot \lg e$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Таблица П.4 – Определенные интегралы

$\int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
$\int_0^{\infty} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r}$
$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-r^2 x^2} dx = \frac{1}{2r^2}$
$\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4r^3}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, a < 0 \end{cases}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x} dx =  a  \cdot \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nxdx = \int_0^{\pi} \cos mx \cdot \cos nxdx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n - \text{целые}$
$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nxdx = \begin{cases} \frac{2m}{m^2 - n^2}, & m, n - \text{четные} \\ 0, & m, n - \text{нечетные} \end{cases}$

Таблица П.5 – Неопределенные интегралы

$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$	
$\int x \cdot \sin ax dx = \frac{1}{a^2} (\sin ax - ax \cdot \cos ax)$	
$\int x^2 \cdot \sin ax dx = \frac{1}{a^3} (2 \cdot ax \cdot \sin ax + 2 \cdot \cos ax - a^2 x^2 \cdot \cos ax)$	
$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$	
$\int x \cdot \cos ax dx = \frac{1}{a^2} (\cos ax + ax \sin ax)$	
$\int x^2 \cdot \cos ax dx = \frac{1}{a^3} (2 \cdot ax \cdot \cos ax - 2 \cdot \sin ax + a^2 x^2 \cdot \sin ax)$	
$\int \sin ax \cdot \sin bxdx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, a^2 \neq b^2$	
$\int \sin ax \cdot \cos bxdx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}, a^2 \neq b^2$	
$\int \cos ax \cdot \cos bxdx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, a^2 \neq b^2$	
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$	
$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot (ax - 1)$	
$\int x^2 \cdot e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} \cdot (a^2 x^2 - 2 \cdot ax + 2)$	
$\int e^{ax} \cdot \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \cdot (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)$	
$\int e^{ax} \cdot \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \cdot (a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx)$	
$\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} \left( x \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$	