МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиоконструкторский факультет

Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой КИПР

_____________Татаринов В.Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по лабораторным работам дисциплины
«Теория массового обслуживания в управлении процессами гражданской авиации»
для студентов специальности 160905

Указания рассмотрены и одобрены

на методическом семинаре кафедры КИПР,

протокол №7/2012 от 28.08.2012 г.

Разработчик:

доцент кафедры КИПР

____________Козлов В.Г.

Томск – 2012

Методическая разработка содержит ключевые сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Теория массового обслуживания в управлении процессами гражданской авиации». Предназначена для студентов специальности 160905.

Представленные указания помогут студентам организовать работу на лабораторных занятиях, предусмотренных рабочей программой вышеуказанных дисциплин, и заранее подготовиться к этим занятиям.

Разработчик: доцент кафедры КИПР Козлов В.Г.

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Тема работы: Определение статистических характеристик технического обслуживания замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием

Цель работы: Обучить студентов применению методики по определению статистических характеристик технического обслуживания применительно к замкнутой системе массового обслуживания с ожиданием.

Работа проводится в программе MathCAD.

1.1. Общие сведения о применении теории массового обслуживания для определения статистических характеристик технического обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) изучает статистические характеристики систем массового обслуживания. **Система массового обслуживания** (СМО) – это совокупность однородных обслуживающих устройств (приборов, мастерских и т.д.), называемых каналами обслуживания. Примерами СМО могут служить сборочные цеха, ремонтные мастерские, инженерно-авиационная служба, восстанавливаемая резервированная аппаратура, телефонные станции, все виды транспорта (вместе с билетными кассами) и т.д.

Основными элементами СМО, определяющими их пропускную способность, являются: число каналов обслуживания, быстродействие каждого канала и поток событий (заявок на обслуживание, поток обслуженных заявок и т.д.).

По признаку потерь заявок на обслуживание СМО подразделяются на три типа: **с отказами, с ожиданием и смешанного типа**.

В **СМО с отказами** заявки обслуживаются немедленно, если каналы свободны, или получают отказ и теряются, если все каналы заняты. Пример такой СМО – телефонная сеть. В **СМО с ожиданием** (например, в системах ремонта техники) все заявки выстраиваются в очередь, если каналы заняты. В **СМО смешанного типа** имеются **ограничения на время пребывания заявки в системе или на длину очереди**. При невыполнении требуемого ограничения заявка покидает СМО необслуженной.

По числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки, СМО делят **на одноканальные и многоканальные**.

Если обслуженная заявка покидает СМО, то СМО называют **открытыми**, а если снова поступает на обслуживание в СМО, то **замкнутыми**.

При выполнении лабораторной работы мы исследуем **замкнутую многоканальную СМО с ожиданием**, наиболее подходящую для описания процесса эксплуатации техники, в частности, для расчета характеристик ТО и показателей надежности резервируемой аппаратуры в зависимости от числа каналов и их производительности.

Пусть СМО с ожиданием содержит n работающих приборов и r каналов обслуживания. При одном отказе прибора получается одна заявка. Поток отказов порождает поток заявок, которые немедленно удовлетворяются обслуживанием, а когда все r каналов обслуживания заняты, заявки выстраиваются в очередь. В этом случае $r \le k < n$, где k – число отказов приборов. Требуется найти вероятности пребывания системы в состоянии $P_k(t)$ в любой момент времени t для различных значений k. Вероятность $P_k(t)$ − это вероятность состояния системы, при котором k приборов отказали, из них r приборов обслуживаются, а остальные $(k – r)$ стоят в очереди. Найденные значения $P_k(t)$ позволяют рассчитать все критерии, характеризующие степень удовлетворения потока заявок и степень использования каналов обслуживания. Предполагается, что вероятность безотказной работы любого прибора изменяется во времени по экспоненциальному закону $P(t) = \exp(–\lambda t)$, причём интенсивность отказов (поступления заявок) λ не зависит от времени. Если до момента t прибор был исправен, то вероятность отказа $P_{\text{ОТК}}(\Delta t)$ в малом промежутке времени Δt, следующем за временем t, для нашего случая определяется приближенным выражением:

$$P_{\text{ОТК}}(\Delta t) \approx \lambda\Delta t, \text{ при } \lambda\Delta t << 1. \tag{1.1}$$

По аналогии определяется вероятность завершения обслуживания заявки к моменту $t + \Delta t$, поступившей в момент t на обслуживание:

$$P_{\text{ОБС}}(\Delta t) \approx \mu\Delta t, \text{ при } \mu\Delta t << 1. \tag{1.2}$$

В (1.2) μ − это интенсивность восстановления (обслуживания, ремонта) в одном канале. Граф изменения состояний замкнутой многоканальной СМО с ожиданием представлен на рисунке 1.1.

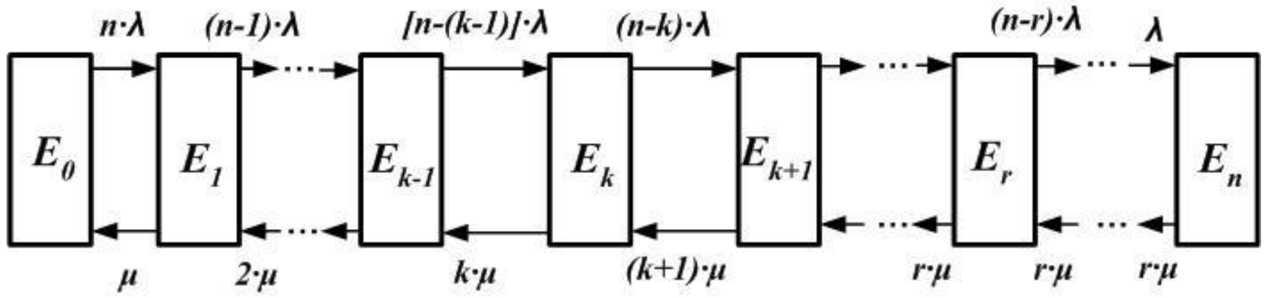

Рисунок 1.1 – Граф изменения состояний замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Под термином **техническое состояние** E_k понимают совокупность подверженных изменению в процессе производства или эксплуатации свойств объекта, характеризуемую в определённый момент признаками, установленными технической документацией.

На рисунке 1.1 введены следующие обозначения:

- E_k – техническое состояние СМО, при котором k из n работающих приборов находятся в состоянии неработоспособности;

- r − число каналов обслуживания;

- λ [ч$^{-1}$] − интенсивность поступления заявок, равная интенсивности отказов одного прибора;

- μ [ч$^{-1}$] − интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале.

Указанная СМО может использоваться как система технического обслуживания не только приборов, но и транспорта (парки самолетов, автомобилей и т.п.).

Академик А.Н.Колмогоров сформулировал инженерное правило составления дифференциальных уравнений по виду графа или по виду схемы состояний [1, 4]:

«Производная от вероятности пребывания системы в любой момент времени в состоянии k равна алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов в k-ое состояние (или из k-ого состояния) на вероятность того состояния, откуда совершается переход в k-ое состояние. Причем, тем слагаемым, которым соответствуют уходящие стрелки из k-ого состояния, приписывается знак «минус», а входящим – «плюс».

Анализ графа (рисунок 1.1) позволяет вывести дифференциальное уравнение для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = (n-k+1)\cdot\lambda\cdot P_{k-1}(t) - \left[(n-k)\cdot\lambda + k\cdot\mu\right]\cdot P_k(t) + (k+1)\cdot\mu\cdot P_{k+1}(t). \quad (1.3)$$

Для установившегося режима $\frac{dP_k(t)}{dt} = 0$, так как P_k в этом случае не меняется во времени, и уравнение для вероятности состояний примет вид:

$$(n - k + 1)\cdot\lambda\cdot P_{k-1} + [(n - k)\cdot\lambda + k\cdot\mu]\cdot P_k + (k + 1)\cdot\mu\cdot P_{k+1} = 0. \quad (1.4)$$

Решение уравнения для вероятностей в этом случае дает результат:

$$P_k = A_k\cdot P_0, \quad (1.5)$$

где P_0 – вероятность того, что работают все приборы.

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_k A_k}; \quad (1.6)$$

$$A_k = \frac{n!}{2^{k-2}\cdot 2!\cdot (n-k)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k. \quad (1.7)$$

Для проверки правильности расчета P_k используется нормировочное отношение:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \quad (1.8)$$

Суммарная погрешность расчета P_k находится из выражения:

$$\delta_\Sigma = 1 - \sum_{k=0}^{n} P_k. \quad (1.9)$$

Полученные выражения для P_k (вероятностей пребывание системы в состоянии k) позволяют с помощью схемы для определения статических характеристик СМО, изображенной на рисунке 1.2, определять эти характеристики [1]:

$$\underbrace{\overbrace{S_0\ S_1\, S_2 \ldots\ S_{k-1}\, S_k\, S_{k+1} \ldots\ S_2 \ldots}^{\overline{Z}}\ \overbrace{S_n}^{N_{ож}}}_{K}$$

Рисунок 1.2 – Схема определения статических характеристик СМО

а) среднее количество заявок в каналах обслуживания, то есть среднее количество каналов занятых на ремонте:

$$\overline{Z} = \sum_{k=0}^{r} k \cdot P_k + \sum_{k=r+1}^{n} r \cdot P_k \,, \tag{1.10}$$

где первое слагаемое характеризует отсутствие очереди, а второе – очередь;

б) пропускная способность:

$$M = \frac{\overline{Z}}{T_{\text{В}}} = \overline{Z} \cdot \mu, \tag{1.11}$$

где $T_{\text{В}}$ − среднее время восстановления одного прибора, величина обратная интенсивности восстановления;

в) среднее число заявок, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и в очереди на обслуживание):

$$K = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_k = n - \overline{Z} \cdot \frac{\mu}{\lambda}; \tag{1.12}$$

г) среднее число заявок, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = \sum_{k=r+1}^{n}\ k - r\ \ \cdot P_k = n - \overline{Z} \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right); \tag{1.13}$$

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок:

$$R_{\text{ПР}} = \sum_{k=0}^{r-1}\ r - k\ \ \cdot P_k\,; \tag{1.14}$$

е) среднее относительное время простоя каждого канала СМО из-за отсутствия заявок:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{R_{\text{ПР}}}{r} \text{ при } r > 1; \tag{1.15}$$

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявок в очереди на обслуживание:

$$T_{\text{ОЖ}} = \frac{N_{\text{ОЖ}}}{n}; \tag{1.16}$$

з) среднее относительное значение времени пребывание заявок в очереди и в канале обслуживания:

$$T_{\text{ОБС}} = \frac{K}{n}; \tag{1.17}$$

и) при определении минимального количества каналов обслуживания $r_{\min}$, обеспечивающего отсутствие очереди на обслуживание, используют неравенство:

$$r_{\min} \geq \frac{n \cdot \lambda}{\lambda + \mu} = n \cdot K_{\text{П}} = n \cdot (1 - K_{\text{Г}}), \tag{1.18}$$

где $K_{\text{П}}$ и $K_{\text{Г}}$ – коэффициенты простоя и готовности, соответственно.

1.2. Пример использования ТМО для расчета характеристик технического обслуживания замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Дана СМО, состоящая из n = 9 работающих приборов и r = 3 каналов обслуживания. Интенсивность поступления заявок, равная интенсивности отказов одного прибора, λ = 0.1671 [ч$^{-1}$], а интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале μ = 0.3 [ч$^{-1}$]. Требуется определить:

а) среднее количество заявок $\overline{Z}$, занятых в каналах обслуживания, то есть занятых каналов на ремонте;

б) пропускную способность M;

в) среднее число заявок K, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и стоящих в очереди на обслуживание);

г) среднее число заявок $N_{ОЖ}$, находящихся в очереди на обслуживание;

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок $R_{ПР}$;

е) среднее относительное время простоя каждого канала обслуживания из-за отсутствия заявок $T_{ПР}$;

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди на обслуживание $T_{ОЖ}$;

з) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди и в канале обслуживания $T_{ОБС}$;

и) потребное количество каналов, обеспечивающее отсутствие очереди $r_{ОПТ}$.

Решение:

а) находим вспомогательные коэффициенты $A_к$ при $1 \le k \le n$:

$$A_к = \frac{n!}{r^{k-r} \cdot r! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k;$$

$A_1 = 7.52$; $A_2 = 11.169$; $A_3 = 11.516$; $A_4 = 16.171$;

$A_5 = 15.012$; $A_6 = 11.149$; $A_7 = 6.21$; $A_8 = 2.306$; $A_9 = 0.428$;

б) определим вспомогательную величину P_0 (вероятность того, что в системе исправно работают все приборы):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} A_k} = 0.012;$$

в) находим вероятность нахождения системы в k-ом состоянии, т.е. в состоянии, когда k приборов отказали ($1 \le k \le n$):

$$P_k = A_k \cdot P_0;$$

$P_1 = 0.088$; $P_2 = 0.131$; $P_3 = 0.17$; $P_4 = 0.189$;

$P_5 = 0.176$; $P_6 = 0.13$; $P_7 = 0.073$; $P_8 = 0.027$; $P_9 = 5.009 \cdot 10^{-3}$.

Проверка правильности решения:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1;$$

г) находим среднее количество заявок в каналах обслуживания:

$$\bar{Z} = \sum_{k=0}^{r} P_k \cdot k + \sum_{k=r+1}^{n} r \cdot P_k ; \quad \bar{Z} = 2.658;$$

д) находим пропускную способность M:

$$M = \bar{Z} \cdot \mu ; \quad M = 0.797;$$

е) находим среднее количество заявок находящихся в СМО (в каналах и в очереди):

$$K = n - \bar{Z} \cdot \frac{\mu}{\lambda} ; \quad K = 1.227;$$

ж) находим среднее количество заявок, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = n - z \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right); \; N_{\text{ОЖ}} = 1.569;$$

з) находим среднее количество простаивающих каналов из-за отсутствия заявок:

$$R_{\text{ПР}} = \sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \cdot P_k ; \quad R_{\text{ПР}} = 0.343;$$

и) находим среднее относительное время простоя из-за отсутствия заявок:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{R_{\text{ПР}}}{r} ; \quad T_{\text{ПР}} = 0.114;$$

к) находим среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди:

$$T_{\text{ОЖ}} = \frac{N_{\text{ОЖ}}}{n} ; \quad T_{\text{ОЖ}} = 0.174;$$

л) находим среднее относительное значение времени пребывания заявки в СМО:

$$T_{\text{ОБС}} = \frac{K}{n}; \quad T_{\text{ОБС}} = 0.47;$$

м) определяем коэффициент готовности:

$$K_{\Gamma} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad K_{\Gamma} = 0.642;$$

н) находим потребное количество каналов, необходимых для обеспечения отсутствия очереди:

$$r_{\text{ОПТ}} \geq \frac{n \cdot \lambda}{\lambda + \mu}; \; r_{\text{ОПТ}} \geq 3.22.$$

Принимаем $r_{\text{ОПТ}} = 4$, то есть равным ближайшему целому числу большему 3.22.

1.3. Индивидуальные задания для расчета в лабораторной работе характеристик технического обслуживания замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Дана СМО, состоящая из n работающих приборов и r каналов обслуживания. Интенсивность поступления заявок (интенсивность отказов одного прибора) равна λ, а интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале равна μ.

Определить:

а) среднее количество заявок $\bar{Z}$, занятых в каналах обслуживания, то есть занятых каналов на ремонте;

б) пропускную способность M;

в) среднее число заявок K, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и стоящих в очереди на обслуживание);

г) среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание;

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок $R_{\text{ПР}}$;

е) среднее относительное время простоя каждого канала обслуживания из-за отсутствия заявок $T_{ПР}$;

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди на обслуживание $T_{ОЖ}$;

з) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди и в канале обслуживания $T_{ОБС}$;

и) потребное количество каналов, обеспечивающее отсутствие очереди $r_{ОПТ}$.

Численные значения исходных величин для расчёта индивидуальных заданий даны в таблице 1.1 и зависит от номера варианта.

Таблица 1.1 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуальных заданий с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	8	9	10	11	12	11	10	9	8	10
r	2	3	2	3	2	2	3	2	3	2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ, [ч$^{-1}$]	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Выражение для определения λ: $x=\frac{\mu\cdot r}{\lambda\cdot\ n-r}$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.75

1.4. Этапы выполнения лабораторной работы

1. Подготовиться к ответу на контрольные вопросы и получить у преподавателя допуск к выполнению задания.

2. Используя номер варианта задания, выданный преподавателем, выполнить расчет задания по пункту 1.2.

1.5. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Письменный ответ на контрольные вопросы, указанные преподавателем.

3. Расчёт индивидуального задания.

4. Заключение – выводы по результатам работы.

1.6. Перечень контрольных вопросов, которые могут быть заданы во время защиты отчёта по работе

1. Какие разновидности СМО упоминаются в описании к лабораторной работе и в чём особенности этих СМО?

2. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют замкнутую многоканальную СМО с ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?

3. Что изучает теория массового обслуживания?

4. Что называют системой массового обслуживания?

5. Что такое техническое состояние СМО?

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Тема работы: Определение статистических характеристик технического обслуживания открытых систем массового обслуживания с ожиданием и отказами

Цель работы: Обучить студентов применению методики определения статистических характеристик технического обслуживания открытых СМО на примерах:

а) одноканальной СМО с ожиданием;

б) многоканальной СМО с ожиданием;

в) многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания;

г) многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди и с отказами.

Работа проводится в программе MathCAD.

2.1. Общие сведения о СМО с ожиданием и с отказами

По признаку потерь заявок на обслуживание СМО подразделяются на три типа: с отказами, с ожиданием и смешанного типа. В СМО с отказами заявки обслуживаются немедленно, если каналы свободны, или получат отказ и теряются, если все каналы заняты. В СМО с ожиданием (например, в системах ремонта техники) все заявки выстраиваются в очередь, если каналы заняты. В СМО смешанного типа имеются ограничения на время пребывания заявки в системе или на длину очереди. При невыполнении требуемого ограничения заявка покидает СМО необслуженной. Если обслуженная заявка покидает СМО, то СМО называют открытыми, а если снова поступает на обслуживание в СМО, то замкнутыми. По числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки СМО делят на одноканальные и многоканальные.

Для сокращенного наименования СМО используют обозначения вида $A/B/n/m$, где A указывает распределение интервалов между событиями; B – распределение времени обслуживания; n – число каналов; m – количество мест в очереди. Показательное распределение обозначим буквой M; Эрланговского порядка k – E_k; постоянное время обслуживания или регулярный поток – D; распределение обслуживания общего, неконкретизируемого типа – G [3]. В СМО с чистым ожиданием $m = \infty$, а в СМО с отказами $m = 0$. Таким образом, одноканальную СМО с чистым ожиданием, с простейшим потоком на входе, с интенсивностью λ и экспоненциальным временем обслуживания с показателем μ обозначают $M/M/1/\infty$, а многоканальную СМО такого же типа с числом каналов n – $M/M/n/\infty$. Многоканальную СМО с ожиданием смешанного типа, с ограничением на длину очереди, с простейшим потоком на входе и показательным законом распределения времени обслуживания обозначают $M/M/n/m$.

2.2. Общие сведения об открытой одноканальной СМО с ожиданием

Работу открытой одноканальной СМО с ожиданием можно проиллюстрировать с помощью графа переходов системы из одного состояния E_n в другое (рисунок 2.1). Как упоминалось в описании к лабораторной работе 1.1, под термином **техническое состояние** E_n понимают совокупность подверженных изменению в процессе производства или эксплуатации свойств объекта, характеризуемую в определённый момент признаками, установленными технической документацией. В техническом состоянии E_n в СМО находится n заявок на обслуживание. На рисунке 2.1 стрелки обозначают вероятности переходов системы из одного состояния E_n в другое.

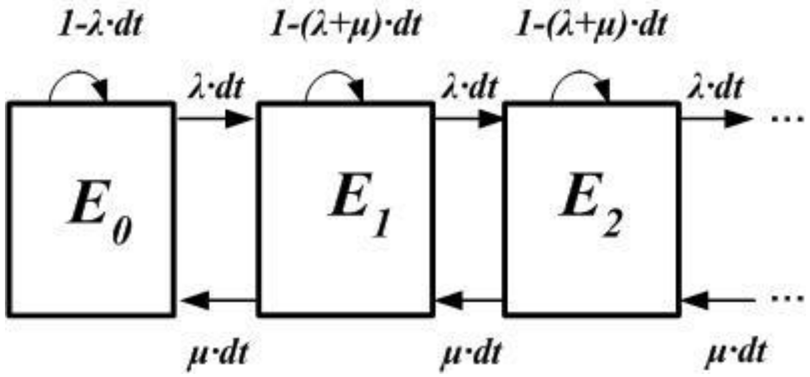

Рисунок 2.1 – Граф переходов открытой одноканальной СМО с ожиданием из одного состояния E_n в другое

Вероятности P_{nn} того, что система не изменит свое состояние E_n, не влияют на вероятности состояний. Поэтому на графах переходов обычно указывают только вероятности переходов типа $P_{n,n+1}$ и $P_{n,n-1}$, и только интенсивности переходов (рисунок 2.2). Такой граф называется схемой гибели и размножения.

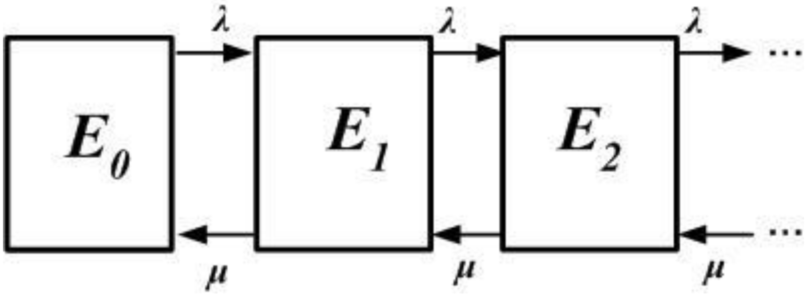

Рисунок 2.2 – Граф переходов открытой одноканальной СМО с ожиданием из одного состояния E_n в другое, изображённый в виде схемы гибели и размножения

Составим дифференциальные уравнения по виду графа состояний, изображённого в виде схемы гибели и размножения, по инженерному правилу А.Н. Колмогорова:

«Производная от вероятности пребывания системы в любой момент времени в состоянии *k* равна алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов в *k*-ое состояние (или из *k*-ого состояния) на вероятность того состояния, откуда совершается переход в *k*-ое состояние. Причем, тем слагаемым, которым соответствуют уходящие стрелки из *k*-ого состояния, приписывается знак «минус», а входящим – «плюс».

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t); \tag{1.19}$$

……………………………………..

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) \cdot P_n(t) + \mu \cdot P_{n+1}(t). \tag{1.20}$$

Для стационарного режима:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \tag{1.21}$$

и система дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных уравнений:

$$0 = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \tag{1.22}$$

$$0 = \lambda \cdot P_0 - (\lambda + \mu) \cdot P_1 + \mu \cdot P_2. \tag{1.22a}$$

……………………………………..

$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n + \mu \cdot P_{n+1}. \tag{1.23}$$

Откуда $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$; $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0$ и $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$.

Учитывая, что:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \tag{1.24}$$

получаем:

$$1 = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}, \tag{1.25}$$

$$P_0 = 1 - \alpha = 1 - \frac{\lambda}{\mu}; \tag{1.26}$$

$$P_n = (1 - \alpha) \cdot \alpha^n; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.27}$$

Параметр $\alpha = \lambda/\mu$ выражает среднее число заявок, приходящихся на среднее время обслуживания одной заявки, то есть степень насыщения в системе и называется загрузкой или коэффициентом использования СМО. Для одноканальных СМО при $\alpha > 1$ установившегося режима не существует, и очередь растет неограниченно. Получим статистические характеристики открытой одноканальной СМО с ожиданием [28].

Среднее чисто заявок в системе:

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = (1 - \alpha) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \alpha^n = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \tag{1.28}$$

Среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов:

$$\bar{Z} = P_{n>0} = 1 - P_0 = \alpha. \tag{1.29}$$

Среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = K - \bar{Z} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} - \alpha = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}. \tag{1.30}$$

2.3. Общие сведения об открытой многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания

Для такой СМО заявки на обслуживание, поступающие на вход системы и заставшие все каналы обслуживания занятыми, встают в очередь. По количеству мест очередь не имеет ограничений. Но заявка, простоявшая некоторое время в очереди и не получившая обслуживание, покидает очередь с интенсивностью ухода v. Время ожидания распределено экспоненциально со средним сроком ожидания:

$$\bar{t}_{\text{ОЖ}} = \frac{1}{v}. \tag{1.31}$$

При $v \to \infty$ многоканальная СМО смешанного типа, с ограниченным временем ожидания, с числом каналов обслуживания s переходит в многоканальную СМО с отказами, а при $v \to 0$ – в многоканальную чистую СМО с ожиданием. Это позволяет использовать приведённые в данном разделе формулы для СМО смешанного типа при расчёте других СМО указанных выше типов, в зависимости от численного значения v.

Расчёт проводим по методике, аналогичной для открытой одноканальной СМО с ожиданием. По инженерному правилу А.Н.Колмогорова по виду графа состояний, изображённого на рисунке 2.3 в виде схемы гибели и размножения, составим систему дифференциальных уравнений. Для стационарного режима система этих дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных уравнений из-за того, что $\frac{dP_n\ t}{dt} = 0$. Из линейных уравнений методом подстановки, учитывая, что $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ получим выражения для вероятностей P_n состояний n [28]:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot P_0; \quad 0 \le n \le s; \tag{1.32}$$

$$P_n = \frac{\alpha^s}{s!} \cdot \frac{\lambda^{n-s}}{s \cdot \mu + v\ \cdot \ldots \cdot \left[s \cdot \mu + \ n - s\ \cdot v \right]} \cdot P_0; \quad s \le n; \tag{1.33}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^{n-s}}{s \cdot \mu + v \cdot \ldots \cdot \left[s \cdot \mu + \ n - s\ \cdot v \right]} \right]^{-1}. \tag{1.34}$$

Непосредственное пользование формулой (1.34) затруднено тем, что в неё входит бесконечная сумма. Однако члены этой суммы быстро убывают [32]. При приближенном вычислении вероятности P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание в сумме $\sum_{n=s}^{\infty}$ формулы (1.34) достаточно ограничиться первыми десятью членами. Здесь стационарный режим существует всегда: ряд P_n при $s < n$ сходится. Приведём статистические характеристики многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания [28].

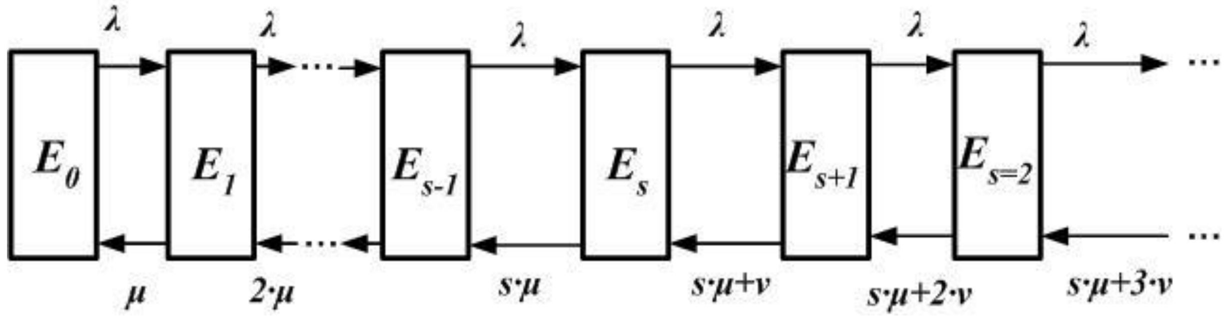

Рисунок 2.3 – Граф переходов многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания, изображённый в виде схемы гибели и размножения

Вероятность отказа для данной системы не имеет смысла.

Среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = \sum_{n=s+1}^{\infty} n - s \ \cdot P_n . \tag{1.35}$$

В сумме $\sum_{n=s+1}^{\infty}$ формулы (1.35) также достаточно ограничится первыми десятью членами.

Абсолютная пропускная способность:

$$M = \lambda - \nu \cdot N_{\text{ОЖ}}, \tag{1.36}$$

где $\nu \cdot N_{\text{ОЖ}}$ – заявки, ушедшие из очереди в единицу времени.

Относительная пропускная способность:

$$q = \frac{M}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \cdot N_{\text{ОЖ}} . \tag{1.37}$$

Среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов:

$$\bar{Z} = \frac{M}{\mu} = \alpha - \frac{\nu}{\mu} \cdot N_{\text{ОЖ}}. \tag{1.38}$$

2.4. Общие сведения об открытой многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди

Для такой СМО (рисунок 2.4) заявка, заставшая все *n* каналов занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее *m* заявок; если же число заявок в очереди равно *m* (больше *m* оно быть не может), то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему не обслуженной. Остальные допущения – о простейшем потоке заявок и о показательном распределении времени обслуживания – оставим прежними.

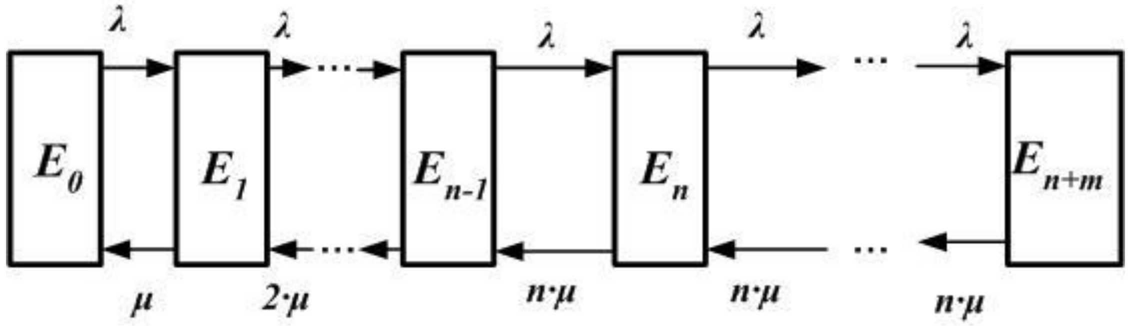

Рисунок 2.4 – Граф переходов многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди, изображённый в виде схемы гибели и размножения

В данном случае число состояний системы будет конечно, так как общее число заявок, связанных с системой, не может превышать (*n* + *m*) (*n* обслуживаемых и *m* стоящих в очереди). Расчёт проводим по методике для открытой одноканальной СМО с ожиданием. Не останавливаясь на этом решении, приведем только окончательные формулы для определения вероятностей P_k состояний *k*, когда очередь отсутствует, и вероятностей P_{n+s} состояний (*n* + *s*), когда имеется очередь [32].

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}; \quad 0 \le k \le n; \tag{1.39}$$

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}; \quad 1 \le s \le m. \tag{1.40}$$

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной (формула (1.40)), равна вероятности P_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок.

Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{n+m}. \tag{1.41}$$

Абсолютная пропускная способность:

$$M = \lambda \cdot q. \tag{1.42}$$

Средняя доля времени, которое система будет простаивать, равна вероятности P_0 (формула (1.34)).

Характеристики открытой многоканальной СМО с отказами можно определить по формуле (1.39) при $m = 0$ и формулам (1.41), (1.42).

2.5. Индивидуальные задания для расчета в лабораторной работе характеристик технического обслуживания открытых многоканальных СМО с ожиданием и с отказами

Задание 1

Дана открытая система массового обслуживания смешанного типа с ограниченным ожиданием, имеющая n каналов обслуживания. Интенсивность потока заявок на обслуживание, поступающих в СМО, равна λ [$ч^{-1}$]. Интенсивность выполнения заявок (интенсивность восстановления) равна μ [$ч^{-1}$], а отношение $\lambda/\mu < n$. Значения n, λ [$ч^{-1}$], μ [$ч^{-1}$] и ν [$ч^{-1}$] приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Определить следующие статистические характеристики СМО для трёх значений средней длительности ожидания $T_{ОЖ}$: когда $0 < T_{ОЖ} = 1/\nu < \infty$; когда $T_{ОЖ} = 0$ (чистая СМО с отказами) и когда $T_{ОЖ} = \infty$ (чистая СМО с ожиданием):

- вероятность P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание;
- вероятность наличия очереди на обслуживание $P_{ОЧ} = 1 - \sum_{n=0}^{s} P_n$;
- среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов;
- среднее число заявок $N_{ОЖ}$, находящихся в очереди на обслуживание;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность.

Расчёты провести с использованием программного комплекса MathCAD.

Таблица 2.1 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуального задания №1 с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ, ч$^{-1}$	10	8	7	9	6	7	8	9	12	6
μ, ч$^{-1}$	3	2.3	1.5	2.5	1.8	2	1.9	3	3	2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	6	7	6	7	7	5	5	6	5	4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
***ν*, ч$^{-1}$**	3.5^{-1}	4^{-1}	5^{-1}	6^{-1}	5^{-1}	7^{-1}	6.5^{-1}	5.5^{-1}	1.5^{-1}	4^{-1}

Задание 2

Дана открытая система массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди. Число каналов СМО *n*, максимальное число заявок в очереди *m*, поток заявок простейший, время обслуживания распределено по показательному закону. Интенсивность потока заявок λ [$ч^{-1}$], а средняя длительность обслуживания заявок $T_{ОБС}$. Значения λ [$ч^{-1}$], $T_{ОБС}$ [ч], *n* и *m* приведены в таблице 2.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Определить следующие статистические характеристики СМО для случая, когда все каналы обслуживания исправно работают и для случая, когда один из каналов не работает:

- вероятность P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание;
- вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность.

Определить эти же характеристики, но для открытой многоканальной СМО с отказами (при $m = 0$).

Расчёты провести с использованием программного комплекса MathCAD.

Таблица 2.2 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуального задания №2 с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ, $ч^{-1}$ **$T_{ОБС}$, ч**	1 4	3 1.5	2 2.8	3 2	2 2.5	1 3.5	2 2.2	1 1.5	3 1.8	3 2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	3	4	5	4	3	5	4	5	4	5
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m	2	2	4	2	2	3	2	3	2	3

2.6. Этапы выполнения лабораторной работы

1. Подготовиться к ответу на контрольные вопросы, и получить у преподавателя допуск к выполнению лабораторного задания.

2. Используя номер варианта задания, выданный преподавателем, выполнить расчеты по пункту 1.2.6.

2.7. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Письменный ответ на контрольные вопросы, указанные преподавателем.

3. Расчёт индивидуального задания.

4. Заключение – выводы по результатам работы.

2.8. Перечень контрольных вопросов, которые могут быть заданы во время защиты отчёта по работе

1. Какие разновидности открытых СМО упоминаются в описании к лабораторной работе и в чём особенности этих СМО?
2. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО с чистым ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?
3. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди, и каковы выражения для их расчёта?
4. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с ограниченным ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?
5. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с отказами, и каковы выражения для их расчёта?
6. Какова формулировка инженерного правила составления дифференциальных уравнений по виду графа или по виду схемы состояний?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павленко К.И. Основы эксплуатации РЭО летательных аппаратов. –М.: Военное издательство, 1988.
2. Леонов А.И., Дубровский Н.Ф. Основы технической эксплуатации бытовой РЭА. – М.: Легпромбытиздат, 1991.
3. Дубровский В.И. Эксплуатация средств навигации и управления воздушным движением. – М.: Воздушный транспорт, 1995.
4. Давыдов П.С. Техническая диагностика радиоэлектронных устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1988.
5. Полибин В.В. Ремонт и регулировка бытовой РЭА: Учебное пособие для техникумов. – М.: Легпромбытиздат, 1987.
6. Фёдоров В.К. и др. Контроль и испытания в проектировании и производстве радиоэлектронных средств. – М.: Техносфера, 2005.
7. Кирпиченко Ю.Р. Диагностика бытовой радиоэлектронной аппаратуры: Учебное пособие. – Томск: ТМЦДО, 2003.
8. Кирпиченко Ю.Р. Диагностика бытовой радиоэлектронной аппаратуры: Учебно-методическое пособие. – Томск: ТМЦДО, 2003.
9. Дудко Б.П. Радионавигационные системы: Лабораторный практикум. – Томск: ТУСУР, 2005.
10. Якушевич Г.Н. Радиоавтоматика: Учебно-методическое пособие. – Томск: ТУСУР, 2005.
11. Хабаров Б.П., Куликов Г.В., Парамонов А.А. Техническая диагностика и ремонт бытовой радиоэлектронной аппаратуры. – М.: Телеком, 2004.
12. Сыпчук П.П., Талалай А.М. Методы статистического анализа при управлении качеством изготовления элементов РЭА. – М.: Советское радио, 1979.
13. Ушаков В.М., Озёркин Д.В., Миньков С.Л. Основы научных исследований. – Томск: Издательство ТГПУ, 2002.
14. Козлов В.Г. Теория надёжности. – Томск: ТУСУР, 2004.
15. Михайлов А.В. Эксплуатационные допуски и надежность в РЭА. –М.: Советское радио, 1970.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974.
17. Глудкин О.П. Методы и устройства испытаний РЭА и ЭВА. – М.: Высшая школа, 1991.
18. Малинский В.Д. Контроль и испытания радиоаппаратуры. – М.: Энергия, 1970.
19. Озёркин Д.В. Теория надёжности: Компьютерный лабораторный практикум. – Томск: ТУСУР, 2005.

20. Рычина Т.А. Электрорадиоэлементы. – М.: Советское радио, 1976.
21. Валков Л.И. Управление эксплуатацией летательных комплексов. –М.: Высшая школа, 1981.
22. Адлер Ю.П. и др. Планирование экспериментов при поиске оптимальных решений. – М.: Наука, 1971.
23. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
24. Озёркин Д.В. Основы автоматики и системы автоматического управления: Компьютерный лабораторный практикум. – Томск: ТУСУР, 2004.
25. Разевиг В.Д. Схемотехническое моделирование с помощью Micro-CAP 7. – М.: Горячая линия - Телеком, 2003.
26. Основы эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры / Под ред. В.Ю.Лавриненко. – М.: Высшая школа, 1978.
27. Алексеенко А.Я., Адерихин И.В. Эксплуатация радиотехнических комплексов. – М.: Воениздат, 1980.
28. Салмина Н.Ю. Моделирование систем. – Томск: ТУСУР, 2002.
29. Эксплуатация радиотехнических комплексов / Под ред. А.И.Алексеева. – М.: Советское радио, 1976.
30. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности: Учебное пособие для вузов. – СПБ: БХВ-Петербург, 2006.
31. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности: Практикум. Учебное пособие для вузов. – СПБ: БХВ-Петербург, 2006.
32. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 2000.