

«

» ()

()

С

Учебно-методическое пособие к
практическим занятиям и организации
самостоятельной работы

омск 2013 г.

Данное учебное пособие составлено на основе курса «Основы математического моделирования радиотехнических устройств и систем», преподаваемого в Нижегородском государственном техническом университете А.Г.Рындык.

В пособии изложены рекомендации по решению некоторых типовых задач, предлагаемых студентам на практических занятиях. Приведены подробные разъяснения, касающиеся некоторых особенностей расчета параметров формирующих фильтров и характеристик процессов на их выходе.

и:

аспирант каф. ТОР
Р.Р. Абенов
2013 .

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Данные методические указания содержат краткие теоретические сведения и пояснения к решению некоторых типовых задач по следующим темам:

1. Расчет характеристик случайных процессов на выходе линейных фильтров при воздействии на их входе белого гауссовского шума (БГШ) и расчет параметров формирующих фильтров, используемых для моделирования случайных процессов с заданными спектрально-корреляционными свойствами.
2. Расчет параметров оптимальных обнаружителей простых радиоимпульсов.
3. Оптимальное оценивание неизвестных параметров распределения.

Целью методических указаний является помощь студентам в решении типовых расчетных задач, связанных с моделированием случайных процессов.

1. МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА

Как известно, модель белого шума представляет собой математическую абстракцию в виде процесса, спектр которого на всех частотах равномерный и равен некоторой константе $N_0/2$, а корреляционная функция представляет собой дельта-функцию с весом, который определяется указанной константой. Таким образом, белый шум имеет бесконечную дисперсию (мощность). Любой реальный процесс имеет конечную мощность, а, следовательно, его спектральная плотность мощности (СПМ) может быть только спадающей интегрируемой функцией частоты. Однако модель белого шума используется, если ширина спектра шума много больше, чем ширина полосы пропускания некоторого частотно-избирательного устройства.

Рассмотрим теперь модель дискретного белого гауссовского шума (ДБГШ). Дискретный белый шум, в отличие от белого шума, имеет конечную мощность. Его корреляционная функция представляет собой единичную функцию с весом, равным дисперсии процесса. Любые два отсчета такого процесса не коррелированы. Такой процесс можно смоделировать при помощи средств вычислительной техники. Однако в реальности почти всегда отсчеты случайного процесса, полученного путем дискретизации непрерывного процесса, имеют конечный коэффициент взаимной корреляции, и только при использовании фильтров с частотной характеристикой специального вида и выборе частоты дискретизации в соответствии с параметрами этого фильтра соседние отсчеты процесса могут быть не коррелированы. Покажем это на примере формирования отсчетов дискретного процесса в цифровом приемнике. Общая функциональная схема приемника показана на рис.1.

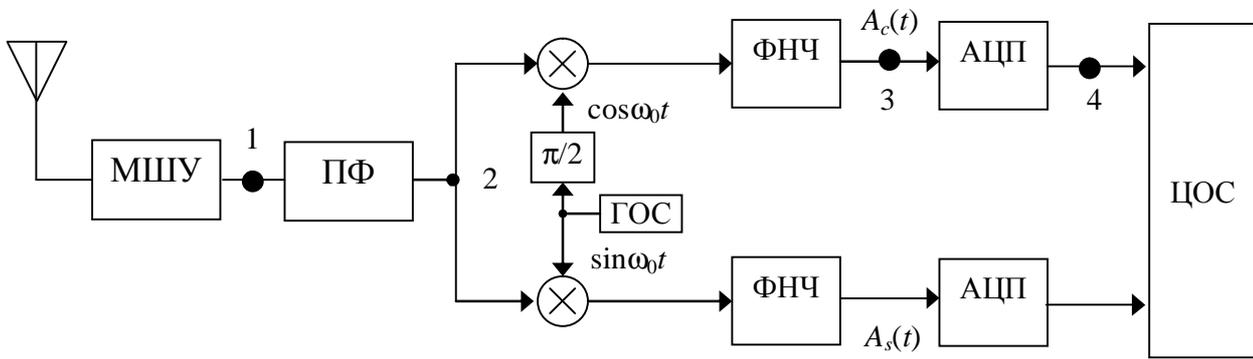


Рис.1

На рис.1 обозначено: МШУ – малошумящий усилитель, ПФ – полосовой фильтр, ФНЧ – фильтр нижних частот, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ГОС – генератор опорной частоты, ЦОС – блок цифровой обработки сигналов. Предположим, что собственный шум антенны и усилителя много больше ширины полосы пропускания ПФ, а амплитудно-частотные характеристики ПФ и ФНЧ идеально прямоугольные. На рис.2 показаны СПМ процессов в точках 1, 2, 3 и 4, а также корреляционная функция процесса в точке 4 (рис.1).

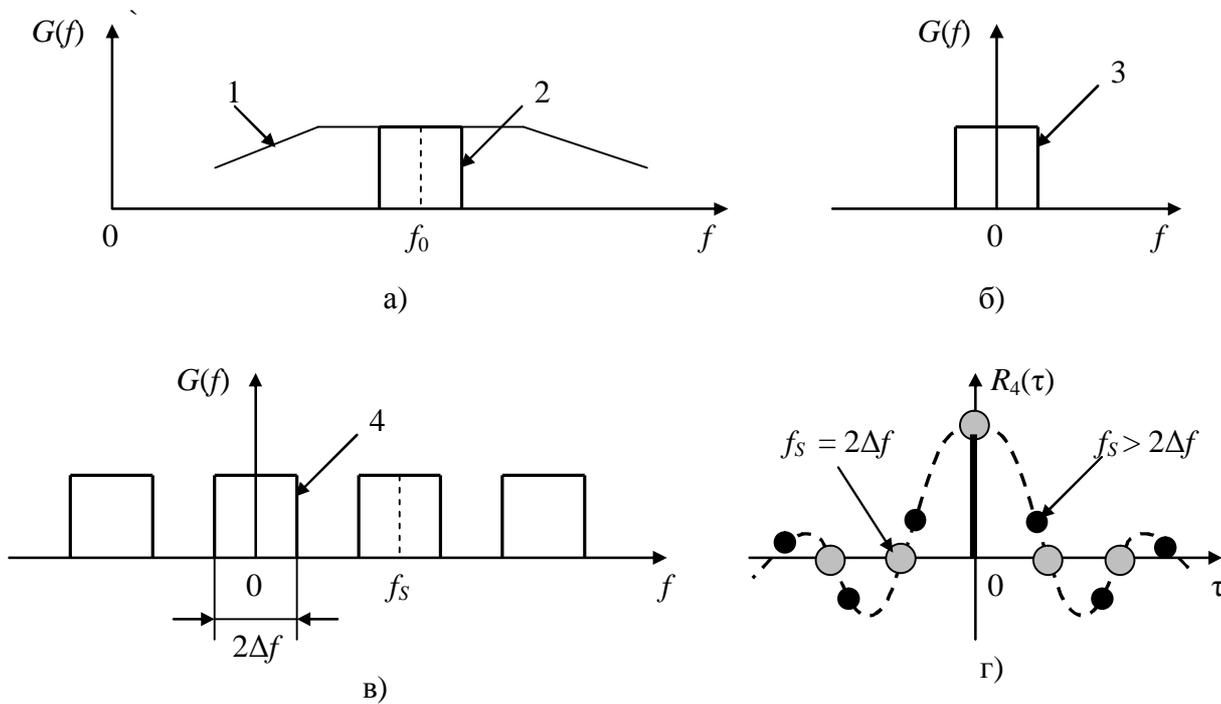


Рис.2

Из рассмотрения приведенных графиков можно сделать следующие выводы. Во-первых, шум после фильтрации имеет ширину полосы, определяемую характеристиками фильтров, и поэтому мощность этого шума ограничена. Именно этим обстоятельством объясняется принципиальное отличие дискретного белого шума от белого шума – дискретный белый шум имеет конечную

дисперсию, поскольку может быть получен путем дискретизации шума с конечной шириной полосы. Рассмотрим теперь корреляционные свойства процесса на выходе АЦП. Из рис.2,в,г видно, что если частота дискретизации больше удвоенной односторонней полосы процесса, то его дискретные отсчеты будут коррелированы. Для того чтобы соседние отсчеты процесса были некоррелированными, необходимо частоту дискретизации выбирать из условия $f_s = 2\Delta f$. Только в этом случае полученная реализация дискретного случайного процесса будет некоррелированной, поскольку отсчеты корреляционной функции дискретного процесса будут попадать в нули корреляционной функции низкочастотного процесса, имеющий вид $\sin x/x$.

Идеальные фильтры, рассмотренные в данном примере, являются нереализуемыми. Следовательно, если АЧХ используемых фильтров в схеме на рис.1 имеет некоторую произвольную форму (например, гауссовскую), то дискретные отсчеты процесса будут коррелированы. Однако на практике могут применяться некоторые специальные фильтры, у которых автокорреляционная функция импульсной характеристики (ИХ) имеет равноотстоящие друг от друга нули, как и у функции $\sin x/x$. Распространенным примером таких фильтров являются фильтры с амплитудно-частотной характеристикой типа приподнятого косинуса [3,6,7], которая описывается следующим выражением:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right] \right\}, & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T}, \\ 1, & |f| < \frac{1-\alpha}{2T}, \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T}, \end{cases} \quad (1)$$

где α – параметр, определяющий степень сглаживания частотной характеристики, T – ширина основного лепестка ИХ по первым нулям. Если $\alpha = 0$, то амплитудно-частотная характеристика фильтра сводится к прямоугольной характеристике нереализуемого фильтра. Если $\alpha = 1$, то амплитудно-частотная характеристика представляет собой один период приподнятого косинуса. При промежуточных значениях параметра α характеристика фильтра имеет плоскую вершину, а склоны спадают по закону косинуса.

ИХ фильтра с характеристика фильтра с косинусным сглаживанием имеет вид

$$h(t) = \left(\frac{\sin \pi t / T}{\pi t / T} \right) \left(\frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha \pi t / T)^2} \right). \quad (2)$$

При $\alpha = 0$ эта функция сводится к функции $\sin x/x$, а при больших значениях параметра α имеет меньший уровень боковых лепестков. Чтобы при использовании фильтра с косинусным сглаживанием отсчеты процесса были взаимно не коррелированы, необходимо интервал дискретизации выбирать равным $T_s = T$. Фильтры с косинусным сглаживанием широко применяются в цифровой связи, т.к. обеспечивают минимальный уровень межсимвольной интерференции.

Пакет MATLAB имеет встроенные средства для формирования реализаций ДБГШ. Во-первых, среди стандартных функций, входящих в состав языка программирования MATLAB, имеется функция $\text{randn}(M, N)$. Эта функция при ее вызове возвращает двумерный массив независимых случайных чисел размером $M \times N$, распределенных по нормальному закону с параметрами (0,1). В случае отсутствия одного или обоих аргументов функции при ее вызове она возвращает вектор независимых случайных чисел или скалярное случайное число.

В библиотеке SIMULINK в разделе источников имеется два блока для формирования реализации БГШ: Random Number и Band Limited White Noise. Рассмотрим особенности использования того и другого блока.

В списке параметров блока Random Number имеются следующие пункты: дисперсия шума - Variance, математическое ожидание (МО) - Mean, начальные условия - Initial Seed и интервал дискретизации - Sample time. Этот генератор шума формирует реализацию дискретного СП, СПМ которого равномерна в полосе частот $[-f_s / 2, f_s / 2]$, где f_s – частота дискретизации – величина, обратная задаваемому интервалу дискретизации Sample time. При этом уровень СПМ $N_0/2$ в указанной полосе определяется соотношением:

$$\frac{N_0}{2} = \frac{\sigma^2}{f_s}, \quad (3)$$

где σ^2 - дисперсия шума (Variance).

Соотношение (3) иллюстрируется рис.3.

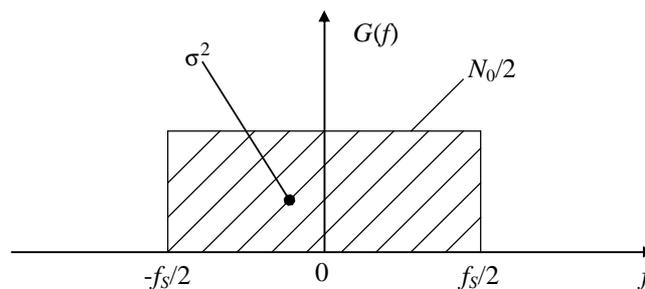


Рис.3

На рис.3 заштрихованная площадь под кривой СПМ равна дисперсии шума, откуда с очевидностью следует выражение (2.5).

Список параметров блока Band Limited White Noise имеет принципиальное отличие. В нем вместо параметра Variance имеется параметр под названием Noise power. Хотя перевод этого словосочетания и означает «мощность шума» (т.е., другими словами, дисперсия), однако истинный смысл этого параметра – уровень СПМ шума, т.е. $N_0/2$. Таким образом, задавая уровень СПМ $N_0/2$ в полосе $[-f_s / 2, f_s / 2]$, можно определить дисперсию шума по формуле

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} f_s. \quad (4)$$

Использование одного из рассмотренных генераторов шума при моделировании гауссовских СП определяется удобством использования набора параметров того или иного блока.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Задание: построить корреляционную функцию СП на выходе фильтра с заданной ИХ. Найти дисперсию и МО процесса на выходе фильтра в установившемся режиме при заданных МО и дисперсии на входе. Построить графики зависимости МО и дисперсии процесса на выходе фильтра, если при нулевых начальных условиях в момент времени t_0 на входе начинает действовать реализация БГШ с заданными параметрами. Найти нормированный коэффициент взаимной корреляции значений процесса на выходе фильтра, взятых через заданный интервал времени.

В качестве примера рассмотрим спектрально-корреляционные свойства процесса на выходе фильтра с прямоугольной ИХ. Как отмечено в [1], корреляционная функция процесса на выходе фильтра с точностью до постоянного множителя определяется автокорреляционной функцией ИХ фильтра. Автокорреляционная функция ИХ прямоугольной формы имеет вид треугольника. Вид ИХ рассматриваемого фильтра и ее автокорреляционной функции показаны на рис.3.

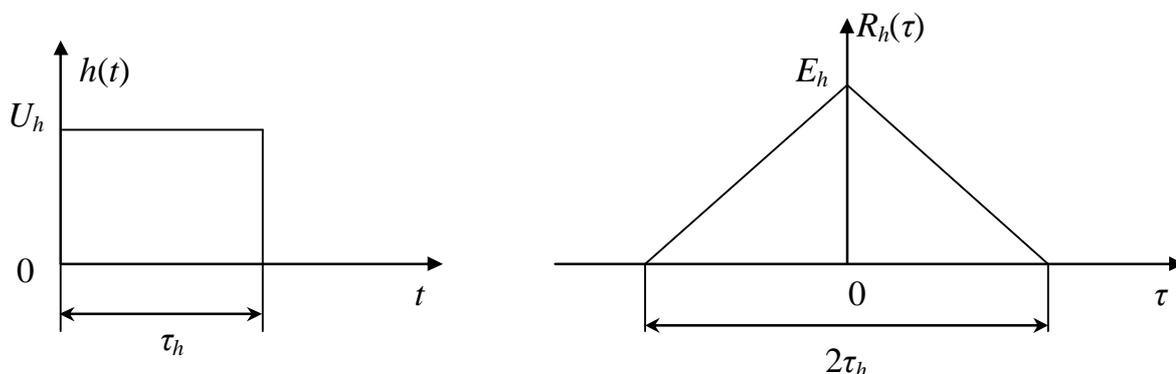


Рис.3

Как известно [2,3], дисперсия процесса на выходе линейного фильтра при воздействии на входе белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ в установившемся стационарном режиме определяется из выражения

$$\sigma_2^2 = \frac{N_0}{2} E_h, \quad (3)$$

где E_h – энергия ИХ. Таким образом, корреляционная функция процесса на выходе фильтра по форме совпадает с автокорреляционной функцией ИХ фильтра и имеет максимум, определяемый величиной (3). На рис.4 показаны графики зависимости математического ожидания (МО) и дисперсии процесса на выходе фильтра от времени, построенные в предположении, что в нулевой момент

времени на вход фильтра с нулевыми начальными условиями подали реализацию белого шума с МО m_1 и СПМ $N_0/2$.

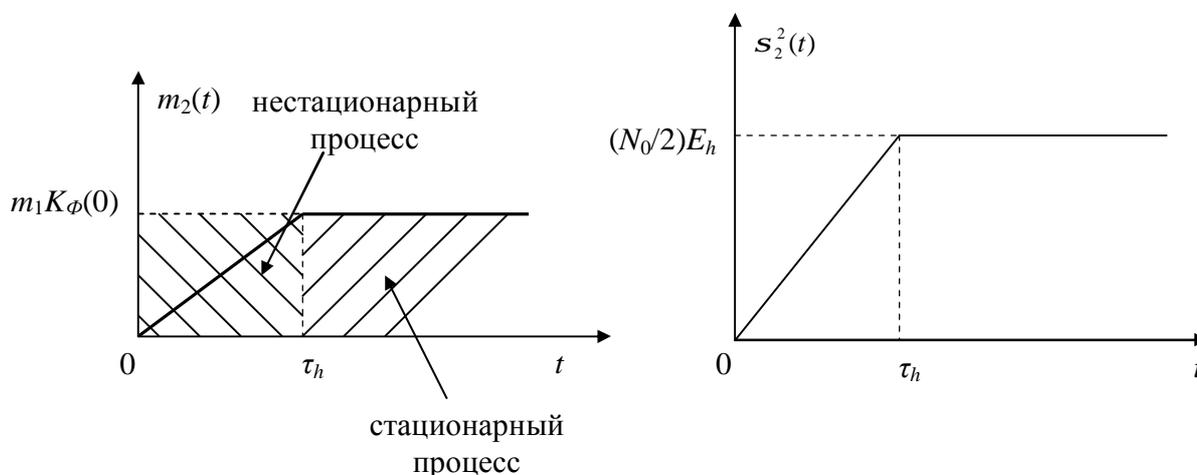


Рис.4

На графиках зависимости МО и дисперсии процесса на выходе фильтра имеется переходный процесс, длительность которого определяется длительностью ИХ фильтра. График зависимости МО от времени представляет собой переходную характеристику фильтра с весом, равным МО входного процесса. Очевидно поэтому, что в случае, если МО процесса на входе равно нулю, то и выходной процесс будет иметь нулевое МО.

Определим закон изменения дисперсии процесса на выходе фильтра в зависимости от времени. Для этого условно представим фильтр с ИХ $h(t)$ в виде параллельного соединения K фильтров с ИХ $h_i(t)$, представляющими собой парциальные участки исходной ИХ, задержанные на время $i\Delta t$, где i – номер парциальной ИХ, Δt – ее длительность. Для того чтобы параллельное соединение парциальных фильтров соответствовало исходному фильтру, выходные процессы парциальных фильтров складываются. Функциональная схема системы, эквивалентной исходному фильтру, показана на рис.5,а. На рис.5,б показаны парциальные ИХ параллельных каналов эквивалентной схемы.

В этом случае на интервале времени $[0, \Delta t]$ будет наблюдаться переходный процесс на выходе первого парциального фильтра, а на выходах остальных будут нулевые значения. После окончания этого переходного процесса дисперсия на выходе сумматора будет равна $\sigma_{2,1}^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{\Delta t} h_1^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_{h1}$, где E_{h1} – энергия ИХ $h_1(t)$.

Одновременно начнется переходный процесс на выходе второго парциального фильтра, по окончании которого дисперсия на выходе второго фильтра будет равна $\sigma_{2,2}^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{\Delta t} h_2^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_{h2}$. Импульсные характеристики парциальных

фильтров являются взаимно ортогональными функциями, поскольку взаимное произведение любых двух парциальных ИХ равно нулю. Это значит, что процессы на выходах парциальных фильтров в один и тот же момент времени будут иметь значения, которые являются откликом этих фильтров на сдвинутые

по времени и, следовательно, независимые отсчеты входного белого шума. Учитывая также и то обстоятельство, отклики на одномоментные значения входного процесса не пересекаются, значения выходного процесса, взятые в один и тот же момент времени, не коррелированы, а в случае гауссовского процесса и независимы.

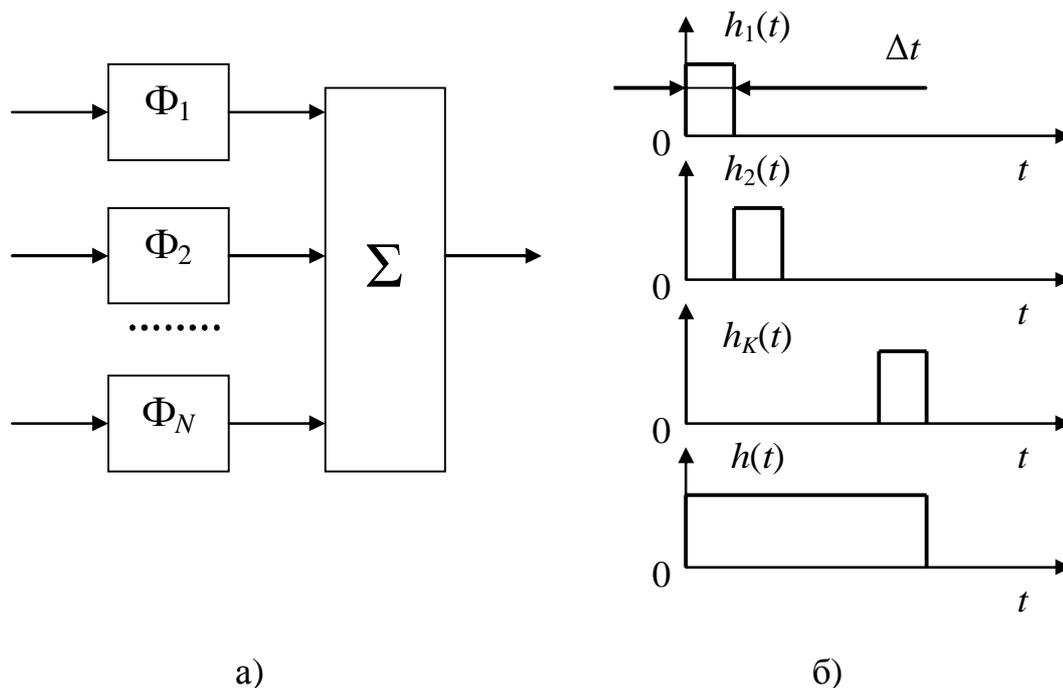


Рис.5

Следовательно, дисперсия процесса на выходе сумматора будет равна сумме дисперсий процессов с выходов парциальных фильтров. Тогда в момент времени $k\Delta t$ дисперсия процесса на выходе сумматора (и на выходе исходного фильтра) будет равна $s_{2,k}^2 = \frac{N_0}{2} \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} h_i^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \sum_{i=1}^k E_{h,i}$. Очевидно, что приведенные

рассуждения справедливы только для случая, когда на входе фильтра действует белый шум. При воздействии коррелированного шума закон изменения дисперсии выходного процесса будет более сложным

Из последнего соотношения видно, что если ИХ фильтра имеет прямоугольную форму и энергия всех парциальных ИХ одинакова, то дисперсия выходного процесса будет нарастать по линейному закону на всей длительности ИХ $h(t)$. В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, выражение для закона изменения дисперсии процесса на выходе фильтра примет вид

$$\sigma_2^2(t) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)h(u_2) du_1 du_2 . \quad (4)$$

Таким образом, в случае фильтра с прямоугольной ИХ на интервале времени от нуля до длительности импульсной характеристики МО и дисперсия меняются по линейным законам. На этом интервале выходной процесс является нестационарным. Поэтому при моделировании реализации процесса с заданными

спектрально-корреляционными свойствами этот начальный участок реализации выходного процесса обычно исключают из рассмотрения.

Найдем также нормированный коэффициент взаимной корреляции между сечениями выходного процесса, взятыми через интервал времени Δt_0 . Пусть для определенности $\Delta t_0 = 0.35\tau_h$. Нормированная корреляционная функция процесса на выходе фильтра получается нормированием корреляционной функции к дисперсии, и при нулевом временном сдвиге равна единице. Коэффициент взаимной корреляции сечений стационарного процесса t_n и t_k , взятых через интервал времени Δt_0 , равен значению нормированной корреляционной функции процесса при аргументе, равном этому сдвигу: $r_{nk} = r(\Delta t_0)$. В нашем примере, с учетом треугольной формы корреляционной функции выходного процесса $r(\Delta t_0) = r(0.35\tau_h) = 1 - 0.35 = 0.75$.

Рассмотрим процесс на выходе дискретного формирующего фильтра с прямоугольной ИХ, на входе которого действует ДБГШ. Вид ИХ фильтра и корреляционной функции выходного процесса показаны на рис.6.

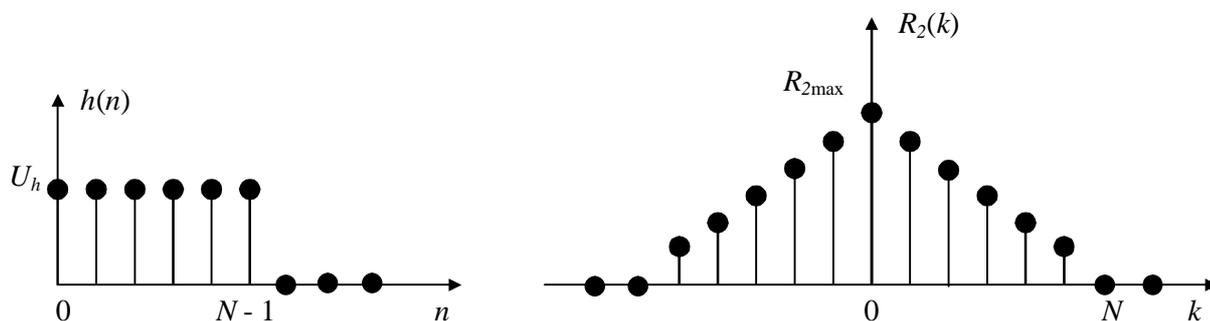


Рис.6

Максимальное значение корреляционной функции случайного процесса на выходе дискретного фильтра равно $R_{2\max} = \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{N-1} h_i^2$. На рис.7 показаны графики зависимости МО и дисперсии выходного случайного процесса от номера отсчета.

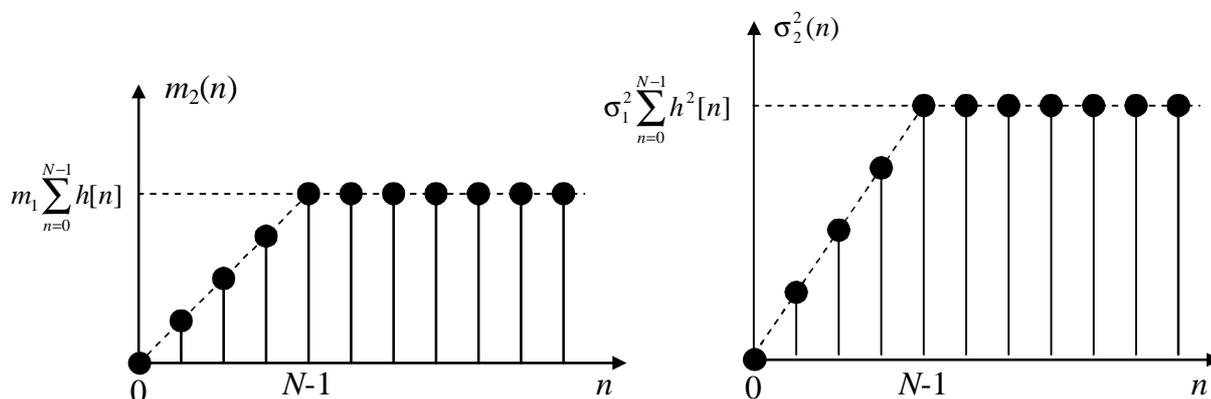


Рис.7

Для пояснения графиков на рис.7 рассмотрим структурную схему нерекурсивного цифрового фильтра (рис.8). Взвешенные коэффициентами

фильтра отсчеты случайного процесса, взятые из элементов линии задержки, складываются в сумматоре. Поскольку МО произведения случайной величины на константу равно произведению МО исходной случайной величины на эту константу, то МО отсчета процесса на выходе n -го умножителя на соответствующий коэффициент ИХ равно $m_1 h[n]$. Далее, учитывая, что МО суммы случайных величин равно сумме МО этих величин, получаем МО процесса на выходе нерекурсивного фильтра в установившемся режиме: $m_2 = m_1 \sum_{n=0}^{N-1} h[n]$.

Отметим, что сумма коэффициентов фильтра определяет коэффициент передачи на нулевой частоте, т.е. коэффициент передачи постоянной составляющей. В переходном режиме, длительность которого определяется длительностью ИХ, имеем неполную сумму k взвешенных отсчетов, поэтому МО в k -й момент времени равно $m_2(k) = m_1 \sum_{n=0}^k h[n]$. Поскольку в рассматриваемом примере все коэффициенты фильтра равны, то переходный процесс изменения МО имеет линейный характер.

Для построения графика зависимости дисперсии выходного процесса от номера отсчета, следует учесть следующие два свойства дисперсии. Во-первых, дисперсия произведения случайной величины на константу равна произведению дисперсии исходной величины на квадрат этой константы. Во-вторых, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий (в случае коррелированных случайных величин это несправедливо, и необходимо учесть коэффициент взаимной корреляции).

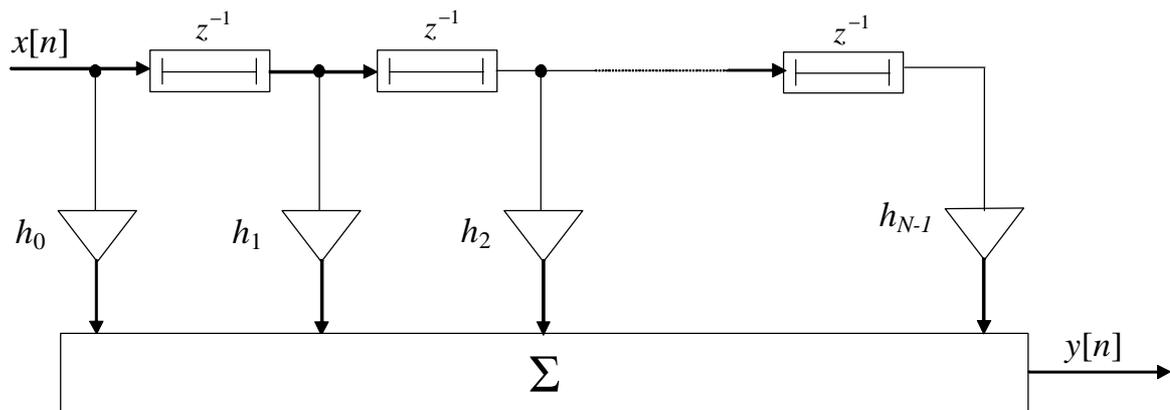


Рис.8

С учетом сказанного получаем величину дисперсии выходного процесса в установившемся режиме $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sum_{n=0}^{N-1} h^2[n]$. В переходном режиме имеем неполную сумму из k слагаемых: $\sigma_2^2(k) = \sigma_1^2 \sum_{n=0}^k h^2[n]$. Поэтому в рассматриваемом примере закон изменения дисперсии выходного процесса также имеет линейный характер.

Задание: рассчитать цифровой нерекурсивный фильтр для формирования реализации гауссовского процесса с заданной корреляционной функцией или

заданной СПМ. Обеспечить нормирование мощности процесса на выходе фильтра к мощности процесса на входе.

В качестве примера рассмотрим проектирование формирующего фильтра для моделирования случайного процесса со спектральной плотностью мощности вида:

$$W(\omega) = \exp(-a\omega^2), \quad (5)$$

где a – параметр.

Как отмечено в [1,2], корреляционная функция процесса на выходе фильтра с точностью до постоянного множителя равна автокорреляционной функции ИХ фильтра. Поэтому для решения поставленной задачи мы должны спроектировать фильтр, ИХ которого представляет собой сигнал, энергетический спектр которого описывается выражением (5). Как известно, модуль преобразования Фурье гауссовского импульса имеет вид гауссовской кривой. Кроме того, и автокорреляционная функция гауссовского импульса представляет собой гауссовскую кривую. В данном примере следует упомянуть еще одно важное свойство преобразования Фурье, которое заключается в том, что преобразование Фурье четной функции является чисто вещественной функцией. Поскольку функция (5) четная, то для вычисления действительной ИХ фильтра достаточно лишь вычислить ее действительный амплитудный спектр как квадратный корень функции (5) и взять обратное преобразование Фурье. Используя таблицу преобразований Фурье, получаем, что автокорреляционная функция ИХ, будет иметь вид

$$R(\tau) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-b\tau^2), \quad (6)$$

где $b = 0.25/a$, а сама ИХ находится как обратное преобразование Фурье функции, равной квадратному корню из (5), и определяется выражением

$$h(t) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \exp(-2bt^2). \quad (7)$$

Функцию (7) будем рассматривать как ИХ аналогового фильтра-прототипа. Параметр b в выражениях (6) и (7) определяет ширину корреляционной функции моделируемого процесса и, следовательно, ширину спектра процесса. Можно показать, что величина $(1 - b)$ приближенно определяет коэффициент корреляции двух соседних отсчетов процесса. Для получения отсчетов ИХ цифрового формирующего фильтра можно воспользоваться различными способами. В [2,3] описан способ вычисления коэффициентов фильтра методом разложения СПМ в ряд Фурье. Практически, этот способ сводится к методу частотного окна, который при практической реализации заключается в дискретизации отсчетов желаемой амплитудной характеристики и вычислению обратного дискретного преобразования Фурье (или, в частном случае четной функции, дискретного косинусного преобразования). При этом возможно последующее взвешивание ИХ весовым окном для уменьшения выбросов частотной характеристики полученного цифрового фильтра, которые вызваны влиянием так называемого эффекта Гиббса [2]. Другим распространенным способом проектирования является метод окна во

временной области. Этот метод оказывается еще более простым и удобным при проектировании нерекурсивных фильтров в случае, если известно аналитическое выражение для ИХ аналогового фильтра-прототипа. Метод сводится к взвешиванию ИХ фильтра-прототипа весовым окном ограниченной длительности и последующей дискретизацией в пределах этого окна. В рассматриваемом примере, используя описанный подход, получаем отсчеты ИХ цифрового нерекурсивного формирующего фильтра в виде

$$h(n) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-2b(n\Delta t)^2) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-\alpha n^2), \text{ где } \alpha = 2b\Delta t^2. \text{ Величина интервала}$$

дискретизации Δt выбирается в соответствии с шириной полосы моделируемого процесса. Число коэффициентов фильтра выбирается исходя из требований точности аппроксимации требуемой частотной характеристики. Очевидно, что длительность окна должна быть выбрана таким образом, чтобы на краю окна значения ИХ были пренебрежимо малы. После получения вектора коэффициентов цифрового фильтра необходимо вычислить его частотную характеристику, а также квадрат модуля частотной характеристики и оценить точность аппроксимации заданной СПМ выходного процесса полученной функцией.

Амплитудный множитель $\sqrt{\frac{a}{2\pi}}$ в (7) не имеет принципиального значения.

Однако по заданию нам необходимо выполнить условие нормирования мощности выходного процесса к мощности входного процесса. Это означает, что мощность (дисперсия) процесса на выходе фильтра должна быть равна мощности процесса на входе. Как было показано выше (см. пример 2.1), дисперсия процесса на

выходе фильтра равна $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sum_{n=0}^{N-1} h^2[n]$. Отсюда следует, что для обеспечения

заданного условия нормирования необходимо вычислить модифицированные коэффициенты фильтра в виде

$$h_M(n) = \frac{h(n)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} h^2(i)}}. \quad (8)$$

Следует отметить, что рассмотренный пример является важным с точки зрения теории борьбы с пассивными помехами в радиолокации, где корреляционная функция вида (3) описывает свойства гауссовской пассивной помехи при дискретных значениях временного сдвига $\tau = nT_{\Pi}$, где T_{Π} – период повторения импульсов. В этом случае величина $R(T_{\Pi})/\sigma_2^2$ представляет собой коэффициент череспериодной корреляции пассивной помехи в импульсной радиолокационной системе.

Задание: рассчитать рекурсивный цифровой фильтр для моделирования случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией и заданным значением коэффициента корреляции между соседними отсчетами выходного процесса.

Данный пример иллюстрирует модель другого важного частного случая пассивной помехи в радиолокации, а именно экспоненциальной помехи. Для расчета коэффициентов рекурсивного формирующего фильтра по заданной корреляционной функции процесса на выходе можно воспользоваться методом факторизации системной функции фильтра [3]. Как известно [3], системная функция $K(z)$ рекурсивного линейного фильтра с постоянными параметрами может быть представлена в виде

$$K(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M-1} b_k z^{-k}}, \quad (9)$$

где N – число отводов нерекурсивной части фильтра, M – число отводов (порядок) рекурсивной части.

Последовательность действий при применении этого метода следующая.

1. Находится z -преобразование $F(z)$ корреляционной функции $R(k)$ моделируемого процесса:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) z^{-k}. \quad (10)$$

Полученная функция комплексной переменной z в точках, расположенных на единичной окружности, принадлежащей комплексной плоскости, имеет смысл СПМ моделируемого процесса. Как уже упоминалось выше, для нахождения ИХ фильтра необходимо получить функцию, равную квадратному корню из СПМ. Однако функция $F(z)$ – это функция комплексного аргумента z , откуда и вытекает следующий пункт.

2. Осуществляется факторизация функции $F(z)$:

$$F(z) = \frac{A(z)A(z^{-1})}{B(z)B(z^{-1})} = |K(z)|^2. \quad (11)$$

Рассматривая выражение (11), вспомним, что комплексная переменная z на единичной окружности выражается как $z = \exp(j\omega)$. Таким образом, функции $A(z)$ и $A(z^{-1})$, а также функции $B(z)$ и $B(z^{-1})$ являются парами комплексно-сопряженных функций, причем отношение $A(z)/B(z)$ определяет системную функцию фильтра.

3. Системная функция $K(z)$ преобразуется к виду (9) для нахождения коэффициентов рекурсивного фильтра.

В рассматриваемом примере дискретная экспоненциальная корреляционная функция моделируемого процесса определяется выражением

$$R[k] = \exp(-\gamma|k|), \quad (12)$$

где γ – параметр, определяющий скорость спада корреляционной функции.

В соответствии с описанным методом расчета, найдем двустороннее z -преобразование корреляционной функции (12). Для этого воспользуемся следующим известным соотношением [3]:

$$F(z) = F^+(z) + F(z^{-1}) - R[0], \quad (13)$$

где $F^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R[k]z^{-k}$ - одностороннее z -преобразование.

По таблице z -преобразований находим:

$$F^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-gk)z^{-k} = \frac{z}{z - \exp(-g)}. \quad (14)$$

Если подставить это выражение в (13), то после преобразований можно получить:

$$F(z) = \frac{(\sqrt{1-r^2})^2}{(1-zr)(1-z^{-1}r)} = |K(z)|^2, \quad (15)$$

где $\rho = \exp(-\gamma)$. Сравнивая выражения (11) и (15), нетрудно видеть, что числитель и знаменатель комплексной системной функции проектируемого фильтра определяются как $A(z) = \sqrt{1-\rho^2}$, $B(z) = 1-z^{-1}\rho$. Сопоставляя полученные выражения для числителя и знаменателя системной функции с общим видом (9), выписываем выражения для коэффициентов прямой и рекурсивной части фильтра: $a_0 = \sqrt{1-\rho^2}$, $b_1 = \rho$.

В результате решения поставленной задачи мы пришли к модели рекурсивного фильтра первого порядка, работа которого описывается разностным уравнением вида:

$$\zeta[n] = \sqrt{1-\rho^2}\xi[n] + \rho\zeta[n-1], \quad \rho = \exp(-\gamma), \quad (16)$$

где $\xi[n]$ – реализация входного процесса, $\zeta[n]$ – реализация выходного процесса. Структурная схема спроектированного фильтра показана на рис.9.

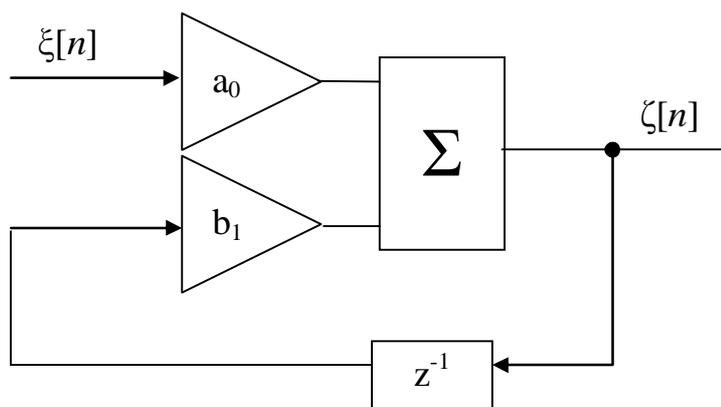


Рис.9

Как следует из (16), коэффициент обратной связи $b_1 = \rho = \exp(-\gamma)$ равен коэффициенту корреляции двух соседних отсчетов процесса $\zeta[n]$ на выходе фильтра. В соответствии с заданием, моделирование процесса с заданным коэффициентом корреляции между соседними отсчетами выходного процесса сводится к заданию соответствующего коэффициента обратной связи в схеме на рис.9.

Задания для самостоятельной работы.

№1: на рис.10 показана схема, состоящая из генератора БГШ, и двухканальной схемы фильтрации, а также частотные характеристики соответствующих фильтров. Необходимо дать обоснованный ответ на вопрос: на выходе которого из каналов фильтрации дисперсия процесса больше?

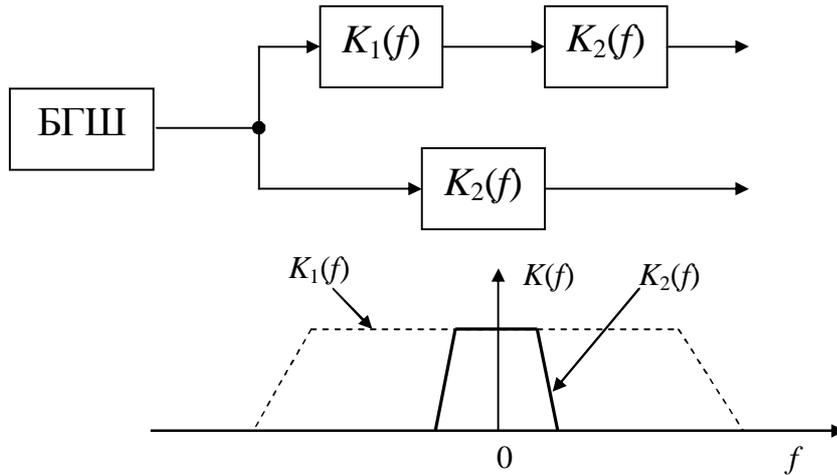


Рис.10

№2: на рис.11 показана функциональная схема, состоящая из генератора ДБГШ, цифрового фильтра нижних частот с ИХ, изображенной на том же рисунке, линий задержки на интервалы времени, равные длительности ИХ фильтра и половине этой длительности, сумматора, взаимно-корреляционного устройства, устройств оценивания среднеквадратических отклонений, а также устройств умножения и деления. Частота дискретизации в системе равна $f_s = 100$ Гц, уровень СПМ ДБГШ равен $N_0/2 = 10^{-2}$ Дж/Гц. Число отсчетов ИХ фильтра $N = 16$. Необходимо найти дисперсию процесса в точках 1, 2 и 3 схемы, а также истинное значение параметра, оценка которого вычисляется в точке 4 схемы. Оценка какого параметра вычисляется в точке 4?

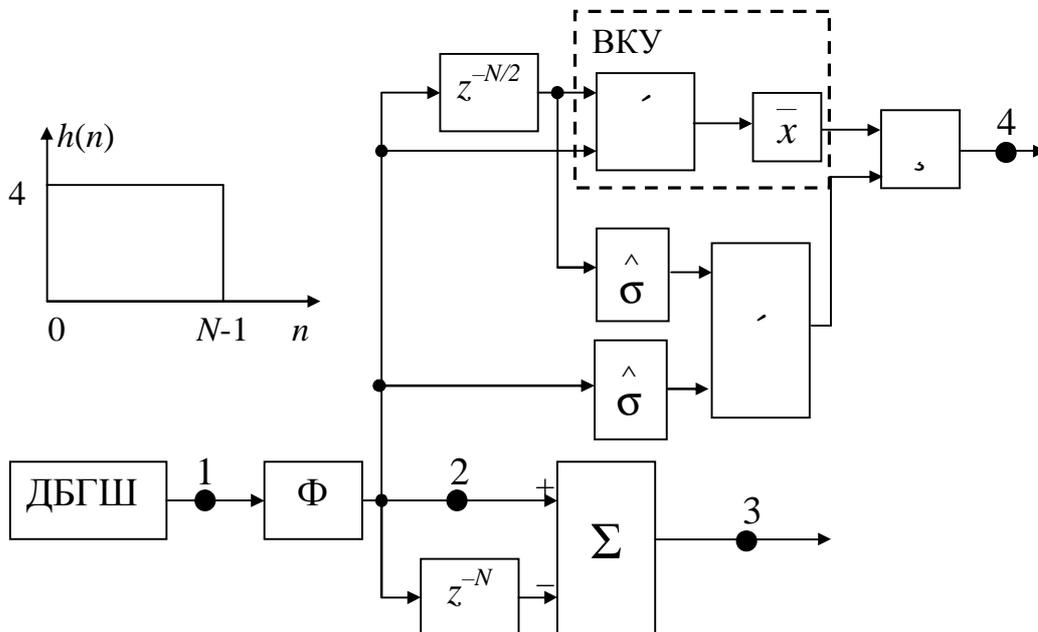


Рис.11

Ответы к расчетной части задачи: $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 256$, $\sigma_3^2 = 512$, $M\{r_4\} = 0.5$.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБНАРУЖИТЕЛИ ПРОСТЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Модель оптимального обнаружителя простого радиоимпульса будем рассматривать, опираясь на математический аппарат комплексной огибающей.

Структурная схема модели оптимального обнаружителя радиоимпульсного сигнала показана на рис.12. В состав модели обнаружителя входят согласованный фильтр (СФ), амплитудный детектор (АД), пороговое устройство (ПУ) и блок вычисления адаптивного порога обнаружения. На вход обнаружителя поступают значения реальной и мнимой части комплексной огибающей радиоимпульса. Выходным сигналом обнаружителя является двоичный сигнал $\lambda = \{0,1\}$. При этом нулевой уровень соответствует решению об отсутствии сигнала на входе, единичный – решению о наличии сигнала.

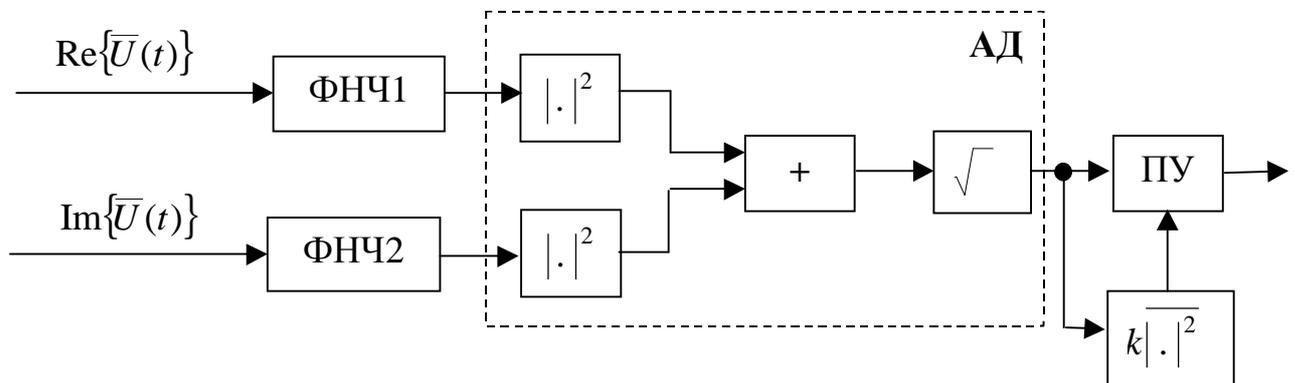


Рис.12

К основным параметрам рассматриваемого обнаружителя, подлежащим оцениванию, относятся следующие величины:

1. Отношение сигнал-шум на выходе СФ.
2. Величина порога обнаружения U_0 , поступающего на нижний вход ПУ.
3. Вероятность правильного обнаружения сигнала D .

Для вычисления этих параметров необходимо задать следующий набор исходных данных:

1. Параметры сигнала – форма, длительность, априорные данные об амплитуде и начальной фазе. Исходя из параметров используемого в системе сигнала, в соответствии с теоремой Котельникова задается частота дискретизации f_s .
2. Параметры шума на входе СФ. В общем случае любой случайный процесс полностью характеризуется многомерной плотностью распределения вероятностей. В случае стационарного ДБГШ достаточно знать только два параметра его одномерного нормального закона распределения – математическое ожидание (МО) и дисперсию, причем обычно МО полагают равным нулю.

3. Требуемый уровень вероятности ложной тревоги.

После СФ и АД включено пороговое устройство (ПУ), задачей которого является принятие решения о наличии сигнала во входном процессе по критерию Неймана-Пирсона. Правило принятия решения, оптимальное по критерию Неймана-Пирсона, обеспечивает максимизацию вероятности правильного обнаружения сигнала при фиксированном уровне вероятности ложной тревоги.

Поскольку мощность шума априори неизвестна, в модель включен блок оценки среднеквадратического отклонения (СКО) собственного шума. В качестве оценки СКО шума этот блок вычисляет выборочное СКО:

$$\hat{\sigma}_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n |U[k]|^2}, \quad (2.7),$$

где N – размер окна усреднения.

Пороговое значение U_0 формируется следующим образом:

$$U_0 = k \hat{\sigma}_{\text{ш}}, \quad (2.8)$$

где константа k определяется исходя из допустимого уровня вероятности ложной тревоги.

В предположении, что собственный шум приемного тракта в каждом квадратурном канале является независимым гауссовским СП, шум на выходе АД в отсутствие полезного сигнала распределен по закону Рэлея. Тогда вероятность ложной тревоги F определяется выражением:

$$F = \exp\left(-\frac{U_0^2}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right), \quad (2.9)$$

где $\sigma_{\text{ш}}^2$ - дисперсия шума на выходе СФ. Учитывая, что $\frac{U_0}{\hat{\sigma}_{\text{ш}}} = k$, из формулы (2.9)

можно без труда найти величину k .

Рассчитаем вероятность правильного обнаружения сигнала при заданной вероятности ложной тревоги F (т.е. при установленном пороге U_0). Приведем подробный вывод соотношений для случая обнаружения видеоимпульса на фоне БГШ, а затем приведем окончательные расчетные соотношения для случая обнаружения КО радиоимпульса с неизвестной начальной фазой.

Решение об обнаружении видеоимпульса принимается по значению сигнала на выходе СФ. Максимальное значение на выходе СФ наблюдается в момент окончания действия сигнала на входе, и наибольшая вероятность правильного обнаружения D будет соответствовать именно этому моменту времени.

На выходе СФ в каждый момент времени будет наблюдаться случайная величина (СВ) (сечение СП), распределенная по гауссовскому закону. Поскольку фильтр линейный, а смесь сигнала и шума на входе аддитивная, то дисперсия этого распределения всегда определяется только дисперсией входного шума и параметрами фильтра. Что касается математического ожидания, то оно зависит от

наличия или отсутствия сигнала и является тем параметром, в отношении которого должно быть принято решение. МО шума, как правило, равно нулю. С другой стороны, МО отсчета процесса на выходе СФ в момент окончания действия сигнала на входе определяется максимальным значением выходного сигнала, т.е. его энергией. На рис.2.5,а показаны графики плотности распределения вероятностей этого отсчета при наличии и отсутствии полезного сигнала во входной реализации.

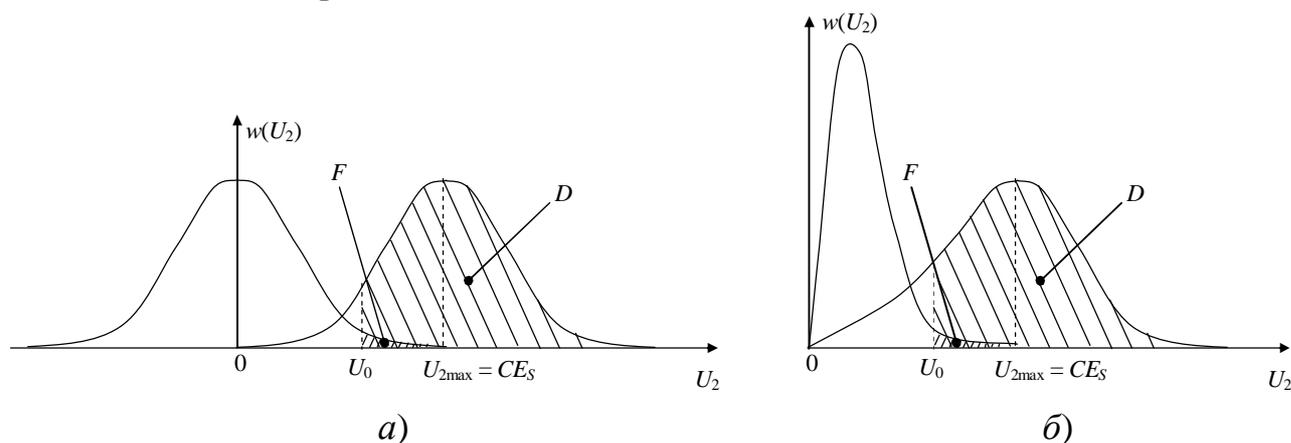


Рис.2.5

На рис.2.5 показан порог U_0 , максимальное значение сигнала на выходе фильтра $U_{2\max} = CE_S$, где C – коэффициент пропорциональности, определяемый параметрами фильтра, E_S – энергия сигнала. Также показаны вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D в виде двух заштрихованных областей. Из рис.2.5 легко получить общее выражение для расчета вероятности правильного обнаружения. Представим колебание на входе СФ в виде $u_1[n] = \xi[n] + \lambda s[n]$, где $\lambda = 1$ при наличии сигнала и $\lambda = 0$ при его отсутствии. Тогда

$$D = P\{U_2 > U_0 | \lambda = 1\} = \int_{U_0}^{\infty} w(U_2 | \lambda = 1) dU_2. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) можно рассматривать как определение вероятности правильного обнаружения при произвольном законе распределения. В случае нормального распределения при обнаружении видеоимпульса условие $\lambda = 1$ эквивалентно условию $M\{U_2\} = U_{2\max}$. Плотность вероятности $w(U_2 | \lambda = 1)$, входящая в (2.12) – это условная плотность вероятности, имеющая место при наличии сигнала. В рассматриваемом случае обнаружения видеоимпульса на фоне БГШ эта плотность вероятности гауссовская, и в выражении (2.12) целесообразно перейти к интегралу вероятностей. Напомним, что интеграл вероятности

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ по определению равен вероятности того, что значение СВ Z ,

распределенной по нормальному закону с нулевым МО и единичной дисперсией, не превысит некоторое значение z . Значит, первым шагом в преобразовании (2.12) к записи, содержащей интеграл вероятности, должна быть замена пределов интегрирования. Поскольку функция плотности вероятности обладает свойством

нормировки, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$, то из (2.12) получаем

$$D = 1 - \int_{-\infty}^{U_0} w(U_2 | M\{U_2\} = U_{2\max}) dU_2. \quad (2.13)$$

Для приведения произвольного нормального распределения к стандартному нормальному необходимо выполнить центрирование и нормировку исходной СВ. Центрирование означает вычитание МО, а нормировка – деление на СКО. Таким образом, СВ $Y = \frac{U_2 - U_{2\max}}{\sigma_2}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Событие, заключающееся в превышении этой СВ значения $\frac{U_0 - U_{2\max}}{\sigma_2}$, эквивалентно событию, заключающемуся в превышении порога U_0 максимальным выбросом сигнала на выходе СФ, поскольку СВ Y получена из случайной величины U_2 путем монотонного линейного преобразования. Следовательно, вероятность обоих событий равна вероятности правильного обнаружения и определяется из выражения

$$D = 1 - \Phi\left(\frac{U_0 - U_{2\max}}{\sigma_2}\right). \quad (2.14)$$

Задаваясь требуемой вероятностью правильного обнаружения (например, 0.9), можно из (2.14) по таблице интеграла вероятности найти требуемое значение $U_{2\max}$, а затем пересчитать его ко входу, т.е. найти требуемую амплитуду входного сигнала, которая при заданной мощности входного шума будет определять пороговое отношение сигнал-шум. И наоборот, зная отношение сигнал-шум на входе схемы, можно найти величину $U_{2\max}$ и вычислить вероятность правильного обнаружения. Самым простым способом нахождения величины $U_{2\max}$ является запуск модели в отсутствие шума на входе. Тогда можно по осциллограмме выходного сигнала определить величину максимума.

В случае обнаружения КО радиоимпульса с неизвестной начальной фазой необходима двухканальная схема [1,6,7], где вместо одного СФ используются два. На выходе такой схемы действует комплексный случайный процесс. Как и прежде, в случае наличия полезного сигнала максимальная амплитуда (модуль) комплексного процесса $U_{2\max}$ определяется энергией сигнала, однако для вычисления этой амплитуды необходим АД – нелинейное устройство, изменяющее закон распределения шума. Известно, что модуль гауссовского СП при наличии полезного сигнала постоянной амплитуды распределен по закону Рэлея-Райса, а при его отсутствии – по закону Рэлея. Графики соответствующих плотностей вероятности приведены на рис.2.5,б. Подставив в выражение (2.12) плотность вероятности, соответствующую распределению Рэлея-Райса, можно получить следующее выражение для вероятности правильного обнаружения [6,7]:

$$D = \int_{\sqrt{2\ln(1/F)}}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 + q_2^2}{2}\right) I_0(q_2 x) dx, \quad (2.15)$$

где $q_2 = \sqrt{2E_S / N_0}$ - отношение сигнал-шум, $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, E_S – энергия сигнала.

В случае обнаружения сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой распределение шума на выходе АД при наличии сигнала такое же, как и при его отсутствии и отличается только большей дисперсией. Вероятность правильного обнаружения в этом случае находится из выражения [6,7]:

$$D = \exp\left\{-U_0^2 / \left[N_0 E_{S\text{mean}} (1 + \rho^2)\right]\right\} = F^{1/(1+\rho^2)}, \quad (2.16)$$

где $\rho^2 = \frac{E_{S\text{mean}}}{N_0}$, $E_{S\text{mean}}$ – средняя (ожидаемая) энергия сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Функциональное моделирование радиосистем: Метод. указания к лабораторным работам для студентов специальности 200700 всех форм обучения/ НГТУ; Сост.: А.В.Мякинков, Е.Н.Приблудова. Н.Новгород, 2005.- 16 с.
2. Функциональное моделирование радиосистем: Метод. указания к лабораторным работам для студентов специальности 210302.65 всех форм обучения. Часть 2 / НГТУ; Сост.: А.В.Мякинков, А.Б.Бляхман. Н.Новгород, 2006. - 16 с.
3. Информационные технологии в радиотехнических системах: Учебное пособие / В.А.Васин, И.Б.Власов, Ю.М.Егоров [и др.]; под ред. И.Б. Федорова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 672 с.
4. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И.Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
5. Горяинов, В.Т. Статистическая радиотехника: примеры и задачи. / В.Т.Горяинов, А.Г.Журавлев, В.В.Тихонов; под ред. В.И.Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1980. – 544 с.
6. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б.Сергиенко. – СПб.: Питер, 2003. –
7. Невдяев, Л.М. Телекоммуникационные технологии. Англо-русский толковый словарь-справочник / Л.М.Невдяев; под ред. Ю.М.Горностаева. – Серия изданий «Связь и бизнес», М.: МЦНТИ – международный центр научной и технической информации, ООО «Мобильные коммуникации», 2002. – 592 с.
8. Лезин, Ю.С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем / Ю.С.Лезин. – М.: Радио и связь, 1986. – 280 с.
9. Ширман, Я.Д. Теоретические основы радиолокации. Учебное пособие для вузов / под ред. Ширмана Я.Д. М.: Советское радио, 1970.