Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники»**

Кафедра экономики

Финансовая математика

Методические указания к лабораторным работам
и самостоятельной работе

для студентов специальности 080105 – Финансы и кредит
и направления 080500 – Менеджмент

Томск 2011

Содержание

Общие положения

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Финансовая математика» предназначены для специальности **080105- Финансы и кредит** и направления **080500- Менеджмент.** Тематика лабораторных занятий охватывает все разделы дисциплины, предусмотренные рабочей программой.

Цель проведения лабораторных работ – закрепить знания, полученные студентами на лекциях, научить проводить самостоятельные исследования по выбранной теме с использованием компьютерных технологий, пакета MS Excel.

Лабораторные работы выполняются в компьютерном классе. Лабораторные работы содержат примеры решения типовых задач и предусматривают выполнение заданий, в ходе выполнения которых студенты приобретают практические навыки. Задания выполняются с использованием пакета MS EXCEL.

Отчет о выполнении лабораторной работы представляется преподавателю. Отчет содержит: исходные данные и описание хода выполнения лабораторной работы: обоснование выбора формулы для решения задачи; определение параметров формулы; программирование формулы в среде MS EXCEL; формулировка вывода. Выводы и заключения должны подтверждаться приведением цифровых данных из расчетной части работы.

Лабораторная работа № 1. Простые ссудные ставки

Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временную ценность, смысл которой может быть выражен следующим утверждением: одна денежная единица, имеющаяся в распоряжении инвестора в данный момент времени, более предпочтительна, чем та же самая денежная единица, но ожидаемая к получению в некотором будущем. Эффективность любой финансовой операции, предполагающей наращение исходной суммы P до ожидаемой в будущем к получению суммы F $(F>P)$, может быть охарактеризована ставкой.

Простая ссудная ставка рассчитывается отношением наращения $(F-P)$ к исходной (базовой) величине P.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

В финансовых вычислениях базовым периодом является год**,** поэтому обычно говорят о годовой ставке. Вместе с тем достаточно широко распространены краткосрочные операции продолжительностью до года. В этом случае за основу берется дневная ставка, причем в зависимости от алгоритмов расчета дневной ставки и продолжительности финансовой операции результаты наращения будут различными. Используются три варианта расчета: а) точный процент и точное число дней финансовой операции – обозначение

365/365 ; б) обыкновенный процент и точное число дней финансовой операции -обозначение 365/360; в) обыкновенный процент и приблизительное число дней финансовой операции- обозначение 360/360.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (так называемой «приведенной стоимости»), которая через заданное время при наращении по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через заданное время.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени ссудной ставки.

Любая финансовая операция предусматривает участие, как минимум, двух сторон: кредитора (инвестора) и заемщика (получателя финансовых ресурсов); это обстоятельство является существенным для вынесения суждения об эффективности некоторой операции. Так, экономическая интерпретация ставки вообще и ее значения в частности зависит от того, с чьих позиций - кредитора или заемщика она дается. Для кредитора ставка характеризует его относительный доход; для заемщика - его относительные расходы. Поэтому кредитор всегда заинтересован в высокой ставке или в повышении ставки; интересы заемщика - прямо противоположны.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по схеме простых ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

$$F = P(1 + n \cdot r) \tag{1.1}$$

$$P = F / (1 + n \cdot r) \tag{1.2}$$

$$F = P \cdot (1 + r \cdot t / T) \tag{1.3}$$

$$F = P(1 + \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot r_i) \tag{1.4}$$

$$r = \frac{F - P}{P \cdot n}, r = \frac{F - P}{P \cdot t} \cdot T \tag{1.5}$$

$$n = \frac{F - P}{P \cdot r} \tag{1.6}$$

где

P - вложенная сумма;

F – наращенная сумма;

n - количество периодов продолжительности финансовой операции;

r- простая ссудная ставка;

Типовые задачи с решениями

Задача 1.

Вы поместили в банк вклад 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 6% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова величина начисленных процентов?

Решение

По формуле (1.1.) при $P=100$ *тыс. руб.*, $n=3$, $r=0{,}06$ получаем :

$F=100\cdot(1+3\cdot 0{,}06)=118$ *тыс. руб.*

Через три года на счете накопится 118 тыс. рублей.

Величина начисленных за три года процентов составит:

$118-100=18$ *тыс. руб.*

Задача 2.

На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 8% годовых, чтобы она увеличилась в 2 раза?

Решение

Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 2 :

$1+n\cdot 0{,}08=2$, поэтому

$n=1/0{,}08=12{,}5$ *лет.*

Сумма, размещенная в банке под 8% годовых, в два раза увеличится через 12,5 лет.

Задача 3.

Ссуда в сумме 3000 долл. предоставлена 16 января с погашением через 9 месяцев под 25 % годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов : а) обыкновенный процент с точным числом дней; б) обыкновенный процент с приближенным числом дней; в) точный процент с точным числом дней .

Решение

а) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t=289-16=273$ дня), получим:

$$F=3000\cdot(1+0{,}25\cdot 273/360=3568{,}75 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3568,75 долл.

б) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t=9\cdot 30=270$ дня), получим:

$$F=3000\cdot(1+0{,}25\cdot 270/360)=3562{,}5 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3562,5 долл.

в) По формуле (1.3), используя точный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t=289-16=273$ *дня*), получим:

$$F=3000\cdot(1+0{,}25\cdot 273/365)=3560{,}96 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3560,96 долл.

Задача 4.

В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определить доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки при использовании банком простых обыкновенных процентов.

Решение

По формуле (1.5) при *F=8,9 тыс. руб., P= 8 тыс. руб., t= 120 дней, T=360 дней*, получим :

$r=360\cdot(8,9-8)/(8\cdot120)= 0,3375=33,75\%$.

Доходность банка составит 33,75 процентов годовых.

Задача 5.

Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 8% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 1%. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

Решение

Применяя формулу (1.4), получим :

$$F=160\cdot(1+0,5\cdot0,08+0,25\cdot0,09\cdot+0,25\cdot0,1+0,25\cdot0,11+0,25\cdot0,12)= 183,2$$

Через полтора года на счете накопится 183 200 руб.

Постоянную ставку, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, находим из уравнения:

$$160\cdot(1+1{,}5\cdot r)=183{,}2$$

$r=0,096667=,9,67\%$

Постоянная ставка, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, равна 9,67 % годовых.

Задача 6.

Кредит выдается под простую ссудную ставку 24 % годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, полученную заемщиком, и сумму процентных денег, если необходимо возвратить 3500 тыс. руб.

Решение.

По формуле (1.2) при $F = 3500$; $n=250/365$; $r=0,24$ получаем:

$$P = 3500 /(1 + 0,24 \cdot 250/365) =3017, 2$$

Сумма, получаемая заемщиком, составит 3 017 200 руб.

Сумма процентных денег равна (3 500 000 - 3 017 200) = 482 800 тыс. руб.

.

Задание на лабораторную работу 1. Простые ссудные ставки.
Контрольные вопросы

1. Что показывает множитель наращения в формуле наращения простыми процентами?
2. Как связаны между собой наращение простыми процентами и арифметическая прогрессия?
3. В чем заключается различие между точным и приближенным процентом?
4. Что показывает множитель дисконтирования в формуле наращения простыми процентами?
5. Если простую процентную ставку увеличить в два раза, как наращенная сумма?

Задача 1
На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 200 тыс.руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 220 тыс. руб., если процентная ставка равна 14% годовых, в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и год високосный?
Задача 2
Клиент поместил в банк вклад 60 тыс. руб. под простую процентную ставку 8 % годовых. Какая сумма будет на счете клиента через: а) 7 месяцев; б) 3 года; в) 3 года 9 месяцев? Рассчитать величину начисленных процентов.
Задача 3
Банк выдал ссуду на 45 дней в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 12% годовых. Рассчитайте доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.
Задача 4
На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы начисленные проценты были в 1,5 раза больше первоначальной суммы?
Задача 5
Вам 27 декабря будет нужна сумма 150 тыс. руб. Какую сумму 10 июня этого же года Вы должны положить в банк под простую процентную ставку 12 % годовых, если в расчете применяется обыкновенный процент с точным числом дней?
Задача 6
В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 240 тыс. руб. через 150 дней при взятом кредите в 200 тыс. руб. Определите доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки. При начислении банк использует простые обыкновенные проценты.
Задача 7
Найдите величину дохода кредитора, если за предоставление в долг на полгода некоторой суммы денег он получил 555 тыс. руб. При этом применялась простая процентная ставка в 22%.
Задача 8

Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 6% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 0,5 %. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

Задача 9

Вкладчик внес в банк 20 тыс. руб. Через год он снял со счета половину набежавших за год процентов. Оставшаяся сумма еще год оставалась в банке, на конец года на счете осталось 26,4 тыс. руб. Какую простую ссудную ставку использовал банк?

Задача 10.

Предприниматель взял в банке ссуду на два года под процентную ставку 32% годовых. Определите, во сколько раз сумма долга к концу срока ссуды будет больше выданной банком суммы, если банк начисляет простые проценты.

Лабораторная работа 2. Простые учетные ставки

Учетная ставка рассчитывается отношением наращения *(F-P)* к ожидаемой в будущем к получению, или наращенной, величине *F*.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например, при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю на дату его погашения. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени учетной ставки.

При применении наращения по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по схеме простых учетных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

$$P = F \cdot (1 - n \cdot d) \tag{2.1}$$

$$F = P/(1 - n \cdot d) \tag{2.2}$$

$$P = F \cdot (1 - d \cdot t/T) \tag{2.3}$$

$$F = P/(1 - d \cdot t/t) \tag{2.4}$$

$$D=F\text{-}P=F \cdot n \cdot d \tag{2.5}$$

$$d = \frac{F - p}{F \cdot n}, d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \tag{2.6}$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \tag{2.7.}$$

$$F = P/(1-\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot d_i) \qquad (2.8)$$

где

P- вложенная сумма (сумма, которую получает владелец векселя при его учете) ;

F – наращенная сумма (номинальная стоимость векселя);

n- количество периодов продолжительности финансовой операции;

d-простая учетная ставка;

t -продолжительность финансовой операции в днях;

T- количество дней в году;

D- дисконт.

Типовые задачи с решениями

Задача 1.

В банк 6 мая предъявлен для учета вексель, на сумму 140 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, считая, что в году 365 дней. Определить сумму, получаемую векселедержателем от банка, и комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя имеет смысл?

Решение

По формуле (2.1) при $F = 140.$; $n = 65/365$, $d = 0,4$ получим:

$P = 140\cdot(1\text{-}0,4 \cdot 65/365)=129,89$

Векселедержатель получит от банка 129,89 тыс. руб.

Комиссионные банка (или дисконт) определяются по формуле $D= F - P$

$D= F - P= 140\text{-}129,89=10,11$ *тыс. руб*.

Комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу, равны 10,11 тыс. руб.

Учет векселя по учетной ставке имеет смысл при $n<1/d$, для этой задачи при $n< 2,5$ года. При $n>2,5$ года сумма Р, которую должен получить владелец векселя при его учете, становится отрицательной.

Задача 2.

Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан по простой учетной ставке 25% годовых. Определить срок кредита, если заемщик планирует получить на руки 350 тыс. руб.

Решение

По формуле (2.7.) при $F =400$; $P=350$; $d=0,25$ получаем:

$n = (400\text{-}350)/(400\cdot0,25)=0,5$

Срок кредита равен 0,5 года.

Задача 3.

Вексель на сумму 900 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 60 тыс. руб. в пользу банка. Определить величину годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году.

Решение.

По формуле (2.6) при $F=900$; $F\text{-}P=60$; $t=120$; $T=360$ дней, получим :

$d= 60\cdot 360/(900\cdot 120)=0,20=20\%$

Годовая учетная ставка при временной базе 360 дней в году равна 20% годовых.

Задача 4.

В банк предъявлен вексель на сумму 500 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода- 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Решение.

По формуле (2.8) вычислим множитель наращения:

$$1- (0,5 \cdot 0,30 +0,5 \cdot 0,36 + 0,25 \cdot 0,38 + 0,25 \cdot 0,4) = 0, 475$$

$$P = 500 \cdot 0,475 = 237,50$$

Сумма, полученная владельцем векселя равна *237 500 руб*.

По формуле 1.11 дисконт равен $D = 500- 237,5 = 262,5$

Дисконт банка равен *262 500 руб.*

Задача 5.

Банк 1 января учел два векселя со сроками погашения 6 февраля и 14 марта того же года. Применяя учетную ставку 10% годовых, банк удержал комиссионные в размере 1000 руб. Определить номинальную стоимость векселей, если номинальная стоимость второго векселя в 2 раза больше, чем номинальная стоимость первого векселя.

Решение

Обозначим номинальную стоимость первого векселя через F, тогда номинальная стоимость второго векселя составит $2\cdot F$.

По таблице порядковых дней в году определим, что первый вексель учтен за 36 дней до срока погашения, а второй вексель учтен за 72 дней до срока погашения.

По формуле (2.5) величина дисконта для первого векселя равна

$$D_1 = F \cdot n \cdot d = F \cdot \frac{36}{360} \cdot 0,1 = 0,01 \cdot F$$

По формуле (2.5) величина дисконта для второго векселя равна

$$D_2 = 2F \cdot n \cdot d = 2F \cdot \frac{72}{360} \cdot 0,1 = 0,04 \cdot F$$

Учитывая, что комиссионные банка за учет двух векселей составили 1000 руб., запишем:

$$D_1 + D_2 = 1000$$
$$0{,}01F + 0{,}04F = 1000$$
$$F = 20000$$

Номинальная стоимость первого векселя составит 20 тыс. руб., номинальная стоимость второго векселя составит 40 тыс. руб.

Задание на лабораторную работу 2. Простые учетные ставки.
Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется операция банковского дисконтирования?
2. Верно ли, что по простой учетной ставке вексель можно учесть за любое время до срока погашения?
3. В чем различие между антисипативным и декурсивным способом начисления процентов?

Задача 1
Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых за полгода до срока погашения. Какова доходность этой операции для банка, выраженная в виде простой ставки ссудного процента.
Задача 2
Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен вернуть 15 августа того же года 300 тыс. руб. Определить всеми возможными способами сумму, полученную предпринимателем и величину дисконта, если проценты удерживаются банком при выдаче ссуды.
Задача 3
Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 28 марта того же года. Банк учел вексель по учетной ставке 35% годовых и выплатил клиенту 19,3 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год невисокосный?
Задача 4
Банк за 20 дней до срока погашения учел вексель на сумму 40 тыс. руб. Доход банка составил 800 руб. Какую простую учетную ставку использовал банк, если считать в году 360 дней?
Задача 5
Банк 7 июня учел 3 векселя со сроками погашения в этом же году соответственно 8 августа, 30 августа и 21 сентября. Применяя учетную ставку 25% годовых, банк удержал комиссионные в размере 3750 руб. Определите номинальную стоимость первых двух векселей, если номинальная стоимость второго векселя в два раза больше первого и третий вексель предъявлен на сумму 20 тыс. руб.

Лабораторная работа 3. Сложные ссудные ставки

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. база, с которой происходит начисление, постоянно возрастает на величину начисленных ранее процентов. Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Для кредитора более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода). Для кредитора более выгодна схема сложных процентов, если срок суды превышает один год (проценты начисляются ежегодно). Обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

При начислении процентов за дробное число лет может использоваться схема сложных процентов, либо смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

Математическим дисконтированием (дисконтированием по сложной процентной ставке) называется задача нахождения такой величины первоначального капитала, которая через заданное количество времени при наращении по сложной процентной ставке обеспечит получение планируемой суммы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают δ и называют *силой роста*.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

Основные формулы

$$F=P\cdot (1 + r)^n \qquad (3.1)$$

$$P = F /(1 + r)^n \qquad (3.2)$$

$$F = P\,(1 + r/m)^{nm} \qquad (3.3)$$

$$F = P\,(1 + r)^{w+f} \qquad (3.4)$$

$$F=P(1+r)^{w}\cdot(1+f\cdot r) \qquad (3.5)$$

$$F_n = P\cdot\prod_{i=1}^{k}(1+r_i)^{n_i} \qquad (3.6)$$

$$r = m\cdot[(\frac{F}{P})^{\frac{1}{nm}}-1] \qquad (3.7)$$

$$n = \frac{\ln\frac{F}{P}}{m\ln(1+\frac{r}{m})} \qquad (3.8)$$

$$F = P\cdot e^{\delta n} \qquad (3.9)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \qquad (3.10)$$

где
F – наращенная сумма;
P- вложенная сумма;

n- количество лет;

r- сложная процентная ставка;

m- количество начислений процентов в году;

w- целая часть периода финансовой операции;
f- дробная часть периода финансовой операции.

Типовые задачи с решениями

Задача 1.
На вашем счёте в банке 15 млн. руб. Банковская ставка по депозитам равна 12% годовых. Вам предлагают войти всем капиталом в организацию совместного предприятия, обещая удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?
Решение.
Для решения задачи используем формулу (3.1.).
Если мы вложим деньги в банк, то через 5 лет получим следующую сумму:
$F = 15\cdot(1 + 0,12)^5 = 26,43$ *млн.руб.*
Если мы войдем всем капиталом в организацию совместного предприятия, то наш капитал удвоится:
$F = 15 \cdot 2 = 30$ *млн. руб.*
Следует принять данное предложение и не вкладывать деньги в банк.

Задача 2.

Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести её в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Под какую минимальную ссудную ставку нужно положить деньги, а банк, чтобы накопить требуемую сумму?

Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.7) при $m=1$:

$$r = (5600 / 4000)^{1/2} - 1 = 0{,}1832 = 18{,}32\%$$

Для того чтобы накопить нужную сумму, минимальная ссудная сложная ставка должна составлять 18,32 % годовых.

Задача 3.

За выполненную работу предприниматель должен получить 600 тыс. руб. Заказчик не имеет возможности рассчитаться в данный момент и предлагает отложить срок уплаты на 2 года, по истечении которых он обязуется выплатить 730 тыс. руб. Выгодно ли это предпринимателю, если приемлемая норма прибыли составляет 10%? Какова минимальная ставка, которая делает подобные условия невыгодными для предпринимателя?

Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1).

Будущая стоимость 600 тыс.руб. через 2 года при норме прибыли 10% составит:

$F = 600 \text{ тыс.руб. } (1 + 0{,}1)^2 = 720{,}6 \text{ тыс.руб.}$

Это меньше, чем 730 тыс. руб., поэтому предпринимателю выгодно ждать расчета 2 года.

Для расчета минимальной ставки, которая делает условия невыгодными, воспользуемся формулой (2.6) при $m=1$:

$r = (730 / 600)^{1/2} - 1 = 0{,}1030 = 10{,}3\ \%$

Минимальная ставка, которая делает условия невыгодными для предпринимателя, равна 10,3 % годовых.

Задача 4.

Банк предоставил ссуду в размере 5000 долл. на 39 месяцев под 10% годовых на условиях полугодового начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

Решение

Для решения воспользуемся формулами для вычисления наращенной суммы, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет.

1) Схема сложных процентов - формула (3.4), считая полугодие базовым периодом;

$w=6;\ f = 3{,}25 \cdot 2 - 6 = 0{,}5;\ r=5\%:$

$F = 5000 \cdot (1+0{,}05)^{6+0{,}5} = 6865{,}9$

По схеме сложных процентов возвращаемая сумма равна 6865, 9 долл.

2) Смешанная схема – формула (3.5), считая полугодие базовым периодом;

$w=6;\ f = 3{,}25\cdot 2\text{-}6=0{,}5;\ r=5\%:$

$F = 5000 \cdot (1+0{,}05)^{6}\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}05) = 6867{,}99$

По смешанной схеме возвращаемая сумма равна 6867,99 долл.

Задача 5.

1 августа 2010 г. должник обязан уплатить кредитору 400 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги : 1) января 2010 г.; 2) 1 января 2011 г.; 3) 1 августа 2010 г.? Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 34% годовых.

Решение.

1) используем формулу (3.2) при r=0,34; n=7/12:

$P = 400/(1+0{,}34)^{7/12} = 337{,}22$

1 января 2010 г. должник должен иметь 337 220 руб.

2) используем формулу (2.1) при r=0,34; n=5/12:

$F = 400\cdot(1+0{,}34)^{5/12} = 451{,}87$

1 января 2011 г. должник должен иметь 451 870 руб.

3) 1 августа 2010 г. должник должен иметь 400 000 руб.

Задание на лабораторную работу 3. Сложные ссудные ставки. Контрольные вопросы

1. Чему равен множитель наращения при начислении процентов по сложной ссудной ставке?
2. Как соотносятся между собой наращенные суммы при начислении простых и сложных ссудных процентов?
3. Верно ли, что начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно начислению сложных процентов по ставке 1% в месяц?
4. Что происходит с наращенной суммой, если растет частота начисления сложных процентов?
5. Чему равен множитель дисконтирования при использовании сложных процентов?
6. Как пользоваться финансовыми таблицами при вычислении наращенной и приведенной стоимости?

Задача 1.

Рассчитайте будущую стоимость 1000 долл. для следующих ситуаций:

1) 5 лет, 8% годовых, ежегодное начисление процентов;
2) 5 лет, 8 % годовых, полугодовое начисление процентов;
3) 5 лет , 8 % годовых, ежеквартальное начисление процентов.

Задача 2.

За какой срок первоначальный капитал в 500 тыс. руб. увеличится до 2 млн. руб., если на него будут начисляться сложные проценты по ставке 10 % годовых?

Задача 3.

Фирме нужно накопить 2 млн. долл., чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 5 % годовых при полугодовом начислении процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

Задача 4.

Рассчитать накопленную сумму, если на вклад в 2 млн. руб. в течение 5 лет начисляются непрерывные проценты с силой роста 10%.

Задача 5.

Вы положили в банк на депозит 1000 долл.. Банк начисляет сложные проценты по схеме – за первый год 4% годовых, а затем ставка увеличивается на 1 % каждый год. Определить сумму, которая будет на Вашем счете через 4 года.

Задача 6.

Банк предоставил ссуду в размере 10 000 долл. на 16 месяцев под 12 % годовых на условиях ежеквартального начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

Задача 7

1 октября 2011 г. должник обязан уплатить кредитору 500 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги : 1) января 2012 г.; 2) 1 января 2011 г.; 3) 1 октября 2011 г.? Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 14% годовых.

Задача 8

Предприниматель получил ссуду в банке в размере 20 млн. руб. сроком на 5 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 25 % процента годовых, на оставшиеся 3 года ставка равна 23% годовых. Найдите доход банка за 5 лет, если сложные ссудные проценты начисляются ежеквартально.

Задача 9

В банк вложены деньги в сумме 800 тыс. руб. на полтора года под 10% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Определите доход клиента в этой финансовой операции.

Задача 10

Построить график зависимости дискретного и непрерывного множителя наращения и множителя дисконтирования от продолжительности финансовой операции.

Лабораторная работа 4. Сложные учетные ставки

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов более выгода сложная учетная ставка, если срок учета менее одного года; более выгодна простая учетная ставка, если срок учета превышает один год.

Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учетного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка для дробной части года). Стоимость учетного капитала больше при использовании смешанной схемы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают δ и называют *силой роста*.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

Основные формулы

$$P = F(1-d)^n \qquad (4.1)$$

$$F = P/(1-d)^n \qquad (4.2)$$

$$P = F(1-\frac{d}{m})^{m \cdot n} \qquad (4.3)$$

$$P = F \cdot (1-d)^{w+f} \qquad (4.4)$$

$$P = F \cdot (1-d)^w (1-f \cdot d) \qquad (4.5)$$

$$P = F \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 - d_i)^{n_i} \qquad (4.6)$$

$$d = m[1 - (\frac{P}{F})^{\frac{1}{m \cdot n}}] \qquad (4.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{P}{F}}{m \ln(1 - \frac{d}{m})} \qquad (4.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \qquad (4.9)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \qquad (4.10)$$

где

F – наращенная сумма;

P- вложенная сумма;

n- количество лет;

d- сложная учетная ставка;

δ – непрерывная ставка

m- количество начислений процентов в году;

w- целая часть периода финансовой операции;

f- дробная часть периода финансовой операции.

Типовые задачи с решениями

Задача 1.

Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета.

Решение

1) При применении схемы сложных процентов воспользуемся формулой (4.4) при n = 32/12= 8/3, F = 70 тыс. руб., d = 0,24, поэтому

$$P = 70(1 - 0{,}24)^{\frac{8}{3}} = 33{,}672$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

2) При применении смешанной схемы воспользуемся формулой (4.4) при w = 2, f = 2/3:

$$P = 70(1 - 0{,}24)^2 \ (1 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}24) = 33{,}963$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

Задача 2.
Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите сумму, полученную при учете этого обязательства, если производилось 1) полугодовое; 2) поквартальное; 1) ежемесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 24% годовых.
Решение
1) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m = 2

$$P = 46(1 - \frac{0,24}{2})^{2\cdot 4} = 16,543$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 16 543 руб.
2) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m = 4:

$$P = 46(1 - \frac{0,24}{4})^{4\cdot 4} = 17,092$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17092 руб.
3) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m = 12:

$$P = 46(1 - \frac{0,24}{12})^{12\cdot 4} = 17,443$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17443 руб.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что с ростом числа осуществлений операций дисконтирования в году сумма, полученная при учете обязательства, возрастает.

Задача 3.
Вексель был учтен за 2,5 года до срока его погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось 1) поквартальное дисконтирование; 2) ежемесячное дисконтирование.
Решение
1) по формуле (4.7) при *P=0,25F; n=2,5; m=4*, получим :

$$d = 4\cdot[1 - 0,25^{\frac{1}{4\cdot 2,5}}] = 0,5178$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 51,78% годовых.
2) по формуле (4.7) при *P=0,25F; n=2,5; m=12*, получим :

$$d = 4[1 - 0,25^{\frac{1}{12\cdot 2,5}}] = 0,5419$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 54,19 % годовых.

Задача 4.

Клиент имеет вексель на 100 тыс. руб., который он хочет учесть 01.03.2010 в банке по сложной учетной ставке равной 7% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2010 г.?

Решение

Срок даты учета до даты погашения векселя равен 153 дня, число дней в году 365. По формуле (4.1) при F*=100; d=0,07; n=153/365*

$$P = 100 \cdot (1 - 0{,}07)^{153/365} = 97{,}038$$

Владелец векселя получит 97 038 руб.

Задача 5.

Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке : в первые 2 года –16%, в следующие 2 года - 19%, в оставшийся год- 23%. Определить наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же сумму?

Решение

По формуле (4.6) при *d1 = 16%, d2 = 19%, d3 = 23%* получаем:

$$F = \frac{20}{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)} = 56{,}106$$

Наращенная сумма равна 56106 руб.

Постоянную годовую учетную ставку d, дающую тот же результат, находим из равенства:

$$(1-d)^5 = (1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)$$

d = 0,1864

Постоянная ставка, которая дает тот же результат, равна 18,64% годовых.

Задание на лабораторную работу 4. Сложные учетные ставки.
Контрольные вопросы

1. Чему равен множитель дисконтирования при дисконтировании по сложной учетной ставке?
2. Может ли учет по сложной учетной ставке привести к отрицательным значениям?
3. Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операций дисконтирования по сложной учетной ставке?

Задача 1.

За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 28% годовых ?

Задача 2.
Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 4 млн. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 1) 20% годовых; 2) 25% годовых.

Задача 3.
Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых при полугодовом дисконтировании. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству**?**

Задача 4
Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении 1) на 3 месяца; 2) на год.

Задача 5
Вексель на сумму 800 тыс. руб. учитывается за 2 года до срока погашения. Какую сумму получит предъявитель векселя при учете по сложной учетной ставке 20% годовых?

Задача 6
Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.
Задача 8
По условиям финансового соглашения на сумму 900 тыс. руб., помещенную в банк на 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится: 1) по полугодиям; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно; 4) ежедневно; 5) непрерывно. Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке 24% годовых. Заполните следующую таблицу и сделайте выводы.

m	Fучетная, тыс. руб.	Fссудная, тыс. руб.	Fучетная – Fссудная, тыс. руб.
2			
4			

12			
365			
δ			

Лабораторная работа 5. Эквивалентные и эффективные ставки

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки.

Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками. Именно эта ставка характеризует реальную эффективность операции, однако во многих финансовых контрактах речь чаще всего идет о номинальной ставке, которая в большинстве случаев отличается от эффективной.

Меняя частоту начисления процентов или вид ставки, можно существенно влиять на эффективность операции. В частности, оговоренная в контракте ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, 6% годовых при условии ежедневного начисления процентов соответствуют на самом деле 8,21%, начисляемых ежегодно. Отмеченная особенность исключительно значима в условиях высоких номинальных ставок. При составлении финансовых договоров данный прием нередко используется для сокрытия истинных расходов. Поэтому, заключая контракт, целесообразно уточнять, о какой ставке (процентной, учетной, эффективной и др.) идет речь или, по крайней мере, отдавать себе отчет в этом.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL; сравнивать эффективность различных финансовых операций.

Основные формулы

$$r_e=(1 + r/m)^m - 1 \tag{5.1}$$

$$r_e=e^{\delta} - 1 \tag{5.2}$$

$$\delta = m \cdot Ln(1+r/m) \tag{5.3}$$

$$r = m \cdot [(1+r_e)^{1/m} - 1] \tag{5.4}$$

$$d_e = 1-(1-d/m)^m \tag{5.5}$$

$$d = m \cdot [1-(1-d_e)^{1/m}] \tag{5.6}$$

$$r = \frac{d}{1-nd} \tag{5.7}$$

$$d = \frac{r}{1+nr} \tag{5.8}$$

$$r_c = \frac{d_c}{1-d_c} \quad (5.9)$$

$$d_c = \frac{r_c}{1+r_c} \quad (5.10)$$

$$r = \frac{(1+\frac{r(m)}{m})^{m\cdot n} - 1}{n} \quad (5.11)$$

$$d = \frac{1-(1-\frac{d(m)}{m})^{m\cdot n}}{n} \quad (5.12)$$

где

r_e – эффективная ставка,

e^{δ} – сила роста,

r - простая процентная ставка,

d - простая учетная ставка,

r_c - сложная ссудная ставка,

d_c – сложная учетная ставка,

r(m) -сложная процентная ставка с начислением процентов m раз за период,

d(m) -сложная учетная ставка с начислением процентов m раз за период,

n - продолжительность финансовой операции в годах

Задача 1

Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку: 1) 28% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) 30% годовых с полугодовым начислением процентов?

Решение

Рассчитаем эффективную годовую процентную ставку для каждого варианта.

1) По формуле (5.1) при *r=0,28; m=4*

$r_e = (1 + 0.28/4)^4 – 1 = 0,3107 = 31,1\%$

2) По формуле (5.1) при *r=0,32; 2=4*

$r_e = (1 + 0.3/2)^2 – 1 = 0,3225 = 32,25\%$

Для банка выгоднее предоставлять кредит по варианту 2), так как в этом случае эффективная годовая ставка выше (предоставлять кредит под 32,25% годовых выгоднее, чем под 31,1%).

Задача 2.

Срок уплаты по долговому обязательству – полгода, простая учетная ставка – 18% годовых . Какова доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

Решение

По формуле (5.7) при *d=0,18; n=0,5*

$$r = 0,18 / (1-0,5 \cdot 0,18) = 0,198.$$

Доходность операции, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна 19,8% годовых.

Задача 3.

Определить, под какую ставку ссудных процентов выгоднее поместить капитал в 10 млн. руб. на пять лет – под простую ставку 14% годовых или под сложную ставку 12% при ежеквартальном начислении процентов?

Решение.

В данном случае можно не считать наращенную сумму, поэтому не важна величина первоначального капитала. Достаточно, например, найти простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке, воспользовавшись формулой эквивалентности по формуле (5.11) при *r(m)=0,12; n=5; m=4:*

$$r = \frac{(1+\frac{00,12}{4})^{4\cdot 5} - 1}{5} = 0,1612$$

Так как простая процентная ставка 16,12% , которая дала бы одинаковый результат с данной сложной процентной ставкой больше предложенной ставки в 14%, ясно, что предпочтительнее использовать сложную процентную ставку. Чтобы убедиться, насколько сложная ставка выгоднее, определим наращенные суммы:

F (14%) = 17

F (16,12%) = 22,04

Владелец капитала в 10 млн. руб. за 5 лет может накопить 17 млн. руб. с использованием простой ставки 14% годовых; с использованием сложной ставки 12% годовых при ежеквартальном начислении процентов можно накопить 22,04 млн. руб.

Задача 4.

На капитал в сумме 500 тыс. руб. ежегодно начисляются сложный проценты по ставке 8% годовых в течение 5 лет. Определить эквивалентную ставку непрерывного начисления процентов (силу роста).

Решение.

По формуле (5.2) при *r=0,08; m=1*

$$\delta = Ln(1+0,08) = 0,077$$

Таким образом, ежегодное начисление процентов по ставке 8% эквивалентно непрерывному начислению процентов по ставке 7,7 %.

Задача 5.
Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 9 % и сложные проценты начисляются ежемесячно.

Решение.
По формуле (5.4) при $r(e) = 0{,}09;\ m = 12$

$r = 12 \cdot [(1 + 0{,}09)^{1/12} - 1] = 0{,}086$

Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 9% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке 8,6 %.

Задание на лабораторную работу 5. Эффективные и эквивалентные ставки.

Контрольные вопросы

1. Какая ставка называется эффективной? От каких параметров она зависит?
2. Как изменяется эффективная ставка с ростом количества начислений сложных процентов в году?
3. В каком случае эффективная ссудная ставка совпадает с номинальной?
4. Какие ставки называются эквивалентными?

Задача 1.

Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 20% годовых и учет осуществляется 1) каждые полгода; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно.

Задача 2
Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8 % годовых. Определить эквивалентную простую ставку при сроке ссуды 5 лет, 180 дней, 365 дней.

Задача 3
Вексель учитывается за 180 дней до срока погашения по простой учетной ставке 10 % годовых. Какова доходность этой операции для банка, выраженная по сложной учетной ставке?

Задача 4
Банк учитывает вексель за 300 дней до срока погашения по сложной учетной ставке 10% годовых при временной базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, если используется временная база 365 дней и банк хочет получить такой же доход?

Задача 5

Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.

Задача 6

Определить номинальную годовую учетную ставку с дисконтированием 4 раза в год, эквивалентную номинальной годовой учетной ставке 12% с дисконтированием 12 раз в год.

Задача 7

Наращение осуществляется по простой процентной ставке 12% в течение полутора лет. Определить номинальную процентную ставку с ежеквартальным начислением сложных процентов, которая обеспечит такую же наращенную сумму.

Лабораторная работа 6. Замена и консолидация платежей

На практике часто возникают ситуации, когда участники сделки вынуждены изменять условия ранее заключенного финансового соглашения. В результате изменений условий контракта ни один из его участников не должен терпеть убытков, поэтому в таких ситуациях также составляется **уравнение эквивалентности**.

Согласно уравнению эквивалентности сумма нового и старого платежей приводится к одному моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения осуществляется, как правило, на основе простых ставок. При использовании сложных ставок время приведения контрактов не имеет значения.

При консолидации платежей возникают две задачи: 1) определение величины консолидированного платежа при известном сроке, когда этот платеж должен быть сделан; 2) определение срока известного консолидированного платежа.

Обе задачи решаются с использованием уравнения **эквивалентности контрактов**. Два контракта считаются эквивалентными**,** если потоки платежей по этим контрактам, приведенные к одному моменту времени, одинаковы.

При замене или объединении платежей используется принцип эквивалентности: ни одна из сторон финансовой сделки не должна казаться в убытке или получить дополнительную прибыль.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

Рассмотрим ситуацию, когда платеж P_1 со сроком уплаты n_1 заменяется на платеж P_0 со сроком уплаты n_0

Простые ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании простой ссудной ставки:

$$P_0 = P_1[1 + (n_0 - n_1)r], n_0 > n_1$$

$$P_0 = \frac{P_1}{1 + (n_1 - n_0)}, n_0 < n_1$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если $P_0 > P_1, n_0 > n_1$

$$n_0 = n_1 - \frac{1}{r}(\frac{P_1}{P_0} - 1)$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если $P_0 < P_1, n_0 < n_1$

$$n_0 = n_1 + \frac{1}{r}(\frac{P_0}{P_1} - 1)$$

Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании простой ссудной ставки

$$P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k [1 + | n_0 - n_k | r]^{sign(n_0 - n_k)} \qquad P_0 > P_1, n_0 > n_1$$

Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании простых ссудных ставок

$$\frac{P_0}{1 + n_0 r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1 + n_k r}$$

Простые учетные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$P_0 = P_1 [1 - | n_1 - n_0 | d]^{sign(n_1 - n_0)}$$

Формула для нахождения срока нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$n_0 = n_1 + \frac{1}{d}(1 - \frac{P_1}{P_0}), P_0 > P_1$$

$$n_0 = n_1 - \frac{1}{d}(1 - \frac{P_0}{P_1}), P_1(1 - nd) \leq P_0 < P_1$$

Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании простой учетной ставки

$$P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k [1 - / n_k - n_0 / d]^{sign(n_k - n_0)}$$

Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании простых учетных ставок

$$P_0 (1 - n_0 d) = \sum_{k=1}^{m} P_k (1 - n_k d)$$

Сложные ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании сложной ссудной ставки:

$$P_0 = P_1 (1 + r)^{(n_0 - n_1)}$$

Формула для нахождения срока нового платежа

$$n_0 = n_1 + \frac{Ln \frac{P_0}{P_1}}{Ln(1 + r)}$$

Формула для определения величины консолидированного платежа

$$\frac{P_0}{(1 + r)^{n_0}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{(1 + r)^{n_k}}$$

Формула для определения срока консолидированного платежа

$$n_0 = \frac{Ln \frac{P_0}{\sum P_k (1 + r)^{-n_k}}}{Ln(1 + r)}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Согласно новому финансовому соглашению платеж в 100000 руб. со сроком уплаты через 1 год заменяется платежом со сроками уплаты 1) через полгода;
2) через два года. Определить величину нового платежа, если используется простая ставка 20 % годовых.

Решение

1) Так как срок нового платежа меньше года, то его величина — это дисконтированная стоимость 100000 руб., срок дисконтирования — 0,5 года, поэтому величина нового платежа равна:

$$100\ 000 / (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 90\ 909 \text{ руб.}$$

2) Так как срок нового платежа больше года, то его величина — это будущая стоимость 100000 руб., наращение происходит один год по ставке 20 % годовых, поэтому величина нового платежа равна:

$$100\ 000 \cdot (1+1 \cdot 0{,}2) = 120\ 000 \text{ руб.}$$

Задача 2

Найти величину нового срока, если платеж в 100 000 руб. с уплатой через 250 дней заменяется платежом в 95 000 руб. Используется простая ставка 10 % годовых.

Решение

Так как сумма нового платежа меньше 100 000 руб., поэтому новый срок должен быть также меньше 250 дней.

Графически это можно показать следующим образом:

Будем приводить потоки платежей по новому и старому контракту к моменту времени 250 дней.

Тогда на сумму в 95 000 руб. должны начисляться простые проценты по ставке 10 % в течение $(250 - x)$ дней и наращенная сумма должна равняться 100 000 руб. Составляем уравнение эквивалентности

$$95000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot (250 - x) / 360)) = 100000,$$

$$x = 60{,}5 \text{ дней.}$$

Проверим этот результат. Получив через 60,5 дней 95000 руб. и вложив их в банк на срок (250 – 60,5) дней, получим

$$95000 \cdot (1+0{,}1 \cdot (250 - 60{,}5) /360) = 100000 \text{ руб.}$$

Заметим, что платеж в 100000 руб. нельзя заменить любым меньшим по величине платежом. Величина нового платежа не может быть меньше, чем сумма 100000 руб., приведенная к начальному моменту времени, т. е. меньше, чем 100000 / (1+ 0,1 · 250/360) = 93500 руб.

Задача 3

Два векселя номинальной стоимостью 20000 руб. и 30000 руб. и сроком погашения 1 июня и 1 сентября заменяются одним с продлением срока погашения до 1 октября. При объединении используется простая учетная ставка 10 % годовых. Определить номинальную стоимость нового векселя.

Решение

Поскольку срок погашения нового векселя позже, чем сроки погашения объединяемых векселей, то на сумму 20000 руб. в течение 122 дней (с 1 июня по 1 октября) происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 %; на сумму 30000 руб. в течение 30 дней (с 1 сентября по 1 октября) также происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 % годовых. Поэтому номинальная стоимость нового векселя равна:

$$F = 20000 \cdot (1 - 122/360)^{-1} + 30000 \cdot (1 - 30/360)^{-1} = 62979{,}4 \text{ руб.}$$

Задача 4

Платежи в 6000, 4000 и 10000 руб. должны быть погашены соответственно через 90, 165 и 270 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 120 дней. Найти величину консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 38% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

Решение

Приведем все платежи к моменту погашения консолидированного платежа, т.е. к 120 дням. Тогда на платеж в 6000 руб., срок погашения которого меньше 120 дней, будут начисляться простые проценты за период в 120-90=30 дней, платеж в 4000 руб. необходимо дисконтировать на срок в 165-120=45 руб., платеж в 10000 руб. необходимо дисконтировать на срок 270-120=150 дней.

Складывая суммы приведенных платежей, получим уравнение для определения величины консолидированного платежа:

$$X = 6000 \cdot (1 + \frac{30}{360} \cdot 0{,}38) + \frac{4000}{1 + \frac{45}{360} \cdot 0{,}38} + \frac{10000}{1 + \frac{150}{360} \cdot 0{,}38}$$

поэтому X=18642 руб.

Если бы за дату приведения выбрали время выплаты платежа в 6000 руб., то получили бы следующее уравнение:

$$\frac{X}{1 + \frac{30}{360} \cdot 0{,}38} = 6000 + \frac{4000}{1 + \frac{75}{360} \cdot 0{,}38} + \frac{10000}{1 + \frac{180}{360} \cdot 0{,}38},$$

откуда X=18683 руб.

Приводя все платежи к начальному моменту времени, получим уравнение:

$$\frac{X}{1+\frac{120}{360}0{,}38}=\frac{6000}{1+\frac{90}{360}0{,}38}+\frac{4000}{1+\frac{165}{360}0{,}38}+\frac{10000}{1+\frac{270}{360}\cdot 0{,}38},$$

откуда X=18780 руб.

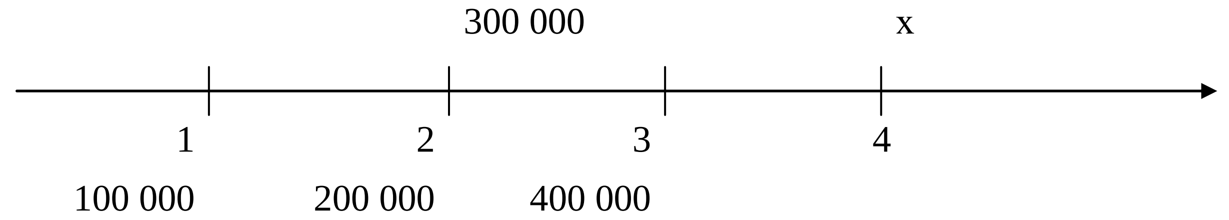
Поэтому при выборе финансового соглашения в случае использования простых процентов необходимо оговорить дату, на которую будет осуществляться приведение всех сумм.

Задача 5

Согласно контракту предприниматель должен выплатить кредитору 100 000 руб. через год, 200 000 руб. через два года и 400 000 руб. через 3 года. Предприниматель планирует выплатить через 2 года 300 000 руб., оставшуюся сумму долга вернуть через 4 года. Какую сумму предприниматель должен будет выплатить через 4 года, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

Решение.

Изобразим схему выплат на графике. Под осью отметим платежи по старому соглашению, над осью – по новому контракту.



Величину неизвестного платежа находим из условия эквивалентности контрактов. Приведенные стоимости платежей по старому контракту необходимо приравнять к приведенным стоимостям потоков платежей по новому контракту и из полученного уравнения определить неизвестную величину нового платежа.

$$\frac{100000}{(1+0{,}2)}+\frac{200000}{(1+0{,}2)^2}+\frac{400000}{(1+0{,}2)^3}=\frac{300000}{(1+0{,}2)^2}+\frac{X}{(1+0{,}2)^4}$$

X= 508 800 руб.

В случае сложных ставок результат не зависит от момента времени, для которого составляется уравнение эквивалентности контрактов. Действительно, если все платежи приводить к моменту окончания года 4, уравнение примет вид:

$$100\cdot(1+0.2)^3+200\cdot(1+0{,}2)^2+400(1+0.2)=300\cdot(1+0{,}2)^2+X$$

Разделив это обе части уравнения на $(1+0,2)^4$, получим первоначально составленное уравнение.

Задание на лабораторную работу 6. Замена и консолидация платежей. Контрольные вопросы

1. Что означает консолидация платежей?
2. Верно ли утверждение: при сравнении платежей их приведение к одному моменту времени может осуществляться как путем наращения, так и путем дисконтирования?
3. При изменении сроков платежей в каком случае новый платеж будет больше старого платежа, а каком случае меньше?
4. Какие контракты являются эквивалентными?
5. Какие задачи могут возникать при консолидации платежей?

Задача 1.

В банк для учета предъявлены 2 векселя - один на сумму в 100 тыс. руб. и сроком погашения через год, второй – на сумму 150 тыс. руб. и сроком погашения через 2 года. Два векселя необходимо заменить одним, на сумму 250 тыс. руб. Определить срок погашения нового векселя при использовании сложной учетной ставки 20% годовых.

Задача 2.

Платежи на сумму 300 000 руб., 400 000 руб. и 400 000 руб. должны быть внесены через три месяца, полгода и 9 месяцев соответственно. Достигнуто соглашение о замене этих платежей на один, равный им по сумме. Определить срок нового платежа, если используется простая ссудная ставка 15 % годовых.

Задача 3

Согласно контракту, предприниматель должен выплатить кредитору 10 тыс. руб. через год, 40 тыс. руб. через три года и 30 тыс. руб. через 5 лет. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. руб. через 2 года и 40 тыс. руб. через 4 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 34% годовых?

Задача 4

Три платежа : 10 000 долл., срок погашения 15 мая; 20 000 долл., срок погашения 15 июня; 15 000 долл., срок погашения 15 августа заменяется одним платежом со сроком погашения 1 августа на основе простой процентной ставки. Определить сумму нового платежа.

Задача 5

Контракт на выплату 10 000 долл. 1 ноября и выплату 5000 долл. 1 января следующего года необходимо заменить новым контрактом, в соответствии с которым 1 декабря выплачивается 6000 долл., оставшаяся сумма погашается

1 марта. Определить сумму второго платежа на основе простой ссудной ставки 10% годовых (следующий год не високосный).

Лабораторная работа 7. Начисление процентов в условиях инфляции

Для оценки наращенной суммы с учетом ее обесценения полученную величину делят на индекс инфляции за время осуществления наращения. Если множитель наращения равен индексу инфляции, то соответствующее наращение лишь нейтрализует действие инфляции.
При инфляции выделяют следующие виды процентных ставок: номинальную, реальную, положительную. Иногда ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой.

Для обеспечения реального роста стоимости первоначального капитала при инфляции необходимо исходную ставку увеличивать (индексировать). Выбор величины такой индексированной ставки определяется поставленными целями. Для обеспечения реальной доходности согласно исходному коэффициенту наращения необходимо так индексировать исходную ставку (увеличить на инфляционную премию), чтобы новый коэффициент наращения полностью компенсировал потери из-за инфляции.

Формула Фишера определяет значение сложной годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции. Эта формула по существу показывает ту величину, называемую инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке (эта ситуация типична для стран с развитой рыночной экономикой) пользуются и приближенным вариантом формулы Фишера.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться рассчитывать доходность финансовых операций в условиях инфляции, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Типовые задачи с решениями

Задача 1
На вклад начисляются сложные проценты: 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?
Решение
1) Обозначим через $I_u^{(1/12)}$ ежемесячный (т.е. за 1/12 года) индекс инфляции, тогда $I_u^{(1/12)} = 1{,}03$ и при *к=12* находим индекс инфляции за год:

$$I_u^{(1)} = (I_u^{(1/12)})^{12} = 1{,}03^{12} = 1{,}4258$$

Пусть r - процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства $1+r=I_u^{(1)}$ (т.е. множитель наращения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r=I_u^{(1)}-1=1{,}4258-1=0{,}4258=42{,}58\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 42,58% годовых.

2) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, пользуемся равенством :

$$(1+r(4)\ \ /4)^4=I_p^{(1)}$$, откуда:

$$r(4)=4(\sqrt[4]{I_u^{(1)}}-1)=0{,}3709=37{,}09\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежеквартальном начислении процентов по ставке не меньше, чем 37,09% годовых.

3) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством

$$(1+r(12)/12)^{12}=I_u^{(1)}$$, откуда:

$$r(12)\ \ =12(\sqrt[12]{I_u^{(1)}}-1)=0{,}36=36\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежемесячном начислении сложных процентов по ставке, не меньше, чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно, $r(12)/12>0{,}03$, поэтому $r>0{,}36$

Задача 2

Номинальная процентная ставка, компенсирующая действие инфляции, равна 52% годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

Решение

Приравняем годовой индекс инфляции к множителю наращения за год. Полагая $r(4)=0{,}52$, получим :

$$I_u^{(1)}=(1+r(4)/4)^4=(1+0{,}52/4)^4=1{,}6305$$

Поэтому индекс инфляции за полгода (0,5 года) составит :

$$I_u^{(0,5)}=\sqrt{I_u^{(1)}}=\sqrt{1{,}6305}=1{,}2769$$

Темп инфляции α находим из условия $(1+\alpha)=I$.
Темп инфляции за полгода равен 27,69%.

Задача 3

На вклад в течение трех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция за это время за каждый год последовательно составит 15, 20 и 10 процентов. Какова должна быть сила роста за год, чтобы покупательная способность вклада не уменьшилась?

Решение

Поскольку индекс инфляции за первый год равен 1,15, за второй - 1,2 и за третий - 1,1, то индекс инфляции за 3 года составит:

$$I^{(3)}_{и}=I1\cdot I2\cdot I3=1{,}15\cdot 1{,}12\cdot 1{,}1=1{,}518$$

Пусть σ - сила роста за год, позволяющая первоначальной сумме только сохранить свою покупательную способность. Приравнивая индекс инфляции за три года к множителю наращения за это же время, получим : $e^{3\cdot\delta}=I_{и}^{(3)}$, поэтому

$$\delta=\frac{1}{3LnI_{и}}=\frac{1}{3Ln1{,}518}=0{,}1391$$

Сила роста должна превышать 13,91% за год.

Задача 4

На вклад в течение 15 месяцев начисляются проценты: 1) по схеме сложных процентов; 2) по смешанной схеме. Какова должна быть процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 8%?

Решение

1) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 8%, то индекс инфляции за каждый квартал (0,25 года) равен 1,08. Поэтому индекс инфляции за 15 месяцев (1,25 года, или 5 кварталов) составит:

$$I_{p}^{(1,25)}=1{,}08^{5}=1{,}4693$$

Обозначим через r искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращения при использовании схемы сложных процентов:

$$(1+r)^{1,25}=1{,}4693.$$

Отсюда:

$$r=1{,}4693^{1/1,25}-1=0{,}3605$$

Ставка должна превышать 36,05% годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 8% за каждый квартал годовой темп инфляции составит $1{,}08^4$-1=0,3605=36,05%. Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т.е. г > 36,05%.

2) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за 1,25 года к множителю наращения, получим квадратное уравнение относительно *r :*

$$(1+r).(1+0{,}25r)= 1{,}4693$$

Решая уравнение, определяем корни: $r = -5{,}3508$, $r =0{,}3508$.

Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать 35,08% годовых. «Граничное» значение ставки в этом случае получили почти на 1% меньше, чем в предыдущем, что объясняется большей эффективностью смешанной схемы начисления по сравнению со схемой сложных процентов.

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

$$(1+r)(1+0{,}25r)>1{,}4693$$

Задача 5

На вклад 280 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции – 0,5 % в месяц.

Решение

При наращении сложными процентами при ежеквартальном начислении процентов сумма вклада составит :

$$F = 280000 \cdot (1+0{,}1/4)^{4 \cdot 1{,}75} = 332830$$

Индекс инфляции за 1,75 года при темпе инфляции 2% в месяц составит

$$I_u^{(1,75)} = (1+0{,}005)^{21} = 1{,}11$$

Величина вклада с точки зрения ее покупательной способности равна

$$F_\alpha = \frac{F}{I_u^{(1,75)}} = \frac{332830}{1{,}11} = 299730$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$F_\alpha - P = 299730 - 280000 = 19730$$

Задание на лабораторную работу 7. Начисление процентов в условиях инфляции

Вопросы для обсуждения

1. Как определяется и что характеризует темп инфляции?
2. Почему в условиях инфляции необходимо различать номинальную и реальную процентную ставки?
3. Может ли реальная процентная ставка быть отрицательной?
4. Что определяет формула Фишера?

Задача 1

На вклад начисляются сложные проценты а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Вычислить годовую номинальную процентную ставку, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 2%.

Задача 2

Номинальная процентная ставка, компенсирующая при наращении инфляцию, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.

Задача 3

На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 4 лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 6%,7%,8% и 9%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма вклада через четыре года по своей покупательной способности не уменьшилась?

Задача 4

На вклад в 900 тыс. руб. каждые полгода начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 8%. Оцените сумму вклада через 1,5 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции –0,5 % за квартал.

Задача 5

На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 2 %?

Лабораторная работа 8. Налоги и начисление процентов

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. Во многих странах налогом облагают проценты, полученные при помещении некоторой суммы на депозит, что уменьшает реальную наращенную сумму и реальную доходность финансовой операции.

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции. Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки.

Введем обозначения:

t- ставка налога на проценты

T – общая сумма налога

F- наращенная сумма до выплаты налога на проценты

F_t - наращенная сумма после выплаты налога на проценты

P – вложенная сумма

n – продолжительность финансовой операции

Пусть r - простые ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период n, равна Pnr.

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=Pnrt$ (8.1)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1+r(1-t)n] \quad (8.2)$$

Таким образом, налог на проценты уменьшает процентную ставку и вместо ставки r применяется ставка $(1-t)r$.

Пусть на сумму P за период времени n начислялись простые учетные проценты по учетной ставке d. Величина начисленных процентов равна $Pnd/(1-nd)$.

Сумма налога на начисленные проценты составит

$$T=Pndt/(1-nd) \quad (8.3)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = F-T=P(1-ndt)/(1-nd) \quad (8.4)$$

Пусть r - сложные ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период n, равна $P[(1+r)^n -1]$

Сумма налога на начисленные проценты равна

$$T=P[(1+r)^n -1]t \quad (8.5)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t =P[(1+r)^n (1-t)+t] \quad (8.6)$$

В случае сложных процентов налог на начисленные проценты можно выплачивать как в конце финансовой операции, так и каждый год. При этом общая сумма исчисленного налога не изменяется.

Пусть на сумму P за период времени n начислялись сложные учетные проценты по учетной ставке d. Величина начисленных процентов равна

$$\frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n}$$

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=\frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n}t$

(8.7)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1-d)^{-n}(1-t)+t] \qquad \mathbf{(}8.8\mathbf{)}$$

Пусть на сумму P за период времени n начислялись непрерывные проценты по ставке δ.

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=P(e^{\delta}-1)t$ (8.9)

$$F_t = P[e^{\delta}(1-t)+t] \qquad (8.10)$$

Цель выполнения лабораторной работы - научиться рассчитывать влияние налогов на доходность финансовых операции, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые учетные проценты по ставке под 14% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (8.4) при $P=300;\ n=1,5;\ t=0,12;\ d=0,14$

$$F_t = 300(1-1,5\cdot 0,14\cdot 0,12)/\ (1-1,5\cdot 0,14) = 370,018$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 370018 руб.

Задача 2

На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые проценты по ставке под 16% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (8.2) при $P=300;\ n=1,5;\ t=0,12;\ r=0,16$

$$F_t = 300[1+\cdot 0,16\ (1-\cdot 0,12)1,5] = 360,336$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 360336 руб.

Задача 3

На вклад в 2 млн. руб. в течение 4 лет каждые полгода начислялись сложные проценты по годовой номинальной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 8% годовых.

Решение

Запишем формулу (8.6) с учетом полугодового начисления процентов:

$F_t = P[(1+r/m)^{nm}\ (1-t)+t]$

при $P=2;\ r=0,12;\ n=4;\ m=2;\ t=0,08$

$F_t = 3{,}09268$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 3 092 680 руб.

Задача 4

Для участия в некотором проекте предпринимателю необходимо 280 тыс. руб. Между тем он располагает суммой 250 тыс. руб. С целью накопления необходимой суммы предприниматель собирается положить 250 тыс. руб. в банк. Предлагаемая банком ставка по вкладам равна 14% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, использует точный процент с точным числом дней, а ставка налога на проценты равна 1%?

Решение

Обозначим через X необходимое число дней, тогда формула (8.2) запишется в виде:

$F_t = P[(1+r(1-t)X/365]$

При $F_t = 280;\ P=250;\ r=0{,}14;\ t=0{,}01$

$280=250\cdot[1+0{,}014\cdot(1-0{,}01)X / 365]$

Решая полученное уравнение относительно X, получаем:

X=316,017

Для накопления требуемой суммы необходимо 317 дней.

Задача 5

Клиент положил в банк 60 тыс. рублей под простую процентную ставку 10% годовых и через полгода с учетом налога на проценты получил 62,8 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

Решение

Из формулы (8.2) выразим ставку налога на проценты

$$t = 1 - \frac{1}{nr}\left(\frac{F_t}{P} - 1\right)$$

При $F_t = 62{,}8;\ P=60;\ r=0{,}1;\ n=0{,}5$

$t=0{,}067$

Ставка налога на проценты равна 6,7%.

Задание на лабораторную работу 8. Налоги и начисление процентов

Контрольные вопросы

1. Как налог на проценты при наращении простыми процентами влияет на процентную ставку?
2. Как налог на проценты при наращении сложными процентами влияет на процентную ставку?

3. Верно ли следующее утверждение: при наращении сложными процентами величина налога на проценты не зависит от времени уплаты налога- ежегодно или в конце финансовой операции?

Задача 1

В банк на депозит внесено 5000 долл. , срок депозита - полгода, простая ссудная ставка равна 5% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

Задача 2

В банк на депозит внесено 7000 долл., срок депозита - квартал, простая ссудная ставка равна 6% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 4%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

Задача 3

В банк на депозит внесено 5000 долл., срок депозита – три года, сложная ссудная ставка равна 6% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты, сумму уплаченного налога и реальную доходность финансовой операции.

Задача 4

В банк на депозит внесено 100 тыс. руб., срок депозита – три года, сложная ссудная ставка равна 8% годовых. Определить ставку налога на начисленные проценты, если после его уплаты у вкладчика осталось 120 тыс. руб.

Задача 5

Вкладчик имеет 180 тыс. рублей и планирует увеличить эту сумму до 200 тыс. руб. через полгода. Определить требуемую простую годовую ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на начисленные проценты равна 2%.

Задача 6

Предприниматель положил в банк 500 тыс. руб. под простую процентную ставку 9% годовых и через 9 месяцев получил 540 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

Задача 7

Какую сумму необходимо положить в банк под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы с учетом налога на проценты можно было бы ежегодно снимать со счета 60 тыс. руб. с учетом налога на проценты, и сумма на счете не изменялась? Ставка налога на проценты равна 4%.

Задача 8

Какую сумму необходимо положить в банк под сложную процентную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов, чтобы накопить 300 тыс. руб. с учетом уплаты налога на проценты 1) за 2 года; 2) за три года? Ставка налога на начисленные проценты равна 6%.

Лабораторная работа 9. Финансовые ренты

Одним из ключевых понятий в финансовом менеджменте является понятие денежного потока как совокупности притоков и/или оттоков денежных средств, имеющих место через некоторые временные интервалы.

Денежный поток, срок действия которого ограничен, называется срочным; если притоки (оттоки) осуществляются неопределенно долго, денежный поток называется бессрочным. Если притоки (оттоки) осуществляются в начале периодов, денежный поток носит название пренумерандо, если в конце периодов -постнумерандо.

Известны две задачи оценки денежного потока с учетом фактора времени: прямая и обратная. Первая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока; для понимания экономической сущности этой задачи ее легче всего увязывать с процессом накопления денег в банке и оценкой величины наращенной суммы. Вторая задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока; наиболее наглядная ситуация в этом случае - оценка текущей стоимости ценной бумаги, владение которой дает возможность в будущем получать некоторые платежи.

Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока. Аннуитет - однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы. Постоянный аннуитет имеет дополнительное ограничение, его элементы одинаковы по величине.

Ускоренные методы оценки денежных потоков основаны на применении мультиплицирующих и дисконтирующих множителей, которые табулированы в специальных финансовых таблицах. Таблицы инвариантны по отношению к виду потока - постнумерандо или пренумерандо; оценки для потока пренумерандо отличаются от соответствующих оценок для потока постнумерандо на величину множителя $(1+r)$, где r - ставка в долях единицы.

В финансовой математике разработаны универсальные формулы, позволяющие делать расчеты несовпадениях моментов поступления аннуитетных платежей и начисления процентов.

Цель выполнения лабораторной работы - научиться решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

$$FV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r,n) \tag{9.1}$$

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{(1+r)^{k}} = A \cdot FM4(r,n) \tag{9.2}$$

$$FV_{pre} = (1+r) \cdot FV_{pst} \tag{9.3}$$

$$PV_{pre} = (1+r) PV_{pst} \tag{9.4}$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{9.5}$$

$$FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{9.6}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Анализируются 2 варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо, т.е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временного интервала:

План 1: Вносить на депозит 5000 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 10% годовых с полугодовым начислением процентов:

План 2: делать ежегодный вклад в размере 10000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Ответьте на следующие вопросы:

1. Какая сумма будет на счёте через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен?
2. Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет повышена до 10%?

Решение

План 1:

Принимая за базовый период полгода, воспользуемся формулой (9.1) при
A=5000; r=5%; n=20:
$FV_1 = 0{,}5 \cdot FM3(5\%,20) = 5000 \cdot 33{,}066 = 165330$

План 2:

Принимая за базовый период год, воспользуемся формулой (9.1) при
A=10000; r=9%; n=10:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(9\%,10) = 10000 \cdot 15{,}193 = 151930$$

В данной задаче более предпочтительным является план 1, так как в этом случае будущая стоимость денежного потока выше. Если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8%, то будущая стоимость денежного потока будет равна:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(10\%,10) = 10000 \cdot 15{,}937 = 159370$$

то и в этом случае решение не изменится, то есть выгоднее план 1.

Задача 2.

Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет получать в конце каждого квартала 8 тыс. долл. Определить возможные суммы, которые через три года получит предприниматель, если можно поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

Решение

Используем формулу (9.2), считая базовым периодом квартал, тогда $A=8;$ $n=12;$ $r=6\%$:

$FV=8 \cdot FM3(6\%,12)=8 \cdot 16,8699=134959$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет 134 959 000 долл.

Задача 3.

Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 6% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком ежегодно начисляются сложные проценты?

Решение

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо. По формуле (9.2) при $A=100;$ $r=6\%;$ $n=6:$

$PV=100 \cdot FM4(6\%,6)=100 \cdot 4,917=491,7$

В банк на счет необходимо положить 491 700 руб.

Задача 4

Клиент в конце каждого года вкладывает 300 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 10% годовых. Определить сумму, которая будет на счете через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

Решение

По формуле (9.1) при $A=300;$ $r=10\%;$ $n=7:$

$FV=300 \cdot FM3(10\%,7)=300 \cdot 9,487=2846,1.$

Через 7 лет на счете накопится 2846100 руб.

Величину однократного взноса в начале первого года находим по формуле (3.2, лабораторная работа Сложные ссудные ставки) при $F=2846,1;$ $r=10\%;$ $n=7$:

$P=2846,1 \cdot FM2(10\%,7)=2846,1 \cdot 0.51 =1450,44$

Взнос равен 1450440 руб.

Задача 5

Фирме предложено инвестировать 200 млн. руб. на срок 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 50 млн. руб.); по истечении четырех лет будет выплачено дополнительное вознаграждение в размере 25 млн. руб. Примет ли она это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 8% годовых?

Решение

По формуле (3.1) (лабораторная работа Сложные ссудные ставки) при $P=200000;\ r=0{,}08;\ n=4$ определим сумму, которая накопится на счете, если положить деньги в банк:

$F1=200\cdot(1+0{,}08)^{4=}\ 272{,}098$

По формуле (9.1) при $A=50000;\ r=8\%;\ n=4$ определим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$FV = 50\cdot FM3(8\%,4)=50\cdot 4{,}5061= 225{,}305$

С учетом дополнительного вознаграждения в 25 млн. руб., при условии инвестирования 200 млн., на конец четвертого года на счете фирмы будет сумма, равная

$F2=225{,}305+25=250{,}305$

$F1>F2$, поэтому фирме выгодно положить деньги в банк и не принимать данное предложение.

Задание на лабораторную работу 9. Финансовые ренты

Контрольные вопросы

1. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
2. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.
3. Как используются финансовые таблицы для оценки постоянных аннуитетов?
4. Чему равен коэффициент наращения аннуитета?
5. Чему равен коэффициент дисконтирования аннуитета?
6. Какая связь существует между будущей и приведенной стоимостями аннуитета?

Задача 1

Страховая компания заключила договор с предприятием на 5 лет, установив ежемесячный страховой взнос в сумме 500 тыс. руб.. Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 10 % годовых, начисляемую ежемесячно. Определите сумму, которую получит по данному контракту страховая компания.

Задача 2

Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 100 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 7%. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?

Задача 3
Преуспевающий предприниматель в знак уважения к своей школе намерен заключить договор со страховой компанией, согласно которому компания ежегодно будет выплачивать школе сумму в 500 тыс. руб. от имени предпринимателя в течение 20 лет. Какой единовременный взнос должен сделать предприниматель, если банковская ставка по вкладам равна 5% годовых?

Задача 4
Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка 9% в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене имеет смысл приобретать эту ренту?

Задача 5
В начале каждого года вы вкладываете 500 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 9 % годовых. Определить сумму, которая накопится на счете через 5 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

Лабораторная работа 10. Ренты с антисипативным начислением процентов

Рассмотрим прямую и обратную задачи оценки ренты, на платежи которой начисляются антисипативные проценты по сложной учетной ставке.

При антисипативном начислении процентов по сложной учетной ставке *d* наращенный денежный поток постнумерандо, начиная с последнего денежного поступления, примет вид:

$$A, \frac{A}{(1-d)}, \frac{A}{(1-d)^{2}}, \dots, \frac{A}{(1-d)^{n-1}}$$

Наращенный денежный поток представляет собой убывающую геометрическую прогрессию с первым членом *A* и знаменателем *q=1/(1-d)*.

Будущую стоимость такого денежного потока находим как сумму первых *n* членов геометрической прогрессии:

$$FV_{pst}^{d} = A\frac{\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n}-1}{\frac{1}{1-d}-1} = A\frac{1-d}{d}\left[(1-d)^{-n}-1\right] \qquad (10.1)$$

При антисипативном начислении процентов по сложной учетной ставке *d* приведенный денежный поток постнумерандо, начиная с первого денежного поступления, примет вид:

$$A(1-d), A(1-d)^{2} \dots\dots A(1-d)^{n}$$

Приведенный денежный поток представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом *A (1-d)* и знаменателем *q=(1-d)*.

Приведенную стоимость такого денежного потока находим как сумму первых *n* членов геометрической прогрессии:

$$PV_{pst}^{d} = A\frac{1-d}{d}\left[1-(1-d)^{n}\right]. \qquad (10.2)$$

Приведенную стоимость аннуитета также можно найти из соотношения

$$PV_{pst}^{d} = (1-d)^{n} FV_{pst}^{d} \qquad (10.3)$$

Формулы для решения прямой и обратной задачи ренты пренумерандо :

$$FV_{pre}^{d} = \frac{1}{1-d} FV_{pst}^{d} \qquad (10.4)$$

$$PV_{pre}^{d} = \frac{1}{1-d} PV_{pst}^{d} \qquad (10.5)$$

Цель выполнения лабораторной работы - научиться решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета, на платежи которого начисляются антисипативные проценты по сложной учетной ставке *d*.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Оценить стоимость трехгодичной ренты постнумерандо с ежемесячной выплатой 300 долл., если также ежемесячно начисляются антисипативные проценты по сложной учетной ставке 6 % годовых.

Решение

По формуле (10.1) при $A = 300$, $n = 12 \cdot 3 = 36$, $d = \frac{0,06}{12} = 0,005$

$$FV = 300\frac{1-0,005}{0,005}[(1-0,005)^{-36}-1] = 11806,15$$

По формуле 10.3 при $FV=11806,15$, $n = 12 \cdot 3 = 36$, $d = \frac{0,06}{12} = 0,005$

$$PV = 11806,15 \cdot (1-0,005)^{36} = 9856,878$$

Будущая стоимость ренты равна 11806,15 долл.; приведенная стоимость ренты равна 9856,878 долл.

Задача 2

Какую сумму необходимо ежегодно в начале года вносить в банк, чтобы за 4 года накопить 500 тыс. руб., если банк ежегодно начисляет сложные проценты по учетной ставке 20% годовых?

Решение

Из формул (10.4) и (10.1) выразим величину неизвестного платежа

$$A = \frac{FV_{pre} \cdot d}{(1-d)^{-n} - 1}$$

при $FV_{pre}=500$; $d=0,24$ $n=4$ получаем $A=69,37669$

В начале каждого года в банк необходимо вносить 69,38 тыс. руб.

Задача 3

Какую сумму необходимо положить в банк под сложную учетную ставку 10% годовых, чтобы в течение 10 лет снимать со счета 100 тыс. руб.? Как изменится ответ, если банк использует сложную ссудную ставку 10% годовых?

Решение

Для решения необходимо использовать формулу (10.2) при *A=100; n=10; d=0,2*

$$PV_{pst}^{d} = 100\frac{1-0{,}1}{0{,}1}[1-(1-0{,}1)^{10}] = 586{,}1894$$

В банк необходимо внести 586,1894 тыс. руб.

Если банк использует сложную ссудную ставку 10% годовых, применяем формулу (9.2) (лабораторная работа 9)

PV=100·FM4(10%,10)=100·6,1446=614,46

Если банк применяет сложную ссудную ставку 10% годовых, на депозит необходимо внести 614,46 тыс. руб., т.е. больше, чем в первом случае. Действительно, наращение по сложной учетной ставке идет быстрее, чем по ссудной, поэтому на депозит в этом случае необходимо внести большую сумму.

Задание на лабораторную работу 10. Ренты с антисипативным начислением процентов

Контрольные вопросы

1. Объясните логику решения прямой задачи ренты постнумерандо, на платежи которой начисляются проценты по сложной учетной ставке.
2. Объясните логику решения обратной задачи ренты постнумерандо, на платежи которой начисляются проценты по сложной учетной ставке.
3. Необходимо накопить 1 млн. рублей путем ежегодных вложений одинаковой суммы в банк. Банк А начисляет проценты по сложной ссудной ставке 10% годовых, а банк В- по сложной учетной ставке 10% годовых. В каком банке срок накопления будет меньше?

Задача 1

Ежегодно в начале года на депозит вносится 200 тыс. руб. Какая сумма накопится на депозите через 5 лет, если банк ежегодно начисляет сложные проценты по учетной ставке 12% годовых. Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 12% годовых?

Задача 2

Какую сумму необходимо положить на депозит, чтобы в течение 15 лет снимать со счета в начале каждого года по 10 тыс. долл., если банк начисляет проценты по сложной учетной ставке 8% годовых? Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 8% годовых?

Задача 3

Оцените ренту пренумерандо с ежегодными платежами в конце каждого года в сумме 150 тыс. руб., сложные проценты по учетной ставке 15% годовых, срок ренты- 10 лет. Сравните полученные результаты с оценкой ренты, на платежи которой начисляются сложные ссудные проценты по ставке 15% годовых.

Лабораторная работа 11. Определение параметров ренты

Постоянный аннуитет (финансовая рента) описывается набором основных параметров – платеж аннуитета, процентная ставка, срок действия аннуитета. Зная эти параметры, можно решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета - определить его будущую и приведенную стоимость. При разработке финансовых контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задаются будущая или приведенная стоимость ренты, и необходимо рассчитать значения ее параметров.

Цель выполнения лабораторной работы – научиться определять параметры аннуитетов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

$$A = \frac{FV_{pst}}{FM3(r,n)} \tag{11.1}$$

$$A = \frac{PV_{pst}}{FM4(r,n)} \tag{11.2}$$

$$n = \frac{Ln(\frac{FV_{pst}}{A} r + 1)}{Ln(1+r)} \tag{11.3}$$

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r)}{Ln(1+r)} \tag{11.4}$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{11.5}$$

$$FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{11.6}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 30 00 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% ?

Решение

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.
По формуле (9.2) при $A=30\ 000;\ r=10\%;\ n=10$ найдем приведенную стоимость этого аннуитета :
$PV=30000 \cdot FM4(10\%,10) = 30\ 000 \cdot 6{,}145 = 184350$
Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 184 350 руб. можно ежегодно снимать с него 30 000 руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.
Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет (60 – 40 = 20) накопить 184350 руб.
Размер вклада можно найти из формулы (11.1), полагая $FV_{pre}=184350$:
$A=184350 / [FM3(10\%,20)\ (1+ r)] =184350/(57{,}274 \cdot 1{,}1)=$ 2926,125
Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 2916 руб.13 коп.

Задача 2
Иванов должен Петрову 200 тыс. руб. Он предлагает вернуть долг равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых? **Решение**
По формуле (11.4) при $A=50;\ r=0{,}12;\ PV_{pst}=200$

$$n = -\frac{Ln(1-\frac{200}{50}0{,}12)}{Ln(1+0{,}12)}$$

$n=5{,}77$

Долг будет погашен через 5,77 года

Задача 3
Господин Х выплатил жене при разводе 1 млн. руб. Жена после развода планирует получать ежегодно одинаковые суммы в течение 20 лет. Какую сумму она будет получать, при условии, что процентная ставка по вкладам в банк равна 10% годовых?
Решение
1 млн. долл. – это приведенная стоимость срочной ренты постнумерандо, срок ренты- 20 лет, выплаты по ренте – ежемесячные. Величину неизвестного платежа находим из формулы (11.2) при $PV = 1\ 000\ 000$; $n=20;\ r=0{,}1$

$A=1\ 000\ 000/FM4(10\%,20)$
$A=1\ 000\ 000/\ 8{,}5136= 117\ 459{,}1$

Ежегодно жена будет получать 117 459 руб.10 коп.

Задача 4
Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 3500 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 600 тыс. руб. в банк под 8% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты ежегодно.
Решение

По формуле (11.3) при *FV=3500; A=600; r=0,08*:

$$n = \frac{\ln(\frac{3500}{600} \cdot 0{,}08 + 1)}{Ln(1 + 0{,}08)}$$

n=4,976443

Для создания фонда потребуется 5 лет.

Задание на лабораторную работу 11. Определение параметров финансовых рент.
Контрольные вопросы

1. Как изменяется коэффициент наращения аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
2. Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
3. Какая связь существует между оценками аннуитета пренумерандо и постнумерандо?

Задача 1
Предприниматель инвестировал 700 000 руб. в пенсионный контракт. На основе анализа таблиц смертности страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно в течение 20 лет исходя из ставки 15% годовых. Какую сумму ежегодно будет получать предприниматель?

Задача 2
К моменту выхода на пенсию через 10 лет предприниматель хочет иметь на счете 300 000 руб. Для этого намерен делать ежегодный взнос по схеме пренумерандо. Определите размер взноса, если банковская ставка по депозитам составляет 7% годовых.

Задача 3
Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн. руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн. руб. начисляются

сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года.

Задача 4

Необходимо найти размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, каждая из которых предусматривает начисление сложных процентов по ставке 8% годовых:

1) создать за 5 лет резервный фонд в сумме 1 млн. руб.
2) погасить через 5 лет текущую задолженность в сумме 1 млн. руб.

Задача 5

Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому фирма обеспечит работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 8000 руб. в течение 18 лет. Какую сумму ежегодно фирма должна перечислять на банковский счет работника, если работнику 30 лет, выход на пенсию – в 60 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% годовых?

Задача 6

Владелец малого предприятия планирует за три года создать фонд развития в сумме 1,5 млн. руб. Он рассматривает следующие возможности для создания фонда с помощью банковского депозита, на который начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых: 1) делать ежегодные равные взносы на депозит; 2) сделать разовый платеж. Определить размеры сумм в каждом варианте.

Лабораторная работа 12. Конверсия и замена рент

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*); или наоборот: замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну – *консолидация рент*.

Цель выполнения лабораторной работы – научиться рассчитывать характеристики заменяющих рент, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

Выкуп ренты. Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа выбирается формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r,n) \qquad (12.1)$$

$$PV_{pre} = (1+r)PV_{pst} = A \cdot FM4(r,n) \qquad (12.2)$$

Рассрочка платежей. Рассрочка платежей – обратная задача к задаче выкупа ренты. Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку. Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты - члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы. Подобные задачи рассматриваются в лабораторной работе № 12.

Объединение (консолидация) рент. Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} PV_i \qquad (12.3)$$

где PV- современная стоимость заменяющей ренты;

PV_i – современная стоимость i-той заменяемой ренты.

Замена немедленной ренты на отсроченную. Пусть имеется немедленная рента с параметрами A, n, r. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности равенство приведенных стоимостей запишется следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM\,2(r,n) \cdot PV_2 \qquad (12.4)$$

где PV_1 - современная стоимость немедленной ренты;

PV_2 – современная стоимость отложенной ренты.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1+r)^t \qquad (12.5)$$

Где A_1 - платеж исходной ренты

A_2 – неизвестный платеж отложенной ренты

t – время отложения ренты

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = -\frac{Ln\{1-[1-(1+r)^{-n1}](1+r)^t\}}{Ln(1+r)} \qquad (12.6)$$

где n_2 – неизвестный срок отложенной ренты

n_1 – срок исходной ренты

t – время отложения ренты

в общем случае, когда $n_1 \neq n_2$ из равенства $PV_1 = PV_2$ следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM\,4(n_1, r)}{FM\,4(n_2, r)}(1+r)^t \qquad (12.7)$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями А=2 млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

Решение

По формуле (12.4) при $A_1 = 2;\ t=2;\ r=0,2$

$A_2 = 2 \cdot (1+0,2)^2$

$A_2 = 2,88$

Отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до 2,88 млн.руб.

Задача 2
Рента с ежегодными платежами в 2 млн. руб. и сроком 5 лет откладывается на три года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты при условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.
Решение
В соответствии с (12.5) при $n_1 = 5;\ t=3;\ r=0{,}08;\ A=2$

$$n_2 = -\frac{Ln\{1-(1-1{,}08^{-5})1{,}08^{3}\}}{Ln1{,}08} = 6{,}689$$

Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до 6,689 года, т.е. на 1,689 года.
Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6. тогда приведенная стоимость новой ренты составит

$$PV_2 = 2\cdot FM4(8\%,6)\cdot FM2(8\%,3) = 2\cdot 4{,}6288\cdot 0{,}7938 = 7{,}3396$$

Современная стоимость исходной ренты составит

$$PV_1 = 2\cdot FM4(8\%,5) = 2\cdot 3{,}9927 = 7{,}9854$$

Разность в сумме 0,6458 млн. руб. необходимо уплатить в начале действия контракта.

Задача 3
Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями А=2 млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года с изменением срока ренты до 11 лет. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.
Решение
По формуле (12.6) при $A_1 = 2;\ t=2;\ r=0{,}2;\ n_1=8;\ n_2=11$

$$A_2 = 2\cdot\frac{FM4(20\%,8)}{FM4(20\%,11)}\cdot 1.2^2 = 2\frac{3{,}8372}{4{,}3271}\cdot 1{,}2^2 = 2{,}5539$$

Платеж отложенной ренты равен 2,5539 млн.руб.

Задача 4
Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты будут осуществляться 1) через 3 года; 2) немедленно, а сложная процентная ставка равна 4% годовых?
Решение.
1) используем формулу (12.3), считая полугодие базовым периодом, при $t=6$

$$PV=100\cdot FM2(2\%,6)\cdot FM4(2\%,30)=100\cdot 0{,}888\cdot 22{,}3965=1988{,}809$$

Ренту можно приобрести за 1 988 809 руб.
2) используем формулу (12.3), считая полугодие базовым периодом при *t=0*
$PV=100\cdot FM4(2\%, 30)=100\cdot 22{,}3965=2239{,}65$

Ренту можно приобрести за 2239650 руб.

Задача 5

Три ренты постнумерандо- немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент:

$A_1=100$; $A_2=120$; $A_3=300$ (тыс. руб.); $n_1=6$; $n_2=11$; $n_1=8$ лет. Необходимо:

1) Определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых:
2) Определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 1500 тыс. руб.

Решение

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу:

№№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	FM4(r,n)	PV
1	100	6	3,32551	332,551
2	120	11	4,32706	519.472
3	300	8	3.83716	1151,148
Итого				2002,946

1) Платеж заменяющей ренты находим из уравнения:

$$A=\frac{PV}{FM4(20\%,7)\cdot FM2(20\%,3)}=\frac{2002{,}946}{3{,}60459\cdot 0{,}5787}=960{,}189$$

Платеж заменяющей ренты равен 960 189 руб.

Если бы заменяющая рента была бы немедленной, ее платеж находим из уравнения:

$$A=\frac{PV}{FM4(20\%,7)}=\frac{2002{,}946}{3{,}60459}=555{,}665$$

2) Определим современную стоимость заменяющей немедленной ренты:

$PV=2002{,}946\cdot(1+0{,}2)^3=3461{,}091$

Неизвестный срок ренты находим из формулы (11.4) (лабораторная работа № 11):

$$n=-\frac{Ln(1-\frac{PV_{pst}}{A}r)}{Ln(1+r)}$$ при $A=1500$; $r=20\%$; $PV=3461{,}091$

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{3461{,}091}{1500} \cdot 0{,}2}{Ln1{,}2} = 3{,}395$$

Установим срок заменяющей ренты 4 года. При этом приведенная стоимость ренты равна

PV=1500·FM4(20%,4)=1500·2,5887=3883,05

Излишек в сумме *3883,05-3461,091=421,959* компенсируем в начале финансовой операции.

Задание на лабораторную работу 12. Замена и консолидация рент. Контрольные вопросы

1. Что такое выкуп ренты? Каковы методы решения этой задачи?
2. В чем заключается сущность консолидации рент?
3. Как заменить немедленную ренту на отсроченную ренту?

Задача 1

Найти годовую ренту - сумму сроком в 10 лет для двух годовых рент: одна продолжается 5 лет с годовым платежом 1 млн. руб., другая - продолжительностью 8 лет и годовым платежом 0,8 млн. руб. Годовая ставка сложных процентов равна 8%.

Задача 2

Необходимо выкупить полугодовую ренту с платежами в 50 тыс. руб., срок ренты – 10 лет; сложные проценты по ставке 10% начисляются по полугодиям.

Задача 3

Годовая рента постнумерандо с платежами А=200 тыс. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка для пролонгирования равна 10% годовых. Определить размер платежа отложенной ренты. Как изменится ответ, если платежи в отложенной ренте будут производиться в начале года?

Задача 4

Рента постнумерандо с платежами А=500 тыс. руб. и сроком 10 лет откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определить срок отложенной ренты при ставке пролонгирования 12% годовых.

Задача 5

Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?

Лабораторная работа 13. Практическое приложение финансовых вычислений

Рассмотрим практическое приложение финансовых вычислений на примере планирования погашения задолженности и ипотечных кредитов.

На практике часто применяются способы погашения долга равными платежами или равными выплатами долга через равные промежутки времени. Каждый из способов имеет свои преимущества. При равных платежах заемщик до конца договора выплачивает одни и те же суммы, включающие в себя проценты и погашающие части долга, которые не равны между собой. При равных выплатах долга платежи не одинаковы, но легко определяются остатки долга.

Цель выполнения лабораторной работы –рассмотреть способы практических приложений финансовых вычислений, научиться выбирать оптимальную схему погашения задолженности и ипотечных кредитов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Типовые задачи с решениями

Пусть заем в сумме P выдан под r простых ссудных процентов на n периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1+nr).$$

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина F и есть размер возвращаемого платежа.

Задача 1. Погашение займа одним платежом.
Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются простые проценты.
Решение
Величину платежа находим по формуле

$F = P(1+nr)$ при $P=5;\ r = 0{,}1;\ n = 5$:

$$F = 5(1+0{,}1\cdot 5) = 7{,}5$$

Размер платежа равен 7 500 000 руб.

Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1+r)^n.$$

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина F и есть размер возвращаемого платежа.

Задача 2. Погашение займа одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются сложные проценты.

Решение

Величину платежа находим по формуле

$F = P(1+r)^n$ при $P=5$; $r = 0,1$; $n =5$:

$$F = 5(1+0,1)^5 = 8,05255$$

Размер платежа равен 8 052 550 руб.

Сам заем называется основным долгом, а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. За первый год процентные деньги составят величину $r{\cdot}P$. Если эти деньги выплатить, то останется только основной долг в размере P. Таким же образом в конце каждого года (кроме последнего) выплачивается одна и та же величина $r{\cdot}P$. В конце n-ного, последнего года, выплаты составят величину $r{\cdot}P+P$, процентные деньги и сумму основного долга.

Общая сумма выплат за n периодов составит величину $P+ r{\cdot}P{\cdot}n=P(1+nr)$, т.е. операция погашения займа способом погашения основного долга одним платежом в конце эквивалентна наращению долга по схеме простых процентов по ставке r.

Задача 3. Погашение основного долга одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга одним платежом в конце срока финансовой операции».

Решение

Величина процентных платежей за 8 лет составит $r{\cdot}P{\cdot}n=0,1{\cdot}5{\cdot}5=2,5$

Общая сумма выплат составит 2,5 млн.+ 5 млн. =7,5 млн.руб.

Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. При погашении основного долга равными годовыми выплатами в конце каждого года выплачивается n-ная доля основного долга и проценты, начисленные на сумму долга, которой пользовались в течение года.

В конце первого года выплачивается доля основного долга, равная величине P/n и выплачиваются проценты с суммы P, которой пользовались в течение года, равные величине $r{\cdot}P$. Общий платеж в конце первого года равен величине $P/n+ r{\cdot}P$.

В конце второго года выплачивается доля основного долга, равная величине P/n и выплачиваются проценты с суммы $(P- P/n)$, которой пользовались в течение года, равные величине $r{\cdot} (P- P/n)$. Общий платеж в конце второго года равен величине $P/n+ r{\cdot} (P- P/n)$.

В общем случае в конце года $k+1$ общий платеж равен величине $P/n+ r{\cdot} (P- k{\cdot}P/n)$.

Платежи каждого года образуют арифметическую прогрессию с разностью
$d=r\cdot P/n$, первым членом $a_1=P/n+r\cdot P$ и последним членом $a_n=P/n+r\cdot P/n$.

Сумма n членов арифметической прогрессии равна

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$$

Величина выплат составит $P+\frac{\Pr(1+n)}{2}$

Задача 4. Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить ежегодные выплаты и общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга равными годовыми выплатами».

Решение

Найдем сумму арифметической прогрессии

$P+\frac{\Pr(1+n)}{2}$ при $P=5000$; $r=0,1$; $n=5$:

5000+5000·0.1(1+5) / 2=6500

Сумма ежегодных выплат представлена в таблице.

Год	1	2	3	4	5	
Основной долг	1000	1000	1000	1000	1000	
Проценты	500	400	300	200	100	
Сумма к выплате	**1500**	**1400**	**1300**	**1200**	**1100**	**6500**

Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. При погашении займа равными годовыми выплатами ежегодные платежи можно рассматривать как годовую ренту (аннуитет) с продолжительностью n периодов и неизвестным платежом, равным A. Неизвестный платеж ренты можно найти, приравнивая современную стоимость этой ренты сумме займа.

Тогда платеж A находим из уравнения: $P=A\cdot FM4(r,n)$, поэтому

$$A=\frac{P}{FM4(r,n)}$$

Общая сумма выплат при этом составит величину $n\cdot A$

Задача 5. Погашение займа равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение займа равными годовыми выплатами».

Решение

Величину ежегодного платежа находим из уравнения $A = \dfrac{P}{FM4(r,n)}$ при *P=5;*
r = 0,1; n =5; FM4(10%,5)=3,791
A=1318,913
Общая сумма выплат составит 5·*1318,913*= 6 594 566 руб.

Взятый заем может погашаться различными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать в нем средства, чтобы погасить заем одним платежом в конце срока финансовой операции. Очевидно, что это возможно только в том случае, если у заемщика есть возможность накапливать деньги в некотором фонде под более высокий процент.

Пусть заем в сумме P выдан под r_1 сложных ссудных процентов на n периодов. Тогда к конце срока финансовой операции финансовой операции величина займа составит величину
$F = P(1+r_1)^n$. Платежи в погасительный фонд составляют годовую ренту с ежегодным платежом, равным A и процентной ставкой $r_2 > r_1$, будущая стоимость этой ренты равна величине $F = P(1+r_1)^n$. Тогда величину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из уравнения:

$$A = \frac{P(1+r_1)^n}{FM3(r_2,n)}$$

Задача 6. Создание погасительного фонда

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. У заемщика есть возможность создать накопительный фонд в банке, начисляющим по вкладам 12% годовых. Найти величину ежегодного платежа в погасительный фонд.

Решение

Величину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из формулы

$$A = \frac{P(1+r_1)^n}{FM3(r_2,n)}$$ при $P=5;\ r_1=0{,}1; r_2=0{,}12; n=5$

A=1267550
Величина ежегодного платежа в погасительный фонд равна 1 267 550 руб.
Общие расходы по погашению займа составят (1 267 550 ·5)= 6 337 749 руб.

Задание на лабораторную работу 13. Практическое приложение финансовых вычислений
Контрольные вопросы

1. Какой кредит называется потребительским? Приведите примеры потребительских кредитов
2. Перечислите основные способы погашения кредита
3. Какой способ погашения кредита наиболее выгоден банку (кредитору)?
4. Какой способ погашения кредита наиболее выгоден заемщику?
5. Почему банки заинтересованы в том, чтобы должник погашал сумму долга частями в течение всего срока кредитования?

Задача 1
Кредит в размере K = 400 тыс. руб., выданный на год под простую ссудную ставку 20% годовых, должен погашаться четырьмя платежами в конце каждого квартала. Долг погашается равными выплатами, т.е. в каждый квартал погашается 100 тыс. руб. основного долга. Определить величину каждой квартальной выплаты, состоящей из погашаемой ¼ части основного долга и процентов с суммы задолженности за соответствующий квартал.

Задача 2
Кредит в сумме 100 млн.руб. выдан на 5 лет под 20% годовых. Для погашения кредита создается погасительный фонд, на который начисляются проценты по ставке 22% годовых. Фонд формируется в течение 5 лет, взносы производятся в конце каждого года равными суммами. Необходимо найти размер срочных выплат.

Задача 3
Кредит в размере 900 тыс. руб. взят на 4 года под ставку 5% годовых. Составить план погашения кредита равными годовыми выплатами.

Задача 4
Фирма взяла в банке кредит в сумме 100 млн. руб. на 3 года под 30% годовых. Рассчитать все возможные схемы погашения кредита. Результаты расчетов занести в таблицу:

Способ погашения кредита	Размер платежа			
	Год 1	Год 2	Год 2	Итого
………………….				
…………………				

Задача 5
Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 40 тыс. долл. на 5 лет под 6% годовых. Погашение кредита должно производиться равными ежегодными выплатами в конце каждого года, включающими погашение основного долга и

процентные платежи. Начисление процентов производится раз в году. Составить план погашения займа.

Задача 6.

Фирма получила кредит 5 млн. руб. на 4 года под 8% сложных годовых в банке А. Кредитный контракт предусматривает погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке Б. На размещенные средства банк Б начисляет 10% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд вносятся ежегодно равные суммы.

Задача 7.

Долг, выданный на 5 лет под 8% годовых (сложные проценты), равен 80 тыс. долл. Платежи в погасительный фонд должны возрастать на 10% ежегодно. На взносы в погасительный фонд начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых. Составить план погашения долга.

Методические указания по самостоятельной работе

Тема 1. Сравнение различных схем наращения и дисконтирования

Задание 1. Дисконтирование в схеме простых процентов.
Доказать следующее утверждение: математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское – для банка. Рассчитать величину дисконтированной суммы P для ссудной и учетной ставки 10% годовых при $F = 100$. Расчеты занести в таблицу:

Ставка (в долях единицы)	Продолжительность финансовой операции, лет					
	0,5	1	2	3	4	5
r =0,1						
d= 0,1						

Указания к выполнению задания

По формулам дисконтирования по схеме простых процентов соответственно запишем:

$$P_{ссудная} = F/(1+nr)$$

$$P_{учетн} = F \cdot (1-nd)$$

Необходимо доказать, что $P_{ссудная}$ всегда больше, чем $P_{учетная}$ при $r=d$.

Для этого найти разность $P_{ссудная}$ минус $P_{учетная}$ и показать, что эта разность всегда положительна.

Задание 2. Наращение в схеме простых процентов.
Доказать следующее утверждение: простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка. Рассчитать величину наращенной суммы по ссудной и учетной ставке при $P = 100$, $r=d=10\%$ годовых. Расчеты занести в таблицу:

Ставка (в долях единицы)	Продолжительность финансовой операции, лет					
	0,5	1	2	3	4	5
r =0,1						
d= 0,1						

Указания к выполнению задания

По формулам наращения по схеме простых процентов соответственно запишем:

$$F_{ссудная} = P \cdot (1 + nr)$$

$$F_{учетная} = \frac{P}{1 - nd}$$

Необходимо доказать, что $F_{учетная}$ больше, чем $F_{ссудная}$ при любых r=d. Для этого найти разность между $F_{учетная}$ и $F_{ссудная}$ и показать, что эта разность всегда положительна.

Задание 3. Сравнение наращенной суммы по простым и сложным процентам.

Построить графики наращенной суммы по простым и сложным ссудным процентам при ставке 10% годовых.

Указания к выполнению задания

Использовать раздел MS EXSEL « Вставка→Диаграммы→График.

Задание 4. Сравнение банковского дисконтирования для простых и сложных учетных ставок

Построить графики дисконтированной суммы по простым и сложным учетным процентам при ставке 10% годовых.

Указания к выполнению задания

Использовать раздел MS EXSEL « Вставка→Диаграммы→График.

Задание 5. **Сравнение множителей наращения и дисконтирования для разных видов ставок.**

Сравнить множители наращения и дисконтирования для простых и сложных ссудных и учетных ставок. Заполнить таблицы и сделать выводы

Срок n лет	Соотношения для множителей
$0 < n < 1$	
$n = 1$	
$n > 1$	

Указания к выполнению задания

Ставка	**Множитель наращения**	**Множитель дисконтирования**
Простая ссудная	$(1+ni)$	$\frac{1}{(1+ni)}$

Простая учетная	$\frac{1}{1-ni}$	$(1-ni)$
Сложная ссудная	$(1+i)^n$	$\frac{1}{(1+i)^n}$
Сложная учетная	$\frac{1}{(1-i)^n}$	$(1-i)^n$

Тема 2. Свойства множителей наращения и дисконтирования аннуитета.

Задание 1. Доказать утверждение: дисконтный множитель аннуитета *FM*4(*r*,*n*) полезно интерпретировать и как величину капитала, поместив который в банк под сложную процентную ставку *r*, можно обеспечить регулярные выплаты в размере одной денежной единицы в течение *n* периодов (выплаты производятся в конце каждого периода).

Указания к выполнению задания

Пусть в банк на депозит помещена сумма, равная *FM*4(*r*,*n*). Банк начисляет сложные проценты по ставке *r*. К концу первого периода величина *FM*4(*r*,*n*) станет равной:

$$FM\,4(r,n)(1+r)=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}(1+r)=\frac{1+r-(1+r)^{-n+1}}{r}=1+\frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{r}=1+FM\,4(r,n-$$

В конце первого периода одна денежная единица будет выплачена и останется капитал *FM*4(*r*,*n*-1), который остается на депозите.
Продолжите эти рассуждения до интервала *n-1* и интервала *n*.

Задание 2. Доказать формулу: $PV=FM\,2(r,n)\cdot FV$

Указания к выполнению задания

Использовать формулы

$FM\,4(r,n)=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, *PV=A·FM4(r,n); FV=A·FM3(r,n)*

Задание 3. Доказать формулу: $FM\,4(r,n+k)=FM\,4(r,k)+(1+r)^{-k}FM\,4(r,n)$

Указания к выполнению задания

Использовать формулу

$$FM\,4(r,n+k)=\frac{1-(1+r)^{-(n+k)}}{r}$$

Тема 3. Конверсия валюты и наращение процентов

При возможности обмена рублевых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от размещения имеющихся денежных средств в депозиты при конвертации и без конвертации.

Возможны следующие варианты для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без нее:

Без конверсии	СКВ $\Rightarrow$ СКВ
С конверсией	СКВ $\Rightarrow$ Руб. $\Rightarrow$ Руб. $\Rightarrow$ СКВ
Без конверсии	Руб. $\Rightarrow$ Руб.
С конверсией	Руб. $\Rightarrow$ СКВ $\Rightarrow$ СКВ $\Rightarrow$ Руб.

В операциях наращения с конверсией валют существует два источника дохода- изменение курса и наращение процентов. Необходимо учитывать, что двойное конвертирование валюты в начале и в конце операции может быть при неблагоприятных условиях убыточным. Рассмотрим операции наращения и конвертации валюты и рассчитаем реальную доходность финансовых операций.

Введем обозначения:

P_v - сумма депозита в СКВ

P_r - сумма депозита в рублях

F_v - наращенная сумма в СКВ

F_r - наращенная сумма в рублях

K_0 - курс обмена СКВ в начале операции

K_1 - курс обмена СКВ в конце операции

n- срок депозита

i- ставка наращения по депозитам в рублях

j- ставка наращения по депозитам в валюте

1. Вариант СКВ $\Rightarrow$ Руб. $\Rightarrow$ Руб. $\Rightarrow$ СКВ.

Операция предполагает следующие этапы: обмен валюты на рубли; наращение по рублевому депозиту; обмен рублей на валюту. Конечная сумма операции в валюте рассчитывается по формуле:

$$F_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1} \qquad (3.1)$$

Множитель наращения M_v с учетом двойного конвертирования рассчитывается по формуле:

$$M_v = \frac{K_0}{K_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{K_1 / K_0}$$

(1.2)

С ростом ставки наращения множитель M_v увеличивается, а рост конечного курса обмена множитель M_v уменьшает.

Пример 1. Определить на какой депозит выгоднее поместить 1 тыс. долларов- рублевый или валютный при следующих условиях: курс продажи долларов на начало срока депозита - 30,08 руб.; курс покупки долларов на конец финансовой операции- 30,45 руб. Срок депозита- полгода. Процентные ставки по рублевым депозитам- 9% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте – 5 % годовых.

Решение

По формуле (3.1) определим конечную сумму операции при помещении денежных средств на рублевый депозит:

$$F_v = 1000 \cdot 30{,}08 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}09)\frac{1}{30{,}45} = 1032{,}30 \text{ долл.}$$

Конечная сумма операции при помещении денежных средств на валютный депозит:

$$F_v = 1000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) = 1025 \text{ долл.}$$

Рассмотрим доходность финансовой операции, связанной с конвертацией валют. Будем измерять доходность в виде простой ставки ссудного процента. Тогда доходность финансовой операции можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{F_v - P_v}{P_v \cdot n}$$

Подставим в эту формулу значение F_v из формулы (3.1) :

$$r = [\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1] / n = \frac{M - 1}{n}$$

Получаем, что эффективность финансовой операции линейно зависит от соотношения величин K_0 и K_1.

Введем величину $k = \dfrac{K_1}{K_0}$, которая характеризует отношение последнего и первого курсов валют.

С ростом значения величины k эффективность финансовой операции падает.

При $k=1$ эффективность операции $r=i$

При $k>1$ эффективность операции $r<i$

При $k<1$ эффективность операции $r>i$

2. Вариант Руб. ⇒ СКВ ⇒ СКВ ⇒ Руб.

Операция предполагает следующие этапы: обмен рублей на валюту, депозит в валюте, обмен валюты на рубли. Конечная сумма операции в рублях рассчитывается по формуле:

$$F_r = \frac{P_r}{K_0}(1+nj)\cdot K_1 = P_r(1+nj)\frac{K_1}{K_0} \qquad (3.3)$$

Множитель наращения M_r с учетом двойного конвертирования рассчитывается по формуле:

$$M_r = (1+nj)\frac{K_1}{K_0}$$

С ростом ставки наращения множитель M_r увеличивается, а рост начального курса обмена множитель M_r уменьшает.

Пример 2. Определить на какой депозит выгоднее поместить 1 млн. рублей - рублевый или валютный при следующих условиях: курс покупки долларов на начало срока депозита - 30,28 руб.; курс продажи долларов на конец финансовой операции- 30,00 руб. Срок депозита - полгода. Процентные ставки по рублевым депозитам- 9% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте – 5 % годовых.

Решение

По формуле (3.1) определим конечную сумму операции при помещении денежных средств на рублевый депозит:

$$F_r = 1000\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}05)\frac{30{,}00}{30{,}28} = 1015{,}52 \text{ руб.}$$

Конечная сумма операции при помещении денежных средств на валютный депозит:

$$F_r = 1000\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}09) = 1045 \text{ руб.}$$

Рассмотрим доходность финансовой операции, связанной с конвертацией валют. Будем измерять доходность в виде простой ставки ссудного процента. Тогда доходность финансовой операции можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{F_r - P_r}{P_r \cdot n}$$

Подставим в эту формулу значение F_r из формулы (3.3) :

$$r = [\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1] / n$$

Получаем, что эффективность финансовой операции линейно зависит от соотношения величин K_0 и K_1.

Введем величину $k = \frac{K_1}{K_0}$, которая характеризует отношение последнего и первого курсов валют.

С ростом значения величины k эффективность финансовой операции падает.

При $k=1$ эффективность операции $r=j$

При $k>1$ эффективность операции $r>j$

При $k<1$ эффективность операции $r<j$

При $k = 1/(1+nj)$ эффективность операции $r=0$

Задание 1. Построить графики зависимости эффективности финансовой операции от множителя k .

Задание 2. Определить на какой депозит выгоднее поместить 3000 тыс. долларов - рублевый или валютный при следующих условиях: курс продажи долларов на начало срока депозита - 30,88 руб.; курс покупки долларов на конец финансовой операции- 30,66 руб. Срок депозита – один год. Процентные ставки по рублевым депозитам- 8% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте – 4 % годовых.

Задание 3. Определить на какой депозит выгоднее поместить 50 тыс. рублей - рублевый или валютный при следующих условиях: курс покупки долларов на начало срока депозита - 30,20 руб.; курс продажи долларов на конец финансовой операции- 30,10 руб. Срок депозита –один год. Процентные ставки по рублевым депозитам- 7% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте – 4,5 % годовых.