
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ЭМИС

_____ И. Г. Боровской

«__» _____ 2012 г.

Е.А. ПАНАСЕНКО

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

*Методические указания по выполнению лабораторных работ
для специальности 230100 «Информатика и вычислительная техника»*

2012

Панасенко Е.А. Методы оптимизации – Томск: Изд-во ТУСУР, 2012. – 14 с.

Методическое пособие посвящено изучению методов решения задач оптимизации и их программной реализации на языке программирования С++. Приведены примеры решения экстремальных задач и алгоритмы, реализующие различные методы решения оптимизационных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
по дисциплине «Методы оптимизации»
и руководство по выполнению (10 часов)
для студентов 230100 «Информатика и вычислительная техника»

Краткое содержание тем и результатов их освоения.....	4
Лабораторная работа 1. Методы одномерной и многомерной оптимизации	5
Лабораторная работа 2. Оптимизационные задачи с ограничениями	8
Лабораторная работа 3. Прикладные задачи оптимизации.....	10

Краткое содержание тем и результатов их освоения

Тема лабораторных занятий	Деятельность студента. Решая задачи, студент:
1. Методы одномерной и многомерной оптимизации	<ul style="list-style-type: none">• <i>изучает</i> основные понятия методов оптимизации;• <i>учиться</i> решать типовые задачи на поиск экстремума функции;• <i>программирует</i> решение задач на поиск экстремума функции с помощью средств языка C++;
2. Оптимизационные задачи с ограничениями	<ul style="list-style-type: none">• <i>изучает</i> методы поиска экстремума функции с ограничениями;• <i>применяет</i> полученные знания при решении задач;• <i>создает</i> программу на языке программирования C++, реализующую решение задач с ограничениями;
3. Прикладные задачи оптимизации	<ul style="list-style-type: none">• <i>учиться</i> решать задачи линейного программирования, транспортные задачи;• <i>осуществляет</i> программную реализацию симплекс-метода;

ХОД ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Ознакомиться со справочными интернет-сведениями (СРС)
2. Ознакомиться с указанной темой в основной и дополнительной литературе.

1. Курс методов оптимизации : Учебное пособие для вузов / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд. - М. : Физматлит, 2005. - 367 с. - ISBN 5-9221-0559-0
2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 2002. - 544 с. ISBN 5-06-004137-9

Дополнительная литература

1. Мицель А.А. Методы оптимизации : Учебное пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов - Томск : ТУСУР, 2004. - 255с. - ISBN 5-86889-208-9

3. Ознакомиться с принципом выполнения лабораторных работ.
4. Составить и предоставить преподавателю отчет о работе.

Замечание. В методических указаниях использовался материал вышеуказанной основной и дополнительной литературы, а также материал других источников и интернет-ресурсов:

- 1) Измайлов А.Ф. Численные методы оптимизации. М.: Физико-математическая литература, 2005. - 300 с.
- 2) Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления. СПб.: Питер, 2004. - 255 с.
- 3) Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. Высш. шк. М.: 2005. - 544 с.
- 4) Аттетков А.В. Методы оптимизации: учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 440 с.
- 5) Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009. – 320 с.

Лабораторная работа 1. Методы одномерной и многомерной оптимизации

(2 часа)

Задача 1. Запрограммировать решение следующей задачи. Для заданной функции $F(x)$ найти точки экстремума.

Примеры решения приведены в методическом пособии:

Методы оптимизации: Методические указания по выполнению практических работ/ Параев Ю. И., Панасенко Е. А. – 2012. - 20 с.

Для программной реализации данной задачи необходимо воспользоваться средствами языка C++ (массивы, функции и др.) и компилятором Visual Studio.

Задача 2. Запрограммировать решение задачи. Дана функция многих переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Найти точки экстремума.

Пример. Найти экстремум следующей функции: $z(x, y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$;

Решение.

1. Находим первую производную по x и y . После этого первые производные приравниваются к нулю и находятся точки экстремума: $(0, 2/3)$ и $(2, -2/3)$.
2. Затем находим вторую производную по x и y и составляем матрицу Гессе: при $x_1=2$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

В этом случае определитель матрицы $\Delta_1 = -36 < 0$, следовательно, $(2, -2/3)$ – точка максимума;

при $x_2=0$:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

определитель матрицы $\Delta_2 = 36 > 0$, $(0, -2/3)$ – точка минимума;

Код программы:

```
#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"
#include "conio.h"

// возвращает значение функции
float main_func(float x_, float y_){
    return (3*(x_*x_+y_*y_)-x_*x_*x_+4*y_);}

// возвращает значение второй производной по x
float second_pr_x(float x_, float y_){
    return (6-6*x_);}

// возвращает значение второй производной по y
float second_pr_y(float x_, float y_)
{return 6;}

// возвращает значение производной по y
float second_pr_xy(float x_, float y_)
{ return 0;}

// возвращает значение производной по x
float second_pr_yx(float x_, float y_) {
    return 0;}

int main( )
{
    // первое значение x, при котором первая производная по x равна нулю
    float x_1=2;

    // второе значение x, при котором первая производная по x равна нулю
    float x_2=0;

    // матрица Гесса
```

```

float C[2][2];
//определитель матрицы Гесса
float delta;
// значение y, при котором первая производная по y равна нулю
float y=(-0.75);
C[0][0]=second_pr_x(x_1,y);
C[0][1]=second_pr_xy(x_1,y);
C[1][0]=second_pr_yx(x_1,y);
C[1][1]=second_pr_y(x_1,y);
delta=C[0][0]*C[1][1]-C[0][1]*C[1][0];
//если определитель больше нуля, то функции имеет минимум
//если определитель меньше нуля, то функция имеет максимум
//если определитель равен нулю, то точки экстремума не существует
if (delta >0) printf("x_1=2 -min ");
else if (delta <0)
    printf("x_1=2 -max ");
else if (delta==0)
    printf("x_1=2 -tochki exstrem net ");
printf("main_funct= %f\n",main_funct(x_1,y));
C[0][0]=second_pr_x(x_2,y);
C[0][1]=second_pr_xy(x_2,y);
C[1][0]=second_pr_yx(x_2,y);
C[1][1]=second_pr_y(x_2,y);
delta=C[0][0]*C[1][1]-C[0][1]*C[1][0];
if (delta >0)
    printf("x_2=0 -min ");
else if (delta <0)
    printf("x_2=0-max");
else if (delta==0)
    printf("x_2=0 -tochki exstrem net ");
printf("main_funct= %f",main_funct(x_2,y));
getch();
return 0;}

```

Лабораторная работа 2. Оптимизационные задачи с ограничениями

(2 часа)

Задача 1. Для заданной функции многих переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространства R^n , которая задается системой уравнений:

$$g_1(x) = 0,$$

$$g_2(x) = 0,$$

...

$$g_n(x) = 0.$$

Пример. Найти условный экстремум функции $f(x, y) = xy^2$ относительно заданного ограничения $x + 2y - 1 = 0$.

Решение задачи методом исключений:

1. Из заданного ограничения выражаем x и подставляем в функцию:

$$\bar{f}(y) = (1 - 2y)y^2;$$

2. Находим первую производную: $\frac{\partial f}{\partial y} = y(2 - 6y)$;

3. Значение первой производной приравняем к нулю и вычисляем значения y : $y_1 = 0$ и $y_2 = 1/3$. Полученные значения y подставляются в исходную функцию, вычисляются значения x : $x_1 = 1$, $x_2 = 1/3$.

4. Находим вторую производную: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 12y$;

5. Определяем точкой минимума или максимума является точка экстремума:

при $y_1 = 0$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, следовательно, $(1; 0)$ – точка минимума;

при $y_2 = 1/3$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, следовательно, $(1/3; 1/3)$ – точка максимума.

Решение задачи методом Лагранжа:

1. Вводится функция Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda(x + 2y - 1)$;

2. Составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y^2 + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2yx + 2\lambda = 0; \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решения системы: $(1; 0; 0)$ и $(1/3; 1/3; -1/9)$;

3. Вычисляются вторые производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2x$$

4. Затем вычисляется второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = 0dx^2 + 2 * 2y dx dy + 2x dy^2$$
 по которому можно определить тип точки

экстремума:

при $x_1=1$ и $y_1=0$: $d^2L > 0$, (1; 0) – точка минимума;

при $x_2=1/3$ и $y_2=1/3$: $d^2L < 0$, (1/3; 1/3) – точка максимума.

Код программы:

```
#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"
#include "conio.h"
#include <math.h>
#include <cmath>
int main()
{ float x_1=1;
  float x_2=0.33;
  float y_1=0;
  float y_2=0.33;
  float f_1,f_2,L,delta;
  printf("3.1) x_1= %f, y_1= %f ",x_1,y_1);
  //вычисляется значение функции при x_1=1 и y_1=0
  f_1=x_1*y_1*y_1;
  //если значение второй производной больше нуля, то найден минимум
  //если значение второй производной меньше нуля, то найден максимум
  if (2-12*y_1>0) printf("min_1 %f\n",f_1);
  else if (2-12*y_1<0) printf("max_1 %f\n",f_1);
  printf("   x_2= %f, y_2= %f ",x_2,y_2);
  //вычисляется значение функции при x_2=0.33 и y_2=0.33
  f_2=x_2*y_2*y_2;
  //если значение второй производной больше нуля, то найден минимум
  //если значение второй производной меньше нуля, то найден максимум
  if (2-12*y_2>0) printf("min_2 %f\n",f_2);
  else if (2-12*y_2<0) printf("max_2 %f\n",f_2);
```

```

//второй дифференциал функции Лагранжа с учетом ограничения
L=-4*y_1+2*x_1;
printf("3.2) x_1= %f, y_1= %f ",x_1,y_1);
//если второй дифференциал больше нуля, то найден минимум
//если второй дифференциал меньше нуля, то найден максимум
if (L>0) printf("min_1 %f\n",f_1);
else if (L<0) printf("max_1 %f\n",f_1);
//второй дифференциал функции Лагранжа с учетом ограничения
L=-4*y_2+2*x_2;
printf("   x_2= %f, y_2= %f ",x_2,y_2);
//если второй дифференциал больше нуля, то найден минимум
//если второй дифференциал меньше нуля, то найден максимум
if (L>0) printf("min_2 %f\n\n",f_2);
else if (L<0) printf("max_2 %f\n\n",f_2);
getch();
return 0;
}

```

Задача 2. Для заданной функции многих переменных $F(x)$ найти точки экстремума в некоторой области S пространстве R^n , которая задается системой неравенств

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &\leq 0, \\
 g_2(x) &\leq 0, \\
 &\dots \\
 g_m(x) &\leq 0
 \end{aligned}$$

Решение задачи 2 проводится аналогично задаче 1 методом Лагранжа, только с учетом того, что система ограничений представлена в виде неравенств.

Лабораторная работа 3. Прикладные задачи оптимизации (6 часов)

Задача 1. Используя симплекс метод найти экстремум линейной функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

на линейном многообразии S , задаваемом условиями:

- 1) все $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.

2) должны выполняться либо равенства:

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i = b_1,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{2i}x_i = b_2,$$

.....

$$\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = b_m,$$

либо неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \leq b_1,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \leq b_2,$$

.....

$$\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \leq b_m.$$

Пример. Предприятие выпускает 2 вида продукции и использует 3 типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице 2.1. В ней указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации максимальна.

Тип оборудования	Затраты времени на единицу продукции вида		Общий ресурс рабочего времени
	1	2	
Токарное	1	3	300
Фрезерное	2	1	180
Шлифовальное	1	-	80
Прибыль	2	3	

Решение.

Пусть x_1 и x_2 – объемы выпуска каждого из изделий. Тогда можно составить целевую функцию: $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ и систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 300; \\ 2x_1 + x_2 \leq 180; \\ x_1 \leq 80; \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 180; \\ x_1 + x_5 = 80; \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Далее нужно составить симплекс-таблицу:

базис	С-базис	A ₀	C ₁ =2	C ₂ =3	C ₃ =0	C ₄ =0	C ₅ =0
			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
A ₃	0	300	1	3	1	0	0
A ₄	0	180	2	1	0	1	0
A ₅	0	80	1	0	0	0	1
z _j - c _j		0	-2	-3	0	0	0

$\frac{b_j}{a_{ij}}$

Для колонок, в которых z_j - c_j отрицательны, находятся $\theta_j = \min a_{ij}$ для всех $a_{ij} > 0$:

В зависимости θ_j определяется базисный элемент и строятся новые симплекс-таблицы:

Б.	С-базис	A ₀	C ₁ =2	C ₂ =3	C ₃ =0	C ₄ =0	C ₅ =0
			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
A ₂	3	100	1/3	1	1/3	0	0
A ₄	0	180-300*1/3=80	2-1*1/3=5/3	0	0-1/3=-1/3	1-0=1	0-0=0
A ₅	0	80-300*0/3=80	1-1*0/3=1	0	0-0=0	0-0=0	1-0=0
z _j - c _j		300	-1	0	1	0	0

Б.	С-базис	A ₀	C ₁ =2	C ₂ =3	C ₃ =0	C ₄ =0	C ₅ =0
			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
A ₂	3	84	0	1	6/15	-1/5	0
A ₁	2	48	1	0	-1/5	3/5	0
A ₅	0	32	0	0	1/5	-3/5	0
z _j - c _j		348	0	0	12/15	3/5	0

Так как все оценки $z_j - c_j > 0$, то решение найдено: $x_1=48$, $x_2=84$. Прибыль: 348.

Код программы

Задача 2 (транспортная задача). Пусть имеется m складов, на которых находится a_1, a_2, \dots, a_m единиц товара (запасы товара) и n магазинов, которым требуется b_1, b_2, \dots, b_n единиц товара (потребление товара). Известны c_{ij} - стоимости перевозки единицы товара из i -го склада в j -й магазин. Требуется найти план перевозок, при котором бы полностью удовлетворялся спрос всех потребителей, при этом хватало бы запасов поставщиков и суммарные транспортные расходы были бы минимальными.

Пример. Даны таблица 1 и таблица 2 с указанием запасов, заявок и стоимости перевозок. Распределить запасы и заявки методом северо-западного угла для таблицы 1 и методом минимальных элементов для таблицы 2.

Таблица 1

	Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20
	35	25	16	71	19
	45	41	13	27	15
	20	18	54	75	17
	15	12	21	35	10

Таблица 2

	Заявки					
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20	30
	35	25	16	71	19	8
	45	41	13	27	15	9
	20	18	54	75	17	7
	15	12	21	35	10	11
	21	17	20	9	7	31

Решение

Метод северо-западного угла

Сумма запасов меньше суммы заявок, поэтому нужно провести балансировку (вводится дополнительная строка в таблицу):

	Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20
	35	25	16	71	19
	45	41	13	27	15
	20	18	54	75	17
	15	12	21	35	10
	14	0	0	0	0

Далее начиная с верхнего левого угла, распределяются запасы и заявки по правилам:

• для количества груза x_{ij} , вывозимого из a_i во все b_j : $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = \overline{1, n}$;

• для количества груза x_{ij} , ввозимого в b_j из всех a_i : $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, j = \overline{1, m}$;

		Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20	
	35	25 18	16 35-18=17	71	19	
	45	41	13 40-17=23	27 45-23=22	15	
	20	18	54	75 20	17	
	15	12	21	35 51-42=9	10 15-9=6	
	14	0	0	0	0 20-6=14	

Стоимость перевозок по формуле $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$: $f(x) = 3490$.

Метод минимальных элементов

Начиная с ячеек с меньшей стоимостью распределяются запасы и заявки :

		Заявки				
Запасы	a_i/b_j	18	40	51	20	30
	35	25 3	16	71 22	19	8 10
	45	41	13 40	27 5	15	9
	20	18	54	75	17	7 20
	15	12 15	21	35	10	11
	21	17	20	9 1	7 20	31
	23	0	0	0 23	0	0

Стоимость перевозок $f(x) = 2841$.