

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Томский государственный университет систем управления  
и радиоэлектроники»**

**Кафедра экономики**

**Финансовая математика**

Методические указания к практическим занятиям  
и самостоятельной работе

для студентов направления

230100.62 Информатика и вычислительная техника

2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ</b> .....	3
<b>ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ</b> .....	3
<b>ЗАНЯТИЕ 1. ПРОСТЫЕ ССУДНЫЕ СТАВКИ</b> .....	5
<b>ЗАНЯТИЕ 2. ПРОСТЫЕ УЧЕТНЫЕ СТАВКИ</b> .....	9
<b>ЗАНЯТИЕ 3. СЛОЖНЫЕ ССУДНЫЕ СТАВКИ</b> .....	13
<b>ЗАНЯТИЕ 4. СЛОЖНЫЕ УЧЕТНЫЕ СТАВКИ</b> .....	18
<b>ЗАНЯТИЕ 5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ И ЭФФЕКТИВНЫЕ СТАВКИ</b> .....	22
<b>ЗАНЯТИЕ 6. ЗАМЕНА И КОНСОЛИДАЦИЯ ПЛАТЕЖЕЙ</b> .....	26
<b>ЗАНЯТИЕ 7. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ</b> .....	33
<b>ЗАНЯТИЕ 8. НАЛОГИ И НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ</b> .....	39
<b>ЗАНЯТИЕ 9. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ</b> .....	42
<b>ЗАНЯТИЕ 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕНТЫ</b> .....	47
<b>ЗАНЯТИЕ 11. КОНВЕРСИЯ И ЗАМЕНА РЕНТ</b> .....	50
<b>СИТУАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ</b> .....	55
<b>ЗАНЯТИЕ 12. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ</b> .....	55
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ</b>	61
<b>ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ</b> .....	61

## Общие положения

Методические указания по выполнению практических работ и самостоятельной работы по дисциплине «Финансовые вычисления» предназначены для бакалавров направлений 230100.62 Информатика и вычислительная техника.

Тематика практических занятий охватывает все разделы дисциплины, предусмотренные рабочей программой.

Цели проведения практических занятий – закрепить знания, полученные студентами на лекциях; научить студентов навыкам использования компьютерных технологий для проведения финансово-экономических расчетов и навыкам принятия и обоснования финансово – экономических решений; развить навыки групповой работы.

Цели самостоятельной работы – подготовка к практическим занятиям и контрольным работам.

Практические занятия проводятся в компьютерном классе с использованием пакета MS EXCEL. Отчет по практическому занятию содержит: решение типовых задач; исходные данные и описание хода выполнения заданий; обоснование выбора формулы для решения задачи; определение параметров формулы; программирование формулы в среде MS EXCEL; формулировка вывода. Выводы и заключения должны подтверждаться приведением цифровых данных из расчетной части работы. Защита отчета проводится в часы аудиторных занятий и предусматривает также ответы на контрольные вопросы, которые приведены в заданиях.

При выполнении практических занятий используются активные методы обучения: составление интерактивной таблицы. С помощью этой таблицы можно смотреть, как меняется значение выходного параметра в зависимости от начальных данных, например, таблица 1:

Таблица 1. Интерактивная таблица для расчета наращенной суммы при использовании схемы простых ссудных процентов.

Наращенная сумма	120	$F = P \cdot (1 + nr)$
Величина вложенного капитала, P	100	Это поле можно изменить
Срок кредита, n	2	Это поле можно изменить
Процентная ставка, r	10%	Это поле можно изменить

С помощью такой таблицы можно смотреть, как меняется наращенная сумма F в зависимости от начальной суммы P, количества периодов начислений n и процентной ставки r. Студент изменяет значения параметров, в ячейке автоматически рассчитывается значение F.

Организация и выполнение самостоятельной работы предполагает ориентирование студентов на поиск и работу с учебной литературой, подбор необходимого материала для выполнения заданий. Самостоятельная работа включает следующие виды работ:

- 1) подготовка к практическим занятиям (решение типовых задач);
- 2) подготовка к контрольным работам.

Практические занятия и самостоятельная работа студента предназначены для формирования следующих компетенций:

быть готовым к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3);

владеть способностью находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готовностью нести за них ответственность (ОК-4)

В таблице 2 представлены этапы работы, соответствующие компетенции и формы контроля.

Таблица 2. Формирование и контроль компетенций.

Этап работы	Формируемые компетенции	Способ формирования компетенции	Контроль
Подготовка к занятиям	быть готовым к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3)	Студент читает конспект лекций, определяет тип задачи, выбирает формулу для решения и параметры формулы, сверяет свои результаты с решением типовой задачи Возможно обсуждение решения задачи в группе студентов	Проверка конспекта с решенными типовыми задачами
Выполнение заданий	быть готовым к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3)	Обсуждение решения задачи в группе	Отчет по занятию
Выполнение заданий	владеть способностью находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готовностью нести за них ответственность (ОК-4)	Решение задач, обоснование решения и формулировка ответа	
Подготовка к контрольным работам	владеть способностью находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готовностью нести за них ответственность (ОК-4)	Решение задач, обоснование решения и формулировка ответа	Проверка контрольной работы

## Занятие 1. Простые ссудные ставки

Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временную ценность, смысл которой может быть выражен следующим утверждением: одна денежная единица, имеющаяся в распоряжении инвестора в данный момент времени, более предпочтительна, чем та же самая денежная единица, но ожидаемая к получению в некотором будущем. Эффективность любой финансовой операции, предполагающей наращение исходной суммы  $P$  до ожидаемой в будущем к получению суммы  $F$  ( $F > P$ ), может быть охарактеризована ставкой.

Простая ссудная ставка рассчитывается отношением наращения ( $F - P$ ) к исходной (базовой) величине  $P$ .

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

В финансовых вычислениях базовым периодом является год, поэтому обычно говорят о годовой ставке. Вместе с тем достаточно широко распространены краткосрочные операции продолжительностью до года. В этом случае за основу берется дневная ставка, причем в зависимости от алгоритмов расчета дневной ставки и продолжительности финансовой операции результаты наращения будут различными. Используются три варианта расчета: а) точный процент и точное число дней финансовой операции – обозначение 365/365; б) обыкновенный процент и точное число дней финансовой операции – обозначение 365/360; в) обыкновенный процент и приблизительное число дней финансовой операции – обозначение 360/360.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (так называемой «приведенной стоимости»), которая через заданное время при наращении по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через заданное время.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени ссудной ставки.

Любая финансовая операция предусматривает участие, как минимум, двух сторон: кредитора (инвестора) и заемщика (получателя финансовых ресурсов); это обстоятельство является существенным для вынесения суждения об эффективности некоторой операции. Так, экономическая интерпретация ставки вообще и ее значения в частности зависит от того, с чьих позиций – кредитора или заемщика она дается. Для кредитора ставка характеризует его относительный доход; для заемщика – его относительные расходы. Поэтому кредитор всегда заинтересован в высокой ставке или в повышении ставки; интересы заемщика – прямо противоположны.

**Цель проведения занятия** – научиться проводить расчеты по схеме простых ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений.

### Основные формулы

$$F = P(1 + n \cdot r) \quad (1.1)$$

$$P = F / (1 + n \cdot r) \quad (1.2)$$

$$F = P \cdot (1 + r \cdot t / T) \quad (1.3)$$

$$F = P \left( 1 + \sum_{i=1}^k n_i \cdot r_i \right) \quad (1.4)$$

$$r = \frac{F - P}{P \cdot n}, r = \frac{F - P}{P \cdot t} \cdot T \quad (1.5)$$

$$n = \frac{F - P}{P \cdot r} \quad (1.6)$$

где

$P$  - вложенная сумма;

$F$  – наращенная сумма;

$n$  - количество периодов продолжительности финансовой операции;

$r$ - простая ссудная ставка;

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Вы поместили в банк вклад 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 6% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова величина начисленных процентов?

#### Решение

По формуле (1.1.) при  $P=100$  тыс. руб.,  $n=3$ ,  $r=0,06$  получаем :

$$F=100 \cdot (1+3 \cdot 0,06)=118 \text{ тыс. руб.}$$

Через три года на счете накопится 118 тыс. рублей.

Величина начисленных за три года процентов составит:

$$118 - 100 = 18 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.** На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 8% годовых, чтобы она увеличилась в 2 раза?

#### Решение

Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 2 :

$$1 + n \cdot 0,08 = 2, \text{ поэтому}$$

$$n = 1 / 0,08 = 12,5 \text{ лет.}$$

Сумма, размещенная в банке под 8% годовых, в два раза увеличится через 12,5 лет.

**Задача 3.** Ссуда в сумме 3000 долл. предоставлена 16 января с погашением через 9 месяцев под 25 % годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов : а) обыкновенный процент с точным числом дней; б) обыкновенный процент с приближенным числом дней; в) точный процент с точным числом дней .

Решение

а) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=289-16=273$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 273/360)=3568,75 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3568,75 долл.

б) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=9 \cdot 30=270$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 270/360)=3562,5 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3562,5 долл.

в) По формуле (1.3), используя точный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ( $t=289-16=273$  дня), получим:

$$F=3000 \cdot (1+0,25 \cdot 273/365)=3560,96 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна 3560,96 долл.

**Задача 4.** В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определить доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки при использовании банком простых обыкновенных процентов.

**Решение**

По формуле (1.5) при  $F=8,9$  тыс. руб.,  $P=8$  тыс. руб.,  $t=120$  дней,  $T=360$  дней, получим:

$$r=360 \cdot (8,9-8)/(8 \cdot 120)=0,3375=33,75\%$$

Доходность банка составит 33,75 процентов годовых.

**Задача 5.** Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 8% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 1%. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

**Решение**

Применяя формулу (1.4), получим:

$$F=160 \cdot (1+0,5 \cdot 0,08+0,25 \cdot 0,09+0,25 \cdot 0,1+0,25 \cdot 0,11+0,25 \cdot 0,12)=183,2$$

Через полтора года на счете накопится 183 200 руб.

Постоянную ставку, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, находим из уравнения:

$$160 \cdot (1+1,5 \cdot r)=183,2$$

$$r=0,096667=9,67\%$$

Постоянная ставка, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, равна 9,67 % годовых.

**Задача 6.** Кредит выдается под простую ссудную ставку 24 % годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, полученную заемщиком, и сумму процентных денег, если необходимо возвратить 3500 тыс. руб.

**Решение.**

По формуле (1.2) при  $F=3500$ ;  $n=250/365$ ;  $r=0,24$  получаем:

$$P = 3500 / (1 + 0,24 \cdot 250/365) = 3017,2$$

Сумма, получаемая заемщиком, составит 3 017 200 руб.

Сумма процентных денег равна  $(3\,500\,000 - 3\,017\,200) = 482\,800$  тыс. руб.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Вкладчик внес в банк 20 тыс. руб. Через год он снял со счета половину набежавших за год процентов. Оставшаяся сумма еще год оставалась в банке, на конец года на счете осталось 26,4 тыс. руб. Какую простую ссудную ставку использовал банк?

**Задача 2.** Предприниматель взял в банке ссуду на два года под процентную ставку 32% годовых. Определите, во сколько раз сумма долга к концу срока ссуды будет больше выданной банком суммы, если банк начисляет простые проценты.

**Задача 3.** Предприятию необходим кредит в 10 млн. руб. на полгода. В банке А предлагают следующие условия: процентная ставка за первый месяц -10%, на следующие 3 месяца- 11% и на последние 2 месяца – 14%. В банке В предлагают следующие условия: первые два месяца- 11%, в третий месяц – 12% и последние три месяца- 13%. В каком банке более выгодные условия кредита? Чему равна разница в сумме процентов по кредиту?

**Задача 4.** Сравните величину процентов, начисленных при выдаче кредита размеров 500 тыс. руб., выданного на срок с 5 июня по 18 сентября текущего года по ставке 18% годовых. Используйте при расчетах три схемы начисления процентов.

**Задача 5.** При открытии депозита при ставке 8% годовых 20 апреля на счет была положена сумма 100 тыс. руб. Затем 5 ноября того же года на счет было добавлено 200 тыс. руб. 10 сентября со счета сняли 75 тыс. руб., а 20 ноября счет был закрыт. Какую сумму получил вкладчик при закрытии счета?

**Задача 6.** Через 120 дней с момента подписания кредитного договора заемщик должен вернуть банку 750 тыс. руб. Процентная ставка по кредиту равна 18% годовых. Чему равна первоначальная сумма долга?

### **Задание на практическое занятие 1. Простые ссудные ставки.**

#### **Контрольные вопросы**

1. Что показывает множитель наращения в формуле наращения простыми процентами?
2. Как связаны между собой наращение простыми процентами и арифметическая прогрессия?
3. В чем заключается различие между точным и приближенным процентом?
4. Что показывает множитель дисконтирования в формуле наращения простыми процентами?
5. Если простую процентную ставку увеличить в два раза, как изменится наращенная сумма?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 200 тыс.руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 220 тыс. руб., если процентная ставка равна 14% годовых, в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и год високосный?

**Задача 2.** Найдите величину дохода кредитора, если за предоставление в долг на полгода некоторой суммы денег он получил 555 тыс. руб. При этом применялась простая процентная ставка в 22%.

**Задача 3.** Банк выдал ссуду на 45 дней в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 12% годовых. Рассчитайте доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.

**Задача 4.** На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы начисленные проценты были в 1,5 раза больше первоначальной суммы?

### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** Два друга, Саша и Вася, участвовали в олимпиаде по информатике, выиграли призы- 150 тыс. руб. и 110 тыс. руб.. Саше пришлось уехать и он получил свой выигрыш на 2 года позже. Принимая в расчет простую банковскую ставку 20% годовых, ответьте на вопрос - кто больше заработал, Саша или Вася?

**Задача 2.** Студент, решая удвоить наличные деньги, открыл депозит с начислением простых ссудных процентов по ставке 10% годовых. Определить: 1) через сколько лет будет достигнут желаемый результат? 2) насколько сократится срок ожидания при увеличении процентной ставки на 50%?

**Задача 3.** Администрация региона планирует получение кредита на сумму 600 млн. руб. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту в банке А в первый год составляет 10,5% годовых; во второй год ставка увеличивается на 1,5%; для оставшихся лет ставка увеличится еще на 0,75%. В банке В процентная ставка составит 12% годовых. В каком банке администрации следует получить кредит? Ответ обосновать расчетами. Как будут различаться суммы процентов к уплате?

## **Занятие 2. Простые учетные ставки**

Учетная ставка рассчитывается отношением наращения ( $F-P$ ) к ожидаемой в будущем к получению, или наращенной, величине  $F$ .

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например, при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю на дату его погашения. Сумма, которую получа-

ет векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени учетной ставки.

При применении наращения по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

**Цель проведения занятия** - научиться проводить расчеты по схеме простых учетных процентов, используя формулы финансовых вычислений.

### Основные формулы

$$P = F \cdot (1 - n \cdot d) \quad (2.1)$$

$$F = P / (1 - n \cdot d) \quad (2.2)$$

$$P = F \cdot (1 - d \cdot t / T) \quad (2.3)$$

$$F = P / (1 - d \cdot t / T) \quad (2.4)$$

$$D = F - P = F \cdot n \cdot d \quad (2.5)$$

$$d = \frac{F - P}{F \cdot n}, d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \quad (2.6)$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \quad (2.7.)$$

$$F = P / (1 - \sum_{i=1}^n n_i \cdot d_i) \quad (2.8)$$

где

$P$ - вложенная сумма (сумма, которую получает владелец векселя при его учете);

$F$  – наращенная сумма (номинальная стоимость векселя);

$n$ - количество периодов продолжительности финансовой операции;

$d$ -простая учетная ставка;

$t$  -продолжительность финансовой операции в днях;

$T$ - количество дней в году;

$D$ - дисконт.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** В банк 6 мая предъявлен для учета вексель, на сумму 140 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, считая, что в году 365 дней. Определить сумму,

получаемую векселедержателем от банка, и комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя имеет смысл?

### Решение

По формуле (2.1) при  $F = 140.$ ;  $n = 65/365$ ,  $d = 0,4$  получим:

$$P = 140 \cdot (1 - 0,4 \cdot 65/365) = 129,89$$

Векселедержатель получит от банка 129,89 тыс. руб.

Комиссионные банка (или дисконт) определяются по формуле  $D = F - P$

$$D = F - P = 140 - 129,89 = 10,11 \text{ тыс. руб.}$$

Комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу, равны 10,11 тыс. руб.

Учет векселя по учетной ставке имеет смысл при  $n < 1/d$ , для этой задачи при  $n < 2,5$  года. При  $n > 2,5$  года сумма  $P$ , которую должен получить владелец векселя при его учете, становится отрицательной.

**Задача 2.** Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан по простой учетной ставке 25% годовых. Определить срок кредита, если заемщик планирует получить на руки 350 тыс. руб.

### Решение

По формуле (2.7.) при  $F = 400$ ;  $P = 350$ ;  $d = 0,25$  получаем:

$$n = (400 - 350) / (400 \cdot 0,25) = 0,5$$

Срок кредита равен 0,5 года.

**Задача 3.** Вексель на сумму 900 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 60 тыс. руб. в пользу банка. Определить величину годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году.

### Решение.

По формуле (2.6) при  $F = 900$ ;  $F - P = 60$ ;  $t = 120$ ;  $T = 360$  дней, получим:

$$d = 60 \cdot 360 / (900 \cdot 120) = 0,20 = 20\%$$

Годовая учетная ставка при временной базе 360 дней в году равна 20% годовых.

**Задача 4.** В банк предъявлен вексель на сумму 500 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода – 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

### Решение.

По формуле (2.8) вычислим множитель наращения:

$$1 - (0,5 \cdot 0,30 + 0,5 \cdot 0,36 + 0,25 \cdot 0,38 + 0,25 \cdot 0,4) = 0,475$$

$$P = 500 \cdot 0,475 = 237,50$$

Сумма, полученная владельцем векселя равна 237 500 руб.

По формуле 1.11 дисконт равен  $D = 500 - 237,5 = 262,5$

Дисконт банка равен 262 500 руб.

**Задача 5.** Банк 1 января учел два векселя со сроками погашения 6 февраля и 14 марта того же года. Применяя учетную ставку 10% годовых, банк удер-

жал комиссионные в размере 1000 руб. Определить номинальную стоимость векселей, если номинальная стоимость второго векселя в 2 раза больше, чем номинальная стоимость первого векселя.

### Решение

Обозначим номинальную стоимость первого векселя через  $F$ , тогда номинальная стоимость второго векселя составит  $2 \cdot F$ .

По таблице порядковых дней в году определим, что первый вексель учтен за 36 дней до срока погашения, а второй вексель учтен за 72 дней до срока погашения.

По формуле (2.5) величина дисконта для первого векселя равна

$$D_1 = F \cdot n \cdot d = F \cdot \frac{36}{360} \cdot 0,1 = 0,01 \cdot F$$

По формуле (2.5) величина дисконта для второго векселя равна

$$D_2 = 2F \cdot n \cdot d = 2F \cdot \frac{72}{360} \cdot 0,1 = 0,04 \cdot F$$

Учитывая, что комиссионные банка за учет двух векселей составили 1000 руб., запишем:

$$D_1 + D_2 = 1000$$

$$0,01F + 0,04F = 1000$$

$$F = 20000$$

Номинальная стоимость первого векселя составит 20 тыс. руб., номинальная стоимость второго векселя составит 40 тыс. руб.

### Задачи для подготовки к занятию

**Задача 1.** 10 апреля предприниматель получил ссуду в банке под простую учетную ставку 20 % годовых и должен возвратить 18 ноября того же года 750 тыс. руб. Определить точным и приближенным способами сумму, полученную клиентом.

**Задача 2.** Предприниматель получил ссуду в 600 тыс. руб. на полгода. Банк предоставляет ссуду на условиях начисления простых учетных процентов по ставке 16% годовых. Какую сумму предприниматель будет должен банку?

**Задача 3.** Векселедержатель 1 октября предъявил для учета вексель на сумму 600 тыс. руб. со сроком погашения 25 октября текущего года. Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых. Какую сумму получит векселедержатель от банка?

### Задание на практическое занятие 2. Простые учетные ставки.

#### Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется операция банковского дисконтирования?
2. Верно ли, что по простой учетной ставке вексель можно учесть за любое время до срока погашения?

3. В чем различие между антисипативным и декурсивным способом начисления процентов?

#### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых за полгода до срока погашения. Какова доходность этой операции для банка, выраженная в виде простой ставки ссудного процента?

**Задача 2.** Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 28 марта того же года. Банк учел вексель по учетной ставке 35% годовых и выплатил клиенту 19,3 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год невисокосный?

**Задача 3.** Банк за 20 дней до срока погашения учел вексель на сумму 40 тыс. руб. Доход банка составил 800 руб. Какую простую учетную ставку использовал банк, если считать в году 360 дней?

**Задача 4.** Банк 7 июня учел 3 векселя со сроками погашения в этом же году соответственно 8 августа, 30 августа и 21 сентября. Применяя учетную ставку 25% годовых, банк удержал комиссионные в размере 3750 руб. Определите номинальную стоимость первых двух векселей, если номинальная стоимость второго векселя в два раза больше первого и третий вексель предъявлен на сумму 20 тыс. руб.

#### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен вернуть 15 августа того же года 300 тыс. руб. Определить всеми возможными способами сумму, полученную предпринимателем и величину дисконта, если проценты удерживаются банком при выдаче ссуды. Выбрать способ расчета 1) наиболее выгодный для предпринимателя; 2) наиболее выгодный для банка.

**Задача 2.** Господин Иванов занял у господина Петрова 98 тыс. руб. и выдал ему вексель, по которому обязуется выплатить через 3 месяца 100 тыс. руб. Найти годовой процент  $r$  и годовую учетную ставку  $d$  оказанной услуги.

### **Занятие 3. Сложные ссудные ставки**

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т.е. база, с которой происходит начисление, постоянно возрастает на величину начисленных ранее процентов. Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Для кредитора более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода). Для кредитора более выгодна схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год (проценты начисляются ежегодно). Обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

При начислении процентов за дробное число лет может использоваться схема сложных процентов, либо смешанная схема, предусматривающая на-

числение сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

Математическим дисконтированием (дисконтированием по сложной процентной ставке) называется задача нахождения такой величины первоначального капитала, которая через заданное количество времени при наращении по сложной процентной ставке обеспечит получение планируемой суммы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают  $\delta$  и называют *силой роста*.

**Цель проведения занятия** - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

### Основные формулы

$$F = P \cdot (1 + r)^n \quad (3.1)$$

$$P = F / (1 + r)^n \quad (3.2)$$

$$F = P (1 + r/m)^{nm} \quad (3.3)$$

$$F = P (1 + r)^{w+f} \quad (3.4)$$

$$F = P(1+r)^w \cdot (1+fr) \quad (3.5)$$

$$F_n = P \cdot \prod_{i=1}^k (1 + r_i)^{n_i} \quad (3.6)$$

$$r = m \cdot \left[ \left( \frac{F}{P} \right)^{\frac{1}{nm}} - 1 \right] \quad (3.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{F}{P}}{m \ln(1 + \frac{r}{m})} \quad (3.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (3.9)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \quad (3.10)$$

где

$F$  – наращенная сумма;

$P$  – вложенная сумма;

$n$  – количество лет;

$r$  – сложная процентная ставка;

$m$  – количество начислений процентов в году;

$w$  – целая часть периода финансовой операции;

$f$  – дробная часть периода финансовой операции.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** На вашем счёте в банке 15 млн. руб. Банковская ставка по депозитам равна 12% годовых. Вам предлагают войти всем капиталом в организацию совместного предприятия, обещая удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1.).

Если мы вложим деньги в банк, то через 5 лет получим следующую сумму:

$$F = 15 \cdot (1 + 0,12)^5 = 26,43 \text{ млн.руб.}$$

Если мы войдем всем капиталом в организацию совместного предприятия, то наш капитал удвоится:

$$F = 15 \cdot 2 = 30 \text{ млн. руб.}$$

Следует принять данное предложение и не вкладывать деньги в банк.

**Задача 2.** Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести её в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Под какую минимальную ссудную ставку нужно положить деньги, а банк, чтобы накопить требуемую сумму?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.7) при  $m=1$ :

$$r = (5600 / 4000)^{1/2} - 1 = 0,1832 = 18,32\%$$

Для того чтобы накопить нужную сумму, минимальная ссудная сложная ставка должна составлять 18,32 % годовых.

**Задача 3.** За выполненную работу предприниматель должен получить 600 тыс. руб. Заказчик не имеет возможности рассчитаться в данный момент и предлагает отложить срок уплаты на 2 года, по истечении которых он обязуется выплатить 730 тыс. руб. Выгодно ли это предпринимателю, если приемлемая норма прибыли составляет 10%? Какова минимальная ставка, которая делает подобные условия невыгодными для предпринимателя?

#### Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1).

Будущая стоимость 600 тыс.руб. через 2 года при норме прибыли 10% составит:

$$F = 600 \text{ тыс.руб.} \cdot (1 + 0,1)^2 = 720,6 \text{ тыс.руб.}$$

Это меньше, чем 730 тыс. руб., поэтому предпринимателю выгодно ждать расчета 2 года.

Для расчета минимальной ставки, которая делает условия невыгодными, воспользуемся формулой (2.6) при  $m=1$ :

$$r = (730/600)^{1/2} - 1 = 0,1030 = 10,3 \%$$

Минимальная ставка, которая делает условия невыгодными для предпринимателя, равна 10,3 % годовых.

**Задача 4.** Банк предоставил ссуду в размере 5000 долл. на 39 месяцев под 10% годовых на условиях полугодового начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

#### Решение

Для решения воспользуемся формулами для вычисления наращенной суммы, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет.

1) Схема сложных процентов - формула (3.4), считая полугодие базовым периодом;

$$w=6; f = 3,25 \cdot 2 - 6 = 0,5; r=5\%:$$

$$F = 5000 \cdot (1+0,05)^{6+0,5} = 6865,9$$

По схеме сложных процентов возвращаемая сумма равна 6865,9 долл.

2) Смешанная схема – формула (3.5), считая полугодие базовым периодом;

$$w=6; f = 3,25 \cdot 2 - 6 = 0,5; r=5\%:$$

$$F = 5000 \cdot (1+0,05)^6 \cdot (1+0,5 \cdot 0,05) = 6867,99$$

По смешанной схеме возвращаемая сумма равна 6867,99 долл.

**Задача 5.** 1 августа 2010 г. должник обязан уплатить кредитору 400 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги : 1) января 2010 г.; 2) 1 января 2011 г.; 3) 1 августа 2010 г.? Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 34% годовых.

#### Решение.

1) используем формулу (3.2) при  $r=0,34$ ;  $n=7/12$ :

$$P = 400 / (1 + 0,34)^{7/12} = 337,22$$

1 января 2010 г. должник должен иметь 337 220 руб.

2) используем формулу (2.1) при  $r=0,34$ ;  $n=5/12$ :

$$F = 400 \cdot (1 + 0,34)^{5/12} = 451,87$$

1 января 2011 г. должник должен иметь 451 870 руб.

3) 1 августа 2010 г. должник должен иметь 400 000 руб.

#### Задачи для подготовки к занятию

**Задача 1.** Предприниматель получил ссуду в банке в размере 20 млн. руб. сроком на 5 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 25 % процента годовых, на оставшиеся 3 года ставка равна 23% годовых. Найдите доход банка за 5 лет, если сложные ссудные проценты начисляются ежеквартально.

**Задача 2.** В банк вложены деньги в сумме 800 тыс. руб. на полтора года под 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите доход клиента в этой финансовой операции.

**Задача 3.** Банк предоставил ссуду в размере 500 тыс. руб. на 33 месяца под процентную ставку 28% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму нужно будет вернуть банку по окончании срока при использовании следующих условий: а) при расчетах используется схема сложных процентов; б) при расчетах используется смешанная схема?

### **Задание на практическое занятие 3. Сложные ссудные ставки.**

#### **Контрольные вопросы**

- 1) Чему равен множитель наращения при начислении процентов по сложной ссудной ставке?
- 2) Как соотносятся между собой наращенные суммы при начислении простых и сложных ссудных процентов?
- 3) Верно ли, что начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно начислению сложных процентов по ставке 1% в месяц?
- 4) Как пользоваться финансовыми таблицами при вычислении наращенной и приведенной стоимости?

#### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Рассчитайте будущую стоимость 1000 долл. для следующих ситуаций:

- 1) 5 лет, 8% годовых, ежегодное начисление процентов;
- 2) 5 лет, 8 % годовых, полугодовое начисление процентов;
- 3) 5 лет , 8 % годовых, ежеквартальное начисление процентов.

**Задача 2.** За какой срок первоначальный капитал в 500 тыс. руб. увеличится до 2 млн. руб., если на него будут начисляться сложные проценты по ставке 10 % годовых?

**Задача 3.** Рассчитать накопленную сумму, если на вклад в 2 млн. руб. в течение 5 лет начисляются непрерывные проценты с силой роста 10%.

**Задача 4.** Вы положили в банк на депозит 1000 долл.. Банк начисляет сложные проценты по схеме – за первый год 4% годовых, а затем ставка увеличивается на 1 % каждый год. Определить сумму, которая будет на Вашем счете через 4 года.

**Задача 5.** Банк предоставил ссуду в размере 10 000 долл. на 16 месяцев под 12 % годовых на условиях ежеквартального начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

#### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** Два друга, Саша и Вася, участвовали в олимпиаде по информатике, выиграли призы- 150 тыс. руб. и 110 тыс. руб.. Саше пришлось уехать и он получил свой выигрыш на 2 года позже. Принимая в расчет сложную банковскую ставку 20% годовых, ответьте на вопрос - кто больше заработал, Саша или Вася?

**Задача 2.** Студент, решая удвоить наличные деньги, открыл депозит с начислением сложных ссудных процентов по ставке 10% годовых. Определить: 1) через сколько лет будет достигнут желаемый результат?

**Задача 3.** Администрация региона планирует получение кредита на сумму 600 млн. руб. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту в банке А в первый год составляет 10,5% годовых; во второй год ставка увеличивается на 1,5%; для оставшихся лет ставка увеличится еще на 0,75%. В банке В процентная ставка составит 12% годовых. В каком банке администрации следует получить кредит? Ответ обосновать расчетами. Как будут различаться суммы процентов к уплате при выборе банка А и В?

#### **Занятие 4. Сложные учетные ставки**

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов более выгодна сложная учетная ставка, если срок учета менее одного года; более выгодна простая учетная ставка, если срок учета превышает один год.

Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учетного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка для дробной части года). Стоимость учетного капитала больше при использовании смешанной схемы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают  $\delta$  и называют *силой роста*.

**Цель проведения занятия** - научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

## Основные формулы

$$P = F(1 - d)^n \quad (4.1)$$

$$F = P/(1 - d)^n \quad (4.2)$$

$$P = F \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (4.3)$$

$$P = F \cdot (1 - d)^{w+f} \quad (4.4)$$

$$P = F \cdot (1 - d)^w (1 - f \cdot d) \quad (4.5)$$

$$P = F \cdot \prod_{i=1}^k (1 - d_i)^{n_i} \quad (4.6)$$

$$d = m \left[ 1 - \left( \frac{P}{F} \right)^{\frac{1}{m \cdot n}} \right] \quad (4.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{P}{F}}{m \ln \left( 1 - \frac{d}{m} \right)} \quad (4.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (4.9)$$

$$P = F e^{-\delta n} \quad (4.10)$$

где

$F$  – наращенная сумма;

$P$  – вложенная сумма;

$n$  – количество лет;

$d$  – сложная учетная ставка;

$\delta$  – непрерывная ставка

$m$  – количество начислений процентов в году;

$w$  – целая часть периода финансовой операции;

$f$  – дробная часть периода финансовой операции.

## Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета.

### Решение

1) При применении схемы сложных процентов воспользуемся формулой (4.4) при  $n = 32/12 = 8/3$ ,  $F = 70$  тыс. руб.,  $d = 0,24$ , поэтому

$$P = 70(1 - 0,24)^{\frac{8}{3}} = 33,672$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

2) При применении смешанной схемы воспользуемся формулой (4.4) при  $w = 2$ ,  $f = 2/3$ :

$$P = 70(1 - 0,24)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot 0,24\right) = 33,963$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

**Задача 2.** Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите сумму, полученную при учете этого обязательства, если производилось 1) полугодовое; 2) поквартальное; 1) ежемесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 24% годовых.

### Решение

1) Используем формулу (4.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 2$

$$P = 46\left(1 - \frac{0,24}{2}\right)^{2 \cdot 4} = 16,543$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 16 543 руб.

2) Используем формулу (4.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 4$ :

$$P = 46\left(1 - \frac{0,24}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 17,092$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17092 руб.

3) Используем формулу (4.3) при  $F = 46$ ;  $d = 0,24$ ;  $n = 4$ ;  $m = 12$ :

$$P = 46\left(1 - \frac{0,24}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 17,443$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17443 руб.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что с ростом числа осуществлений операций дисконтирования в году сумма, полученная при учете обязательства, возрастает.

**Задача 3.** Вексель был учтен за 2,5 года до срока его погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось 1) поквартальное дисконтирование; 2) ежемесячное дисконтирование.

### Решение

1) по формуле (4.7) при  $P = 0,25F$ ;  $n = 2,5$ ;  $m = 4$ , получим :

$$d = 4 \cdot \left[1 - 0,25^{\frac{1}{4 \cdot 2,5}}\right] = 0,5178$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 51,78% годовых.

2) по формуле (4.7) при  $P=0,25F$ ;  $n=2,5$ ;  $m=12$ , получим :

$$d = 4 \left[ 1 - 0,25^{\frac{1}{12 \cdot 2,5}} \right] = 0,5419$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 54,19 % годовых.

**Задача 4.** Клиент имеет вексель на 100 тыс. руб., который он хочет учесть 01.03.2010 в банке по сложной учетной ставке равной 7% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2010 г.?

**Решение**

Срок даты учета до даты погашения векселя равен 153 дня, число дней в году 365. По формуле (4.1) при  $F=100$ ;  $d=0,07$ ;  $n=153/365$

$$P = 100 \cdot (1 - 0,07)^{153/365} = 97,038$$

Владелец векселя получит 97 038 руб.

**Задача 5.** Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке : в первые 2 года –16%, в следующие 2 года – 19%, в оставшийся год– 23%. Определить наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же сумму?

**Решение**

По формуле (4.6) при  $d1 = 16\%$ ,  $d2 = 19\%$ ,  $d3 = 23\%$  получаем:

$$F = \frac{20}{(1 - 0,16)^2 (1 - 0,19)^2 (1 - 0,23)} = 56,106$$

Наращенная сумма равна 56106 руб.

Постоянную годовую учетную ставку  $d$ , дающую тот же результат, находим из равенства:

$$(1 - d)^5 = (1 - 0,16)^2 (1 - 0,19)^2 (1 - 0,23)$$

$$d = 0,1864$$

Постоянная ставка, которая дает тот же результат, равна 18,64% годовых.

**Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Вексель на сумму 800 тыс. руб. учитывается за 2 года до срока погашения. Какую сумму получит предъявитель векселя при учете по сложной учетной ставке 20% годовых?

**Задача 2.** Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.

## **Задание на практическое занятие 4. Сложные учетные ставки.**

### **Контрольные вопросы**

1. Чему равен множитель дисконтирования при дисконтировании по сложной учетной ставке?
2. Может ли учет по сложной учетной ставке привести к отрицательным значениям?
3. Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операций дисконтирования по сложной учетной ставке?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 28% годовых ?

**Задача 2.** Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 4 млн. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 1) 20% годовых; 2) 25% годовых.

**Задача 3.** Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых при полугодовом дисконтировании. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству?

**Задача 4.** Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении 1) на 3 месяца; 2) на год.

## **Занятие 5. Эквивалентные и эффективные ставки**

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки.

Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками. Именно эта ставка характеризует реальную эффективность операции, однако во многих финансовых контрактах речь чаще всего идет о номинальной ставке, которая в большинстве случаев отличается от эффективной.

Меняя частоту начисления процентов или вид ставки, можно существенно влиять на эффективность операции. В частности, оговоренная в контракте ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, 6% годовых при условии ежедневного начисления процентов соответствуют на самом деле 8,21%, начисляемых ежегодно. Отмеченная особенность исключительно

значима в условиях высоких номинальных ставок. При составлении финансовых договоров данный прием нередко используется для сокрытия истинных расходов. Поэтому, заключая контракт, целесообразно уточнять, о какой ставке (процентной, учетной, эффективной и др.) идет речь или, по крайней мере, отдавать себе отчет в этом.

**Цель проведения занятия** - научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений; сравнивать эффективность различных финансовых операций.

### Основные формулы

$$r_e = (1 + r/m)^m - 1 \quad (5.1)$$

$$r_e = e^{\delta} - 1 \quad (5.2)$$

$$\delta = m \cdot \ln(1 + r/m) \quad (5.3)$$

$$r = m \cdot [(1 + r_e)^{1/m} - 1] \quad (5.4)$$

$$d_e = 1 - (1 - d/m)^m \quad (5.5)$$

$$d = m \cdot [1 - (1 - d_e)^{1/m}] \quad (5.6)$$

$$r = \frac{d}{1 - nd} \quad (5.7)$$

$$d = \frac{r}{1 + nr} \quad (5.8)$$

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c} \quad (5.9)$$

$$d_c = \frac{r_c}{1 + r_c} \quad (5.10)$$

$$r = \frac{(1 + \frac{r(m)}{m})^{m \cdot n} - 1}{n} \quad (5.11)$$

$$d = \frac{1 - (1 - \frac{d(m)}{m})^{m \cdot n}}{n} \quad (5.12)$$

где

$r_e$  — эффективная ставка,

$e^{\delta}$  — сила роста,

$r$  - простая процентная ставка,

$d$  - простая учетная ставка,

$r_c$  - сложная ссудная ставка,

$d_c$  - сложная учетная ставка,

$r(m)$  - сложная процентная ставка с начислением процентов  $m$  раз за период,

$d(m)$  - сложная учетная ставка с начислением процентов  $m$  раз за период,

$n$  - продолжительность финансовой операции в годах

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку: 1) 28% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) 30% годовых с полугодовым начислением процентов?

#### Решение

Рассчитаем эффективную годовую процентную ставку для каждого варианта.

1) По формуле (5.1) при  $r=0,28$ ;  $m=4$

$$r_e = (1 + 0,28/4)^4 - 1 = 0,3107 = 31,1\%$$

2) По формуле (5.1) при  $r=0,32$ ;  $m=2$

$$r_e = (1 + 0,3/2)^2 - 1 = 0,3225 = 32,25\%$$

Для банка выгоднее предоставлять кредит по варианту 2), так как в этом случае эффективная годовая ставка выше (предоставлять кредит под 32,25% годовых выгоднее, чем под 31,1%).

**Задача 2.** Срок уплаты по долговому обязательству – полгода, простая учетная ставка – 18% годовых. Какова доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

#### Решение

По формуле (5.7) при  $d=0,18$ ;  $n=0,5$

$$r = 0,18 / (1 - 0,5 \cdot 0,18) = 0,198.$$

Доходность операции, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна 19,8% годовых.

**Задача 3.** Определить, под какую ставку ссудных процентов выгоднее поместить капитал в 10 млн. руб. на пять лет – под простую ставку 14% годовых или под сложную ставку 12% при ежеквартальном начислении процентов?

#### Решение.

В данном случае можно не считать наращенную сумму, поэтому не важна величина первоначального капитала. Достаточно, например, найти простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке, воспользовавшись формулой эквивалентности по формуле (5.11) при  $r(m)=0,12$ ;  $n=5$ ;  $m=4$ :

$$r = \frac{(1 + \frac{0,12}{4})^{4 \cdot 5} - 1}{5} = 0,1612$$

Так как простая процентная ставка 16,12% , которая дала бы одинаковый результат с данной сложной процентной ставкой больше предложенной ставки в 14%, ясно, что предпочтительнее использовать сложную процентную ставку. Чтобы убедиться, насколько сложная ставка выгоднее, определим наращенные суммы:

$$F(14\%) = 17$$

$$F(16,12\%) = 22,04$$

Владелец капитала в 10 млн. руб. за 5 лет может накопить 17 млн. руб. с использованием простой ставки 14% годовых; с использованием сложной ставки 12% годовых при ежеквартальном начислении процентов можно накопить 22,04 млн. руб.

**Задача 4.** На капитал в сумме 500 тыс. руб. ежегодно начисляются сложный проценты по ставке 8% годовых в течение 5 лет. Определить эквивалентную ставку непрерывного начисления процентов (силу роста).

**Решение.**

По формуле (5.2) при  $r=0,08$ ;  $m=1$

$$\delta = \ln(1+0,08) = 0,077$$

Таким образом, ежегодное начисление процентов по ставке 8% эквивалентно непрерывному начислению процентов по ставке 7,7 %.

**Задача 5.** Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 9 % и сложные проценты начисляются ежемесячно.

**Решение.**

По формуле (5.4) при  $r(e) = 0,09$ ;  $m=12$

$$r = 12 \cdot [(1 + 0,09)^{1/12} - 1] = 0,086$$

Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 9% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке 8,6 %.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 20% годовых и учет осуществляется 1) каждые полгода; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно.

**Задача 2.** Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8 % годовых. Определить эквивалентную простую ставку при сроке ссуды 5 лет, 180 дней, 365 дней.

**Задача 3.** Банком выдан кредит на 9 месяцев под 24% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

## **Задание на практическое занятие 5. Эффективные и эквивалентные ставки.**

### **Контрольные вопросы**

1. Какая ставка называется эффективной? От каких параметров она зависит?
2. Как изменяется эффективная ставка с ростом количества начислений сложных процентов в году?
3. В каком случае эффективная ссудная ставка совпадает с номинальной?
4. Какие ставки называются эквивалентными?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Вексель учитывается за 180 дней до срока погашения по простой учетной ставке 10 % годовых. Какова доходность этой операции для банка, выраженная по сложной учетной ставке?

**Задача 2.** Банк учитывает вексель за 300 дней до срока погашения по сложной учетной ставке 10% годовых при временной базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, если используется временная база 365 дней и банк хочет получить такой же доход?

**Задача 3.** Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.

**Задача 4.** Определить номинальную годовую учетную ставку с дисконтированием 4 раза в год, эквивалентную номинальной годовой учетной ставке 12% с дисконтированием 12 раз в год.

## **Занятие 6. Замена и консолидация платежей**

На практике часто возникают ситуации, когда участники сделки вынуждены изменять условия ранее заключенного финансового соглашения. В результате изменений условий контракта ни один из его участников не должен терпеть убытков, поэтому в таких ситуациях также составляется **уравнение эквивалентности**.

Согласно уравнению эквивалентности сумма нового и старого платежей приводится к одному моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения осуществляется, как правило, на основе простых ставок. При использовании сложных ставок время приведения контрактов не имеет значения.

При консолидации платежей возникают две задачи: 1) определение величины консолидированного платежа при известном сроке, когда этот платеж должен быть сделан; 2) определение срока известного консолидированного платежа.

Обе задачи решаются с использованием уравнения **эквивалентности контрактов**. Два контракта считаются эквивалентными, если потоки плате-

жей по этим контрактам, приведенные к одному моменту времени, одинаковы.

При замене или объединении платежей используется принцип эквивалентности: ни одна из сторон финансовой сделки не должна казаться в убытке или получить дополнительную прибыль.

**Цель проведения занятия** - научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

## Основные формулы

Рассмотрим ситуацию, когда платеж  $P_1$  со сроком уплаты  $n_1$  заменяется на платеж  $P_0$  со сроком уплаты  $n_0$

### Простые ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании простой ссудной ставки:

$$P_0 = P_1[1 + (n_0 - n_1)r], n_0 > n_1$$

$$P_0 = \frac{P_1}{1 + (n_1 - n_0)r}, n_0 < n_1$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если  $P_0 > P_1, n_0 > n_1$

$$n_0 = n_1 - \frac{1}{r} \left( \frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если  $P_0 < P_1, n_0 < n_1$

$$n_0 = n_1 + \frac{1}{r} \left( \frac{P_0}{P_1} - 1 \right)$$

Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании простой ссудной ставки

$$P_0 = \sum_{k=1}^m P_k [1 + |n_0 - n_k| r]^{sign(n_0 - n_k)} \quad P_0 > P_1, n_0 > n_1$$

Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании простых ссудных ставок

$$\frac{P_0}{1 + n_0 r} = \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{1 + n_k r} \quad 27$$

### Сложные ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании сложной ссудной ставки:

$$P_0 = P_1(1+r)^{(n_0-n_1)}$$

Формула для нахождения срока нового платежа

$$n_0 = n_1 + \frac{\operatorname{Ln} \frac{P_0}{P_1}}{\operatorname{Ln}(1+r)}$$

Формула для определения величины консолидированного платежа

$$\frac{P_0}{(1+r)^{n_0}} = \sum_{k=1}^m \frac{P_k}{(1+r)^{n_k}}$$

Формула для определения срока консолидированного платежа

$$n_0 = \frac{\operatorname{Ln} \frac{P_0}{\sum P_k (1+r)^{-n_k}}}{\operatorname{Ln}(1+r)}$$

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Согласно новому финансовому соглашению платеж в 100000 руб. со сроком уплаты через 1 год заменяется платежом со сроками уплаты 1) через полгода;

2) через два года. Определить величину нового платежа, если используется простая ставка 20 % годовых.

#### Решение

1) Так как срок нового платежа меньше года, то его величина — это дисконтированная стоимость 100000 руб., срок дисконтирования — 0,5 года, поэтому величина нового платежа равна:

$$100\,000 / (1 + 0,5 \cdot 0,2) = 90\,909 \text{ руб.}$$

2) Так как срок нового платежа больше года, то его величина — это будущая стоимость 100000 руб., наращение происходит один год по ставке 20 % годовых, поэтому величина нового платежа равна:

$$100\,000 \cdot (1+1 \cdot 0,2) = 120\,000 \text{ руб.}$$

**Задача 2.** Найти величину нового срока, если платеж в 100 000 руб. с уплатой через 250 дней заменяется платежом в 95 000 руб. Используется простая ставка 10 % годовых.

**Решение**

Так как сумма нового платежа меньше 100 000 руб., поэтому новый срок должен быть также меньше 250 дней.

Графически это можно показать следующим образом:



Будем приводить потоки платежей по новому и старому контракту к моменту времени 250 дней.

Тогда на сумму в 95 000 руб. должны начисляться простые проценты по ставке 10 % в течение  $(250 - x)$  дней и наращенная сумма должна равняться 100 000 руб. Составляем уравнение эквивалентности

$$95000 \cdot (1 + 0,1 \cdot (250 - x) / 360) = 100000,$$

$$x = 60,5 \text{ дней.}$$

Проверим этот результат. Получив через 60,5 дней 95000 руб. и вложив их в банк на срок  $(250 - 60,5)$  дней, получим

$$95000 \cdot (1 + 0,1 \cdot (250 - 60,5) / 360) = 100000 \text{ руб.}$$

Заметим, что платеж в 100000 руб. нельзя заменить любым меньшим по величине платежом. Величина нового платежа не может быть меньше, чем сумма 100000 руб., приведенная к начальному моменту времени, т. е. меньше, чем  $100000 / (1 + 0,1 \cdot 250 / 360) = 93500$  руб.

**Задача 3.** Два векселя номинальной стоимостью 20000 руб. и 30000 руб. и сроком погашения 1 июня и 1 сентября заменяются одним с продлением срока погашения до 1 октября. При объединении используется простая учетная ставка 10 % годовых. Определить номинальную стоимость нового векселя.

**Решение**

Поскольку срок погашения нового векселя позже, чем сроки погашения объединяемых векселей, то на сумму 20000 руб. в течение 122 дней (с 1 июня по 1 октября) происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 %; на сумму 30000 руб. в течение 30 дней (с 1 сентября по 1 октября) также происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 % годовых. Поэтому номинальная стоимость нового векселя равна:

$$F = 20000 \cdot (1 - 122 / 360)^{-1} + 30000 \cdot (1 - 30 / 360)^{-1} = 62979,4 \text{ руб.}$$

**Задача 4.** Платежи в 6000, 4000 и 10000 руб. должны быть погашены соответственно через 90, 165 и 270 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 120 дней. Найти величину консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 38% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

**Решение**

Приведем все платежи к моменту погашения консолидированного платежа, т.е. к 120 дням. Тогда на платеж в 6000 руб., срок погашения которого меньше 120 дней, будут начисляться простые проценты за период в  $120 - 90 = 30$  дней, платеж в 4000 руб. необходимо дисконтировать на срок в  $165 - 120 = 45$  руб., платеж в 10000 руб. необходимо дисконтировать на срок  $270 - 120 = 150$  дней.

Складывая суммы приведенных платежей, получим уравнение для определения величины консолидированного платежа:

$$X = 6000 \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,38\right) + \frac{4000}{1 + \frac{45}{360} \cdot 0,38} + \frac{10000}{1 + \frac{150}{360} \cdot 0,38}$$

поэтому  $X = 18642$  руб.

Если бы за дату приведения выбрали время выплаты платежа в 6000 руб., то получили бы следующее уравнение:

$$\frac{X}{1 + \frac{30}{360} \cdot 0,38} = 6000 + \frac{4000}{1 + \frac{75}{360} \cdot 0,38} + \frac{10000}{1 + \frac{180}{360} \cdot 0,38},$$

откуда  $X = 18683$  руб.

Приводя все платежи к начальному моменту времени, получим уравнение:

$$\frac{X}{1 + \frac{120}{360} \cdot 0,38} = \frac{6000}{1 + \frac{90}{360} \cdot 0,38} + \frac{4000}{1 + \frac{165}{360} \cdot 0,38} + \frac{10000}{1 + \frac{270}{360} \cdot 0,38},$$

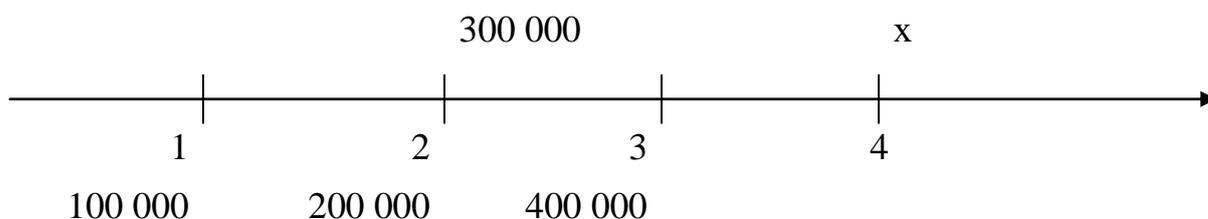
откуда  $X = 18780$  руб.

Поэтому при выборе финансового соглашения в случае использования простых процентов необходимо оговорить дату, на которую будет осуществляться приведение всех сумм.

**Задача 5.** Согласно контракту предприниматель должен выплатить кредитору 100 000 руб. через год, 200 000 руб. через два года и 400 000 руб. через 3 года. Предприниматель планирует выплатить через 2 года 300 000 руб., оставшуюся сумму долга вернуть через 4 года. Какую сумму предприниматель должен будет выплатить через 4 года, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

**Решение.**

Изобразим схему выплат на графике. Под осью отметим платежи по старому соглашению, над осью – по новому контракту.



Величину неизвестного платежа находим из условия эквивалентности контрактов. Приведенные стоимости платежей по старому контракту необходимо приравнять к приведенным стоимостям потоков платежей по новому контракту и из полученного уравнения определить неизвестную величину нового платежа.

$$\frac{100000}{(1+0,2)} + \frac{200000}{(1+0,2)^2} + \frac{400000}{(1+0,2)^3} = \frac{300000}{(1+0,2)^2} + \frac{X}{(1+0,2)^4}$$

$$X = 508\,800 \text{ руб.}$$

В случае сложных ставок результат не зависит от момента времени, для которого составляется уравнение эквивалентности контрактов. Действительно, если все платежи приводить к моменту окончания года 4, уравнение примет вид:

$$100 \cdot (1 + 0.2)^3 + 200 \cdot (1 + 0.2)^2 + 400(1 + 0.2) = 300 \cdot (1 + 0.2)^2 + X$$

Разделив это обе части уравнения на  $(1+0,2)^4$ , получим первоначально составленное уравнение.

### Задачи для подготовки к занятию

**Задача 1.** В банк для учета предъявлены 2 векселя - один на сумму в 100 тыс. руб. и сроком погашения через год, второй – на сумму 150 тыс. руб. и сроком погашения через 2 года. Два векселя необходимо заменить одним, на сумму 250 тыс. руб. Определить срок погашения нового векселя при использовании сложной учетной ставки 20% годовых.

**Задача 2.** Платежи на сумму 300 000 руб., 400 000 руб. и 400 000 руб. должны быть внесены через три месяца, полгода и 9 месяцев соответственно. Достигнуто соглашение о замене этих платежей на один, равный им по сумме. Определить срок нового платежа, если используется простая ссудная ставка 15 % годовых.

**Задача 3.** Согласно контракту, предприниматель должен выплатить кредитору 10 тыс. руб. через год, 40 тыс. руб. через три года и 30 тыс. руб. через 5 лет. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. руб. через 2 года и 40 тыс. руб. через 4 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 34% годовых?

**Задача 4.** Три платежа: 10 000 долл., срок погашения 15 мая; 20 000 долл., срок погашения 15 июня; 15 000 долл., срок погашения 15 августа заменяется

одним платежом со сроком погашения 1 августа на основе простой процентной ставки. Определить сумму нового платежа.

## **Задание на практическое занятие 6. Замена и консолидация платежей.**

### **Контрольные вопросы**

1. Что означает консолидация платежей?
2. Верно ли утверждение: при сравнении платежей их приведение к одному моменту времени может осуществляться как путем наращивания, так и путем дисконтирования?
3. При изменении сроков платежей в каком случае новый платеж будет больше старого платежа, а в каком случае меньше?
4. Какие контракты являются эквивалентными?
5. Какие задачи могут возникать при консолидации платежей?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Контракт на выплату 10 000 долл. 1 ноября и выплату 5000 долл. 1 января следующего года необходимо заменить новым контрактом, в соответствии с которым 1 декабря выплачивается 6000 долл., оставшаяся сумма погашается 1 марта. Определить сумму второго платежа на основе простой ссудной ставки 10% годовых (следующий год не високосный).

**Задача 2.** Платеж в 600 тыс. руб. со сроком уплаты через 4 года необходимо заменить платежом со сроком уплаты 1) через 2 года; 2) через 5 лет. Используется сложная ссудная ставка 12% годовых. Найти величину нового платежа.

**Задача 3.** Два кредита на сумму 100 тыс. евро и 50 тыс. евро должны быть погашены 17 ноября текущего года и 10 января следующего года соответственно. Банк согласился с предложением заемщика пересмотреть условия договора: 1 декабря текущего года заемщик выплачивает 70 тыс. евро, оставшаяся часть долга будет внесена 1 марта следующего года. При пересмотре договора используется простая ставка 10% годовых. Определить вариант приведения срока платежа, наиболее выгодный для банка и для заемщика.

**Задача 4.** Предприниматель получил кредит в банке на сумму 500 тыс. руб. на полгода по простой ставке 18% годовых. Спустя месяц после выдачи кредита предприниматель обратился в банк с просьбой вернуть долг не через полгода, а через 9 месяцев, в сумме 595 тыс. руб. Выгодно ли это предложение для банка? Какую сумму предприниматель должен внести через 9 месяцев, чтобы условия контракта не изменились?

**Задача 5.** Имеется обязательство погасить с 20.02.06 по 20.11.06 долг в размере 1,5 млн. рублей. Кредитор согласен получать частичные платежи по погашению кредита и фактическую базу начисления процентов. Процентная ставка составляет 20% годовых. В счет погашения задолженности планируются следующие промежуточные поступления:

20.03.06 – 500 тыс. рублей

20.05.06 – 300 тыс. рублей

20.08.06 – 200 тыс. рублей

Найти сумму окончательного платежа по погашению долга.

### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** В настоящее время у предприятия имеется задолженность банку по трем кредитам в размере 130 тыс., 190 тыс., 165 тыс. руб. со сроками погашения соответственно через 45, 95 и 200 дней. Предприятие предлагает погасить задолженность одним платежом через срок (кредитный срок выбирается согласно варианту) от сегодняшней даты. Процентная ставка по кредиту составляет 15%. Временная база 365 дней. Определить сумму консолидированного платежа.

**Задача 2.** Предположим, что два ваших дедушки оставили вам наследства по получению некоторой суммы денег. По первому наследству вы получаете 50 тыс. руб. сейчас и еще 50 тыс. руб. через год. По второму- 10 тыс. руб. сейчас, 50 тыс. руб. через год и еще 50 тыс. в конце второго года. Какой вариант наследства вы выберете, если рыночная простая ставка процентов составляет 1) 5% годовых; 2) 10% годовых. При какой рыночной ставке процентов оба наследства окажутся одинаковы?

### **Занятие 7. Начисление процентов в условиях инфляции**

Для оценки наращенной суммы с учетом ее обесценения полученную величину делят на индекс инфляции за время осуществления наращения. Если множитель наращения равен индексу инфляции, то соответствующее наращение лишь нейтрализует действие инфляции.

При инфляции выделяют следующие виды процентных ставок: номинальную, реальную, положительную. Иногда ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой.

Для обеспечения реального роста стоимости первоначального капитала при инфляции необходимо исходную ставку увеличивать (индексировать). Выбор величины такой индексированной ставки определяется поставленными целями. Для обеспечения реальной доходности согласно исходному коэффициенту наращения необходимо так индексировать исходную ставку (увеличить на инфляционную премию), чтобы новый коэффициент наращения полностью компенсировал потери из-за инфляции.

Формула Фишера определяет значение сложной годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции. Эта формула по существу показывает ту величину, называемую инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке (эта ситуация типична для стран с развитой рыночной экономикой) пользуются и приближенным вариантом формулы Фишера.

**Цель проведения занятия** - научиться рассчитывать доходность финансовых операций в условиях инфляции, используя формулы финансовых вычислений.

### Основные формулы раздела

Индекс инфляции

$$I_{и} = (1 + \alpha_m)^m. \quad (7.1)$$

$$I_{и} = (1 + \alpha)^{n_a} \cdot (1 + n_b \alpha), \quad (7.2)$$

где  $n = n_a + n_b$ ,  $n_a$  — целое число лет,  $n_b$  — оставшаяся нецелая часть года

Введем следующие обозначения для брутто-ставок:

$r_{\alpha}$  — простая ссудная ;

$d_{\alpha}$  — простая учетная

$r_{c\alpha}$  — сложная ссудная

$d_{c\alpha}$  — сложная учетная

Вычисление брутто-ставки процентов в условиях инфляции

$$r_{\alpha} = (1 + nr) \cdot I_{и} - 1 \overline{]n}. \quad (7.3)$$

$$d_{\alpha} = (I_{и} - 1 + nd) / (n \cdot I_{и}). \quad (7.4)$$

$$r_{c\alpha} = m \cdot \{ (1 + r_c / m)^{m \cdot n} \sqrt[n \cdot m]{I_{и}} - 1 \} \quad (7.5)$$

$$d_{c\alpha} = m \cdot \{ 1 - (1 - d_c / m) / \sqrt[n \cdot m]{I_{и}} \} \quad (7.6)$$

Формулы для вычисления реальной доходности финансовой операции, когда задан уровень инфляции и брутто ставка

$$r = \left( \frac{1 + r_{\alpha}}{I_{и}} - 1 \right) / n \quad (7.7)$$

$$r_c = (1 + r_{c\alpha}) / \sqrt[n]{I_{и}} - 1 \quad (7.8)$$

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** На вклад начисляются сложные проценты: 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?

**Решение**

1) Обозначим через  $I_u^{(1/12)}$  ежемесячный (т.е. за 1/12 года) индекс инфляции, тогда  $I_u^{(1/12)} = 1,03$  и при  $k=12$  находим индекс инфляции за год:

$$I_u^{(1)} = (I_u^{(1/12)})^{12} = 1,03^{12} = 1,4258$$

Пусть  $r$  - процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства  $1 + r = I_u^{(1)}$  (т.е. множитель наращенения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r = I_u^{(1)} - 1 = 1,4258 - 1 = 0,4258 = 42,58\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 42,58% годовых.

2) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, пользуемся равенством :

$$(1 + r(4) / 4)^4 = I_p^{(1)}, \text{ поэтому:}$$

$$r(4) = 4(\sqrt[4]{I_u^{(1)}} - 1) = 0,3709 = 37,09\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежеквартальном начислении процентов по ставке не меньше, чем 37,09% годовых.

3) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством

$$(1 + r(12)/12)^{12} = I_u^{(1)}, \text{ откуда:}$$

$$r(12) = 12(\sqrt[12]{I_u^{(1)}} - 1) = 0,36 = 36\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежемесячном начислении сложных процентов по ставке, не меньше, чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно,  $r(12)/12 > 0,03$ , поэтому  $r > 0,36$

**Задача 2.** Номинальная процентная ставка, компенсирующая действие инфляции, равна 52% годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

**Решение**

Приравняем годовой индекс инфляции к множителю наращенения за год. Полагая  $r(4) = 0,52$ , получим :

$$I_u^{(1)} = (1 + r(4)/4)^4 = (1 + 0,52/4)^4 = 1,6305$$

Поэтому индекс инфляции за полгода (0,5 года) составит :

$$I_u^{(0,5)} = \sqrt{I_u^{(1)}} = \sqrt{1,6305} = 1,2769$$

Темп инфляции  $\alpha$  находим из условия  $(1 + \alpha) = I$ .

Темп инфляции за полгода равен 27,69%.

**Задача 3.** На вклад в течение трех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция за это время за каждый год последовательно составит 15, 20 и 10 процентов. Какова должна быть сила роста за год, чтобы покупательная способность вклада не уменьшилась?

**Решение**

Поскольку индекс инфляции за первый год равен 1,15, за второй - 1,2 и за третий - 1,1, то индекс инфляции за 3 года составит:

$$I^{(3)}_u = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 = 1,15 \cdot 1,2 \cdot 1,1 = 1,518$$

Пусть  $\sigma$  - сила роста за год, позволяющая первоначальной сумме только сохранить свою покупательную способность. Приравнивая индекс инфляции за

три года к множителю наращивания за это же время, получим :  $e^{3 \cdot \delta} = I^{(3)}_u$ , поэтому

$$\delta = \frac{\text{Ln}I}{3} = 0,1391$$

Сила роста должна превышать 13,91% за год.

**Задача 4.** На вклад в течение 15 месяцев начисляются проценты: 1) по схеме сложных процентов; 2) по смешанной схеме. Какова должна быть процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 8%?

**Решение**

1) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 8%, то индекс инфляции за каждый квартал (0,25 года) равен 1,08. Поэтому индекс инфляции за 15 месяцев (1,25 года, или 5 кварталов) составит:

$$I_p^{(1,25)} = 1,08^5 = 1,4693$$

Обозначим через  $r$  искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращивания при использовании схемы сложных процентов:

$$(1+r)^{1,25} = 1,4693.$$

Отсюда:

$$r = 1,4693^{1/1,25} - 1 = 0,3605$$

Ставка должна превышать 36,05% годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 8% за каждый квартал годовой темп инфляции составит  $1,08^4 - 1 = 0,3605 = 36,05\%$ . Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т.е.  $r > 36,05\%$ .

2) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за 1,25 года к множителю наращивания, получим квадратное уравнение относительно  $r$  :

$$(1+r)(1+0,25r)=1,4693$$

Решая уравнение, определяем корни:  $r = -5,3508$ ,  $r = 0,3508$ .

Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать 35,08% годовых. «Граничное» значение ставки в этом случае получили почти на 1% меньше, чем в предыдущем, что объясняется большей эффективностью смешанной схемы начисления по сравнению со схемой сложных процентов.

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

$$(1+r)(1+0,25r)>1,4693$$

**Задача 5.** На вклад 280 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции – 0,5 % в месяц.

**Решение**

При наращении сложными процентами при ежеквартальном начислении процентов сумма вклада составит :

$$F = 280000 \cdot (1 + 0,1/4)^{4 \cdot 1,75} = 332830$$

Индекс инфляции за 1,75 года при темпе инфляции 2% в месяц составит

$$I_u^{(1,75)} = (1 + 0,005)^{21} = 1,11$$

Величина вклада с точки зрения ее покупательной способности равна

$$F_\alpha = \frac{F}{I_u^{(1,75)}} = \frac{332830}{1,11} = 299730$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$F_\alpha - P = 299730 - 280000 = 19730$$

**Задача 6.** Кредит на сумму 120 тыс.руб. выдается сроком на 3 года при условии начисления сложных ссудных процентов. Индекс цен за указанный период равен 2,5. Какова должна быть процентная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции составляла 10% годовых? Рассчитайте сумму к погашению с учетом инфляции.

**Решение**

По формуле (7.5) при  $m=1$ ;  $r=0,1$ ;  $I=2,5$ ;  $n=3$

$$r_{c\alpha} = 0,4923$$

Поэтому ставка 49,23% при ежегодном начислении сложных процентов и индексе цен 2,5 обеспечит реальную доходность кредитора 10% годовых.

Сумму к погашению с учетом инфляции находим по формуле (3.1) (Занятие 3) при  $n=3$ ;  $r=0,4923$ ;  $P=121$

$$F = 120(1 + 0,4923)^3 = 399,3$$

Сумма к погашению с учетом инфляции равна 399 300 руб.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 2 %?

**Задача 2.** На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 8 лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 1%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма вклада через восемь лет по своей покупательной способности не уменьшилась?

**Задача 3.** На вклад в 500 тыс. руб. каждый квартал начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 4%. Оцените сумму вклада через 3 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции –1 % за квартал.

### **Задание на практическое занятие 7. Начисление процентов в условиях инфляции**

#### **Контрольные вопросы**

1. Как определяется и что характеризует темп инфляции?
2. Почему в условиях инфляции необходимо различать номинальную и реальную процентную ставки?
3. Может ли реальная процентная ставка быть отрицательной?
4. Что определяет формула Фишера?

#### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** На вклад начисляются сложные проценты а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Вычислить годовую номинальную процентную ставку, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 2%.

**Задача 2.** Номинальная процентная ставка, компенсирующая при наращении инфляцию, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.

**Задача 3.** На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 4 лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 6%, 7%, 8% и 9%. Какова должна быть си-

ла роста за год, чтобы сумма вклада через четыре года по своей покупательной способности не уменьшилась?

**Задача 4.** На вклад в 900 тыс. руб. каждые полгода начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 8%. Оцените сумму вклада через 1,5 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции –0,5 % за квартал.

## Занятие 8. Налоги и начисление процентов

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. Во многих странах налогом облагают проценты, полученные при помещении некоторой суммы на депозит, что уменьшает реальную наращенную сумму и реальную доходность финансовой операции.

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции. Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки.

Введем обозначения:

$t$ - ставка налога на проценты

$T$  – общая сумма налога

$F$ - наращенная сумма до выплаты налога на проценты

$F_t$  - наращенная сумма после выплаты налога на проценты

$P$  – вложенная сумма

$n$  – продолжительность финансовой операции

Пусть  $r$  - простые ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период  $n$ , равна  $Pnr$ .

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T=Pnr$  (8.1)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1+r(1-t))n] \quad (8.2)$$

Таким образом, налог на проценты уменьшает процентную ставку и вместо ставки  $r$  применяется ставка  $(1-t)r$ .

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись простые учетные проценты по учетной ставке  $d$ . Величина начисленных процентов равна  $Pnd/(1-nd)$ .

Сумма налога на начисленные проценты составит

$$T=Pndt/(1-nd) \quad (8.3)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = F-T=P(1-ndt)/(1-nd) \quad (8.4)$$

Пусть  $r$  - сложные ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период  $n$ , равна  $P[(1+r)^n - 1]$

Сумма налога на начисленные проценты равна

$$T=P[(1+r)^n - 1]t \quad (8.5)$$

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1+r)^n (1-t)+t] \quad (8.6)$$

В случае сложных процентов налог на начисленные проценты можно выплачивать как в конце финансовой операции, так и каждый год. При этом общая сумма исчисленного налога не изменяется.

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись сложные учетные проценты по учетной ставке  $d$ . Величина начисленных процентов равна

$$\frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n}$$

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T = \frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n} t$   
(8.7)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$$F_t = P[(1-d)^{-n}(1-t) + t] \quad (8.8)$$

Пусть на сумму  $P$  за период времени  $n$  начислялись непрерывные проценты по ставке  $\delta$ .

Сумма налога на начисленные проценты равна  $T = P(e^\delta - 1)t$  (8.9)

$$F_t = P[e^\delta(1-t) + t] \quad (8.10)$$

**Цель проведения занятия** - научиться рассчитывать влияние налогов на доходность финансовых операций, используя формулы финансовых вычислений.

### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые учетные проценты по ставке под 14% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

#### Решение

Используем формулу (8.4) при  $P=300$ ;  $n=1,5$ ;  $t=0,12$ ;  $d=0,14$

$$F_t = 300(1 - 1,5 \cdot 0,14 \cdot 0,12) / (1 - 1,5 \cdot 0,14) = 370,018$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 370018 руб.

**Задача 2.** На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые проценты по ставке под 16% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

#### Решение

Используем формулу (8.2) при  $P=300$ ;  $n=1,5$ ;  $t=0,12$ ;  $r=0,16$

$$F_t = 300[1 + 0,16(1 - 0,12)1,5] = 360,336$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 360336 руб.

**Задача 3.** На вклад в 2 млн. руб. в течение 4 лет каждые полгода начислялись сложные проценты по годовой номинальной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 8% годовых.

#### Решение

Запишем формулу (8.6) с учетом полугодового начисления процентов:

$$F_t = P[(1 + r/m)^{nm}(1-t) + t]$$

при  $P=2$ ;  $r=0,12$ ;  $n=4$ ;  $m=2$ ;  $t=0,08$

$$F_t = 3,09268$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 3 092 680 руб.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Предприниматель положил в банк 500 тыс. руб. под простую процентную ставку 9% годовых и через 9 месяцев получил 540 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

**Задача 2.** Какую сумму необходимо положить в банк под простую процентную ставку 10% годовых, чтобы с учетом налога на проценты можно было бы ежегодно снимать со счета 60 тыс. руб. с учетом налога на проценты, и сумма на счете не изменялась? Ставка налога на проценты равна 4%.

**Задача 3.** В банк на депозит внесено 7000 долл., срок депозита - квартал, простая ссудная ставка равна 8% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 2%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

## **Задание на практическое занятие 8. Налоги и начисление процентов**

### **Контрольные вопросы**

1. Как налог на проценты при наращении простыми процентами влияет на процентную ставку?
2. Как налог на проценты при наращении сложными процентами влияет на процентную ставку?
3. Верно ли следующее утверждение: при наращении сложными процентами величина налога на проценты не зависит от времени уплаты налога- ежегодно или в конце финансовой операции?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1** В банк на депозит внесено 5000 долл. , срок депозита - полгода, простая ссудная ставка равна 5% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

**Задача 2.** Какую сумму необходимо положить в банк под сложную процентную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов, чтобы накопить 300 тыс. руб. с учетом уплаты налога на проценты 1) за 2 года; 2) за три года? Ставка налога на начисленные проценты равна 6%.

**Задача 3.** В банк на депозит внесено 100 тыс. руб., срок депозита – три года, сложная ссудная ставка равна 8% годовых. Определить ставку налога на начисленные проценты, если после его уплаты у вкладчика осталось 120 тыс. руб.

**Задача 4.** Вкладчик имеет 180 тыс. рублей и планирует увеличить эту сумму до 200 тыс. руб. через полгода. Определить требуемую простую годовую ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на начисленные проценты равна 2%.

### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** Для открытия новой линии по производству соков предпринимателю Петрову А.А. необходимо 280 тыс. руб. Между тем он располагает суммой 250 тыс. руб. С целью накопления необходимой суммы предприниматель собирается положить 250 тыс. руб. в банк. Предлагаемая банком ставка по вкладам равна 14% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, использует точный процент с точным числом дней, а ставка налога на проценты равна 1%?

## **Занятие 9. Финансовые ренты**

Одним из ключевых понятий в финансовом менеджменте является понятие денежного потока как совокупности притоков и/или оттоков денежных средств, имеющих место через некоторые временные интервалы.

Денежный поток, срок действия которого ограничен, называется срочным; если притоки (оттоки) осуществляются неопределенно долго, денежный поток называется бессрочным. Если притоки (оттоки) осуществляются в начале периодов, денежный поток носит название пренумерандо, если в конце периодов - постнумерандо.

Известны две задачи оценки денежного потока с учетом фактора времени: прямая и обратная. Первая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока; для понимания экономической сущности этой задачи ее легче всего увязывать с процессом накопления денег в банке и оценкой величины наращенной суммы. Вторая задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока; наиболее наглядная ситуация в этом случае - оценка текущей стоимости ценной бумаги, владение которой дает возможность в будущем получать некоторые платежи.

Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока. Аннуитет - однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы. Постоянный аннуитет имеет дополнительное ограничение, его элементы одинаковы по величине.

Ускоренные методы оценки денежных потоков основаны на применении мультиплицирующих и дисконтирующих множителей, которые табулированы в специальных финансовых таблицах. Таблицы инвариантны по отношению к виду потока - постнумерандо или пренумерандо; оценки для потока пренумерандо отличаются от соответствующих оценок для потока постнумерандо на величину множителя  $(1+r)$ , где  $r$  - ставка в долях единицы.

В финансовой математике разработаны универсальные формулы, позволяющие делать расчеты несопадений моментов поступления аннуитетных платежей и начисления процентов.

**Цель проведения занятия** - научиться решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета, используя формулы финансовых вычислений.

## Основные формулы

$$FV_{pst} = A \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r, n) \quad (9.1)$$

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(1+r)^k} \right) = A \cdot FM4(r, n) \quad (9.2)$$

$$FV_{pre} = (1+r) \cdot FV_{pst} \quad (9.3)$$

$$PV_{pre} = (1+r) PV_{pst} \quad (9.4)$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (9.5)$$

$$FM4 = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \quad (9.6)$$

## Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Анализируются 2 варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо, т.е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временного интервала:

План 1: Вносить на депозит 5000 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 10% годовых с полугодовым начислением процентов:

План 2: делать ежегодный вклад в размере 10000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Ответьте на следующие вопросы:

1. Какая сумма будет на счёте через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен?
2. Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет повышена до 10%?

### Решение

План 1:

Принимая за базовый период полгода, воспользуемся формулой (9.1) при  $A=5000$ ;  $r=5\%$ ;  $n=20$ :

$$FV_1 = 0,5 \cdot FM3(5\%, 20) = 5000 \cdot 33,066 = 165330$$

План 2:

Принимая за базовый период год, воспользуемся формулой (9.1) при  $A=10000$ ;  $r=9\%$ ;  $n=10$ :

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(9\%, 10) = 10000 \cdot 15,193 = 151930$$

В данной задаче более предпочтительным является план 1, так как в этом случае будущая стоимость денежного потока выше. Если процентная ставка

в плане 2 будет снижена до 8%, то будущая стоимость денежного потока будет равна:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(10\%, 10) = 10000 \cdot 15,937 = 159370$$

то и в этом случае решение не изменится, то есть выгоднее план 1.

**Задача 2.** Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет получать в конце каждого квартала 8 тыс. долл. Определить возможные суммы, которые через три года получит предприниматель, если можно поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

**Решение**

Используем формулу (9.2), считая базовым периодом квартал, тогда  $A=8$ ;  $n=12$ ;  $r=6\%$  :

$$FV = 8 \cdot FM3(6\%, 12) = 8 \cdot 16,8699 = 134959$$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет 134 959 000 долл.

**Задача 3.** Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 6% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком ежегодно начисляются сложные проценты?

**Решение**

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо. По формуле (9.2) при  $A = 100$ ;  $r=6\%$ ;  $n=6$ :

$$PV = 100 \cdot FM4(6\%, 6) = 100 \cdot 4,917 = 491,7$$

В банк на счет необходимо положить 491 700 руб.

**Задача 4.** Клиент в конце каждого года вкладывает 300 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 10% годовых. Определить сумму, которая будет на счете через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

**Решение**

По формуле (9.1) при  $A=300$ ;  $r=10\%$ ;  $n=7$ :

$$FV = 300 \cdot FM3(10\%, 7) = 300 \cdot 9,487 = 2846,1.$$

Через 7 лет на счете накопится 2846100 руб.

Величину однократного взноса в начале первого года находим по формуле (3.2, Занятие Сложные ссудные ставки) при  $F=2846,1$ ;  $r=10\%$ ;  $n=7$ :

$$P = 2846,1 \cdot FM2(10\%, 7) = 2846,1 \cdot 0,51 = 1450,44$$

Взнос равен 1450440 руб.

**Задача 5.** Фирме предложено инвестировать 200 млн. руб. на срок 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 50 млн. руб.); по истечении четырех лет будет выплачено дополнительное вознаграждение в размере 25 млн. руб. Примет ли она это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 8% годовых?

**Решение**

По формуле (3.1) (Занятие Сложные ссудные ставки) при  $P=200000$ ;  $r=0,08$ ;  $n=4$  определим сумму, которая накопится на счете, если положить деньги в банк:

$$F1=200 \cdot (1+0,08)^4=272,098$$

По формуле (9.1) при  $A=50000$ ;  $r=8\%$ ;  $n=4$  определим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$$FV = 50 \cdot FM3(8\%,4)=50 \cdot 4,5061=225,305$$

С учетом дополнительного вознаграждения в 25 млн. руб., при условии инвестирования 200 млн., на конец четвертого года на счете фирмы будет сумма, равная

$$F2=225,305+25=250,305$$

$F1 > F2$ , поэтому фирме выгодно положить деньги в банк и не принимать данное предложение.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Предприниматель планирует после выхода на пенсию обеспечить себе ежегодный годовой доход в размере 60 тыс. руб. в течение 8 лет. Какую сумму ему необходимо для этого поместить на депозит в момент выхода на пенсию, если банковская ставка по депозитам будет 10% годовых? Предприниматель планирует снимать денежные средства с депозита в начале каждого года и за 8 лет исчерпать депозит полностью.

**Задача 2.** В начале каждого года в течение 13 лет на счет вносится 130 тыс. рублей, процентная ставка составляет 13% годовых. Определить наращенную сумму через 13 лет.

**Задача 3.** Сумма 75 тыс. рублей вносится в конце каждого года на протяжении 18 лет под 13% годовых. Определить величину накопленного вклада через 18 лет.

**Задача 4.** Найти дисконтированную величину 16 вкладов постнумерандо по 100 тыс. рублей при ставке 14% годовых на текущий момент времени и через 3 года.

**Задача 5.** Найти текущую стоимость суммы 15 вкладов пренумерандо по 75 тыс. рублей при ставке 20% годовых.

**Задача 6.** Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 10% годовых, чтобы в течение 12 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 120 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком ежегодно начисляются сложные проценты?

### **Задание на практическое занятие 9. Финансовые ренты**

#### **Контрольные вопросы**

1. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
2. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.

3. Как используются финансовые таблицы для оценки постоянных аннуитетов?
4. Чему равен коэффициент наращивания аннуитета?
5. Чему равен коэффициент дисконтирования аннуитета?
6. Какая связь существует между будущей и приведенной стоимостями аннуитета?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 100 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 7%. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?

**Задача 2.** Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка 9% в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене имеет смысл приобретать эту ренту?

**Задача 3.** В начале каждого года вы вкладываете 500 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 9% годовых. Определить сумму, которая накопится на счете через 5 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** От сдачи в аренду здания предприниматель получает в конце каждого квартала доход в размере 5 тыс. долл., которые он переводит на депозит в банк. Какая сумма будет получена арендодателем в банке в конце года, если банковская ставка по депозитам равна 8% годовых, начисляемых ежеквартально?

**Задача 2.** Преуспевающий предприниматель в знак уважения к своей школе намерен заключить договор со страховой компанией, согласно которому компания ежегодно будет выплачивать школе сумму в 500 тыс. руб. от имени предпринимателя в течение 20 лет. Какой единовременный взнос должен сделать предприниматель, если банковская ставка по вкладам равна 5% годовых?

**Задача 3.** Страховая компания заключила договор с предприятием на 5 лет, установив ежемесячный страховой взнос в сумме 500 тыс. руб.. Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 10% годовых, начисляемую ежемесячно. Определите сумму, которую получит по данному контракту страховая компания по истечении срока договора.

**Задача 4.** Чтобы обеспечить себе дополнительный пенсионный доход, 50-летний Петров планирует воспользоваться услугами накопительной пенсионной системы. Какую сумму денег он должен внести на индивидуальный лицевой счет пенсионного фонда, чтобы после выхода на пенсию в 60 лет

иметь дополнительный годовой доход в 50 тыс. руб. в течении 10 лет? Ставка начисления процентов – 12% годовых.

### Занятие 10. Определение параметров ренты

Постоянный аннуитет (финансовая рента) описывается набором основных параметров – платеж аннуитета, процентная ставка, срок действия аннуитета. Зная эти параметры, можно решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета - определить его будущую и приведенную стоимость. При разработке финансовых контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задаются будущая или приведенная стоимость ренты, и необходимо рассчитать значения ее параметров.

**Цель проведения занятия** – научиться определять параметры аннуитетов, используя формулы финансовых вычислений.

#### Основные формулы

$$A = \frac{FV_{pst}}{FM3(r, n)} \quad (10.1)$$

$$A = \frac{PV_{pst}}{FM4(r, n)} \quad (10.2)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV_{pst}}{A} r + 1\right)}{\ln(1 + r)} \quad (10.3)$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r\right)}{\ln(1 + r)} \quad (10.4)$$

$$FM3 = \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \quad (10.5)$$

$$FM4 = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (10.6)$$

#### Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 30 000 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% ?

**Решение**

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.

По формуле (10.2) при  $A=30\ 000$ ;  $r=10\%$ ;  $n=10$  найдем приведенную стоимость этого аннуитета :

$$PV=30000 \cdot FM4(10\%,10) = 30\ 000 \cdot 6,145 = 184350$$

Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 184 350 руб. можно ежегодно снимать с него 30 000 руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.

Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет ( $60 - 40 = 20$ ) накопить 184350 руб.

Размер вклада можно найти из формулы (11.1), полагая  $FV_{pre}=184350$ :

$$A=184350 / [FM3(10\%,20) (1+r)] = 184350 / (57,274 \cdot 1,1) = 2926,125$$

Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 2916 руб.13 коп.

**Задача 2.** Иванов должен Петрову 200 тыс. руб. Он предлагает вернуть долг равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых?

**Решение**

По формуле (11.4) при  $A=50$ ;  $r=0,12$ ;  $PV_{pst}=200$

$$n = - \frac{\ln(1 - \frac{200}{50} \cdot 0,12)}{\ln(1 + 0,12)}$$

$$n=5,77$$

Долг будет погашен через 5,77 года

**Задача 3.** Господин X выплатил жене при разводе 1 млн. руб. Жена после развода планирует получать ежегодно одинаковые суммы в течение 20 лет. Какую сумму она будет получать, при условии, что процентная ставка по вкладам в банк равна 10% годовых?

**Решение**

1 млн. руб. – это приведенная стоимость срочной ренты постнумерандо, срок ренты- 20 лет, выплаты по ренте – ежемесячные. Величину неизвестного платежа находим из формулы (11.2) при  $PV = 1\ 000\ 000$  ;  $n=20$ ;  $r=0,1$

$$A=1\ 000\ 000 / FM4(10\%,20)$$

$$A=1\ 000\ 000 / 8,5136 = 117\ 459,1$$

Ежегодно жена будет получать 117 459 руб.10 коп.

**Задача 4.** Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 3500 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 600 тыс. руб. в банк под 8% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты ежегодно.

**Решение**

По формуле (10.3) при  $FV=3500$ ;  $A=600$ ;  $r=0,08$ :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{3500}{600} \cdot 0,08 + 1\right)}{\ln(1 + 0,08)}$$

$$n = 4,976443$$

Для создания фонда потребуется 5 лет.

### **Задачи для подготовки к занятию**

**Задача 1.** Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?

**Задача 2.** Задолженность в сумме 500 тыс. руб. погашается в течение 3 лет равными ежемесячными платежами. Определить размер платежа, в расчетах использовать ставку 8% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

**Задача 3.** Предприятие намеревается за 2 года создать фонд развития в сумме 5 млн. руб. Какую сумму предприятие должно ежемесячно ассигновать на эти цели при условии помещения этих денег в банк под сложную процентную ставку 8% годовых с ежемесячным начислением процентов? Какой единовременный вклад в начале первого года нужно было бы сделать для создания фонда?

### **Задание на практическое занятие 10. Определение параметров финансовых рент.**

#### **Контрольные вопросы**

1. Как изменяется коэффициент наращивания аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
2. Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
3. Какая связь существует между оценками аннуитета пренумерандо и постнумерандо?

#### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн. руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн. руб. начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года.

**Задача 2.** Необходимо найти размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, каждая из которых предусматривает начисление сложных процентов по ставке 8% годовых:

- 1) создать за 5 лет резервный фонд в сумме 1 млн. руб.
- 2) погасить через 5 лет текущую задолженность в сумме 1 млн. руб.

### Ситуационные задачи

**Задача 1.** Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому фирма обеспечит работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 8000 руб. в течение 18 лет. Какую сумму ежегодно фирма должна перечислять на банковский счет работника, если работнику 30 лет, выход на пенсию – в 60 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% годовых?

**Задача 2.** Владелец малого предприятия планирует за три года создать фонд развития в сумме 1,5 млн. руб. Он рассматривает следующие возможности для создания фонда с помощью банковского депозита, на который начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых: 1) делать ежегодные равные взносы на депозит; 2) сделать разовый платеж. Определить размеры денежных сумм, которые должен потратить владелец предприятия в каждом варианте.

**Задача 3.** Предприниматель Иванов инвестировал 700 000 руб. в пенсионный контракт. Пенсионный фонд предложил условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться Иванову ежегодно в течение 20 лет исходя из ставки 15% годовых. Какую сумму ежегодно будет получать предприниматель?

**Задача 4.** К моменту выхода на пенсию через 10 лет предприниматель Иванов хочет иметь на счете 300 000 руб. Для этого намерен делать ежегодный взнос в банк в начале каждого года. Определите размер взноса, если банковская ставка по депозитам составляет 7% годовых.

**Задача 5.** Семья Ивановых планирует накопить на летний отпуск 200 тыс. руб.. Для этого в начале каждого месяца в банк на депозит вносится одинаковая сумма. Определить размер ежемесячного взноса, если банковская ставка по депозитам равна 8% годовых с ежемесячным начислением процентов.

**Задача 6.** На новый год глава семьи Ивановых подарил жене и дочери по 500 долл. Дочь следует моде и поэтому приобретает каждый год новую сумку. Мама предпочитает классику и покупает новую дорогую сумку за 500 долл. каждые 5 лет. Определить: 1) на сколько лет хватит дочери этих денег, если она каждый год будет покупать новую сумку за 100 долл., а остаток денег хранить на банковском счете с годовой процентной ставкой 12% годовых? 2) по какой максимальной цене может приобретать сумки дочь, чтобы они с мамой изнашивали свои сумки в одно и то же время?

### Занятие 11. Конверсия и замена рент

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*); или наоборот: замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну – *консолидация рент*.

**Цель проведения занятия** – научиться рассчитывать характеристики заменяющих рент, используя формулы финансовых вычислений.

## Основные формулы

**Выкуп ренты.** Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа выбирается формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо:

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r, n) \quad (11.1)$$

$$PV_{pre} = (1+r)PV_{pst} = A \cdot FM4(r, n) \quad (11.2)$$

**Рассрочка платежей.** Рассрочка платежей – обратная задача к задаче выкупа ренты. Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку. Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты - члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы. Подобные задачи рассматриваются в лабораторной работе № 12.

**Объединение (консолидация) рент.** Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^n PV_i \quad (11.3)$$

где  $PV$ - современная стоимость заменяющей ренты;

$PV_i$ – современная стоимость  $i$ -той заменяемой ренты.

**Замена немедленной ренты на отсроченную.** Пусть имеется немедленная рента с параметрами  $A$ ,  $n$ ,  $r$ . Необходимо отсрочить выплаты на  $t$  лет. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности равенство приведенных стоимостей запишется следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM2(r, n) \cdot PV_2 \quad (11.4)$$

где  $PV_1$  - современная стоимость немедленной ренты;

$PV_2$ – современная стоимость отложенной ренты.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1 + r)^t \quad (11.5)$$

Где  $A_1$  - платеж исходной ренты

$A_2$  – неизвестный платеж отложенной ренты

$t$  – время отложения ренты

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = - \frac{\text{Ln}\{1 - [1 - (1 + r)^{-n_1}](1 + r)^t\}}{\text{Ln}(1 + r)} \quad (11.6)$$

где  $n_2$  – неизвестный срок отложенной ренты

$n_1$  – срок исходной ренты

$t$  – время отложения ренты

в общем случае, когда  $n_1 \neq n_2$  из равенства  $PV_1 = PV_2$  следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM 4(n_1, r)}{FM 4(n_2, r)} (1 + r)^t \quad (11.7)$$

## Типовые задачи с решениями

**Задача 1.** Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями  $A=2$  млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

### Решение

По формуле (11.4) при  $A_1=2$ ;  $t=2$ ;  $r=0,2$

$$A_2 = 2 \cdot (1 + 0,2)^2$$

$$A_2 = 2,88$$

Отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до 2,88 млн.руб.

**Задача 2.** Рента с ежегодными платежами в 2 млн. руб. и сроком 5 лет откладывается на три года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты при условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

### Решение

В соответствии с (11.5) при  $n_1=5$ ;  $t=3$ ;  $r=0,08$ ;  $A=2$

$$n_2 = - \frac{\text{Ln}\{1 - (1 - 1,08^{-5})1,08^3\}}{\text{Ln}1,08} = 6,689$$

Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до 6,689 года, т.е. на 1,689 года.

Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6. тогда приведенная стоимость новой ренты составит

$$PV_2 = 2 \cdot FM4(8\%, 6) \cdot FM2(8\%, 3) = 2 \cdot 4,6288 \cdot 0,7938 = 7,3396$$

Современная стоимость исходной ренты составит

$$PV_1 = 2 \cdot FM4(8\%, 5) = 2 \cdot 3,9927 = 7,9854$$

Разность в сумме 0,6458 млн. руб. необходимо уплатить в начале действия контракта.

**Задача 3.** Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями  $A=2$  млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года с изменением срока ренты до 11 лет. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

**Решение**

По формуле (11.6) при  $A_1=2; t=2; r=0,2; n_1=8; n_2=11$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{FM4(20\%, 8)}{FM4(20\%, 11)} \cdot 1,2^2 = 2 \cdot \frac{3,8372}{4,3271} \cdot 1,2^2 = 2,5539$$

Платеж отложенной ренты равен 2,5539 млн.руб.

**Задача 4.** Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты будут осуществляться 1) через 3 года; 2) немедленно, а сложная процентная ставка равна 4% годовых?

**Решение.**

1) используем формулу (11.3), считая полугодие базовым периодом, при  $t=6$

$$PV = 100 \cdot FM2(2\%, 6) \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 0,888 \cdot 22,3965 = 1988,809$$

Ренту можно приобрести за 1 988 809 руб.

2) используем формулу (11.3), считая полугодие базовым периодом при  $t=0$

$$PV = 100 \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 22,3965 = 2239,65$$

Ренту можно приобрести за 2239650 руб.

**Задача 5.** Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент:

$A_1=100; A_2=120; A_3=300$  (тыс. руб.);  $n_1=6; n_2=11; n_3=8$  лет. Необходимо:

- 1) Определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых:
- 2) Определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 1500 тыс. руб.

**Решение**

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу:

№№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	FM4(r,n)	PV
1	100	6	3,32551	332,551

2	120	11	4,32706	519.472
3	300	8	3.83716	1151,148
Итого				2002,946

1) Платеж заменяющей ренты находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,7) \cdot FM2(20\%,3)} = \frac{2002,946}{3,60459 \cdot 0,5787} = 960,189$$

Платеж заменяющей ренты равен 960 189 руб.

Если бы заменяющая рента была бы немедленной, ее платеж находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,7)} = \frac{2002,946}{3,60459} = 555,665$$

2) Определим современную стоимость заменяющей немедленной ренты:

$$PV = 2002,946 \cdot (1+0,2)^3 = 3461,091$$

Неизвестный срок ренты находим из формулы (10.4) (Занятие № 10):

$$n = - \frac{\ln\left(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r\right)}{\ln(1+r)} \quad \text{при } A=1500; r=20\%; PV=3461,091$$

$$n = - \frac{\ln\left(1 - \frac{3461,091}{1500} \cdot 0,2\right)}{\ln 1,2} = 3,395$$

Установим срок заменяющей ренты 4 года. При этом приведенная стоимость ренты равна

$$PV = 1500 \cdot FM4(20\%,4) = 1500 \cdot 2,5887 = 3883,05$$

Излишек в сумме  $3883,05 - 3461,091 = 421,959$  компенсируем в начале финансовой операции.

### Задачи для подготовки к занятию

**Задача 1.** Три ренты пренумерандо - немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на два года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 6 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент:

$A_1=200$ ;  $A_2=120$ ;  $A_3=100$  (тыс. руб.);  $n_1=6$ ;  $n_2=11$ ;  $n_3=8$  лет. Необходимо:

- 1) Определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых:
- 2) Определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 500 тыс. руб.

**Задача 2.** Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения

кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?

## **Задание на практическое занятие 11. Замена и консолидация рент.**

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое выкуп ренты? Каковы методы решения этой задачи?
2. В чем заключается сущность консолидации рент?
3. Как заменить немедленную ренту на отсроченную ренту?

### **Расчетные задачи**

**Задача 1.** Найти годовую ренту - сумму сроком в 10 лет для двух годовых рент: одна продолжается 5 лет с годовым платежом 1 млн. руб., другая - продолжительностью 8 лет и годовым платежом 0,8 млн. руб. Годовая ставка сложных процентов равна 8% годовых.

**Задача 2.** Необходимо выкупить полугодовую ренту с платежами в 50 тыс. руб., срок ренты – 10 лет; сложные проценты по ставке 10% начисляются по полугодиям.

**Задача 3.** Годовая рента постнумерандо с платежами  $A=200$  тыс. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка для пролонгирования равна 10% годовых. Определить размер платежа отложенной ренты. Как изменится ответ, если платежи в отложенной ренте будут производиться в начале года?

**Задача 4.** Рента постнумерандо с платежами  $A=500$  тыс. руб. и сроком 10 лет откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определить срок отложенной ренты при ставке пролонгирования 12% годовых.

### **Ситуационные задачи**

**Задача 1.** Индивидуальный предприниматель Иванов погашает кредит равными ежемесячными платежами в 120 тыс. руб. в течение 5 лет. Банк согласился уменьшить платежи до 100 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 24 % годовых с ежемесячным начислением процентов?

**Задача 2.** Семья Петровых планирует сдать в аренду квартиру на 10 лет. Первый арендатель предлагает ежемесячную плату 15 тыс. руб., второй – 18 тыс. руб. Какого арендателя следует выбрать семье Петровых, если выплаты во втором варианте начнутся спустя 2 года после подписания контракта, и средняя банковская ставка по вкладам составляет 8% годовых с ежемесячным начислением процентов?

## **Занятие 12. Практическое приложение финансовых вычислений**

Рассмотрим практическое приложение финансовых вычислений на примере решения ситуационных задач, связанных с планированием погашения задолженности и ипотечных кредитов.

На практике часто применяются способы погашения долга равными платежами или равными выплатами долга через равные промежутки времени. Каждый из способов имеет свои преимущества. При равных платежах за-

емщик до конца договора выплачивает одни и те же суммы, включающие в себя проценты и погашающие части долга, которые не равны между собой. При равных выплатах долга платежи не одинаковы, но легко определяются остатки долга.

**Цель проведения занятия** – рассмотреть способы решения ситуационных задач. Задачи решаются в малых группах. Решения, принятые в группах, обсуждаются в конце занятия.

### Типовые задачи с решениями

Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r$  простых ссудных процентов на  $n$  периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1 + nr).$$

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина  $F$  и есть размер возвращаемого платежа.

#### Задача 1. Погашение займа одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются простые проценты.

#### Решение

Величину платежа находим по формуле

$$F = P(1 + nr) \text{ при } P=5; r = 0,1; n = 5:$$

$$F = 5(1 + 0,1 \cdot 5) = 7,5$$

Размер платежа равен 7 500 000 руб.

Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r$  сложных ссудных процентов на  $n$  периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1 + r)^n.$$

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина  $F$  и есть размер возвращаемого платежа.

#### Задача 2. Погашение займа одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются сложные проценты.

#### Решение

Величину платежа находим по формуле

$$F = P(1 + r)^n \text{ при } P=5; r = 0,1; n = 5:$$

$$F = 5(1 + 0,1)^5 = 8,05255$$

Размер платежа равен 8 052 550 руб.

Сам заем называется основным долгом, а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r$  сложных ссудных

процентов на  $n$  периодов. За первый год процентные деньги составят величину  $r \cdot P$ . Если эти деньги выплатить, то останется только основной долг в размере  $P$ . Таким же образом в конце каждого года (кроме последнего) выплачивается одна и та же величина  $r \cdot P$ . В конце  $n$ -ого, последнего года, выплаты составят величину  $r \cdot P + P$ , процентные деньги и сумму основного долга.

Общая сумма выплат за  $n$  периодов составит величину  $P + r \cdot P \cdot n = P(1 + nr)$ , т.е. операция погашения займа способом погашения основного долга одним платежом в конце эквивалентна наращению долга по схеме простых процентов по ставке  $r$ .

### Задача 3. Погашение основного долга одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга одним платежом в конце срока финансовой операции».

#### Решение

Величина процентных платежей за 8 лет составит  $r \cdot P \cdot n = 0,1 \cdot 5 \cdot 5 = 2,5$

Общая сумма выплат составит 2,5 млн. + 5 млн. = 7,5 млн.руб.

Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r$  сложных ссудных процентов на  $n$  периодов. При погашении основного долга равными годовыми выплатами в конце каждого года выплачивается  $n$ -ая доля основного долга и проценты, начисленные на сумму долга, которой пользовались в течение года.

В конце первого года выплачивается доля основного долга, равная величине  $P/n$  и выплачиваются проценты с суммы  $P$ , которой пользовались в течение года, равные величине  $r \cdot P$ . Общий платеж в конце первого года равен величине  $P/n + r \cdot P$ .

В конце второго года выплачивается доля основного долга, равная величине  $P/n$  и выплачиваются проценты с суммы  $(P - P/n)$ , которой пользовались в течение года, равные величине  $r \cdot (P - P/n)$ . Общий платеж в конце второго года равен величине  $P/n + r \cdot (P - P/n)$ .

В общем случае в конце года  $k+1$  общий платеж равен величине  $P/n + r \cdot (P - k \cdot P/n)$ .

Платежи каждого года образуют арифметическую прогрессию с разностью

$d = r \cdot P/n$ , первым членом  $a_1 = P/n + r \cdot P$  и последним членом  $a_n = P/n + r \cdot P/n$ .

Сумма  $n$  членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Величина выплат составит  $P + \frac{Pr(1+n)}{2}$

### Задача 4. Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить ежегодные выплаты и общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга равными годовыми выплатами».

### Решение

Найдем сумму арифметической прогрессии

$$P + \frac{Pr(1+n)}{2} \text{ при } P=5000; r=0,1; n=5:$$

$$5000 + 5000 \cdot 0,1(1+5) / 2 = 6500$$

Сумма ежегодных выплат представлена в таблице.

Год	1	2	3	4	5	
Основной долг	1000	1000	1000	1000	1000	
Проценты	500	400	300	200	100	
Сумма к выплате	<b>1500</b>	<b>1400</b>	<b>1300</b>	<b>1200</b>	<b>1100</b>	<b>6500</b>

Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r$  сложных ссудных процентов на  $n$  периодов. При погашении займа равными годовыми выплатами ежегодные платежи можно рассматривать как годовую ренту (аннуитет) с продолжительностью  $n$  периодов и неизвестным платежом, равным  $A$ . Неизвестный платеж ренты можно найти, приравняв современную стоимость этой ренты сумме займа.

Тогда платеж  $A$  находим из уравнения:  $P = A \cdot FM4(r, n)$ , поэтому

$$A = \frac{P}{FM4(r, n)}$$

Общая сумма выплат при этом составит величину  $n \cdot A$

### Задача 5. Погашение займа равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение займа равными годовыми выплатами».

### Решение

Величину ежегодного платежа находим из уравнения  $A = \frac{P}{FM4(r, n)}$  при  $P=5$ ;

$$r = 0,1; n = 5; FM4(10\%, 5) = 3,791$$

$$A = 1318,913$$

Общая сумма выплат составит  $5 \cdot 1318,913 = 6\,594\,566$  руб.

Взятый заем может погашаться различными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать в нем средства, чтобы погасить заем одним платежом в конце срока финансовой операции. Очевидно, что это возможно только в том случае, если у заемщика есть возможность накапливать деньги в некотором фонде под более высокий процент.

Пусть заем в сумме  $P$  выдан под  $r_1$  сложных ссудных процентов на  $n$  периодов. Тогда к концу срока финансовой операции финансовой операции величина займа составит величину

$F = P(1 + r_1)^n$ . Платежи в погасительный фонд составляют годовую ренту с ежегодным платежом, равным  $A$  и процентной ставкой  $r_2 > r_1$ , будущая стоимость этой ренты равна величине  $F = P(1 + r_1)^n$ . Тогда величину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из уравнения:

$$A = \frac{P(1 + r_1)^n}{FM3(r_2, n)}$$

### Задача 6. Создание погасительного фонда

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. У заемщика есть возможность создать накопительный фонд в банке, начисляющим по вкладам 12% годовых. Найти величину ежегодного платежа в погасительный фонд.

#### Решение

Величину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из формулы

$$A = \frac{P(1 + r_1)^n}{FM3(r_2, n)} \text{ при } P=5; r_1=0,1; r_2=0,12; n=5$$

$$A=1267550$$

Величина ежегодного платежа в погасительный фонд равна 1 267 550 руб. Общие расходы по погашению займа составят  $(1\ 267\ 550 \cdot 5) = 6\ 337\ 749$  руб.

### Задачи для подготовки к занятию

**Задача 1.** Кредит в размере  $K = 400$  тыс. руб., выданный на год под простую ссудную ставку 20% годовых, должен погашаться четырьмя платежами в конце каждого квартала. Долг погашается равными выплатами, т.е. в каждый квартал погашается 100 тыс. руб. основного долга. Определить величину каждой квартальной выплаты, состоящей из погашаемой  $\frac{1}{4}$  части основного долга и процентов с суммы задолженности за соответствующий квартал.

**Задача 2.** Кредит в сумме 100 млн.руб. выдан на 5 лет под 20% годовых. Для погашения кредита создается погасительный фонд, на который начисляются проценты по ставке 22% годовых. Фонд формируется в течение 5 лет, взносы производятся в конце каждого года равными суммами. Необходимо найти размер срочных выплат.

### Задание на практическое занятие 13. Практическое приложение финансовых вычислений

#### Контрольные вопросы

1. Какой кредит называется потребительским? Приведите примеры потребительских кредитов
2. Перечислите основные способы погашения кредита
3. Какой способ погашения кредита наиболее выгоден банку (кредитору)?

4. Какой способ погашения кредита наиболее выгоден заемщику?
5. Почему банки заинтересованы в том, чтобы должник погашал сумму долга частями в течение всего срока кредитования?

### Ситуационные задачи

**Задача 1.** Фирма взяла в банке кредит в сумме 100 млн. руб. на 3 года под 30% годовых. Рассчитать все возможные схемы погашения кредита. Результаты расчетов занести в таблицу:

Способ погашения кредита	Размер платежа			
	Год 1	Год 2	Год 2	Итого
.....				
.....				

**Задача 2.** Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 40 тыс. долл. на 5 лет под 6% годовых. Погашение кредита должно производиться равными ежегодными выплатами в конце каждого года, включающими погашение основного долга и процентные платежи. Начисление процентов производится раз в году. Составить план погашения займа и выбрать оптимальный с точки зрения банка и заемщика.

**Задача 3.** Фирма получила кредит 5 млн. руб. на 4 года под 8% сложных годовых в банке А. Кредитный контракт предусматривает погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке Б. На размещенные средства банк Б начисляет 10% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд вносятся ежегодно равные суммы.

**Задача 4.** Долг, выданный на 5 лет под 8% годовых (сложные проценты), равен 80 тыс. долл. Платежи в погасительный фонд должны возрастать на 10% ежегодно. На взносы в погасительный фонд начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых. Составить план погашения долга.

**Задача 5.** Кредит, выданный на два года, составляет 500 тыс. руб. Процентная ставка по кредиту равна 18%. Клиенту предоставляется возможность выбора следующих вариантов погашения долга:

- 1) Погашение основного долга и выплата процентов осуществляется ежеквартально аннуитетными платежами в конце рентного периода. Проценты выплачиваются от остаточной суммы основного долга.
- 2) Сумма погашения основного долга увеличивается в геометрической прогрессии на 10%. Погасительные платежи осуществляются ежеквартально (в конце квартала). Проценты выплачиваются от остаточной суммы основного долга.
- 3) Проценты начисляются ежемесячно, погашение основного долга с процентами осуществляется единовременным взносом в конце кредитного срока.

Составить план погашения кредита для каждого варианта, определить, какой из вариантов погашения кредита является наиболее выгодным с точки зрения минимизации издержек заемщика.

## Методические указания по самостоятельной работе

Формы самостоятельной работы студентов в соответствии с рабочей программой:

№№	Наименование работы	Кол-во часов	Форма контроля
1.	Подготовка к практическим занятиям	38	Опрос на занятии
2.	Подготовка к контрольным работам	40	Проверка работы
	<b>Всего</b>	<b>78</b>	

Подготовка к практическим занятиям подразумевает повторение лекционного материала; анализ типовых задач и самостоятельное решение задач для подготовки к занятию. При подготовке к занятиям студенты самостоятельно объединяются в малые группы и совместно разбирают решение задач. Таким образом достигается развитие компетенции ОКЗ- быть готовым к кооперации с коллегами, работе в коллективе.

Подготовка к контрольным работам заключается в решении задач на практических занятиях, изучении основной и дополнительной литературы. Контрольная работа № 1 выполняется по материалам занятий 1-8, контрольная работа выполняется по материалам занятий 9-12.

### Варианты контрольной работы

#### Контрольная работа № 1

1. Клиент поместил в банк 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 11 % годовых. Какая сумма будет на его счете через а) 7 месяцев; б) три года; в) 4 года 3 месяца? При расчете используйте формулу обычного процента с приближенным числом дней.
2. Предприниматель получил ссуду в 600 тыс. руб. на полгода. Банк предоставляет ссуду на условиях начисления простых учетных процентов по ставке 16% годовых. Какую сумму предприниматель будет должен банку?
3. В банк вложены деньги в сумме 800 тыс. руб. на полтора года под 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите доход клиента в этой финансовой операции.
4. Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.
5. Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.
6. Контракт на выплату 10 000 долл. 1 ноября и выплату 5000 долл. 1 января следующего года необходимо заменить новым контрактом, в соответствии с которым 1 декабря выплачивается 6000 долл., оставшаяся сумма пога-

- шается 1 марта. Определить сумму второго платежа на основе простой ссудной ставки (следующий год не високосный).
- Номинальная процентная ставка, компенсирующая при наращении инфляцию, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.
  - В банк на депозит внесено 7000 долл., срок депозита - квартал, простая ссудная ставка равна 8% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 2%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

## Контрольная работа № 2

- Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 200 тыс. руб. каждые полгода при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 7% с ежемесячным начислением процентов. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?
- Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка 9% в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене имеет смысл приобретать эту ренту?
- К моменту выхода на пенсию, т.е. через 8 лет, г-н N хочет иметь на счете 30 000 долл. Для этого намерен делать ежегодный взнос по схеме пренумерандо. Определите размер взноса, если банк предлагает 7% годовых.
- Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн. руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн. руб. начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года?
- Раз в квартал делается взнос в банк по схеме постнумерандо в размере 400 долл. Банк ежемесячно начисляет сложные проценты по ставке 5% годовых. Какая сумма будет на счете через 6 лет?
- Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 8% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 300 тыс. руб., исчерпав счет полностью, при следующих условиях: 1) банк начисляет сложные проценты ежеквартально; 2) банк начисляет сложные проценты ежемесячно?
- Вам необходимо накопить 25 тыс. долл. за 8 лет. Каким должен быть ежегодный взнос в банк (схема пренумерандо), если банк предлагает 10% годовых. Какую сумму нужно было бы единовременно положить в банк сегодня, чтобы достичь той же цели?
- Некоторая фирма создала фонд в размере 10 млн. руб. для премирования своих работников. Фирма предполагает ежегодно выплачивать работни-

кам 1 млн. руб. Найти срок использования фонда, если банк начисляет ежегодно сложные проценты по ставке 6% годовых.