

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

---

---

# **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

---

---

Учебное пособие

Томск  
«Эль Контент»  
2012

УДК 53:51(075.8)  
ББК 22.161.68я73  
М 545

Рецензенты:

**Крайнов А. Ю.**, докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры математической физики  
Томского государственного университета;  
**Артемов И. Л.**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики  
и информатики ТУСУРа.

**Гриняев Ю. В.**

М 545 Методы математической физики : учебное пособие / Ю. В. Гриняев,  
Л. Л. Миньков, С. В. Тимченко, В. М. Ушаков. — Томск : Эль Контент, 2012. —  
148 с.

ISBN 978-5-4332-0055-5

Учебное пособие предназначено для студентов факультета дистанционного обучения ТУСУРа.

В пособии излагаются основные положения методов математического моделирования различных физических процессов, рассматриваются основы теории дифференциальных уравнений в частных производных, обсуждаются вопросы постановки краевых условий, приводятся аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического, гиперболического и эллиптического типов.

УДК 53:51(075.8)  
ББК 22.161.68я73

ISBN 978-5-4332-0055-5

© Гриняев, Ю. В., Миньков Л. Л.  
Тимченко С. В., Ушаков, В. М. 2012  
© Оформление.  
ООО «Эль Контент», 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Введение</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1 Математические модели и математическое моделирование</b>                               | <b>11</b> |
| 1.1 Понятие модели и моделирования . . . . .  | 11        |
| 1.2 Примеры математических моделей . . . . .  | 14        |
| 1.3 Методология математического моделирования . . . . .                                     | 19        |
| 1.3.1 Подходы к построению математических моделей . . . . .                                 | 21        |
| 1.3.2 Требования к математическим моделям . . . . .   | 21        |
| 1.3.3 Этапы построения математических моделей . . . . .                                     | 24        |
| <b>2 Уравнения с частными производными</b>  | <b>26</b> |
| 2.1 Основные уравнения математической физики . . . . .                                      | 27        |
| 2.2 Классификация уравнений с частными производными . . . . .                               | 30        |
| 2.3 Методы решения уравнений с частными производными . . . . .                              | 32        |
| 2.4 Краткие сведения из векторного анализа . . . . .  | 34        |
| <b>3 Уравнения параболического типа</b>   | <b>37</b> |
| 3.1 Уравнение теплопроводности и его физическая интерпретация . . . . .                     | 37        |
| 3.2 Вывод уравнений теплопроводности и диффузии . . . . .                                   | 39        |
| 3.3 Граничные условия . . . . .   | 42        |
| 3.4 Уравнение теплопроводности в конечном стержне . . . . .                                 | 44        |
| <b>4 Уравнения параболического типа</b>   | <b>50</b> |
| 4.1 Примеры математических моделей, приводящих к уравнениям гиперболического типа . . . . . | 50        |
| 4.1.1 Электрические колебания в длинных однородных линиях . . . . .                         | 50        |
| 4.1.2 Уравнения электромагнитного поля . . . . .  | 53        |
| 4.1.3 Вывод уравнения колебания струны . . . . .  | 57        |
| 4.2 Решение волнового уравнения . . . . .   | 60        |
| 4.2.1 Однородное волновое уравнение . . . . .   | 60        |
| 4.2.2 Уравнение колебаний при наличии источника . . . . .                                   | 66        |
| 4.2.3 Обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение . . . . .                        | 67        |
| 4.2.4 Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями . . . . .                 | 72        |
| 4.3 Метод Даламбера для уравнений гиперболического типа . . . . .                           | 74        |
| <b>5 Уравнения эллиптического типа</b>  | <b>79</b> |
| 5.1 Оператор Лапласа . . . . .  | 79        |
| 5.2 Преобразование координат . . . . .  | 80        |
| 5.3 Основные типы граничных условий в краевых задачах . . . . .                             | 83        |
| 5.4 Метод функции Грина . . . . .   | 86        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.4.1    | Определение функции Грина . . . . .   | 87         |
| 5.4.2    | Задача Дирихле на плоскости . . . . .   | 90         |
| 5.4.3    | Задача Неймана . . . . .  | 92         |
| 5.4.4    | Задача Дирихле для шара и полупространства . . . . .  | 94         |
| 5.5      | Применение метода Фурье для уравнений эллиптического типа . . . . .                               | 101        |
| 5.5.1    | Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга . . . . .                                  | 101        |
| 5.5.2    | Метод разделения переменных для трехмерного уравнения Лапласа в сферических координатах . . . . . | 105        |
| 5.5.3    | Некоторые свойства многочленов Лежандра . . . . .   | 108        |
| 5.5.4    | Решение задачи Дирихле для шара разложением по многочленам Лежандра . . . . .                     | 109        |
| <b>6</b> | <b>Численные методы решения уравнений</b>   | <b>113</b> |
| 6.1      | Основные понятия метода конечных разностей . . . . .  | 113        |
| 6.1.1    | Общие представления о конечно-разностных формулах . . . . .                                       | 113        |
| 6.1.2    | Метод конечных разностей для решения обыкновенного дифференциального уравнения . . . . .          | 115        |
| 6.1.3    | Метод конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных . . . . .   | 118        |
| 6.2      | Разностные схемы для решения уравнений параболического типа . . . . .                             | 119        |
| 6.2.1    | Метод конечных разностей . . . . .  | 119        |
| 6.2.2    | Построение разностной сетки . . . . .   | 120        |
| 6.2.3    | Аппроксимация уравнения (6.16) . . . . .  | 120        |
| 6.2.4    | Явная разностная схема . . . . .  | 121        |
| 6.2.5    | Неявная разностная схема . . . . .  | 122        |
| 6.2.6    | Порядок аппроксимации явной разностной схемы . . . . .  | 123        |
| 6.2.7    | Порядок аппроксимации неявной разностной схемы . . . . .  | 124        |
| 6.2.8    | Реализация граничных условий . . . . .  | 125        |
| 6.2.9    | Метод прогонки . . . . .  | 127        |
| 6.3      | Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа . . . . .                            | 128        |
| 6.3.1    | Метод конечных разностей . . . . .  | 128        |
| 6.3.2    | Построение разностной сетки . . . . .   | 129        |
| 6.3.3    | Аппроксимация уравнения (6.47). Разностная схема «крест» . . . . .                                | 130        |
| 6.3.4    | Порядок аппроксимации разностной схемы «крест» . . . . .  | 131        |
| 6.3.5    | Реализация начальных и граничных условий . . . . .  | 131        |
| 6.4      | Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа . . . . .                      | 133        |
| 6.4.1    | Метод конечных разностей для решения уравнения Пуассона . . . . .                                 | 133        |
| 6.4.2    | Методы решения уравнения (6.66) . . . . .   | 135        |
| 6.4.3    | Решение уравнения Пуассона со смешанными граничными условиями . . . . .                           | 136        |
|          | <b>Заключение</b>   | <b>139</b> |
|          | <b>Глоссарий</b>  | <b>142</b> |
|          | <b>Предметный указатель</b>   | <b>146</b> |

---

# ВВЕДЕНИЕ

---

Предлагаемый курс «*Методы математической физики*» рассматривает в первом приближении теорию математических моделей различных физических явлений (процессов). Данный курс занимает особое место в математике и физике, находясь на стыке этих наук. В понятие методов математической физики включаются те математические методы, которые применяются для построения и изучения этих моделей, описывающих большие классы физических явлений. Методы математической физики успешно применяются для изучения математических моделей физических явлений, связанных с различными физическими полями и волновыми процессами в теории упругости, гидро- и аэродинамике, электродинамике, акустике и ряде других направлений исследования физических явлений в сплошных средах.

Математические модели этого класса явлений, как правило, описываются при помощи дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Стремление к более детальному изучению физических явлений приводит к усложнению математических моделей, которые, как правило, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, что делает невозможным применение классических методов исследований.

Для детального исследования таких нелинейных моделей успешно применяются численные методы с использованием современной вычислительной техники. В этом курсе также будет рассматриваться применение разностных методов для решения различных задач математической физики.

Однако не надо думать, что классические методы теперь не нужны. Наоборот, в связи с возросшей сложностью и разнообразием задач, моделируемых на ЭВМ, роль классических результатов только возросла. Методы решения задач на ЭВМ опираются, прежде всего, на классические достижения математической физики. Без их знания невозможно ни правильно поставить задачу, ни выбрать подходящий метод решения.

Данный курс предполагает рассмотреть основные проблемы и методы математической физики, научить постановке и решению простейших модельных задач на основе численных методов. При этом требуется знание основных сведений из аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, умение без особых усилий совершать операции дифференцирования, интегрирования, работать с рядами.

Необходимо при этом отметить, что содержание курса в основном основано на интуитивном мышлении, однако без большой потери математической строгости (что очень важно для инженеров). Можно, впадая в одну крайность, излагать предмет на «высоком» ( $\epsilon$ - $\delta$ )-уровне, но тогда, как обычно это бывает, Вы не будете знать, что делать с полученными сведениями. Другая крайность состоит в полном пренебрежении математическими тонкостями, но тогда Вы не будете знать, как действовать. Поэтому в данном курсе мы попытались найти разумный компромисс между этими крайностями.

Итак, резюмируя вышесказанное, можно заключить, что в основе всех расчетов сложных физических явлений лежит математическое моделирование этих процессов, ставшее сейчас одним из основных методов исследования в науке и технике. Изучением математических моделей физических явлений и занимается математическая физика [7].



.....  
*Математическая физика — это наука о математических моделях физических явлений.*  
 .....

В данном курсе рассматриваются:

- основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;
- постановки задач для уравнений в частных производных;
- классические методы решения задач для уравнений в частных производных;
- основные сведения о численных методах решения задач математической физики.

При этом основное внимание уделяется:

- выводу дифференциальных уравнений, описывающих процессы распространения электромагнитных волн, распространения тепла и корректной постановке задачи;
- решению однородных и неоднородных краевых задач методом Фурье;
- составлению и реализации разностных схем для решения краевых задач.

Общеобразовательный курс математической физики излагается на физическом уровне строгости. Такой уровень предполагает математически корректную постановку задачи, а полученные решения исследуются с физической точки зрения. Вместе с тем чисто математическая сторона вопроса (теоремы существования, законности предельных переходов и т. п.) практически не затрагивается. Но даже при этом математический аппарат достаточно сложен и потребует известных усилий.

*Почему необходимо изучать уравнения с частными производными.* Большинство физических законов формулируются на языке уравнений с частными производными. Так, в основе электродинамики лежат уравнения Максвелла, в квантовой механике — уравнение Шредингера, уравнения Навье-Стокса — в гидродинамике. Применяя теорию интегрирования уравнений с частными производными к нахождению интеграла полученного уравнения, тем самым установим общий метод изучения физических явлений. По характеру применяемого метода область физи-

ки, к которой относятся упомянутые выше разделы, называется математической физикой, а те уравнения, к которым приводят ее задачи, носят название дифференциальных уравнений математической физики.

Поскольку мы будем рассматривать математические модели физических объектов или явлений, необходимо опираться на физический эксперимент.

*Физическим экспериментом* называют такие измерения, в которых все воздействия на исследуемую систему поддаются учету. Важнейшим требованием к физическому эксперименту является его воспроизводимость. Очевидно, что не все физические явления можно произвести в лабораторных условиях.

Ясно, что измерения производятся с ограниченной точностью, поэтому указывают не только результат измерения, но и точность, то есть интервал разброса измерений. Только в пределах точности измерений можно сравнивать результаты разных опытов друг с другом и с предсказаниями соответствующей теории.

На основе анализа совокупности экспериментальных результатов формулируются физические законы. Каждый физический закон имеет вполне определенную область применимости, которая задается:

- указанием интервала допустимых значений физических величин, входящих в формулировку закона;
- наивысшей допустимой точностью измерения этих величин;
- указанием множества физических явлений, для которых выполняется данный закон.

Разные законы имеют отличающиеся друг от друга области применимости.

Физические законы, имеющие наиболее обширные области применимости, называют фундаментальными законами. Такими законами, например, являются закон сохранения энергии, закон Кулона, законы Ньютона. При этом полагается, что небольшое число фундаментальных законов вполне достаточно для получения остальных законов и предсказания хода любых физических процессов.

Но многие физические законы, используемые в практике, не могут быть выведены только из фундаментальных законов без использования некоторых частных предположений. В таких случаях прибегают к построению различных моделей. Под моделью понимают некоторую абстрактную систему, которая является упрощенной копией реальной системы. Модель должна иметь область применимости, в которой свойства модели с заданной точностью совпадают со свойствами реальной системы, и допускать достаточно простое математическое описание. Общим свойством всех моделей является наличие эмпирических констант. Отметим, что из самой модели нельзя установить область ее применимости.

Количественное описание физических явлений требует введения различных физических величин, которые должны иметь четкое определение. Физическая величина должна количественно определяться либо из эксперимента, либо выражаться через другие величины, считающиеся известными. Считается, что состояние физической системы определено, если задано некоторое число величин (параметров), которыми полностью определяются все другие интересующие нас величины. Эти параметры называют определяющими параметрами.

Описание макротел, а также введение определяющих параметров может быть осуществлено на нескольких уровнях.

## Уровни описания макросистем

*Микроскопический уровень описания.* Макротело состоит из очень большого числа микрочастиц, а его свойства объясняются конфигурацией и движением этих частиц. Состояние каждой микрочастицы определяется ее положением и скоростью (шесть динамических переменных). В классической физике полагается, что движение микрочастицы подчиняется законам Ньютона. Рассмотрим систему, состоящую из микрочастиц. Тогда для описания макротела необходимо записать уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждой микрочастицы:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  — масса и радиус-вектор  $i$ -той микрочастицы;  $\sum_{k=1, k \neq i}^N \vec{F}_{ik}$  — суммарная сила, действующая на  $i$ -ую микрочастицу со стороны остальных.

Затем необходимо проинтегрировать полученную систему из  $3N$  уравнений при определенных начальных условиях. Это и составляет суть микроскопического описания макротела. При этом макроскопические параметры рассматриваются как среднее значение динамических переменных микрочастиц. Но микроскопическое описание сталкивается с практически непреодолимыми трудностями.

Во-первых, необходимо рассматривать огромное число уравнений. Во-вторых, чтобы проинтегрировать систему уравнений необходимо знать силы взаимодействия или потенциалы взаимодействия, что само по себе является не полностью решенной задачей. Наконец, в-третьих, необходимо иметь  $6N$  начальных условий — начальные координаты и начальные скорости, которые непонятно откуда брать.

Положим, что нам все-таки удалось проинтегрировать систему уравнений, то есть найти законы движения каждой микрочастицы, но это не приведет к сведениям о свойствах макротела в целом. Все дело в том, что в системе, состоящей из очень большого числа частиц, возникают новые закономерности, которые никоим образом не вытекают из свойств отдельной микрочастицы. Это, так называемые, статистические закономерности, которые не проявляются в системе с малым числом частиц. Поэтому переходят на другой уровень описания — статистический.

*Статистический уровень описания.* Статистические закономерности изучаются статистической физикой, задача которой состоит в том, чтобы описать поведение макросистем, если известны свойства микрочастиц. Оказалось, что свойства равновесных систем мало зависят от конкретных свойств микрочастиц и законов их взаимодействия. Поэтому в статистической физике удается построить общие закономерности поведения макросистем в состоянии равновесия. Кроме того, описание системы на статистическом уровне позволяет обойти трудности микроскопического уровня описания, связанные с большим числом уравнений и заданием начальных условий. Тем не менее статистическое описание конкретных систем требует некоторых сведений о законах поведения микрочастиц.

Помимо описания равновесных систем, большой интерес для физики представляет изучение систем, состояние которых изменяется во времени, то есть неравновесных систем, что является задачей физической кинетики. При кинетическом, так же как и при статистическом, описании опираются на представление реальной



системы как сплошной среды. Это приводит к необходимости осреднения микроскопических характеристик частиц по физически бесконечно малому объему или временному интервалу. «Размер» точки сплошной среды и определяется этим объемом.

*Феноменологический (или макроскопический) уровень описания.* Макроскопические определяющие параметры могут быть получены как статистические средние по большому числу микрочастиц. Так, скорость вводится как средняя скорость центра масс всех микрочастиц в физически бесконечно малом объеме, температура — как средняя энергия хаотического движения микрочастиц относительно макроскопического движения, напряжение на площадку — как средний импульс, переносимый микрочастицами через эту площадку, и т. п.

Отметим, что во многих случаях проблема введения определяющих параметров еще открыта. Все дело в том, что переход от большого числа микроскопических параметров к меньшему числу макроскопических параметров является сложной задачей. Определение параметров, характеризующих состояние системы на макроскопическом уровне описания, является важнейшим первоначальным этапом при построении модели.

Как следует из вышеизложенного, описание физических систем на основе корпускулярной теории (микроскопический уровень описания) математически оказалось сложной задачей. Это означает, что макроскопические свойства физических систем практически невозможно получить на основе фундаментальных законов. В этом случае строится феноменологическая модель — модель сплошной среды, не учитывающей атомистического строения реальных тел и использующей представление о непрерывности материальных тел, а следовательно, и макропараметров состояния. Такая замена реальных тел непрерывной средой вполне законна, поскольку результаты, полученные при рассмотрении непрерывных сред, оказываются применимыми к реальным телам. Дискретная система проявляет полевые (непрерывные) черты тем ярче, чем больше частиц в системе. Если частиц в системе достаточно много (обычно ориентируются на число Авагадро), то полевые черты преобладают над дискретными. В этом случае математическая схематизация реальной системы в виде поля становится не только естественной, но и необходимой.

*Математическим аппаратом*, описывающим физические поля, является математическая физика. В классическом смысле под математической физикой понимают математический аппарат изучения физических полей, в которых не заложены механизмы физического процесса. Этот аппарат является основой гидродинамики, теории теплопроводности, теории упругости, классической теории электромагнитного поля. Вообще поля, рассматриваемые в классической физике, можно трактовать как механические системы с бесконечно большим числом степеней свободы, что, естественно, и обуславливает общность соответствующего математического аппарата.

В модели сплошной среды параметры, характеризующие состояние системы, являются непрерывными функциями, что позволяет использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Из физических соображений строятся уравнения относительно выбранных параметров, описывающих рассматриваемый процесс. При этом показывается, как математические понятия и методы естественно вытекают из физических представ-

лений, и прослеживается связь между физическими и математическими подходами, устанавливается наглядный смысл процедур и промежуточных этапов математического решения. Такое изложение математической физики — показать основные идеи на наиболее простом материале — ведет к тому, что математические выкладки и доказательства играют подчиненную роль. Основное внимание уделяется правильному пониманию взаимосвязей и аналогий между реальным объектом и математической моделью.

## Соглашения, принятые в книге

Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



.....  
*Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.*  
 .....



.....  
 Эта пиктограмма означает теорему. Данный блок состоит из *Названия теоремы* (Слова Теорема и Номера теоремы) и *Текста теоремы*.  
 .....



.....  
**Контрольные вопросы по главе**  
 .....

---

## Глава 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

### 1.1 Понятие модели и моделирования

Слово «модель» невольно пробуждает ассоциацию с авиа- и судомодельными кружками. Но модели — не только игрушки, и моделирование — вещь вполне серьезная. Модели реальных объектов, моделирование явлений издавна используются в науке и технике для проверки идей, отработки гипотез, получения экспериментального материала. За примером можно обратиться к авиастроению. Важным элементом проектной и конструкторской работы над новой машиной является выбор ее форм, оптимизация аэродинамических характеристик. Законченная теория здесь пока еще отсутствует, и этот недостаток приходится восполнять экспериментальными исследованиями. Однако экспериментировать с настоящими самолетами, отправляя машину в полет, который почти наверняка закончится аварией, — путь слишком расточительный и для летчика-испытателя опасный. Вот тут и приходят на помощь модели. И реальный самолет, и его уменьшенная копия в воздушном потоке подчиняются одним и тем же законам аэродинамики. При определенных условиях, измерив аэродинамические нагрузки на модели, оказывается возможным пересчитать их на «настоящий» летательный аппарат. Модель и самолет оказываются похожими не только внешне, но и по «физическому содержанию» — их аэродинамические характеристики связаны определенными соотношениями подобия.

Остается еще один шаг — не запускать модель в необъятное небо, а закрепить ее на специальном лабораторном стенде и направить на нее поток воздуха с той скоростью, с которой должна летать модель. Почти как в арифметике — от переменных скоростей воздуха и модели результат не изменится.

Так мы приходим к схеме аэродинамической трубы — установки, которая широко используется для экспериментального изучения воздействия потока газа на обтекаемый объект. Причем в качестве объекта может выступать необязательно

самолет, а и ракета, и мост, и высотное здание. Важно подчеркнуть, что в основе такого рода исследований лежит метод моделирования, опирающийся в данном случае на строгую теоретическую базу, именуемую теорией подобия.

Модель — это не только и не столько внешнее сходство. Главное лежит глубже — поведение модели и реального объекта должно подчиняться одинаковым закономерностям. Изучив их на доступной для исследования модели, оказывается возможным предсказать свойства проектируемой конструкции.

Аэродинамическое моделирование относится к тому типу *физического моделирования*, когда и натуральный объект, и модель имеют одинаковую физическую природу, в данном случае взаимодействие тела с воздушным потоком. Это естественный способ, но далеко не единственный.

Дадим теперь определение модели. *Модель* — это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект, более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом.

Другое не менее важное назначение модели состоит в том, что с ее помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, поскольку сама модель отражает *лишь* некоторые основные характеристики исходного объекта.

Модель позволяет также научиться правильно управлять объектом, апробируя различные варианты управления на модели этого объекта. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени, риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т. п.).

Таким образом, можно сказать, что модель нужна:

- 1) для того чтобы понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;
- 2) для того чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;
- 3) для того чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Хорошо построенная модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает некоторые новые знания об объекте-оригинале. Это, безусловно, очень важное свойство, играющее притягательную роль для лиц, занимающихся изучением моделей.

Процесс построения и исследования модели называется *моделированием*. Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно объединить в две большие группы: материальное (предметное) и идеальное моделирование.

К материальному моделированию относятся *физическое моделирование*, пример которого был рассмотрен выше, и *аналоговое моделирование*.

Рассмотрим задачу определения напряжений, возникающих в балке призматической формы под действием крутящей нагрузки. Здесь, каким бы малым или большим брусом ни моделировалась наша балка, разместить внутри бруска достаточное количество датчиков, не повредив его и не повлияв тем самым на результат измерений, практически невозможно. И все же простая и в то же время эффективная модель для решения данной задачи существует. Изготовим трубу, сечение которой повторяет сечение интересующей нас балки. Торцы трубы затащим резиновой пленкой — мембраной. Подавая в трубу воздух под некоторым давлением, можно заставить мембрану выпучиваться наружу, прогибаться. Это и будет модель закрученной балки. Остается лишь тщательно промерить прогиб мембраны и с помощью несложных формул подобия вычислить величину напряжений в деформированной строительной конструкции.

Уверенность в верности полученного таким образом результата основывается на том, что математическая задача, описывающая напряженное состояние балки, в точности совпадает с задачей о прогибе мембраны. Только в одном случае искомая функция, входящая в уравнение, есть напряжение, а в другом — прогиб мембраны. А раз задачи совпадают, то и решения у них одинаковы. Поэтому форма вспучившейся мембраны, которая может быть измерена с хорошей точностью, дает детальное представление о другом, недоступном для прямого наблюдения — распределении напряжений по сечению балки.

Описанная «мембранная аналогия» дает пример *аналогового моделирования*, т. е. моделирования одних явлений с помощью других, имеющих иную физическую природу. Рассуждая о физических моделях, мы вскользь упомянули о моделях совсем другого типа — математических. Именно так может быть названа математическая задача, которая описывала и прогиб мембраны, и кручение балки. Математические модели обоих явлений оказались одинаковыми, именно поэтому справедлива мембранная аналогия.

Но тут возникает естественный вопрос: а, может быть, нужно непосредственно решить математическую задачу, которую мы нарекли *математической моделью*? Тогда отпадает необходимость измерять прогиб мембраны, т. к. те же самые числа нам даст найденное решение математической задачи. Ненужной станет «резиновая» модель балки, а математическая модель из вспомогательного инструмента превратится в основу нового метода теоретического исследования — метода *математического моделирования*. Математическое моделирование является важнейшим видом идеального моделирования (т. е. моделирования, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой), при котором исследование объекта осуществляется посредством создания модели, сформулированной на языке математики, и использованием тех или иных математических методов для ее исследования. Путь заманчивый, но, чтобы оценить все его достоинства и недостатки, необходимо подробно разобраться в содержании понятия «математическая модель», которое играет столь важную роль в современной науке. Собственно математическая модель и математическое моделирование не являются изобретениями прошедшего века. Так, в физике метод математического моделирования, если пользоваться нынешней терминологией, используется издавна и весьма успешно. Со времен Галилея описание физического явления или процесса считается достоверным, если оно выражено с помощью числовых величин.

Некоторые из этих величин измеряются непосредственно в опыте, для определения других формулируются математические задачи. Откуда берутся эти задачи, как получаются уравнения, их составляющие? Эти уравнения есть запись на языке математики законов природы, которые управляют интересующим нас физическим явлением. Как правило, это законы сохранения: закон сохранения вещества (вещество не может ни появляться из ничего, ни бесследно исчезать), закон сохранения энергии и т. д. Законы эти носят эмпирический характер, они не выводятся ни из каких других известных формул, а являются отражением нашего многовекового опыта наблюдения явлений природы. Несмотря на то, что за прошедшее время человек чрезвычайно расширил сферу своих научных интересов — от микромира до бескрайних просторов Вселенной, с выполнением основных физических законов все обстоит благополучно. В этом гигантских масштабов пространстве ученые не наблюдали пока ни одного события, которое поколебало бы нашу уверенность в справедливости этих законов.

## 1.2 Примеры математических моделей

Что такое математическая модель? Определение, как бы полно и тщательно оно ни было сформулировано, не может конкурировать в смысле наглядности с примером. Поэтому обратимся к наглядному и простому примеру — камню, падающему на землю с небольшой высоты. Причину его падения установил еще Ньютон, сформулировав знаменитый закон тяготения, в соответствии с которым любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Если в качестве упомянутых двух тел фигурируют камень и Земля, выражение для силы притяжения приобретает вид:

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $m$  и  $M$  — масса камня и масса Земли,  $R$  — расстояние между центрами притягивающихся тел,  $G$  — постоянная. В нашем случае можно считать, что расстояние между центром камня и центром Земли практически совпадает с радиусом Земли. Далее, если на тело действует сила  $F$ , то его движение описывается вторым законом Ньютона:

$$ma = F.$$

Входящая сюда величина  $m$  есть вновь масса камня. Названные два закона Ньютона полностью определяют простейшую математическую модель заинтересовавшего нас физического явления — падения камня на поверхность земли. Чтобы ее получить, нужно свести вместе обе выписанные выше формулы:

$$ma = G \frac{mM}{R^2},$$

т. е. все тела у поверхности земли падают с одинаковым ускорением:

$$a = G \frac{M}{R^2}, \quad (1.1)$$

которое называют ускорением силы тяжести и обозначают обычно буквой  $g$ . Его величина, определенная из эксперимента, составляет  $\sim 9,8$  м/с. Последнее уравнение и является простейшей математической моделью рассматриваемого нами несложного физического явления — падения тела. Для определенности, правда, в математическую модель следует включить равенства, задающие исходное механическое состояние нашего конкретного камня, — высоту  $H$ , с которой он падает, и скорость  $v_0$ , точнее, вертикальную ее составляющую, которая была ему сообщена в начальный момент. Если, например, камень отпустили без толчка, то  $v_0 = 0$ .

Математическая модель построена, теперь, решая ее, можно получить исчерпывающее описание процесса падения тела. Это движение оказывается равноускоренным, и, например, на любой момент времени  $t$  можно указать высоту  $h$ , на которой находится тело, и скорость  $v$ :

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}, \quad v = gt. \quad (1.2)$$

Лабораторные опыты полностью подтверждают теоретические результаты, предсказанные с помощью этой математической модели.

Означает ли это, что рассмотренная нами математическая модель исчерпывающим образом описывает падение любого тела? Очевидно, что нет. Например, парашютисты приземляются на поверхность Земли. Независимо от того, на какой высоте спортсмены покинули самолет и сколько времени находились в воздухе, приземляются все они с одной и той же скоростью. Этот пример противоречит построенной выше математической модели (1.1) и следующим из нее формулам (1.2). Однако большого секрета здесь нет. Ясно, что причина отмеченного несоответствия в сопротивлении воздуха, которое мы не учли.

Так, значит, наша модель несостоятельна и формулы (1.2) неверны? Почему же тогда лабораторные опыты их подтвердили?

Дело в том, что любое физическое явление, взятое во всей своей полноте, чрезвычайно сложно, ибо на него, в принципе, влияет неисчислимое количество факторов. Так, в примере с падающим камнем на его движение, помимо рассмотренной силы тяжести, воздействуют и уже упомянутая сила сопротивления воздуха, и притяжение Луны, Солнца, планет, и убывание плотности атмосферы с высотой, и ветер, по-разному дующий на разных высотах, и то обстоятельство, что Земля не шар, а тело более сложной геометрической формы, и вращение Земли, и множество других факторов.

Если попытаться учесть все это в математической модели, то получится настолько громоздкая и сложная математическая задача, что решить ее даже на современных быстродействующих вычислительных машинах будет затруднительно. К счастью, создавать и изучать подобные математические «монстры» нет нужды. Ведь влияние перечисленных факторов неравноценно. В каждом конкретном случае, в каждом определенном варианте падения тела определяющую роль играет ограниченное, как правило, небольшое число таких факторов, а остальные являются второстепенными, несущественными — их влияние исчезающе мало.

Строя математическую модель, нужно заранее оценить, каким факторам в рассматриваемом явлении надо отдать предпочтение, а какие отнести к разряду второстепенных и поэтому не обращать на них внимания. Проведя такое деление на

главные и второстепенные факторы, математическую модель необходимо далее записать в виде строгих физических и математических условий, которые должны четко зафиксировать, когда отброшенными факторами можно пренебречь. Например, если падение тела мы изучаем в «лабораторных условиях», то можно смело отбросить факторы, кроме силы земного притяжения. Даже сопротивление воздуха можно не учитывать — ведь высота, с которой падает шарик в нашей лаборатории, невелика, и он просто не успевает разогнаться до такой скорости, когда это сопротивление станет заметным. Итак, условием применимости нашей простейшей математической модели (1.2) является небольшая высота падения.

Конечно, строгости ради, нужно оговориться, что опыты мы проводим на Земле в неподвижной комнате, а, скажем, не на орбитальной космической станции. Следует также предъявить определенные требования к испытываемому телу — оно должно быть столь же тяжелым и компактным, как лабораторный шарик, а не напоминать листок бумаги, который в полете планирует, а не падает, как камень. Все эти оговорки можно записать на языке математики. И, если они выполнены, математическая модель справедлива или *адекватна* изучаемому явлению — ее предсказания хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Таким образом, мы пришли к важному выводу: математическая модель — это не только уравнения, но и дополнительные условия, устанавливающие границы их применимости. Все полученные с помощью этой модели теоретические результаты будут справедливы только в оговоренных рамках. И бездумное распространение результатов математического моделирования за эти рамки чревато самыми неожиданными последствиями.

Таким образом, конструирование математической модели какого-либо процесса или явления — до крайности деликатное дело. Здесь, с одной стороны, нельзя, как говорится, ни на грамм переложить сложности, иначе из-за обилия уравнений, их громоздкости и т. д. получить решение с помощью имеющихся средств окажется невозможным. С другой стороны, также недопустимо жертвовать ради стремления к простоте различными физическими эффектами, выбрасывая без особых на то оснований из уравнений соответствующие им члены. Тогда математическая модель начнет давать абсурдные результаты, вроде камнем падающего парашютиста в вышеразобранном примере. Чтобы пролезть в такое узкое «игольное ушко», от исследователя требуются и знание содержания исследуемого объекта, и хорошее владение математическими методами. Удачная математическая модель — это половина успеха.

Рассмотрим еще один простейший пример. Пусть тело массой  $m$  колеблется на горизонтальной плоскости под действием пружины с жесткостью  $k$ . Пренебрежем силами трения тела о плоскость и массой пружины. Нас интересует характер и частота колебаний тела.

Для решения поставленной задачи направим ось  $Ox$  вдоль линии колебаний и выберем начало отсчета, отвечающее равновесному положению тела, когда пружина находится в нейтральном состоянии. Если сместить тело в положение  $x$ , то на него будет действовать сила  $-kx$ , стремящаяся вернуть его в нейтральное положение. Применяя второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1.3)$$



Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Здесь  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Таким образом, тело будет совершать гармонические колебания около нейтральной точки с произвольной амплитудой и с угловой частотой  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Отсюда следует, что характер и частота колебаний были получены не из непосредственного рассмотрения механической системы, а из решения дифференциального уравнения. Это уравнение является математической записью физических условий и законов, определяющих процесс колебания системы, и поэтому называется математической моделью рассматриваемой системы.

Конечно, уравнение снова описывает не все стороны рассматриваемого процесса. Так, из него нельзя найти амплитуду колебаний: для этого необходимо задание начальных условий. Далее, в реальной системе колебания все же затухнут, но никаких сведений об этом в уравнении не содержится.

Построение различных моделей одного и того же объекта может иметь целью различную точность, детализацию его свойств. Так, приняв гипотезу вязкого трения, согласно которой противодействующая сила пропорциональна скорости, вместо уравнения (1.3) придем к уравнению:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1.4)$$

то есть к другой математической модели, хотя и того же типа, что и первая.

Общие черты математической модели вырисовываются уже при формулировании содержательной модели реального объекта. Но и после этого бывают возможными различные видоизменения математической модели: в уравнениях можно отбросить какие-либо члены или добавить новые, нелинейные зависимости заменять линейными и наоборот и т. п.

Возможна другая картина: различные реальные объекты или содержательные модели могут иметь одну и ту же математическую модель, например описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Так, в электротехнике показывается, что сила тока  $i(t)$ , возбужденного в некоторый момент в замкнутом контуре, последовательно содержащем сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , удовлетворяет уравнению:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Это уравнение с точки зрения математики совпадает с (1.4), так что обозначение и физический смысл величин с этой точки зрения несущественны. Отсюда следует, что если различные объекты имеют одинаковую математическую модель, то становится возможным моделировать один из этих объектов другим.

В заключение этого раздела рассмотрим процесс распространения тепла в однородном стержне длиной  $L$  (рис.1.1), относительно которого сделаем следующие предположения:

- 1) Стержень сделан из одного однородного проводящего материала.

- 2) Боковая поверхность стержня теплоизолирована (тепло может распространяться только вдоль оси  $x$ ).
- 3) Стержень тонкий, это значит, что температура всех точек в каждом поперечном сечении стержня постоянна.

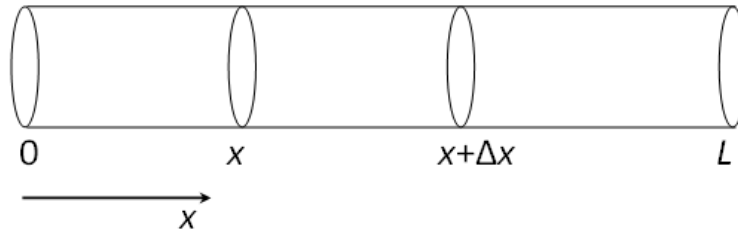


Рис. 1.1 – Распространение тепла в тонком стержне

Если рассмотреть часть стержня на отрезке  $[x, x + \Delta x]$  и воспользоваться законом сохранения количества тепла, то можно написать:

*Общее изменение количества тепла на отрезке  $[x, x + \Delta x]$  = Полное количество тепла, прошедшего через границы + Полное количество тепла, образовавшегося внутри отрезка  $[x, x + \Delta x]$ .*

Теперь, ввиду того, что общее количество тепла внутри отрезка  $[x, x + \Delta x]$  в любой момент времени  $t$  вычисляется по формуле:

*Общее количество тепла внутри отрезка  $it$*

$$[x, x + \Delta x] = \int_x^{x+\Delta x} c\rho Au(s, t) ds,$$

где  $c$  — удельная теплоемкость материала (показывает способность материала запасать тепло),  $\rho$  — плотность материала,  $A$  — площадь поперечного сечения стержня.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho Au(s, t) ds &= c\rho A \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} ds = \\ &= kA(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $k$  — теплопроводность материала (показывает способность материала проводить тепло),  $f(x, t)$  — объемная мощность внешнего источника тепла (калорий/см·с),  $u_x \equiv \partial u / \partial x$ .

Задача состоит в том, чтобы записать уравнение (1.5) в форме, не содержащей интегралов. Для решения этой задачи вспомним теорему о среднем значении из курса «Высшая математика». Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существует, по крайней мере, одна точка  $\xi \in [a, b]$ , такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Применяя этот результат к уравнению (1.5), приходим к следующему уравнению:

$$c\rho A \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = kA(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + Af(\xi, t)\Delta x,$$

$$x < \xi < x + \Delta x,$$

или

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \left( \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right) + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t).$$

Устремляя  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем искомое уравнение (1.6):

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t), \quad (1.6)$$

где  $\alpha^2 = k/(c\rho)$  — коэффициент температуропроводности,  $F(x, t) = 1/(c\rho) \cdot f(x, t)$  — плотность источников тепла.

Дополнительно рассмотрим случай, когда боковая поверхность стержня не является теплоизолированной. Предположим, что величина теплового потока через боковую поверхность стержня в этом случае пропорциональна разности между температурой стержня  $u(x, t)$  и температурой окружающей среды, которая поддерживается постоянной и равной нулю. В этом случае закон сохранения количества тепла приводит к уравнению:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + F(x, t), \quad (1.7)$$

где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности для потока через боковую поверхность.

## 1.3 Методология математического моделирования

Современную науку невозможно представить себе без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» — математической моделью — и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы — от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: *модель — алгоритм — программа* (см. рис. 1.2).

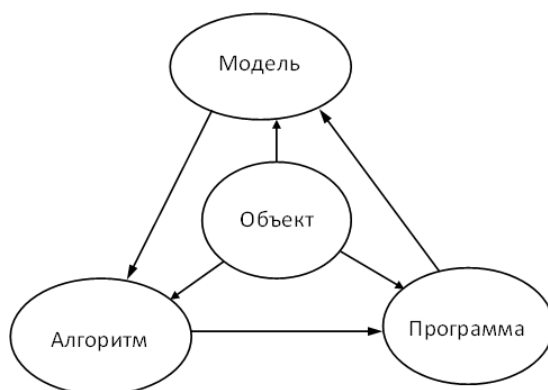


Рис. 1.2 – Этапы математического моделирования

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» — компьютере.

Создав *триаду* «модель — алгоритм — программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как *адекватность* (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы — от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования. Оно дает новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки.

### 1.3.1 Подходы к построению математических моделей

Рассмотрим теперь некоторые подходы к построению математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий и иерархических цепочек.

- 1) *Фундаментальные законы природы.* Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнанны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.
- 2) *Вариационные принципы.* Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых *вариационных принципов*. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Например, все законы геометрической оптики можно получить, минимизируя время прохождения света от одной точки до другой.
- 3) Применение *аналогий* при построении моделей. В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. В качестве примера можно вспомнить «мембранную аналогию».
- 4) *Иерархический подход* к получению моделей. Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого — к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (*иерархия*) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая. В рассмотренных выше примерах уточнение модели заключалось либо в учете сил трения, либо в учете теплообмена с боковой поверхности стержня.

### 1.3.2 Требования к математическим моделям

Остановимся теперь на требованиях, которым должна удовлетворять математическая модель.

*Требование адекватности.* Важнейшим требованием к математической модели является требование ее адекватности (правильного соответствия) изучаемому ре-

альному объекту относительно выбранной системы его свойств. Под этим, прежде всего, понимается:

- 1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, об их взаимосвязи, об устойчивости состояния их эволюции и т. п.;
- 2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

Если ставится второе условие, то говорят о количественных моделях и вместо количественной адекватности говорят также о точности модели.

Естественно говорить не просто об адекватности модели, но также о большей или меньшей адекватности. Подчеркнем, что эту адекватность следует рассматривать только по определенным признакам — свойствам, принятым в данном исследовании за основные.

Для колебательной системы с медленным затуханием модель (1.3) адекватна по отношению к частоте и в определенной мере к характеру колебаний, так как на небольшом интервале времени затуханием колебаний можно пренебречь. Однако если нас интересует скорость этого затухания, то модель (1.3) неадекватна, а в качестве адекватной модели можно взять уравнение (1.4).

В качестве другого примера рассмотрим задачу о распространении тепла в твердом теле, материал которого однороден и изотропен. В этом случае математическая модель сводится к известному уравнению теплопроводности (1.6). Это уравнение с хорошей точностью описывает эволюцию температуры, то есть математическая модель в этом смысле адекватна в количественном отношении. Кроме того, из нее можно вывести следствия качественного характера, также правильно описывающие реальный процесс: при выравнивании температуры при  $t \rightarrow \infty$  для теплоизолированного тела невозможны температурные всплески и т. д. Таким образом, относительно этих свойств процесса уравнение (1.6) адекватно и в качественном отношении. С другой стороны, известно, что из уравнения следует физически абсурдный вывод о бесконечной скорости распространения тепла. То есть если рассматривать эту скорость как существенную характеристику процесса, то уравнение (1.6) окажется неадекватным как в количественном, так и в качественном отношении и потребуются его видоизменить.

Забвение того, что всякая адекватность математической модели реальному объекту лишь относительна и имеет свои рамки применимости, может привести к грубым ошибкам, основанным на бесконтрольном приписывании реальному объекту свойств его модели.

*Требование достаточной простоты.* Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочесть простым. При усложнении модели удастся учесть большое число факторов, которые могут повлиять на изучаемые свойства. Так, при рассмотрении частоты колебаний модель (1.4) имеет более высокую адекватность, чем уравнение (1.3), так как из уравнения (1.3) получаем значение угловой частоты с учетом малого трения:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4m^2}}.$$

В данном примере решение усложненного уравнения не вызывает затруднений. Но это не всегда так. В других ситуациях чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающихся изучению и решению.

Отсюда следует требование *достаточной простоты модели* по отношению к исследуемой системе ее свойств. Модель считается достаточно простой, если современные средства исследования дают возможность провести экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

Требование простоты в каком-то смысле противоположно требованию адекватности: как правило, чем модель более адекватна, тем она менее проста и тем труднее ее анализ. Поэтому часто бывает, что, выбрав модель, приходится ее упрощать, то есть переходить к новой модели. При этом можно упрощать либо содержательную модель объекта, либо его математическую модель. Обычно идут по первому пути, так как при этом остаются выполненными наиболее существенные физические соотношения и более ясны постулаты модели.

Существенным требованием является свойство *полноты математической модели*, которое состоит в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересующие нас утверждения. Так, если для колебательной системы в качестве модели ограничимся уравнением (1.3), то для определения частоты эта модель является полной, а для определения амплитуды — неполной, поскольку нужны начальные условия.

*Свойство продуктивности.* Оно связано с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры (масса, длина и т. п.), включать функциональные зависимости, которые считаются заданными и описывают связи между параметрами. Все эти параметры и зависимости, называемые *исходными данными модели*, влияют на значение величин, получаемых в результате решения математической задачи. Требование продуктивности состоит в том, чтобы в реальных ситуациях исходные данные можно было бы действительно считать заданными, то есть их можно было бы легко измерить или подсчитать и т. п. При этом если речь идет об измерениях, то исходные данные должны легче поддаваться измерению, чем получаемые, так как в противном случае теряет смысл исследование модели.

*Требование робастности*, то есть ее устойчивости относительно погрешности в исходных данных. Исходные данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью, и такая неопределенность не должна существенно влиять на результаты исследования. Так, следует избегать вычитания близких друг к другу приближенных значений величины, потому что при таком вычитании относительная погрешность резко возрастает. Не стоит вычислять массу шляпы, взвесившись сначала в шляпе, а затем без нее и взяв разность результатов.

Желательным, хотя и необязательным является свойство *наглядности математической модели*. Под этим обычно понимается более или менее непосредственный, ясный содержательный смысл ее компонент, который дает возможность не только лишней раз проконтролировать модель, но порой и наметить план решения математической задачи, а также предвидеть результат решения.

### 1.3.3 Этапы построения математических моделей

Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

- 1) Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования, эта стадия может содержать также некоторые предположения (невесомый стержень, толстый слой вещества, прямолинейное распространение световых лучей и т. д.). Данный этап можно назвать формулировкой предмодели.
- 2) Следующий этап — завершение идеализации объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме, с тем чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.
- 3) После выполнения первых двух этапов можно переходить к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т. п.), которому подчиняется объект, и его записи в математической форме. При необходимости используются дополнительные сведения об объекте, также записываемые математически. Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона отнюдь не тривиальная задача.
- 4) Завершает формулировку модели ее «оснащение». Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (скорость в момент  $t = 0$ ) или иные его характеристики, без знания которых невозможно определить поведение объекта. И, наконец, формулируется цель исследования модели.
- 5) Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов. В отличие от рассматриваемых выше простейших случаев, большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.
- 6) В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность — соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.





.....  
Контрольные вопросы по главе 1  
.....

- 1) Что такое модель?
- 2) Для чего нужна модель?
- 3) Что называется моделированием?
- 4) Какие существуют приемы моделирования?
- 5) Что такое математическая модель и математическое моделирование?
- 6) Приведите примеры математических моделей.
- 7) Какие существуют подходы к построению математических моделей?
- 8) Какие требования предъявляются математической модели?
- 9) Назовите этапы математического моделирования.

---

## Глава 2

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

---

Уравнение с частными производными — это уравнение, содержащее частные производные. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от *одной переменной*, в уравнениях с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, температура  $u(x, t)$  зависит от координаты  $x$  и времени  $t$ ). Переменная  $u$  (которую мы дифференцируем) называется *зависимой* переменной. Переменные, по которым происходит дифференцирование (в нашем случае это пространственные переменные  $x, y, z$  и время  $t$ ), называются *независимыми* переменными.

Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

Тогда в достаточно общем виде уравнение в частных производных второго порядка может быть записано

$$F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $F$  — заданная функция своих аргументов.

*Решением уравнения* (2.1) называется всякая функция  $u = u(x, y, z, t)$ , которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным. В отличие от ОДУ, *общее решение* уравнения в частных производных содержит не произвольные константы, а произвольные функции.

## 2.1 Основные уравнения математической физики

Многие физические задачи приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

- 1) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (2.2)$$

- 2) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к *волновому уравнению*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

где  $c$  — скорость распространения волны в данной среде;

- 3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \quad (2.4)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (2.3) переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля, в которых отсутствуют массы и соответственно электрические заряды, также удовлетворяют уравнению Лапласа.

Уравнения (2.2)–(2.5) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Уравнения в частных производных имеют бесконечное множество решений, зависящих от произвольных функций. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям (*условиям однозначности*), вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям*. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные* (или *краевые*) условия, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

*Начальные условия* определяют значения искомой функции  $u = u(M, t)$  или связанные с ней величины (например, ее частные производные) во всем рассматриваемом объеме в начальный момент времени  $t = t_0$  (для каждой точки  $M(x, y, z)$ )

области  $D$ , ограниченной поверхностью  $S$ , (рис. 2.1). На практике начальные условия записываются в виде:

$$u(M, 0) = \varphi_0(M) \quad (2.6)$$

или

$$u(M, 0) = \varphi_0(M)$$

$$\left. \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(M), \quad (2.7)$$

где  $\varphi_0, \varphi_1$  — заданные функции координат. Начальные условия указанного вида, в которых в начальный момент времени задаются значения искомой функции и, возможно, ее частной производной по времени, называются начальными условиями Коши. Число этих условий равно порядку старшей производной по времени, содержащейся в уравнениях.

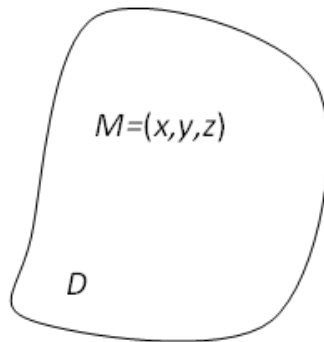


Рис. 2.1 – Задание начальных условий

Сформулируем граничные условия в общем случае. *Граничные (или краевые) условия* определяют значения искомой функции или связанных с ней величин (например, ее частных производных) на границе  $S$  рассматриваемой области  $D$  в любой момент времени  $t$ , рис. 2.2.

*Граничные условия 1-го рода.*

В этом случае на границе  $S$  области  $D$  задают значения искомой функции, граничные условия 1-го рода имеют вид

$$u|_S = f(M_S, t), \quad (2.8)$$

где  $f$  — заданная функция точек  $M_S$  границы  $S$  и времени  $t$ . Например, для уравнения теплопроводности граничные условия 1-го рода соответствуют заданию на границе  $S$  определенного распределения температуры  $u$ .

*Граничные условия 2-го рода.*

В этом случае на границе области задают значения нормальной производной искомой функции, т. е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(M_S, t). \quad (2.9)$$

Например, для уравнения теплопроводности граничные условия 2-го рода соответствуют заданию на границе  $S$  плотности теплового потока  $q$ , т. к. согласно

закону Фурье:

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n}.$$

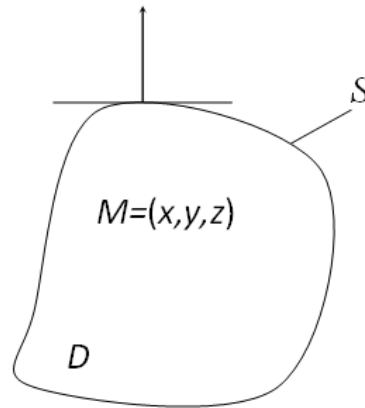


Рис. 2.2 – Задание граничных условий

*Граничные условия 3-го рода.*

В этом случае на границе  $S$  области  $D$  задают линейную комбинацию искомой функции  $u$  и ее производной по нормали к границе, т. е.:

$$\left[ a \frac{\partial u}{\partial n} + bu_0 \right]_S = f(M_S, t), \quad (2.10)$$

где в простейшем случае  $a, b$  — константы, отличные от нуля, т. к. в противном случае условие (2.10) превратилось бы в граничные условия 1-го рода ( $a = 0, b \neq 0$ ), 2-го рода ( $a \neq 0, b = 0$ ) или вообще потеряло бы смысл ( $a = 0, b = 0$ ).

Для уравнения теплопроводности граничные условия 3-го рода соответствуют заданию на границе  $S$  закона теплообмена с окружающей средой.

Кроме начальных и граничных условий, к условиям однозначности относятся *физические условия*, или физические параметры задачи, определяемые, как правило, из эксперимента (например, для уравнения теплопроводности необходимо задать коэффициент температуропроводности  $a^2$ , для волнового уравнения — скорость распространения волны  $c$  и т. д.), и *геометрические условия*, или геометрические параметры задачи (в частности, необходимо задать область, в которой ищется решение задачи, и ее размерность).

При постановке задач математической физики необходимо иметь в виду следующее.

- 1) Вводя дополнительные условия, т. е. ставя задачу математической физики (состоящую из решаемого уравнения и накладываемых на него дополнительных условий), нужно следить за тем, чтобы среди этих условий не было противоречий (в частности, чтобы их не было слишком много), т. к. в этом случае задача не будет иметь решения.
- 2) Вводя дополнительные условия при постановке задачи, необходимо следить, чтобы этих условий не было мало, т. к. в этом случае рассматриваемая задача может иметь не одно, а бесконечно много решений.

- 3) Вводя дополнительные условия, необходимо следить за характером зависимости решения задачи от этих условий. Предпочтительна такая постановка задач математической физики, при которой решение непрерывным образом зависит от дополнительных условий, т. е. достаточно малым изменениям дополнительных условий соответствуют малые изменения решения (задача и ее решение должны быть устойчивыми).

Иными словами, математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям; 1) *решение должно существовать*, 2) *решение должно быть единственным* и 3) *решение должно быть устойчивым*. Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

## 2.2 Классификация уравнений с частными производными

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация уравнений важна потому, что для каждого класса существуют своя теория и методы решения уравнений. Приведем основные методы классификации уравнений.

1. *Порядок уравнения*. Порядком уравнения называют наибольший порядок частных производных, входящих в уравнение (о чем было сказано выше). Например,

$$u_t = u_{xx} \text{— уравнение второго порядка,}$$

$$u_t = u_{xxx} \text{— уравнение третьего порядка.}$$

2. *Число переменных*. Под числом переменных понимают число независимых переменных. Например,

$$u_x = u_{yy} \text{— уравнение с двумя независимыми переменными (} x \text{ и } y \text{);}$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \text{— уравнение с четырьмя независимыми переменными.}$$

3. *Линейность*. Уравнения с частными производными бывают линейными и нелинейными. В линейные уравнения неизвестная функция и все ее частные производные входят линейным образом. То есть неизвестная функция и ее производные не могут умножаться друг на друга, возводиться в степень, а каждое слагаемое содержит либо функцию, либо ее производные только в первой степени.

Дифференциальные уравнения, которые будут рассмотрены в дальнейшем, имеют между собой довольно много общих черт. Все они являются уравнениями второго порядка и линейны относительно неизвестной функции и ее частных производных. Чаще всего коэффициенты перед функцией и ее производными — постоянные числа. Общий вид таких уравнений для функции, зависящей от двух переменных, таков:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x, y). \quad (2.11)$$

Отметим, что тип, а также характер и поведение решений уравнения (2.11) существенно зависят от его коэффициентов.

4. *Однородность*. Однородные линейные дифференциальные уравнения с частными производными и свойства их решений. Если в уравнении (2.11) правая часть

равна нулю, то уравнение называется однородным и имеет вид:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0. \quad (2.12)$$

Вообще в теории дифференциальных уравнений уравнение называется однородным, если функция, тождественно равная нулю, является его решением. Решения однородных линейных уравнений типа (2.12) обладают свойством суперпозиции, которое заключается в следующем.

Если каждая из функций  $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$  является решением уравнения (2.12), то их линейная комбинация

$$C_1u_1(x, y) + C_2u_2(x, y) + \dots + C_nu_n(x, y),$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Доказательство этого свойства очевидно и приводиться не будет. Отметим, что такое же свойство имеет место и для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Однако обыкновенные дифференциальные уравнения  $n$ -порядка имеют в точности  $n$  линейно независимых частных решений, линейная комбинация которых и дает общее решение.

Уравнение с частными производными может иметь бесконечное множество линейно независимых частных решений (система функций называется линейно независимой, если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных).

В соответствии с этим придется иметь дело не только с линейными комбинациями конечного числа частных решений, но и с рядами, членами которых служат произведения произвольных постоянных на частные решения. Такой ряд имеет вид:

$$C_1u_1(x, y) + C_2u_2(x, y) + \dots + C_ku_k(x, y) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} C_ku_k(x, y). \quad (2.13)$$

5. *Виды коэффициентов.* Если коэффициенты  $A, B, C, D, E, F$  уравнения (2.11) постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами. Если эти коэффициенты являются функциями независимых переменных, то уравнение называется уравнением с переменными коэффициентами.

6. *Три основных типа линейных уравнений с частными производными второго порядка.* Рассмотрим уравнение (2.11), полагая, что коэффициенты — постоянные числа. Все линейные уравнения с частными производными второго порядка в зависимости от условий, которым удовлетворяют коэффициенты, делятся на три типа:

- а) если коэффициенты уравнения удовлетворяют условию  $B^2 - 4AC = 0$ , то уравнение относится к *параболическому типу*. Одномерное уравнение теплопроводности  $u_t = a^2u_{xx}$  имеет параболический тип, поскольку  $B^2 - 4AC = 0^2 - 4a^2 \cdot 0 = 0$ ;
- б) если коэффициенты удовлетворяют условию  $B^2 - 4AC > 0$ , то уравнение относится к уравнениям гиперболического типа. Одномерное волновое уравнение  $u_{tt} = c^2u_{xx}$  имеет гиперболический тип, поскольку  $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ ;
- в) если коэффициенты удовлетворяют условию  $B^2 - 4AC < 0$ , то уравнение имеет *эллиптический тип*. Двумерное уравнение Лапласа  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  имеет эллиптический тип, поскольку  $B^2 - 4AC = -4 < 0$ .

Эти названия типам уравнений в частных производных даны по аналогии с классификацией кривых второго порядка в аналитической геометрии.

Замечание. Если коэффициенты уравнения (2.11) — переменные, то тип уравнения устанавливается точно так же. Поскольку теперь коэффициенты являются функциями переменных, то тип уравнения может измениться в области определения неизвестной функции.

Кроме предложенной математической классификации, уравнения в частных производных могут быть классифицированы и с физической точки зрения. Различают *стационарные* и *нестационарные* уравнения, т. е. соответственно уравнения для функций, не зависящих и зависящих от времени. Для решения стационарных уравнений необходимо задать граничные условия, для нестационарных уравнений, кроме граничных, необходимо задать еще и начальные условия. Нестационарные уравнения во многих случаях решать легче, т. к. к ним могут быть применены маршевые методы расчета.

## 2.3 Методы решения уравнений с частными производными

Существует целый арсенал методов, пригодных для практического использования. Наиболее важны те, в которых уравнения с частными производными сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Перечислим некоторые основные методы решения уравнений с частными производными:

- 1) *Метод разделения переменных.* Уравнение с частными производными с  $n$  независимыми переменными сводится к  $n$  обыкновенным дифференциальным уравнениям.
- 2) *Метод интегральных преобразований.* Уравнение с частными производными с  $n$  независимыми переменными сводится к уравнению с частными производными с  $(n - 1)$  независимыми переменными; следовательно, уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению.
- 3) *Метод преобразования координат.* Исходное уравнение с частными производными сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению или к другому, более простому уравнению с частными производными с помощью соответствующего преобразования координат (например, поворота координатных осей и т. п.).
- 4) *Преобразование зависимой переменной.* Исходное уравнение с частными производными преобразуется к такому уравнению с частными производными для другой неизвестной функции, которое решается легче, чем исходное.
- 5) *Метод функций Грина.* Начальные и граничные условия заменяются системой простейших источников, и задача решается для каждого простейшего источника. Полное решение исходной задачи получается в результате суммирования решений для элементарных источников.



- б) *Численные методы*. Исходное уравнение с частными производными сводится к системе разностных уравнений, которая решается методом итераций на ЭВМ. Во многих случаях это единственный способ решить уравнение с частными производными. Кроме разностных методов решения уравнений с частными производными, существуют и другие численные методы, в том числе и основанные на аппроксимации решения полиномиальными поверхностями (аппроксимация сплайнами).

Существуют также некоторые другие методы, такие как *методы теории возмущений, метод интегральных уравнений, вариационные методы*, интересные, в значительной степени, только с исторической точки зрения. Во всех случаях для решения сколько-нибудь сложных практических задач на завершающем этапе решения задачи приходится прибегать к *численным методам*. Остальные методы если и используются, то носят вспомогательный характер и предназначены, в большей степени, либо для облегчения численного решения задачи, либо для предварительного приближенного качественного анализа задачи, которая впоследствии решается численно.

Более подробно остановимся на методе разделения переменных (или методе Фурье). Непосредственно метод Фурье применим к однородным уравнениям с частными производными, которые удовлетворяют однородным граничным условиям. Независимо от типа уравнения метод разделения переменных заключается в поиске решения, которое представляет собой произведение функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Если неизвестная функция зависит только от двух переменных, тогда ее можно записать как:

$$U(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.14)$$

где  $X(x)$  — функция, зависящая только от переменной  $x$ , а  $T(t)$  — функция, зависящая только от переменной  $t$ . Такое решение является простейшим. Общая идея метода заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких простейших решений, удовлетворяющих граничным условиям. Эти простейшие решения называются фундаментальными и являются как бы кирпичиками, из которых строится решение уравнения любого типа. Общее решение находится в виде суперпозиции фундаментальных решений, то есть в виде линейной комбинации следующего вида:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t). \quad (2.15)$$

Поскольку принципу суперпозиции удовлетворяют только однородные уравнения, становится понятным, почему метод Фурье применим непосредственно к таким уравнениям. Вышесказанное относится и к однородности граничных условий. В некоторых случаях неоднородные граничные условия можно свести к однородным заменой неизвестной функции. Это возможно, если уравнение с частными производными для новой функции останется однородным.

Метод разделения переменных выполняется в несколько этапов.

- 1) Нахождение элементарных решений уравнения с частными производными. Для этого подставляют решение в виде (2.14) в исходное дифференциальное уравнение с частными производными, что позволяет свести задачу

к интегрированию двух, но уже обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от произвольных постоянных. В итоге получим бесконечное множество функций, удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными.

- 2) Нахождение решений, удовлетворяющих граничным условиям. Таким образом, имеется бесконечное множество решений исходного уравнения, но не все они удовлетворяют граничным или начальным условиям. На данном этапе выберем подмножество решений, которые удовлетворяют граничным условиям. Для этого подставим общее решение в граничные условия, что позволит найти допустимые значения одной из неизвестных постоянных, входящих в общее решение.
- 3) Нахождение решения, удовлетворяющего начальным условиям. На данный момент имеем решение, удовлетворяющее исходному уравнению и граничным условиям. Остается потребовать, чтобы это решение удовлетворяло и начальным условиям. Подставляя имеющееся решение в граничные условия, получим выражения для определения оставшихся произвольных постоянных.

На этом решение уравнений с частными производными методом Фурье заканчивается и остается применить его для решения конкретной задачи.

## 2.4 Краткие сведения из векторного анализа

Напомним некоторые сведения из курса «Высшая математика». Сначала определим основные действия с векторами.

Суммой  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют вектор с компонентами  $a_1 + b_1$ ,  $a_2 + b_2$ ,  $a_3 + b_3$ , равными сумме одноименных компонент векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Для векторов определены три операции, называемые *умножением*. *Скалярное произведение*  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяется равенством:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Принято обозначение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ . Скалярное произведение двух векторов представляет собой скаляр, т. е. величину, принимающую в каждой точке пространства, где заданы оба вектора, определенное численное значение, не зависящее от выбора системы координат.

Произведение  $\varphi \mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{a}$  на скаляр  $\varphi$  определяется как вектор с компонентами  $\varphi a_1$ ,  $\varphi a_2$ ,  $\varphi a_3$ .

*Векторное произведение*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  двух векторов  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$  определяется равенством:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}.$$

Рассмотрим символический вектор  $\nabla$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

который назовем *дифференциальным оператором*  $\nabla$  (набла). Говоря, что оператор  $\nabla$  есть вектор, подразумевают, что алгебраические операции с символами  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  — производятся, как с компонентами векторов, в окончательных же выражениях им придается смысл соответствующих дифференцирований. При этом, очевидно, безразлично, в каком порядке стоят оператор  $\nabla$  и остальные символы.

Сочетание оператора  $\nabla$  с тремя операциями умножения дает три оператора: grad, div, rot, которые символически могут быть обозначены как:

$$\nabla \equiv \text{grad}, \quad \nabla \cdot \equiv \text{div}, \quad \nabla \times \equiv \text{rot}.$$

Первый из них (градиент) соответствует умножению  $\nabla$  на скаляр, второй (дивергенция) — скалярному умножению  $\nabla$  на вектор, третий (ротор или вихрь) — векторному умножению  $\nabla$  на вектор. Применяя эти операторы к скаляру  $\varphi$  и вектору  $\mathbf{a}$  соответственно, получим:

а) вектор  $\nabla\varphi$  с компонентами

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

называемый *градиентом* скаляра  $\varphi$ ;

б) скаляр

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \equiv \text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

называемый *дивергенцией* или *расхождением* вектора  $\mathbf{a}$ ;

в) вектор с компонентами

$$\nabla \times \mathbf{a} \equiv \text{rot } \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

называемый *ротором* или *вихрем* вектора  $\mathbf{a}$ .

Дивергенция и вихрь вектора характеризуют поведение векторного поля в малом. Пусть, для наглядности,  $\mathbf{a}$  — вектор скорости установившегося течения жидкости. Рассмотрим бесконечно малый элемент объема жидкости, увлекаемый ее током. Тогда значения  $\mathbf{a}$ ,  $\text{div } \mathbf{a}$  и  $1/2 \text{rot } \mathbf{a}$ , сопутствующие этому элементу объема, представят соответственно его вектор скорости линейного перемещения, скорость объемного расширения и вектор скорости вращения. Градиент скалярной функции представляет собой некоторое обобщение производной и является вектором, в направлении которого функция будет расти с наибольшей скоростью. Проекция градиента на вектор представляет собой производную по направлению этого вектора. Символическое скалярное умножение дивергенции на градиент дает оператор Лапласа  $\Delta$ :

$$\text{div} \cdot \text{grad} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

является неотъемлемой частью основных типов уравнений математической физики. Оператор Лапласа является важнейшим оператором, как это легко усмотреть из приведенных выше уравнений. Смысл оператора Лапласа выясним позже.



## Контрольные вопросы по главе 2

- 1) Чем отличаются дифференциальные уравнения в частных производных от обыкновенных дифференциальных уравнений?
- 2) Что называется решением дифференциального уравнения в частных производных?
- 3) Какие физические процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка?
- 4) Перечислите основные уравнения математической физики, описывающие физические процессы.
- 5) Какие дополнительные условия привлекаются для получения однозначного решения уравнений математической физики?
- 6) Что такое начальные условия? Что такое граничные условия?
- 7) Какого рода бывают граничные условия?
- 8) Что такое корректно поставленная задача?
- 9) Что называется порядком уравнения в частных производных?
- 10) Что называется числом переменных уравнения в частных производных?
- 11) Какие уравнения в частных производных называются линейными?
- 12) Какие уравнения в частных производных называются однородными?
- 13) Приведите классификацию основных типов уравнений математической физики.
- 14) Назовите основные методы решения уравнений математической физики.
- 15) В чем заключается метод Фурье?
- 16) Какие основные этапы используются в методе Фурье?

---

## Глава 3

# УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

---

Данный раздел посвящен уравнениям параболического типа и их использованию при решении задач теплопроводности и диффузии. Рассматривается физический смысл различных членов, входящих в уравнения.

Сначала рассмотрим простую физическую задачу и покажем, как она может быть описана посредством математической модели, содержащей уравнение с частными производными с соответствующими граничными и начальными условиями. Затем усложним задачу и покажем, как новые физические явления приводят к новым уравнениям в частных производных. В заключение рассмотрим применение метода разделения переменных к решению параболических уравнений.

### 3.1 Уравнение теплопроводности и его физическая интерпретация

В начале покажем, что некоторые простые физические задачи могут быть описаны посредством математической модели. Для этого рассмотрим простой эксперимент. Возьмем достаточно длинный и тонкий стержень, боковая поверхность которого теплоизолированная, то есть тепло может протекать только через торцы стержня. Подведем к торцам стержня тепло таким образом, чтобы на торцах поддерживалась постоянная температура  $T_1$  и  $T_2$ . Встает вопрос: как будет распределяться температура по длине стержня в различные моменты времени. Экспериментально за распределением температуры по длине стержня можно следить следующим образом. Поместим в разных точках по длине стержня термпары и будем снимать показания одновременно в различные моменты времени. Это позволит построить графики распределения температур в различные моменты времени по длине стержня. Требуется построить такую математическую модель, которая бы с достаточной степенью точности описывала результаты эксперимента. Математическая модель такой физической задачи требует трех типов соотношений, которые в дальнейшем рассмотрим более подробно.

- 1) Уравнения, описывающие физический процесс теплопроводности.
- 2) Граничные условия, описывающие теплообмен на границе (в нашем случае — на торцах стержня).
- 3) Начальные условия, учитывающие состояние стержня в начале процесса.

Теперь на примере уравнения теплопроводности рассмотрим физическую интерпретацию уравнения параболического типа. Основное одномерное уравнение теплопроводности записывается как:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Это уравнение связывает между собой скорость изменения температуры по времени  $u_t$  и вогнутость температурного профиля  $u_{xx}$ , которая служит мерой отличия температуры в данной точке от температуры в соседних точках.

Дадим физическую интерпретацию величины вогнутости. Для этого аппроксимируем эту величину конечными разностями:

$$u_{xx} \cong \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)].$$

Это соотношение можно переписать в другом виде:

$$u_{xx} \cong \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right],$$

что позволит дать следующую интерпретацию величины вогнутости.

- 1) Если температура  $u(x, t)$  меньше среднего значения температуры в двух соседних точках, то  $u_{xx} > 0$  (полный средний поток тепла вдоль оси  $x$  положителен).
- 2) Если температура  $u(x, t)$  равна среднему значению температур в двух соседних точках, то  $u_{xx} = 0$  (полный поток тепла вдоль оси  $x$  равен нулю).
- 3) Если температура  $u(x, t)$  больше среднего значения температур в двух соседних точках, то  $u_{xx} < 0$  (полный поток тепла вдоль оси  $x$  отрицателен).

Другими словами, если температура в точке  $x$  больше, чем средняя температура в двух соседних точках  $x - \Delta x$  и  $x + \Delta x$ , то температура в точке  $x$  будет уменьшаться. Следовательно, точная скорость уменьшения температуры  $u_t$  будет пропорциональна этой разности с некоторым коэффициентом  $a^2$ .

Для обычно рассматриваемых материальных сред характерным является наличие границ. Поэтому для адекватного описания физической задачи необходимо границы включить в математическую модель. Так, в случае со стержнем наличие границ учитывается простыми граничными условиями. Если температура на концах стержня поддерживается все время постоянной и равной соответственно  $T_1$  и  $T_2$ , то можно записать:

$$u(0, t) = T_1, \quad u(l, t) = T_2 \quad \text{при } 0 < t < \infty.$$

Прежде чем перейти к получению первого типа соотношений — уравнений, описывающих физические процессы теплопроводности и диффузии, рассмотрим

два важных физических закона, основывающихся на экспериментальных данных, — закон Фурье и закон Фика.

Закон Фурье определяет поток тепла  $Q$  через градиент температуры  $T$  следующим образом:

$$\vec{j}_Q = -\alpha \nabla T,$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплопроводности материала, который служит мерой того, как хорошо материал проводит тепло. Этот закон гласит, что тепло всегда течет из области более высоких температур в область более низких (отсюда знак «−» перед правой частью равенства в законе Фурье). Иными словами, в случае одномерной задачи для тонкого стержня этот закон гласит: если  $u_x < 0$ , то в точке  $x$  тепло течет *слева направо*, если  $u_x > 0$ , то в точке  $x$  тепло течет *справа налево*.

Аналогично в термодинамике необратимых процессов, согласно закону Фика, потоки диффузии определяются через концентрацию диффундирующего вещества:

$$\vec{j}_c = -D \nabla C,$$

где  $C$  — концентрация диффундирующего вещества, а  $D$  — коэффициент диффузии.

## 3.2 Вывод уравнений теплопроводности и диффузии

Такие явления переноса, как теплопроводность, диффузия, электропроводность и вязкость, являются необратимыми процессами, которые часто называют кинетическими. Диффузия является процессом переноса вещества, теплопроводность — переносом энергии в форме тепла, вязкость — процессом переноса импульса. Эти необратимые процессы возникают в системе вследствие отклонения от равновесного состояния. Такие отклонения выражаются в неоднородном распределении вещества, температур, а также скоростей движения частей системы. Все перечисленные необратимые процессы описываются уравнениями параболического типа, что позволяет подойти к их описанию с единых позиций.

Неоднородность распределения приводит к появлению потоков диффузии, тепла и энтропии. Рассмотрим некоторую аддитивную величину  $A$  (масса, энергия, и т. п.) и отнесем ее к единице массы  $a = A/M$ , то есть введем понятие плотности  $a$  соответствующей величины. Тогда для любого объема  $V$  количество рассматриваемой величины можно выразить как  $A = \int_V \rho a dV$ , где  $\rho$  — плотность вещества.

Запишем уравнение баланса для данной величины. Скорость изменения данной величины, можно определить как

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho a dV. \quad (3.1)$$

Изменение (3.1) происходит, во-первых, за счет потока  $\vec{j}_a$  через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , который определяет количество величины, переносимое за единицу времени через единицу поверхности:

$$- \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{j}_a, \quad (3.2)$$

во-вторых, за счет действия источника данной величины  $\chi_a$ , который может находиться в объеме:

$$\int_V \chi_a dV, \quad (3.3)$$

где  $\chi_a$  — производство величины  $A$  на единицу объема в единицу времени. В результате изменение величины  $A$  в объеме  $V$  определится потоком этой величины через поверхность (3.2) и действием источника (3.3). Математически это можно выразить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho a dV = - \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{j}_a + \int_V \chi_a dV.$$

Если рассматривается пространственное описание, то есть объем зафиксирован в пространстве, то производную по времени можно внести под знак интеграла и заменить частной производной.

Переходя в первом интеграле правой части от поверхностного интеграла к объемному, получим:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_a - \chi_a \right] dV = 0.$$

Поскольку объем интегрирования выбирается произвольно, то равенство интеграла нулю возможно, если подынтегральное выражение равно нулю. В результате получим дифференциальное выражение для баланса данной величины  $A$ :

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_a = \chi_a. \quad (3.4)$$

Теперь, исходя из физических законов, получим уравнения переноса соответствующей величины. Согласно закону Фика:

$$\vec{j}_c = -D \nabla C, \quad (3.5)$$

где  $C$  — концентрация диффундирующего вещества, а  $D$  — коэффициент диффузии. Возьмем в качестве  $a$  выражение  $C/\rho$  и, подставляя его в выражение (3.4) с учетом (3.5), получим диффузионное уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C) + \chi_c. \quad (3.6)$$

В случае переноса тепла следует учесть, что количество тепла  $Q$ , необходимое, чтобы нагреть тело массой  $M$  до температуры  $T$ , определится как  $Q = C_0 M T$ . Тогда:

$$a = \frac{C_0 M T}{M} = C_0 T, \quad (3.7)$$

где  $C_0$  — удельная теплоемкость вещества.

Запишем для потока тепла закон Фурье следующим образом:

$$\vec{j}_Q = -\alpha \nabla T, \quad (3.8)$$



где  $\alpha$  — коэффициент теплопроводности. Подставляя (3.7) и (3.8) в уравнение баланса (3.4), получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \rho C_0 T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + \chi_Q. \quad (3.9)$$

Если константы вещества  $\rho$ ,  $D$ ,  $C_0$ ,  $\alpha$  постоянны, то уравнение диффузии (3.6) примет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C + \chi_c, \quad (3.10)$$

а уравнение теплопроводности —

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{C_0 \rho} \Delta T + \chi_Q \equiv a^2 \Delta T + \chi_Q. \quad (3.11)$$

Здесь введен параметр  $a^2 = \alpha / C_0 \rho$ , который называют коэффициентом температуропроводности.

В дальнейшем в основном будут анализироваться одномерные задачи, для которых уравнения (3.10) и (3.11) примут вид:

$$C_t = DC_{xx} + \chi_c, \quad (3.12)$$

$$T_t = a^2 T_{xx} + \chi_Q. \quad (3.13)$$

Сформулируем одномерную задачу теплопроводности (тонкий длинный стержень) при наличии теплообмена стержня с окружающей средой через боковую поверхность. В этом случае предположение о постоянстве температуры по любому сечению в каждый момент времени, которое неявно предполагалось ранее, является физически менее оправданным, поскольку вблизи боковой поверхности сечения стержня температуры должны меняться довольно резко.

Для вывода уравнения, соответствующего поставленной одномерной задаче, обозначим через  $S$  площадь поперечного сечения стержня, через  $p$  — периметр этого сечения. Далее рассмотрим произвольный отрезок стержня, ограниченный сечениями  $x + \Delta x$  и  $x$ . Через боковую поверхность этого отрезка, площадь которой равна  $p \Delta x$ , по закону Ньютона будет поступать количество тепла за время  $\Delta t$ , равное:

$$\eta (T(x, t) - \tilde{T}(x, t)) p \Delta x \Delta t.$$

Количество тепла, сообщенное отрезку  $\Delta x$  за время  $\Delta t$  через поперечные сечения  $S$ , определится как

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \Delta x \Delta t.$$

Рассмотрим более подробно уравнение теплового баланса.

1. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на  $\Delta t$ , равно:

$$C_0 \rho V \Delta T, \text{ где } \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t.$$

2. Количество тепла, протекающее через поперечное сечение  $S$  за момент времени  $\Delta t$  (тепловой поток), пропорционально площади сечения и равно:

$$-\alpha S \frac{\partial T}{\partial x} \Delta t.$$

Выделим участок  $x$  и  $x + \Delta x$  и составим для него уравнение теплового баланса. Количество тепла, входящее через сечение  $x$  за время  $\Delta t$ , будет равно верхнему выражению. Значение частной производной  $\partial T / \partial x$  в точке  $x + \Delta x$  можно записать как

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x,$$

а, следовательно, тепловой поток через сечение  $x + \Delta x$  будет равен:

$$-\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \right) S \Delta t.$$

Взяв разность входящего потока через сечение  $x$  и выходящего — через сечение  $x + \Delta x$ , получим количество тепла, сообщенное участку  $\Delta x$ :

$$\Delta Q = \alpha S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \Delta t.$$

Суммируя вышеизложенное, тепловой баланс для рассматриваемого отрезка  $\Delta x$  запишем следующим образом:

$$C_0 \rho S \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta t = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \Delta x \Delta t - \eta [T - \tilde{T}] p \Delta x \Delta t.$$

После сокращения на  $S \Delta x \Delta t$  верхнее выражение примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{C_0 \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\eta p}{C_0 \rho S} [T - \tilde{T}].$$

Таким образом, мы получили одномерное уравнение теплопроводности, исходя из физического закона Фурье и уравнения баланса.

### 3.3 Граничные условия

Перейдем теперь к формулировке граничных условий для одномерной задачи теплопроводности (тонкий длинный стержень). Граничные условия характеризуют взаимодействие рассматриваемой системы с окружающей средой. В нашем случае граничные условия определяются характером теплообмена стержня с окружающей средой. Самый простой случай, когда стержень имеет теплообмен только на торцах, а боковая поверхность теплоизолированная.

Рассмотрим сначала *граничные условия первого рода* (на границе задана температура). Рассмотрим тепловой поток в одномерном стержне, изображенном на 3.1, и предположим, что температура концов изменяется по законам  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ .

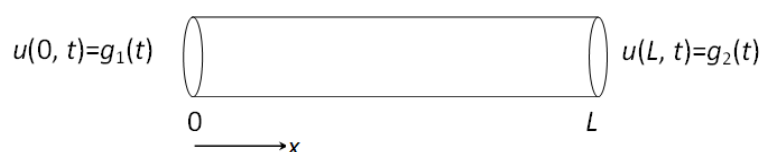


Рис. 3.1 – Тонкий теплопроводящий стержень

Каждое из устройств, которые поддерживают на концах заданную температуру, состоит из термостата и нагревательного элемента для поддержания соответствующего теплового режима. Задачи с граничными условиями первого рода встречаются очень часто. В некоторых случаях задача состоит в том, чтобы найти *управления граничными условиями*, т. е. такие граничные температуры  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ , которые заставят температуру внутри стержня изменяться заданным образом. Например, в металлургии часто необходимо выбрать управления граничными условиями так, чтобы при изменении со временем температуры металла внутри печи *градиент* температуры был невелик.

Если на торцах стержня поддерживается постоянная температура, то граничные условия примут вид:

$$u(0, t) = T_1, \quad u(l, t) = T_2,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — заданные постоянные температуры.

Рассмотрим более общий случай, когда на торцах стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Согласно этому закону поток тепла через единицу площади в единицу времени пропорционален разности температур тела  $T$  и окружающей среды  $\tilde{T}$ , то есть равен  $\eta(T - \tilde{T})$ , где  $\eta$  — коэффициент теплообмена или внешней теплопроводности и  $\eta > 0$ .

Поток тепла положителен, если тепло уходит из стержня в окружающую среду. Согласно закону Фурье тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в единицу времени, определяется как

$$-\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=l}.$$

На торце стержня  $x = l$  поток, идущий во внешнюю среду, совпадает с направлением оси  $x$ , а на торце  $x = 0$  поток противоположен направлению оси  $x$  и поэтому выразится как

$$\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

В общем случае будем считать, что среды на торцах стержня различные, поэтому будут различны  $\eta_l$ ,  $T_l$ ,  $\eta_0$ ,  $T_0$ . В этом случае краевые условия примут вид *граничных условий третьего рода*:

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} &= \eta_0 ((T)_{x=0} - T_0), \\ -\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=l} &= \eta_l ((T)_{x=l} - T_l), \end{aligned}$$

где  $T_0$  и  $T_l$  — заданные температуры внешней среды, которые в общем случае являются функциями времени. Если какой-либо торец теплоизолирован, то соответствующий коэффициент теплообмена равен нулю (например,  $\eta_0 = 0$  на торце  $x = 0$ ). В этом случае мы получаем *граничное условие второго рода*, которое на этом торце примет вид:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0.$$

Если коэффициент теплообмена, наоборот, очень большой, тогда граничное условие на этом торце можно записать как

$$\frac{\alpha}{\eta_0} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = ((T)_{x=0} - T_0),$$

переходящее при  $\eta_0 \rightarrow \infty$  в *граничное условие первого рода*:

$$(T)_{x=0} = T_0.$$

### 3.4 Уравнение теплопроводности в конечном стержне

Положим, что ось стержня совпадает с осью  $OX$ . Начало координат совместим с левым торцом стержня, а правый торец имеет координату  $X = l$ , где  $l$  — длина стержня. Если боковая поверхность стержня теплоизолированная, то на отрезке  $[0, l]$  температура должна удовлетворять параболическому уравнению (при отсутствии источников  $\chi_Q = 0$ ):

$$T_t = a^2 T_{xx} \quad (3.14)$$

и граничным условиям:

$$\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \eta_0 ((T)_{x=0} - T_0), \quad (3.15)$$

$$\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=l} = \eta_l ((T)_{x=l} - T_l). \quad (3.16)$$

Необходимо еще задать начальное состояние стержня. В нашем случае это будет начальное распределение температур, которое можно определить следующим образом:

$$(T)_{t=0} = \varphi(x) \text{ на участке } [0, l], \quad (3.17)$$

где  $\varphi(x)$  — функция, определенная на отрезке  $[0, l]$ , характеризующая распределение температур в начальный момент времени  $t = 0$ .

Таким образом, построена математическая модель, соответствующая физической задаче: найти распределение температур по длине стержня, если известно его начальное тепловое состояние (начальные условия) и известно его тепловое взаимодействие с окружающей средой (граничные условия).

Теперь необходимо решить поставленную задачу математическими методами. Для этой цели используем метод Фурье (метод разделения переменных). Непосредственно к поставленной задаче метод Фурье неприменим, поскольку граничные условия неоднородны и нарушается принцип суперпозиции решений. Так, если температура на торцах стержня отлична от нуля, то решение  $T = 0$  не удовлетворяет граничным условиям, хотя и является решением параболического уравнения. Это значит, что сумма двух решений, каждое из которых удовлетворяет граничным условиям, уже не будет удовлетворять граничным условиям. Поэтому, прежде чем применить метод Фурье, необходимо свести исходную задачу к такой, для которой граничные условия однородны. Рассмотрим, как это можно сделать. Для этого введем новую функцию следующим образом:

$$T(x, t) = \omega(x, t) + \gamma + \gamma_1 x, \quad (3.18)$$

где  $\gamma$  и  $\gamma_1$  — постоянные коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы граничные условия для новой неизвестной функции  $\omega(x, t)$  стали однородными. Подставляя (3.18) в граничные условия (3.15) и (3.16), получим соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} + \alpha \gamma_1 &= \eta_0 [(\omega)_{x=0} + \gamma - T_0], \\ -\alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=l} - \alpha \gamma_1 &= \eta_l [(\omega)_{x=l} + \gamma + \gamma_1 l - T_l], \end{aligned}$$

которые после перегруппировки приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} - \eta_0 (\omega)_{x=0} &= \eta_0 (\gamma - T_0) - \alpha \gamma_1, \\ -\alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=l} - \eta_l (\omega)_{x=l} &= \eta_l (\gamma + \gamma_1 l - T_l) + \alpha \gamma_1. \end{aligned}$$

Чтобы граничные условия для новой функции  $\omega(x, t)$  были однородными, необходимо, чтобы правые части в предыдущих выражениях обратились в нуль:

$$\eta_0 \gamma - \alpha \gamma_1 = \eta_0 T_0, \quad \eta_l \gamma + (\eta_l l + \alpha) \gamma_1 = \eta_l T_l. \quad (3.19)$$

Получим два алгебраических уравнения относительно неизвестных констант  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  и однородные граничные условия для новой функции:

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} - \eta_0 (\omega)_{x=0} &= 0, \\ \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=l} + \eta_l (\omega)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя (3.18) в исходное уравнение (3.14), получим также однородное уравнение для новой неизвестной функции:

$$\omega_t = a^2 \omega_{xx}. \quad (3.21)$$

Наконец, необходимо рассмотреть начальные условия для новой неизвестной функции. Для этого подставим (3.18) в (3.17), что позволит определить начальные условия как

$$(\omega)_{t=0} = \varphi(x) - \gamma - \gamma_1 x \equiv \varphi_1(x). \quad (3.22)$$

Таким образом, задача полностью сформулирована для новой функции  $\omega(x, t)$ , которая удовлетворяет однородному уравнению (3.21) и однородным граничным условиям, что позволяет при математической реализации данной задачи применить метод Фурье (метод разделения переменных) и суперпозицию частных решений Фурье.

Приступим к реализации метода Фурье. Будем искать решение уравнения (3.21) в виде произведения двух функций:

$$\omega(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.23)$$

где  $X(x)$ ,  $T(t)$  — функции только одного переменного. Подставляя (3.23) в уравнение (3.21), получим:

$$X_t = a^2 X_{xx}, \quad (3.24)$$

или, после деления на  $XTa^2$ ,

$$\frac{T_t}{Ta^2} = \frac{X_{xx}}{X} = C. \quad (3.25)$$

Обе части этого уравнения должны быть постоянными, поскольку две функции от различных аргументов будут равны только в случае, если они представляют собой одинаковые константы. Это рассуждение и составляет суть метода разделения переменных. Обозначая эту константу через  $C$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T_t = a^2 CT \quad \text{и} \quad X_{xx} = CX. \quad (3.26)$$

Решение первого уравнения имеет вид:

$$T = C_1 e^{a^2 Ct}.$$

Из физических соображений ясно, что температура в стержне ни в какой его точке не может с течением времени неограниченно возрастать, поэтому константа  $C$  должна быть отрицательной. В этом случае константу  $C$  лучше определить как  $C = -\lambda^2$ , и тогда решение можно записать в следующем виде:

$$T = C_1 e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (3.27)$$

Второе уравнение, записанное как

$$X_{xx} + \lambda^2 X = 0,$$

имеет общее решение:

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (3.28)$$

Учитывая (3.27) и (3.28), получим частное решение уравнения (3.21):

$$\omega(x, t) = (\delta \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad (3.29)$$

где  $\delta = AC_1$ ,  $\beta = BC_1$ .

Далее необходимо потребовать, чтобы полученное решение удовлетворяло граничным условиям (3.20). Подставляя решение (3.29) в граничные условия (3.20), получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha \beta \lambda - \eta_0 \delta &= 0, \\ \alpha [\beta \lambda \cos \lambda l - \delta \lambda \sin \lambda l] + \eta_l [\delta \cos \lambda l + \beta \sin \lambda l] &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения можно получить:

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha \lambda}{\eta_0}, \quad (3.30)$$

а из второго:

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha \lambda \cos \lambda l + \eta_l \sin \lambda l}{\alpha \lambda \sin \lambda l - \eta_l \cos \lambda l}. \quad (3.31)$$

Сравнивая два полученных выражения, находим уравнение для определения константы  $\lambda$ :

$$\frac{\alpha}{\eta_0} = \frac{\alpha \lambda \cos \lambda l + \eta_l \sin \lambda l}{\alpha \lambda \sin \lambda l - \eta_l \cos \lambda l}. \quad (3.32)$$

Это позволяет сделать вывод, что решение уравнения (3.29) удовлетворяет граничным условиям не при всех значениях  $\lambda$ , а только для тех, которые являются корнями уравнения (3.30). Трансцендентное уравнение (3.30) можно представить в виде:

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{\alpha \lambda (\eta_0 - \eta_l)}{\alpha^2 \lambda^2 - \eta_0 \eta_l}. \quad (3.33)$$

Решение этого уравнения можно изобразить графически. Для этого следует построить графики функций:

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha \lambda l \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{\alpha \lambda (\eta_0 - \eta_l)}{\alpha^2 \lambda^2 - \eta_0 \eta_l}.$$

Тогда точки пересечения этих графиков дадут нам корни исходного уравнения (3.31).

На рис. 3.2 сплошной линией изображен график  $\operatorname{tg} \lambda l$ . График функции правой части (3.31) начинается в нулевой точке и имеет отрицательные значения, пока  $\alpha^2 \lambda^2 < \eta_0 \eta_l$ , и при  $\alpha^2 \lambda^2 \rightarrow \eta_0 \eta_l$  стремится к  $-\infty$ . Если выполняется условие  $\alpha^2 \lambda^2 > \eta_0 \eta_l$ , то значения функции положительны и, при  $\alpha^2 \lambda^2 \rightarrow \eta_0 \eta_l$  справа, значения функции становятся бесконечно большими. При  $\lambda \rightarrow +\infty$  значения функции стремятся к нулю. График функции:

$$y_2 = \frac{\alpha \lambda (\eta_0 - \eta_l)}{\alpha^2 \lambda^2 - \eta_0 \eta_l}$$

на рис. 3.2 показан пунктирной линией. Точки пересечения этих графиков дадут значения корней уравнения (3.33), которые образуют бесконечную последовательность  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

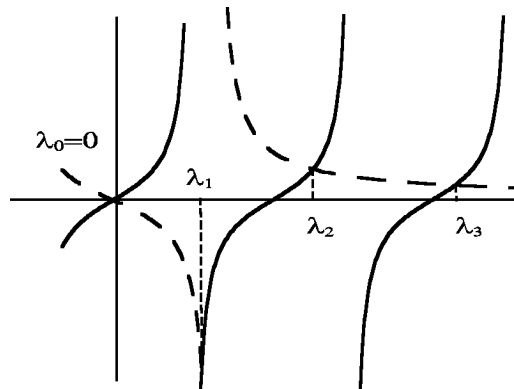


Рис. 3.2 – Графическое решение уравнения (3.33)

В этом случае частное решение вида (3.29), соответствующее определенному значению  $\lambda_n$ , можно записать как

$$\omega_n(x, t) = (\delta_n \cos \lambda_n x + \beta_n \sin \lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 a^2 t},$$

где коэффициенты  $\delta_n, \beta_n$  связаны соотношением (3.30). С учетом этого общее решение примет вид:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{\alpha}{\eta_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}. \quad (3.34)$$

Это решение должно удовлетворять начальному условию (3.22). Подставляя решение (3.34) в начальное условие (3.22), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{\alpha}{\eta_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right) = \varphi_1(x). \quad (3.35)$$

Прежде чем определить неизвестные постоянные  $\beta_n$ , докажем, что система функций:

$$X_n(x) = \frac{\alpha}{\eta_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ортогональна на интервале  $(0, l)$ , то есть при  $m \neq n$  имеет место равенство:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0. \quad (3.36)$$

Ясно, что эти функции удовлетворяют уравнениям следующего вида:

$$X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0, \quad X_m'' + \lambda_m^2 X_m = 0.$$

Умножим первое уравнение на  $X_m$ , а второе на  $X_n$  и вычтем одно из другого:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) X_n X_m = X_m X_n'' - X_n X_m'' = (X_m X_n' - X_n X_m')'.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_n X_m dx = X_m(l) X_n'(l) - X_n(l) X_m'(l) - X_m(0) X_n'(0) + X_n(0) X_m'(0).$$

Функции  $X_m, X_n$  должны удовлетворять граничным условиям, вытекающим из условий (3.20):

$$\begin{aligned} X_m'(0) &= \frac{\eta_0}{\alpha} X_m(0), & X_n'(0) &= \frac{\eta_0}{\alpha} X_n(0), \\ X_m'(l) &= -\frac{\eta_l}{\alpha} X_m(l), & X_n'(l) &= -\frac{\eta_l}{\alpha} X_n(l). \end{aligned}$$

Учитывая эти граничные условия, сразу найдем, что выполняется условие:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

Поскольку  $(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \neq 0$ , то условие ортогональности (3.36) функций  $X_n(x), X_m(x)$  доказано. Теперь запишем равенство (3.35) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n X_n(x) = \varphi_1(x).$$



Умножая это равенство на  $X_m(x)$  а затем интегрируя, в силу ортогональности функций получим выражение для неизвестных коэффициентов в следующем виде:

$$\beta_m = \frac{1}{I} \int_0^l \varphi_1(x) X_m(x) dx, \quad (3.37)$$

где

$$I = \int_0^l X_m^2(x) dx.$$

Подставляя значение коэффициентов  $\beta_m$  в формулу (3.34), получим искомое решение задачи в общем случае.



### Контрольные вопросы по главе 3

- 1) Какие типы соотношений требуются в математической модели для описания физической задачи?
- 2) Что позволяют определить закон Фурье и закон Фика?
- 3) Уравнениями какого типа описываются необратимые процессы?
- 4) В каком случае краевые условия для уравнений теплопроводности принимают вид граничных условий первого, второго, третьего родов?
- 5) Какие преобразования необходимо сделать, чтобы решить уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями методом Фурье?
- 6) Что означает ортогональность функций, на основе которых строится решение методом Фурье?

---

## Глава 4

# УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

---

Данный раздел посвящен уравнениям *гиперболического типа*. Сначала рассматриваются некоторые физические задачи, которые могут быть описаны посредством математических моделей, содержащих уравнения с частными производными. Затем рассматривается решение однородных и неоднородных волновых уравнений с однородными и неоднородными краевыми условиями.

### 4.1 Примеры математических моделей, приводящих к уравнениям гиперболического типа

#### 4.1.1 Электрические колебания в длинных однородных линиях

Обыкновенные дифференциальные уравнения применимы к расчету электрических цепей, содержащих сосредоточенные параметры. Важным примером такой цепи является колебательный контур, состоящий из сопротивления, емкости и катушки индуктивности. При этом считается, что сопротивление контура сосредоточено только на реостате, а катушка индуктивности и соединяющие провода не выделяют тепло. Точно так же переменный магнитный поток индуцирует электродвижущую силу только в катушке, а токи электрического смещения возникают только между обкладками конденсатора. Такие предположения допустимы, если линейные размеры элементов цепи малы по сравнению с длиной электромагнитной волны в окружающей среде диэлектрике.

Если протяженность цепи велика (телеграфные линии, линии электропередачи), то такую цепь уже нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами.

При изучении таких линий следует учитывать сопротивление проводов, утечку тока в атмосферу, взаимную емкость между проводами. Рассмотрим однородную линию, когда сопротивление, индуктивность, емкость и утечка распределены однородно вдоль провода. Для простоты и наглядности примем линию двухпроводной (рис. 4.1).

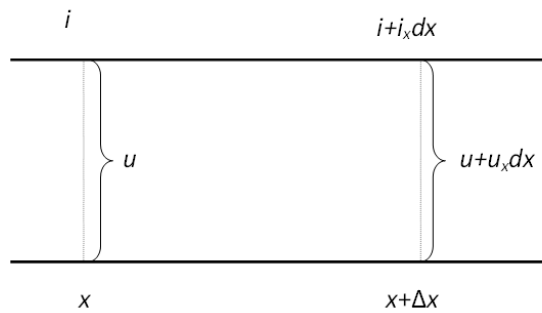


Рис. 4.1 – Двухпроводная линия

Пусть напряжение между проводами на расстоянии  $x$  от начала линии в момент времени  $t$  равно  $u(x, t)$ , а ток —  $i(x, t)$ . Эти функции  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$  являются искомыми. Пусть  $R$  — сопротивление,  $L$  — коэффициент самоиндукции,  $C$  — емкость и  $G$  — коэффициент утечки, рассчитанные на единицу длины провода.

Используем физические закономерности. Коэффициент самоиндукции  $L$  связывает электродвижущую силу самоиндукции со скоростью изменения тока следующим образом:

$$u_L = L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Емкость  $C$  связывает ток смещения и скорость изменения напряжения:

$$i_C = C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ток утечки и напряжение связаны коэффициентом утечки следующим образом:

$$i_G = Gu.$$

Для получения уравнений относительно  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$  выделим участок цепи от точки  $x$  до точки  $x + dx$ . Пусть в точке  $x$  значения напряжения и тока будут  $u(x, t)$ ,  $i(x, t)$ , тогда в бесконечно близкой точке  $(x + dx)$  эти значения будут равны:

$$u + u_x dx \quad \text{и} \quad i + i_x dx.$$

Изменение тока на участке  $dx$  обусловлено током утечки  $Gu$  и током смещения  $Cu_t$ . Тогда можно записать равенство:

$$i - (i + i_x dx) = Gu dx + Cu_t dx.$$

Откуда получим:

$$i_x + Gu + Cu_t = 0. \tag{4.1}$$

Изменение напряжения на участке обусловлено сопротивлением проводов  $Ri dx$  и их самоиндукцией  $Li_t dx$ . Тогда изменение напряжения определится как

$$u - (u + u_x dx) = Ri dx + Li_t dx.$$

Откуда получим:

$$u_x + Ri + Li_t = 0. \tag{4.2}$$

Полученные уравнения (4.1) и (4.2) представляют систему двух уравнений с частными производными первого порядка. Из них легко можно получить два уравнения с частными производными второго порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию  $u(x, t)$  или  $i(x, t)$ .

Для этого продифференцируем уравнение (4.2) по  $x$ , а уравнение (4.1) по  $t$ , что даст:

$$u_{xx} + Ri_x + Li_{xt} = 0, \quad (4.3)$$

$$i_{xt} + Gu_t + Cu_{tt} = 0. \quad (4.4)$$

Из (4.4) найдем:

$$i_{xt} = -Gu_t - Cu_{tt}.$$

А из (4.2) найдем:

$$i_x = -Gu - Cu_t.$$

Полученные значения  $i_{xt}$  и  $i_x$  подставим в уравнение (4.3) и в итоге получим:

$$u_{xx} - R(Gu + Cu_t) - L(Gu_t + Cu_{tt}) = 0$$

или

$$u_{tt} + \frac{RC + LG}{LC}u_t + \frac{RG}{LC}u - \frac{1}{LC}u_{xx} = 0. \quad (4.5)$$

Если будем исключать функцию  $u(x, t)$ , то придем к такому же уравнению относительно  $i(x, t)$ :

$$i_{tt} + \frac{RC + LG}{LC}i_t + \frac{RG}{LC}i + \frac{1}{LC}i_{xx} = 0. \quad (4.6)$$

Получили так называемое телеграфное уравнение. Это уравнение является частным случаем трехмерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u = a_0 u_{tt} + 2a_1 u_t + a_2 u,$$

где  $a_1, a_2, a_0$  — произвольные постоянные. В зависимости от значений коэффициентов из уравнения Гельмгольца можно получить все три типа уравнений с частными производными, которые были приведены выше. Так, при  $a_1 = a_2 = 0$  уравнение Гельмгольца переходит в волновое уравнение:

$$\Delta u = a_0 u_{tt}.$$

Если  $a_0 = a_2 = 0$ , то уравнение Гельмгольца представляет собой уравнение диффузии или теплопроводности:

$$\Delta u = 2a_1 u_t.$$

Если  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ , то получим уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

Таким образом, уравнение Гельмгольца связано со всеми типами уравнений.

### 4.1.2 Уравнения электромагнитного поля

В классической физике рассматриваются две категории объектов: вещество и излучение. В отличие от вещества, излучение в классическом представлении нельзя разделить на отдельные микрочастицы, локализованные в пространстве. Излучение описывается волновыми процессами, из которых следуют явления интерференции и дифракции. В классическом представлении электромагнитное излучение рассматривается в физическом пространстве, которое представляет собой неизменный объект и характеризуется евклидовой геометрией. В таком пространстве всегда можно выбрать ортонормированную систему координат, и если одна из систем задана, то любая другая может быть получена с помощью движения (переноса начала координат и поворота). Ясно, что свойства изучаемых объектов, а следовательно, и величины, описывающие эти свойства, не должны зависеть от выбора системы координат. Пусть некоторая физическая величина характеризуется числом (плотность, температура, заряд, концентрация и т. п.). При данном выборе системы координат такая величина представляет некоторую функцию, принимающую числовые значения в области пространства, занятую физическим объектом. Так как значение физической величины не зависит от выбора системы координат, то должно выполняться условие:

$$f(x, y, z) = f(x', y', z'),$$

где  $f(x', y', z')$  — значение функции в новой системе координат.



.....  
 Число, которое остается постоянным при переходе от одной системы координат к другой, называется **скаляром**. Если скаляры определены в некоторой области пространства, то они образуют **скалярное поле**.  
 .....

Но не все физические величины могут быть представлены только скаляром. Другим по сложности математическим объектом, с помощью которого можно выразить физические величины, является вектор, который характеризуется не только числом, но и направлением. Скаляры и векторы являются частным случаем тензоров — математических объектов, которые широко используются в физике. Тензоры представляют собой математические объекты, с помощью которых осуществляется инвариантное, то есть не зависящее от выбора системы координат описание физических явлений.

*Уравнения Лоренца-Максвелла.* Эти уравнения описывают истинное, а не макроскопическое электромагнитное поле и записываются как

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{C} \dot{\vec{H}}_t, \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{C} \dot{\vec{E}}_t + \frac{4\pi}{C} \vec{j}, \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0. \quad (4.10)$$

Эти уравнения связывают электрическое  $E$  и магнитное  $H$  поля между собой, а также с плотностью заряда  $\rho$  и плотностью электрического тока  $j$ .

Из уравнения (4.8) следует, что заряды являются источниками электрического поля. Согласно (4.10) магнитные поля не имеют источников. Уравнение (4.7) представляет собой математическое выражение закона электромагнитной индукции Фарадея, а уравнение (4.9) обобщает закон Био-Савара.

Покажем, как можно получить уравнение (4.8), исходя из закона Кулона. Из экспериментального закона Кулона следует, что на пробный заряд со стороны другого точечного заряда  $q$  действует сила, равная:

$$\vec{F} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Поскольку между заряженными телами действуют электрические силы, то можно сказать, что заряженное тело создает вокруг себя силовое поле, которое и называют электрическим полем. Чтобы характеризовать электрическое поле, созданное зарядом  $q$ , внесем в него пробный заряд  $q_1$ , который практически не искажает это поле. Тогда из закона Кулона можно записать:

$$\vec{F} = q_1\vec{E},$$

где вектор  $\vec{E}$  не зависит от пробного заряда  $q_1$  и определяется только  $q$  и местом, где помещен пробный заряд. Вектор  $\vec{E}$  называется напряженностью электрического поля и определяется как

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2},$$

где  $\vec{e}_r$  — единичный вектор, направленный из точки нахождения заряда  $q$  в точку, где помещен пробный заряд.

Рассмотрим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность:

$$N = \oint d\vec{S} \cdot \vec{E}.$$

Подставляя сюда значение напряженности и полагая, что поверхность сферическая, а заряд расположен в центре сферы, получим:

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = \oint \frac{q dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Если заряд расположен непрерывно в объеме, то можно записать  $q = \int_V \rho dV$  и, подставляя  $q$  в верхнее выражение, получим:

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда. Переходя от поверхностного интеграла к объемному, получим следующее выражение:

$$\int_V \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство выполняется для произвольного объема, то будет иметь место уравнение:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$

которое получено из экспериментального закона Кулона.

Из уравнений Лоренца–Максвелла легко получить волновые уравнения относительно напряженности электрического и магнитного полей. Получим такое уравнение относительно напряженности электрического поля. Возьмем операцию ротора от уравнения (4.7). В итоге получим:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot \nabla \vec{E} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H}.$$

Учитывая уравнения (4.8) и (4.9), окончательно получим неоднородное волновое уравнение:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2} \ddot{\vec{E}} = 4\pi \nabla \rho + \frac{4\pi}{C} \dot{\vec{j}}.$$

Если заряды распределены равномерно  $\nabla \rho = 0$ , а токи постоянны во времени, то придем к однородному волновому уравнению:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2} \ddot{\vec{E}} = 0.$$

Подобным образом можно получить волновое уравнение относительно напряженности магнитного поля  $H$ , если взять операцию ротора от уравнения (4.9) и учесть (4.7) и (4.10):

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{C^2} \ddot{\vec{H}} = -\frac{4\pi}{C} \nabla \times \dot{\vec{j}}.$$

Положим, что токи, порождающие магнитное поле, распределены равномерно в пространстве  $\nabla \times \dot{\vec{j}} = 0$ , тогда придем к однородному волновому уравнению относительно вектора напряженности магнитного поля:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{C^2} \ddot{\vec{H}} = 0.$$

Таким образом, получили уравнения гиперболического типа относительно напряженности электрического и магнитного полей, каждое из которых распадается на три скалярных уравнения относительно проекций этих векторов в некоторой выбранной системе координат.

Отметим, что в стационарном случае, когда напряженности полей не зависят от времени, волновые уравнения сведутся либо к уравнению Лапласа, при отсутствии зарядов и токов:

$$\Delta \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} = 0,$$

либо к уравнению Пуассона при наличии зарядов:

$$\Delta \vec{E} = 4\pi \nabla \rho.$$

Основываясь на уравнениях Максвелла, можно выразить напряженности через так называемые потенциалы и получить уравнения относительно этих потенциалов. Так, из уравнения (4.10) следует, что напряженность магнитного поля можно представить как ротор некоторого вектора (векторный потенциал). При таком

представлении напряженности магнитного поля уравнение (4.10) удовлетворяется тождественно:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0.$$

Подставляя выражение напряженности магнитного поля в уравнение (4.7), после небольших преобразований получим:

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{1}{C} \vec{A}_t \right) = 0.$$

Это равенство выполняется тождественно, если величину, стоящую в скобках, представить как градиент некоторой скалярной функции (скалярный потенциал). Тогда напряженность электрического поля можно выразить через скалярный и векторный потенциалы следующим образом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{C} \vec{A}_t, \quad \vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4.11)$$

Для определения потенциалов остаются еще два уравнения: (4.8), (4.9). Уравнение (4.8) после подстановки в него  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  преобразуется к виду:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}, \quad (4.12)$$

а уравнение (4.9) после подстановки в него  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  преобразуется следующим образом:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{C^2} \vec{A}_{tt} = \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{C} \varphi_t \right) - \frac{4\pi}{C} \vec{j}. \quad (4.13)$$

Уравнения для потенциалов получились связанными, то есть потенциалы  $A$ ,  $\varphi$  входят одновременно в оба уравнения. Попытаемся сделать эти уравнения независимыми, используя неоднозначность определения потенциалов.

Необходимо отметить, что потенциалы являются вспомогательными величинами, не имеющими физического смысла. Реальный смысл имеют напряженности полей, которые могут быть определены экспериментально, поэтому потенциалы не должны входить в какие-либо окончательные выражения теории поля.

Как видно из выражения (4.11), значение напряженности магнитного поля не изменится, если к  $A$  добавить градиент произвольной функции координат и времени  $\psi(x, y, z, t)$ , то есть перейти от  $A$  к  $A + \nabla\psi$ . Тогда получим, что:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} -$$

значение напряженности не изменится.

Подставляя  $\vec{A} + \nabla\psi$  в первое выражение (4.11), получим:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla\psi) = -\nabla \left( \varphi + \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что если от функции  $\varphi$  отнять  $(1/C) \cdot (\partial\psi/\partial t)$ , то есть заменить  $\varphi$  на  $\varphi - ((1/C) \cdot (\partial\psi/\partial t))$ , то придем к прежнему значению напряженности электрического поля.



Таким образом, замены:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad (4.14)$$

не влияют на значение напряженности полей. Это свойство сохранять значения при заменах (4.14) называют калибровочной инвариантностью. Некоторый произвол в выборе потенциалов позволяет подобрать их таким образом, чтобы уравнения (4.12), (4.13) приобрели максимально простой вид. Для этого потребуем, чтобы выражение в круглых скобках уравнения (4.13) обратилось в нуль:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Это условие называется калибровкой Лоренца. С учетом этого условия уравнение (4.13) примет вид:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{C} \vec{A}_{tt} = -\frac{4\pi}{C} \vec{J},$$

а уравнение (4.12) —

$$\Delta \varphi - \frac{1}{C^2} \varphi_{tt} = -4\pi \rho.$$

Таким образом, калибровка Лоренца позволила получить два независимых волновых уравнения относительно потенциалов  $A$  и  $\varphi$ .

### 4.1.3 Вывод уравнения колебания струны

Положим, что краевые точки струны закреплены, а сама струна туго натянута. Если вывести струну из положения равновесия (оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Предполагается, что все точки струны движутся перпендикулярно положению ее равновесия, то есть точки совершают поперечные колебания, так что в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Выберем в этой плоскости прямоугольную систему координат  $xOy$ . Положим, что в начальный момент времени струна располагалась вдоль оси  $Ox$ , тогда  $u$  будет обозначать отклонение струны от положения равновесия. Ясно, что в процессе колебания отклонение будет зависеть от координаты точки струны  $x$  и от времени  $t$ . Таким образом, чтобы знать положение струны в произвольный момент времени, необходимо найти зависимость  $u$  от координаты и от времени. Тогда при каждом фиксированном значении времени график функции  $u(x, t)$  представляет форму колеблющейся струны в момент времени  $t$ . Частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x, t)$  дает при этом значение углового коэффициента касательной в точке с абсциссой  $x$ . С течением времени форма кривой изменяется, и чтобы представить процесс колебаний, необходимо построить несколько графиков функций  $u(x, t)$  в различные моменты времени. При постоянном значении  $x$  функция  $u(x, t)$  дает закон движения точки с координатой  $x$  вдоль прямой параллельной оси  $Oy$ . В этом случае производная  $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t(x, t)$  определяет скорость этого движения, а вторая производная  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}(x, t)$  позволяет определить ускорение.

Задача заключается в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция  $u(x, t)$ . Предварительно сделаем несколько упрощающих предположений. Будем считать струну абсолютно гибкой, то есть не сопротивляющейся изгибу; это означает, что если удалить часть струны по одну сторону от какой-либо точки, то сила натяжения, заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне.

Струна считается упругой, то есть подчиняется закону Гука: изменение величины силы натяжения при этом пропорционально изменению длины струны.

Полагается, что струна однородна и характеризуется линейной плотностью  $\rho$  (масса единицы длины струны).

Далее полагаем, что на струну действуют силы, параллельные оси  $Ox$ , которые могут зависеть как от координаты  $x$ , так и от времени  $t$ . Полагаем, что силы распределены непрерывно вдоль струны и положительны, если направлены по оси  $Ox$ . Плотность распределения этих сил в общем случае будет функцией координаты и времени  $g(x, t)$ . В частности, если такой силой является вес струны, то  $g(x, t) = -\rho g$ , где  $\rho$  — плотность струны, а  $g$  — ускорение силы тяжести.

Пока что силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, будем пренебрегать.

Будем изучать только малые колебания струны. Это означает следующее. Обозначим через  $\alpha(x, t)$  острый угол между осью  $Ox$  и касательной к струне в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Тогда условие малости колебаний заключается в том, что величиной  $\alpha^2(x, t)$  можно пренебречь:

$$\alpha^2 \approx 0. \quad (4.15)$$

Поскольку разложение функции  $\sin \alpha$  в ряд Тейлора имеет вид:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots,$$

то в силу условия (4.15) из верхнего выражения получим:

$$\sin \alpha \approx \alpha. \quad (4.16)$$

Отсюда имеют место следующие оценки:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx 0, \text{ следовательно, } \cos \alpha \approx 1, \quad (4.17)$$

тогда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \approx \sin \alpha. \quad (4.18)$$

Поскольку  $\partial u / \partial x = \operatorname{tg} \alpha$ , то, в силу полученных выше оценок, будем иметь, что:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0. \quad (4.19)$$

Из (4.19) следует, что в процессе малых колебаний можно пренебречь изменением длины любого участка струны. Длина малого участка  $ds$  в любой момент времени определяется как

$$ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + du^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx \approx x_2 - x_1. \quad (4.20)$$

Покажем, что при сделанных выше предположениях величину силы натяжения  $T$  можно считать постоянной, не зависящей ни от точки приложения, ни от времени.

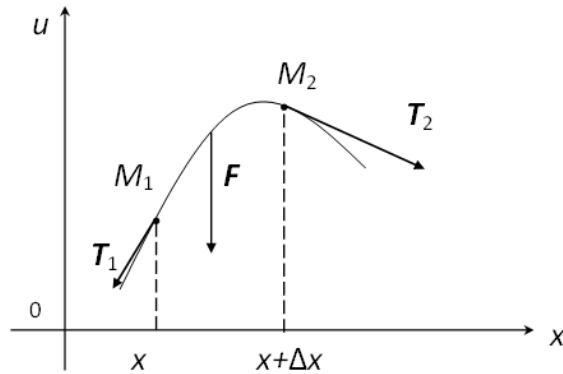


Рис. 4.2 – Силы, действующие на струну

Возьмем какой-либо участок струны  $M_1M_2$  в момент времени  $t$  и заменим действие отброшенных участков силами натяжения  $T_1$  и  $T_2$ . Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси  $0u$  и внешние силы также параллельны этой оси, то сумма проекций сил натяжения на ось  $0x$  должна быть равной нулю:

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (4.21)$$

Отсюда, в силу (4.17), можно считать, что  $T_1 = T_2$ . Поскольку точки выбраны произвольно, то это и доказывает, что в выбранный момент времени силы натяжения во всех точках равны между собой.

Поскольку изменением длины любого участка струны в любой момент времени пренебрегаем, то, в силу закона Гука, остается постоянным и натяжение струны в любой момент времени. Таким образом, в пределах выбранной точности доказали, что натяжение струны в любой точке и в любой момент времени остается постоянным, то есть:

$$T = T_0. \quad (4.22)$$

Перейдем к выводу уравнения колебания струны. Выделим бесконечно малый участок струны  $M_1M_2$ , который проектируется на интервал  $[x, x + dx]$  (рис. 4.2). На этот участок действуют силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$ , заменяющие влияние отброшенных участков струны. Силы натяжения направлены по касательной к струне в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Согласно равенству (4.22) величина этих сил постоянна и равна  $T_0$  и проекция этих сил на ось  $0x$  равна нулю.

Вычислим сумму проекций этих же сил на ось  $0u$ :

$$-T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

В силу (4.18) можно записать, что:

$$\sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = u_x(x + dx, t) \quad \text{и} \quad \sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = u_x(x, t).$$

Тогда можно получить следующее выражение:

$$T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0 [u_x(x + dx, t) - u_x(x, t)] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (4.23)$$

Равнодействующую внешних сил в момент времени  $t$  обозначим как  $F$ . Согласно определению функции  $g(x, t)$  и приближенному равенству (4.20) можно записать, что:

$$F \approx g(x, t) ds \approx g(x, t) dx. \quad (4.24)$$

Направление равнодействующей силы определяется знаком функции  $g(x, t)$ .

После того как найдены все силы, действующие на участок  $M_1M_2$ , применим к нему второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех сил, действующих на этот участок (ввиду малости участка его заменяем материальной точкой).

Так как масса участка равна  $dm = \rho dx$ , то, используя выражения (4.23) и (4.24), получим:

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t) dx.$$

После сокращения на  $dx$ , разделив все члены на  $\rho$ , окончательно получим уравнение колебания струны в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t), \quad (4.25)$$

где  $a^2 = T_0/\rho$  — положительная постоянная величина.

В результате получили дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (4.25) называют уравнением колебания струны или одномерным волновым уравнением. Это одно из простейших и в то же время важнейших дифференциальных уравнений математической физики. К такому уравнению сводится не только рассмотренная выше задача, но и многие другие.

Если внешние силы отсутствуют  $g(x, t) = 0$ , то уравнение (4.25) называется однородным и описывает свободные колебания.

При наличии внешних сил  $g(x, t) \neq 0$  уравнение (4.25) называется неоднородным и описывает вынужденные колебания. Когда на струну действуют только силы тяжести, а натяжение струны велико, то вторым слагаемым в правой части уравнения (4.25) можно пренебречь по сравнению с первым и рассматривать, таким образом, колебания струны как свободные.

При выводе уравнения колебания струны были произведены допущения как механического, так и геометрического характера. Следует сказать, что такое положение имеет место и при выводе дифференциальных уравнений как в частных производных, так и обыкновенных, относящихся к другим задачам математической физики. Вопрос о том, насколько точно полученные уравнения описывают физический процесс, может быть решен только сравнением результатов, полученных при решении уравнений и экспериментальным путем.

## 4.2 Решение волнового уравнения

### 4.2.1 Однородное волновое уравнение

Волновое уравнение для одномерного случая имеет вид:

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}. \quad (4.26)$$

Математическая задача, к которой приводит изучение колебательных и волновых процессов, происходящих в физических системах, может быть поставлена следующим образом. Найти решение волнового уравнения (4.26), которое удовлетворяет начальным условиям:

$$u(x, 0) \equiv (u)_{t=0} = f(x), \quad (4.27)$$

$$u_t(x, 0) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = F(x) \quad (4.28)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (4.29)$$

Функция  $u(x, t)$  определена на  $0 \leq x \leq l$ ,  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

Рассмотрим метод разделения переменных для решения сформулированной задачи. На первом этапе ищем решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$U(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.30)$$

Здесь  $X(x)$  — функция только от координаты  $x$ , а  $T(t)$  — функция только времени. Подставляя решение в виде (4.30) в исходное уравнение (4.26), получим:

$$TX_{xx} = \frac{1}{a^2}XT_{tt}.$$

Это выражение после деления на  $XT$  можно представить как

$$\frac{X_{xx}}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_{tt}}{T}. \quad (4.31)$$

Поскольку левая часть уравнения (4.31) является только функцией координат, а правая — только функцией времени, то равенство (4.31) возможно только в том случае, если обе части являются константами, равными между собой. Это условие можно записать как

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T_{tt}}{T} = \frac{X_{xx}}{X} \equiv C.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X_{xx} - CX = 0, \quad (4.32)$$

$$T_{tt} - Ca^2T = 0. \quad (4.33)$$

Для выяснения знака у константы  $C$  обратимся к краевым условиям (4.29). Подставляя решение (4.30) в граничные условия (4.29), получим:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Если положить, что функция от времени равна нулю  $T(t) = 0$ , то решение (4.30) будет обращаться в нуль при любых значениях координат и времени, то есть получим решение, тождественно равное нулю. Конечно, такие решения не представляют интереса. Поэтому следует положить, что:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (4.34)$$

Из уравнения (4.32) следует, что оно имеет решение тождественно равное нулю при любом значении  $C$ . Однако при некоторых значениях  $C$  уравнение (4.32) имеет и отличные от нуля решения.

Как следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение уравнения (4.32) ищем в виде  $e^{rx}$ . В этом случае характеристическое уравнение примет вид:

$$r^2 - C = 0.$$

Рассмотрим различные случаи значения константы  $C$ .

1. Пусть константа имеет вид  $C = \lambda^2 > 0$ . В этом случае корни характеристического уравнения будут действительными числами  $r \pm \lambda$  и общее решение имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям. Подставляя это решение в граничные условия, получим два алгебраических уравнения относительно неизвестных констант:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} &= 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что эта система имеет только нулевые решения, то есть  $C_1 = C_2 = 0$ . Следовательно, при  $C = \lambda^2 > 0$  исходная система имеет только решения, тождественно равные нулю.

2. Рассмотрим второй случай, когда  $C = 0$ . В этом случае решение исходного уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Подставляя это решение в граничные условия, получим:

$$C_1 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0.$$

Отсюда следует, что как и в первом случае,  $C_1 = C_2 = 0$ , то есть нет решений, отличных от тождественного нуля.

3. Наконец, остается вариант когда  $C = -\lambda^2 < 0$ . В этом случае корни характеристического уравнения будут мнимыми  $r = \pm i\lambda$ , а общее решение выразится через тригонометрические функции:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставляя это решение в граничные условия, получим:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad C_1 \cos \lambda 0 &= 0 \rightarrow C_1 = 0, \\ \text{при } x = l \quad C_2 \sin \lambda l &= 0. \end{aligned}$$

Равенство при  $x = l$  будет выполняться и при  $C_2 \neq 0$ , а следовательно, будет иметь место равенство:

$$\sin \lambda l = 0 \text{ при } C_2 \neq 0.$$

Это равенство возможно, если:

$$\lambda = k\pi \text{ при } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда найдем:

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

Таким образом, существуют решения исходной задачи, отличные от тождественного нуля, когда константа  $C$  принимает значения:

$$C = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

Решение, соответствующее некоторому фиксированному значению  $k$ , запишется следующим образом:

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad (4.35)$$

где  $A_k$  — произвольная постоянная. Это решение соответствует некоторому значению  $\lambda$ , которое обозначим как

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (4.36)$$

Величины  $\lambda_k$  называют собственными числами, а соответствующие им функции  $\sin(k\pi x/l)$  — собственными функциями. В дальнейшем имеет смысл придавать  $k$  только положительные значения, поскольку  $A_k$  — произвольные постоянные, которые могут иметь любые знаки.



.....  
*Система функций  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$  называется **ортogonalной**, если интеграл от произведения двух различных функций равен нулю, то есть:*

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

.....  
 Легко установить, что найденные собственные функции  $\sin((k\pi x)/l)$  ортогональны на интервале  $[0, l]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx = \\ &= \int_0^l \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{(m-n)\pi x}{l}}{m-n} - \frac{\sin \frac{(m+n)\pi x}{l}}{m+n} \right] dx = 0. \end{aligned}$$

После того как определили бесконечное множество допустимых значений константы  $C$ , для каждого значения  $C_k = -((k\pi)/l)^2$  запишем уравнение для определения второй функции  $T(t)$ :

$$(T_k)_{tt} + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi t}{l} + D_k \sin \frac{k\pi t}{l}.$$

Теперь, зная  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$ , можно записать частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям. При этом каждому значению  $k$  будет отвечать решение:

$$u_k(x, t) = \left( B_k \cos \frac{k\pi t}{l} + D_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

или

$$u_k(x, t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (4.37)$$

где введены обозначения  $a_k = A_k B_k$ ,  $b_k = D_k A_k$ . Решения (4.37) называют собственными функциями рассматриваемой задачи.

Поскольку исходное уравнение и граничные условия однородны, то суперпозиция собственных функций с произвольными константами также будет решением исходного уравнения. Такое решение получается суммированием по всем  $k$ :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (4.38)$$

Поскольку решение представляет бесконечный ряд, то следует потребовать его сходимости, а также что его можно дважды почленно дифференцировать.

Таким образом, проделаны два этапа в реализации метода Фурье: построено решение исходной задачи, удовлетворяющее граничным условиям. Теперь приступим к реализации третьего этапа.

Потребуем, чтобы функция (4.38) удовлетворяла начальным условиям, что позволит определить неизвестные постоянные  $a_k$  и  $b_k$ . Из начального условия (4.27) следует, что:

$$u_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x). \quad (4.39)$$

Дифференцируя решение (4.38) по времени и подставляя в начальное условие (4.28), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x). \quad (4.40)$$

Из выражений (4.39), (4.40) следует, что величины  $a_k$  и  $(k\pi b_k)/l$  являются коэффициентами разложения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряд Фурье в интервале  $[0, l]$ .



Теперь определим эти коэффициенты через известные функции  $f(x)$ ,  $F(x)$ . Для этого умножим выражение (4.39) на  $\sin((nx\pi)/l)$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \sin \frac{kx\pi}{l} \sin \frac{nx\pi}{l} dx = \int_0^l f(x) \sin \frac{nx\pi}{l} dx. \quad (4.41)$$

Здесь использовали свойство, при котором ряд можно почленно интегрировать, и вынесли  $a_k$  за знак интеграла как постоянную величину. Воспользуемся равенством:

$$\sin \frac{kx\pi}{l} \sin \frac{nx\pi}{l} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(k-n)x\pi}{l} - \cos \frac{(k+n)x\pi}{l} \right].$$

Тогда интеграл левой части выражения (4.41) определится как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \cos \frac{(k-n)x\pi}{l} - \cos \frac{(k+n)x\pi}{l} \right] dx = \\ & = \frac{l}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{(k-n)x\pi}{l}}{k-n} - \frac{\sin \frac{(k+n)x\pi}{l}}{k+n} \right]_0^l = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

если  $k \neq n$ . При  $k = n$  получим, что под интегралом будет стоять выражение:

$$\sin^2 \frac{nx\pi}{l} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2nx\pi}{l} \right),$$

а интеграл от этого выражения будет равен:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \frac{2nx\pi}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin \frac{2nx\pi}{l}}{\frac{2n\pi}{l}} \right]_0^l = \frac{l}{2}. \quad (4.43)$$

Выражения (4.42), (4.43) показывают, что при интегрировании ряда в левой части выражения (4.41) остается только тот член ряда, для которого  $k = n$ , а интегралы от остальных членов обращаются в нуль. Окончательно получим выражение для коэффициентов  $a_k$ :

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{kx\pi}{l} dx. \quad (4.44)$$

Использование действий, применяемых при определении  $a_k$  к выражению (4.40), позволит определить коэффициенты  $b_k$ :

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{kx\pi}{l} dx. \quad (4.45)$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов (4.44) и (4.45) в (4.38), окончательно получим решение поставленной задачи.

Таким образом, завершён третий этап реализации метода Фурье. В итоге получили решение, удовлетворяющее исходному уравнению, а также граничным и начальным условиям.

### 4.2.2 Уравнение колебаний при наличии источника

При наличии источников уравнение, описывающее колебания, будет неоднородным и имеет вид:

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt} - g(x, t). \quad (4.46)$$

Здесь функция  $g(x, t)$  характеризует распределение и изменение источников процесса в рассматриваемой системе. Примем начальные и краевые условия такими же, как и для однородной задачи, то есть при отсутствии источников:

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad (4.47)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad (4.48)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (4.49)$$

Раньше было сказано, что метод Фурье непосредственно неприменим в том случае, когда исходное уравнение или граничные условия либо то и другое вместе будут неоднородными. Тем не менее в случае неоднородного исходного уравнения и однородных граничных условий метод Фурье можно применить. В этом случае при решении неоднородного уравнения с частными производными поступают так же, как и при решении неоднородных обыкновенных линейных уравнений. То есть будем искать решение в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \varphi(x, t). \quad (4.50)$$

Функция  $\omega(x, t)$  удовлетворяет решению однородного уравнения:

$$\omega_{xx} = \frac{1}{a^2} \omega_{tt} \quad (4.51)$$

и исходным начальным и граничным условиям (4.47)–(4.49).

Тогда вторая функция  $\varphi(x, t)$  должна удовлетворять неоднородному уравнению:

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{a^2} \varphi_{tt} - g(x, t) \quad (4.52)$$

и нулевым начальным и граничным условиям:

$$[\varphi]_{t=0} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{t=0} = 0, \quad (4.53)$$

$$[\varphi]_{x=0} = [\varphi]_{x=l} = 0. \quad (4.54)$$

Ясно, что функция  $\omega(x, t)$  описывает свободный процесс, а функция  $\varphi(x, t)$  — вынужденный процесс, поскольку имеются источники этого процесса.

Решение однородной задачи при однородных граничных условиях было рассмотрено выше. Таким образом, найти функцию свободного процесса  $\omega(x, t)$  не представляет труда. Теперь перейдем к способу отыскания второй функции  $\varphi(x, t)$ , то есть к решению неоднородного уравнения (4.52), удовлетворяющего нулевым начальным и граничным условиям (4.53) и (4.54).

Как уже было сказано, способ решения такой же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть решение ищется в виде:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{kx\pi}{l}. \quad (4.55)$$

Здесь  $\sin(kx\pi/l)$  — собственные функции однородной задачи, а коэффициенты  $\gamma_k(t)$  — пока неизвестные функции времени. Легко усмотреть, что функция  $\varphi(x, t)$  удовлетворяет граничным условиям и (4.54). Остается потребовать, чтобы функция  $\varphi(x, t)$  удовлетворяла также и начальным условиям. Для этого следует положить, что:

$$\gamma(0) = \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right]_{t=0} = 0. \quad (4.56)$$

Остается определить, при каких коэффициентах решение (4.55) удовлетворяет неоднородному уравнению (4.52). Подставляя это решение в неоднородное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \frac{(k\pi)^2}{l^2} \gamma_k \right] \sin \frac{kx\pi}{l} = g(x, t). \quad (4.57)$$

Отсюда следует, что если заданная функция  $g(x, t)$  раскладывается в ряд Фурье по синусам:

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin \frac{kx\pi}{l}, \quad (4.58)$$

то выражение (4.57) сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого значения  $k$ :

$$\frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \frac{(k\pi)^2}{l^2} \gamma_k = a_k(t). \quad (4.59)$$

Коэффициенты разложения  $a_k(t)$  определятся через известную функцию  $g(t)$  следующим образом:

$$a_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x, t) \sin \frac{kx\pi}{l} dx. \quad (4.60)$$

Из определения коэффициентов разложения  $a_k(t)$  следует, что если функция  $g$  не зависит от времени, то эти коэффициенты будут постоянными. В этом случае система (4.59) будет системой обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение таких уравнений может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

### 4.2.3 Обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

Напомним метод решения обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начнем с рассмотрения однородного уравнения:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0,$$

где  $a_1, a_2, a_n$  постоянные коэффициенты.

Решение этого уравнения ищем в виде  $e^{\lambda x}$ . Подставляя это решение в исходное уравнение и сокращая результат на  $e^{\lambda x}$ , получим характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Отсюда следует, что  $e^{\lambda x}$  будет решением исходного уравнения, если числа  $\lambda$  являются корнями характеристического уравнения, число которых равно степени этого уравнения.

При решении характеристического уравнения могут встретиться следующие случаи:

1. Характеристическое уравнение не имеет кратных корней. В этом случае получим  $n$  решений исходного уравнения вида:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения можно представить как суперпозицию приведенных выше решений:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Характеристическое уравнение имеет кратные корни. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — совокупность всех различных корней и пусть корень, например  $\lambda_j$ , имеет кратность вырождения  $k_j$ , тогда  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Возьмем  $\lambda_1$ , которое имеет  $k_1$ -кратное вырождение, то есть  $k_1$  корней имеют одинаковое значение  $\lambda_1$ . Чтобы определить решение в этом случае, возьмем два решения вида  $e^{\lambda_1 x}/(\lambda_1 - \lambda_2)$  и  $e^{\lambda_2 x}/(\lambda_1 - \lambda_2)$ , полагая, что пока выполняется условие  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тогда функция:

$$\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

также будет решением исходного уравнения. Теперь устремим число  $\lambda_2$  к числу  $\lambda_1$ . Тогда приведенное выше решение переходит в пределе в решение вида:

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = x e^{\lambda_1 x}.$$

Если имеется еще кратный корень, равный  $\lambda_3$ , то рассмотрим функцию:

$$\frac{x e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1 - \lambda_3},$$

которая в пределе имеет значение следующего вида:

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \lambda_1} \frac{x e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1 - \lambda_3} = x^2 e^{\lambda_1 x}.$$

Таким образом, при трехкратном вырождении корня  $\lambda_1$  имеем три решения вида:

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad x^2 e^{\lambda_1 x}.$$

Эти рассуждения легко распространить на общий случай вырождения  $k_1$ :

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}.$$

Для другого корня  $\lambda_m$ , имеющего вырождение  $k_m$ , решения будут иметь аналогичный вид.

Подводя итог, получим, что общее решение однородного уравнения с вырожденными корнями запишется в виде:

$$y = (C_1 + C_{12}x + \dots + C_{1k_1}x^{k_1-1})e^{\lambda_1 x} + (C_{21} + C_{22}x + \dots + C_{2k_2}x^{k_2-1})e^{\lambda_2 x} + \dots + (C_{m1} + C_{m2}x + \dots + C_{mk_m}x^{k_m-1})e^{\lambda_m x}.$$

Перейдем к решению неоднородного уравнения вида:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_n \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 y_1 = F(x). \quad (4.61)$$

Решение неоднородного уравнения представляется как

$$y_1 = y + u,$$

где  $y$  — общее решение однородного уравнения, метод нахождения которого приведен выше. Функция  $u$  есть частное решение неоднородного уравнения, которое предстоит найти.

Если общее решение однородного уравнения найдено, то неоднородное уравнение можно проинтегрировать методом вариации коэффициентов. Этот метод заключается в том, что решение ищется в виде:

$$u = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k, \quad (4.62)$$

где  $C_k(x)$  — неизвестные коэффициенты, рассматриваются как функции переменной.

При подстановке этого решения в уравнение (4.61) получим только одно соотношение для определения неизвестных коэффициентов, число которых равно  $n$ . Следовательно, недостает еще  $(n-1)$  соотношений, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты. Недостающие соотношения находятся из требования, чтобы производные функции  $u = \sum_{k=1}^n C_k(x) y_k$  имели такой же вид, как и при постоянных коэффициентах. Возьмем производную от этой функции:

$$\frac{du}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} y_k + \sum_{k=1}^n C_k \frac{dy_k}{dx}.$$

Чтобы наше требование выполнилось, необходимо, чтобы соблюдалось условие:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} y_k = 0. \quad (4.63)$$

Возьмем вторую производную, учитывая (4.63), получим:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{dy_k}{dx} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{d^2 y_k}{dx^2}.$$

Чтобы выполнилось наше требование, необходимо положить:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{dy_k}{dx} = 0.$$

Продолжая таким образом, получим систему из  $(n - 1)$  уравнений для определения неизвестных коэффициентов, которую в общем виде можно представить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^m y_k}{dx^m} = 0, \quad (4.64)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots, n - 2$ .

Последняя производная  $n$ -ого порядка имеет вид:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{d^n y_k}{dx^n}. \quad (4.65)$$

В последнем равенстве (4.65) не будем требовать обращения в нуль члена:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}},$$

поскольку необходимо удовлетворить исходному уравнению (4.61), то есть учесть свободный член  $F(x)$ .

Из вышеизложенного следует, что производные от неизвестной функции  $u(x)$  до  $(m - 1)$ -ого порядка включительно имеют вид:

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \sum_{k=1}^n C_k \frac{d^m y_k}{dx^m}, \quad \text{где } m = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4.66)$$

Подставляя (4.65) и (4.66) в исходное уравнение (4.61), получим следующее выражение:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n C_k \frac{d^n y_k}{dx^n} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}} + \dots + \sum_{k=1}^n C_k y_k} + \sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}} = F(x).$$

Поскольку  $y_k$  удовлетворяет однородному уравнению, то взятая в рамку сумма в предыдущем выражении обратится в нуль, а оставшаяся часть даст недостающее уравнение к системе (4.64). Таким образом, полная система уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $C_k(x)$  запишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} y_k}{dx^{n-1}} = F(x), \quad (4.67)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{dC_k}{dx} \cdot \frac{d^m y_k}{dx^m} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n - 2.$$

В качестве примера рассмотрим уравнение (4.59), которое было получено при решении неоднородной задачи. Запишем его следующим образом:

$$\frac{d^2 \gamma}{dt^2} + b^2 \gamma = a(t).$$

Решение однородного уравнения:

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{dt^2} + b^2\tilde{\gamma} = 0$$

имеет вид:

$$\tilde{\gamma} = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$\bar{\gamma} = C_1(t) \cos bt + C_2(t) \sin bt.$$

Систему соотношений для определения неизвестных  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  легко найти, исходя из вышеприведенной системы 4.67:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} \cos bt + \frac{dC_2}{dt} \sin bt &= 0, \\ -b \frac{dC_1}{dt} \sin bt + b \frac{dC_2}{dt} \cos bt &= F(t). \end{aligned}$$

Чтобы прийти к исходному уравнению (4.59), произведем замену:

$$F(t) = a_k(t), \quad \gamma = \gamma_k, \quad b^2 = \frac{(ka\pi)^2}{l^2}.$$

В этом случае неизвестные коэффициенты определяются следующим образом:

$$C_1(t) = -\frac{l}{ka\pi} \int_0^t a_k(\tau) \sin \frac{ka\pi}{l} \tau d\tau + C_1.$$

Тогда решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_k(t) &= \frac{l}{ka\pi} \int_0^t a_k(x) \left[ \cos \frac{ka\pi}{l} x \sin \frac{ka\pi}{l} t - \sin \frac{ka\pi}{l} x \cos \frac{ka\pi}{l} t \right] dx + C_{k1} \sin \frac{ka\pi}{l} t + \\ &+ C_{k2} \frac{ka\pi}{l} t = \frac{l}{ka\pi} \int_0^t a_k(\tau) \sin \frac{ka\pi}{l} (t - \tau) d\tau + C_{k1} \sin \frac{ka\pi}{l} t + C_{k2} \cos \frac{ka\pi}{l} t, \end{aligned}$$

где  $C_{k1}$ ,  $C_{k2}$  — неизвестные константы. Тогда функция:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\gamma}_k(t) \sin \frac{kx\pi}{l}$$

будет решением неоднородной задачи и удовлетворяет граничным условиям. Потребуем, чтобы это решение удовлетворяло и начальным условиям. Так, из условия  $y_k = 0$  следует, что  $C_{k2} = 0$ , а из условия  $[\partial \gamma_k / \partial t]_{t=0} = 0$  следует  $C_{k1} = 0$ .

Окончательно решение неоднородной задачи, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, примет вид:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{ka\pi} \sin \frac{kx\pi}{l} \int_0^t a_k(y) \sin \frac{ka\pi}{l} (t - y) dy,$$

где коэффициенты  $a_k$  определяются согласно (4.60).

Зная общее решение однородной задачи  $\omega(x, t)$  и частное решение неоднородной задачи  $\varphi(x, t)$ , легко записать решение исходной задачи.

#### 4.2.4 Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями

В данном случае задача формулируется следующим образом.

Найти решение неоднородного уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t) \quad (4.68)$$

при неоднородных граничных условиях:

$$[u]_{x=0} = \chi_1(t) \quad \text{и} \quad [u]_{x=l} = \chi_2(t). \quad (4.69)$$

Начальные условия имеют прежний вид:

$$[u]_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = F(x). \quad (4.70)$$

Непосредственно метод Фурье к сформулированной таким образом задаче неприменим. Но мы умеем находить решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями. Отсюда следует, что если произвести замену неизвестной функции таким образом, чтобы для новой функции граничные условия стали однородными, то решение задачи сведется к уже рассмотренному случаю.

Введем вспомогательную функцию следующим образом:

$$\omega(x, t) = \chi_1(t) + [\chi_2(t) - \chi_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (4.71)$$

Как легко видеть, эта функция удовлетворяет прежним граничным условиям:

$$[\omega]_{x=0} = \chi_1(t) \quad \text{и} \quad [\omega]_{x=l} = \chi_2(t). \quad (4.72)$$

Решение исходной задачи будем искать в виде суммы вспомогательной функции и некоторой новой неизвестной функции:

$$u = \omega + v. \quad (4.73)$$

В силу условий (4.72) новая неизвестная функция  $v$  будет удовлетворять однородным граничным условиям:

$$[v]_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad [v]_{x=l} = 0 \quad (4.74)$$

и начальным условиям следующего вида:

$$[v]_{t=0} = [u]_{t=0} - [\omega]_{t=0} = f(x) - \chi_1(0) - (\chi_2(0) - \chi_1(0)) \frac{x}{l} \equiv f_1(x), \quad (4.75)$$

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} \right]_{t=0} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} - \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \right]_{t=0} = F(x) - \left[ \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right]_{t=0} - \left[ \frac{\partial \chi_2}{\partial t} - \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right]_{t=0} \frac{x}{l} \equiv F_1(x). \quad (4.76)$$

Подставляя (4.73) в исходное уравнение (4.68) и учитывая (4.71), получим уравнение для определения новой неизвестной функции  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + g(x, t) - (\chi_1)_{tt} - [(\chi_2)_{tt} - (\chi_1)_{tt}] \frac{x}{l}. \quad (4.77)$$



Таким образом, приходим к следующей задаче.

Определить функцию  $v(x, t)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению с частными производными (4.77), однородным граничным условиям (4.74) и начальным условиям (4.75) и (4.76).

Решение сформулированной задачи было получено ранее.

Таким образом, было рассмотрено применение метода Фурье для решения неоднородных дифференциальных уравнений гиперболического типа при граничных условиях следующего типа:

1. Нулевые граничные условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

2. Граничные условия первого рода, определяющие заданный режим на границе:

$$u(0, t) = \chi_1(t) \quad \text{и} \quad u(l, t) = \chi_2(t).$$

В этом случае задачу можно свести к нахождению новой функции, для которой граничные условия будут однородными.

3. На границе задаются производные искомой функции:

$$[u_x]_{x=0} = g_1(t) \quad \text{и} \quad [u_x]_{x=l} = g_2(t).$$

Такие граничные условия интерпретируются как заданные силы, действующие на границе.

Для граничных условий этого типа вспомогательная функция выбирается в виде:

$$\omega(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x.$$

Тогда из условий  $[\omega_x]_{x=0} = g_1(t)$  и  $[\omega_x]_{x=l} = g_2(t)$ , находим неизвестные функции  $A(t)$  и  $B(t)$ :

$$A(t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{2l}; \quad B(t) = g_1(t),$$

и вспомогательная функция примет вид:

$$\omega(x, t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{2l}x^2 + g_1(t)x.$$

4. Граничные условия смешанного типа:

$$[u_x]_{x=0} - [u]_{x=0}\chi_1 = g_1(t), \quad (4.78)$$

$$[u_x]_{x=l} - \chi_2[u]_{x=l} = g_2(t). \quad (4.79)$$

Рассмотрим четвертый тип граничных условий и покажем, каким образом можно ввести вспомогательную функцию, чтобы для новой неизвестной функции граничные условия стали однородными. Вспомогательную функцию выберем следующим образом:

$$\omega(x, t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + B(t) \frac{x}{l},$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  следует выбрать так, чтобы вспомогательная функция удовлетворяла граничным условиям (4.78) и (4.79). Подставляя вспомогательную функцию в эти граничные условия, получим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}[B(t) - A(t)] - \chi_1 A(t) &= g(t), \\ \frac{1}{l}[B(t) - A(t)] - \chi_2 B(t) &= g_2(t).\end{aligned}$$

Отсюда определим неизвестные функции:

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{l[(1 - l\chi_2)g_1(t) - g_2(t)]}{1 - (1 + l\chi_1)(1 - l\chi_2)}, \\ B(t) &= \frac{l[g_1(t) - (1 + l\chi_1)g_2(t)]}{1 - (1 + l\chi_1)(1 - l\chi_2)}.\end{aligned}$$

Тогда вспомогательная функция примет вид:

$$\omega(x, t) = \frac{l[(1 - l\chi_2)g_1 - g_2]}{1 - (1 + l\chi_1)(1 - l\chi_2)} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{[g_1 - (1 + l\chi_1)g_2]x}{1 - (1 + l\chi_1)(1 - l\chi_2)}.$$

Легко проверить, что вспомогательная функция удовлетворяет граничным условиям (4.78) и (4.79). Далее поступаем по отработанному варианту. Вводится новая неизвестная функция, которая удовлетворяет однородным граничным условиям, и задача сводится к нахождению этой функции. Таким образом, задача свелась к случаю, который был уже рассмотрен.

*Заключение.* Было показано, каким образом применяется метод Фурье при решении задач гиперболического типа в самом общем случае, то есть для решения неоднородных уравнений с неоднородными граничными условиями.

### 4.3 Метод Даламбера для уравнений гиперболического типа

Ясно, что на колебания средней части очень длинной струны ее концы не будут оказывать заметного влияния. Так, если длинную натянутую веревку слегка качнуть в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны. Картина исказится, когда волны дойдут до концов веревки и, отразившись, повернут обратно. Следовательно, если не учитываются концы струны, то тем самым не учитывается влияние отраженных волн. В этом случае граничных условий не будет, а начальные условия имеют вид:

$$[u]_{t=0} = f(x), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} = F(x), \quad (4.80)$$

где  $f(x)$ ,  $F(x)$  — заданные на всей числовой оси функции.

Такая задача называется задачей с начальными условиями, или задачей Коши.

Решим эту задачу методом Даламбера или методом бегущих волн. Покажем, что общее решение, зависящее от двух произвольных функций, имеет вид:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (4.81)$$

или

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta), \quad \xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

где функции  $\varphi$ ,  $\psi$  предполагаются дважды дифференцируемыми (под  $\varphi'$  и  $\psi'$  подразумеваются обыкновенные производные по  $\xi$  и  $\eta$  соответственно). Покажем, что решение (4.81) удовлетворяет уравнению колебаний. Непосредственно дифференцируя (4.81), получим:

$$\begin{aligned} u_x &= \varphi' \xi_x + \psi' \eta_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ u_{xx} &= \varphi'' \xi_x + \psi'' \eta_x = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ u_t &= \varphi' \xi_t + \psi' \eta_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at), \\ u_{tt} &= -a\varphi'' \xi_t + a\psi'' \eta_t = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в однородное волновое уравнение:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

убеждаемся в том, что решение (4.81) удовлетворяет этому уравнению.

Теперь задача состоит в том, чтобы, используя начальные условия (4.80), определить неизвестные функции  $\varphi$ ,  $\psi$ . Полагая в (4.81)  $t = 0$  и подставляя выражение для  $u(x, 0)$  в первое условие (4.80), получим:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x). \quad (4.82)$$

Полагая теперь  $t = 0$  в выражении для  $u_t$  и используя второе условие (4.80), получим уравнение:

$$-a\varphi_x(x) + a\psi_x(x) = F(x). \quad (4.83)$$

Интегрируя выражение (4.83) в пределах от 0 до  $x$ , получим соотношение:

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(x) dx,$$

которое приведем к виду:

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + C, \quad (4.84)$$

где  $C = -\varphi(0) + \psi(0)$  — некоторая постоянная величина.

Из системы уравнений (4.82) и (4.84) находим искомые функции:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{C}{2}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx + \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Заменяя в формулах (4.85) аргумент  $x$  на  $(x - at)$  и  $(x + at)$  и подставляя полученные выражения в формулу (4.81), найдем исходную функцию:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x) dx + \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x) dx.$$

Учтем, что:

$$-\int_0^{x-at} F(x) dx + \int_0^{x+at} F(x) dx = \int_{x-at}^0 F(x) dx + \int_0^{x+at} F(x) dx = \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx,$$

тогда решение примет вид:

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx. \quad (4.86)$$

Формула (4.86) называется *решением Даламбера задачи Коши для уравнения колебания струны*.

Необходимо проверить, что найденная функция удовлетворяет как однородному уравнению колебаний, так и начальным условиям (4.80). Проверку этого факта предлагается сделать самостоятельно. При этом следует учесть, что при дифференцировании второе слагаемое ведет себя как сложная функция:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x+at} F(x) dx = F(x+at), \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x+at} F(x) dx = aF(x+at).$$

*Физический смысл полученного решения.* Для того чтобы выяснить физический смысл полученного решения, рассмотрим в отдельности функции, входящие в полученное решение (4.86). Начнем с функции  $\varphi(x-at)$  и построим график этой функции при возрастающих значениях времени  $t: t = t_0, t = t_1, t = t_2$  и т. д. (рис. 4.3).

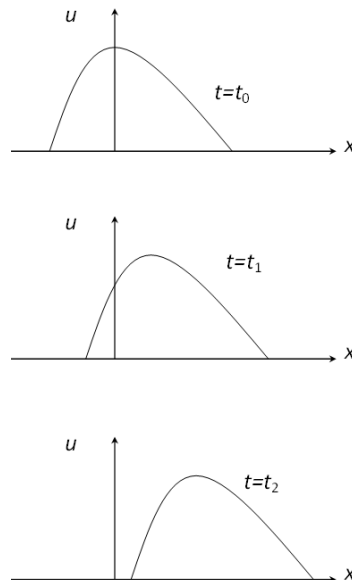


Рис. 4.3 – Распространение волны вправо

Второй график сверху будет сдвинут относительно первого на величину  $-at_1$ , третий относительно первого на величину  $-at_2$ . Если последовательно проецировать приведенные на рис. 4.3 рисунки, то график побежит вправо. При этом, если

перемещаться вправо вдоль струны с постоянной скоростью  $a$ , то отклонение струны будет казаться все время постоянным. Так, начав движение, например, в точке  $x_0$  и переместившись за время  $t$  в точку  $x$ , будем иметь:

$$x = x_0 + at \quad \text{или} \quad x - at = x_0.$$

В этом случае имеем:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) = \varphi(x_0).$$

Процесс передвижения отклонения по струне называется *волной*. При этом коэффициент  $a = \sqrt{T_0/\rho}$  в уравнении колебаний струны является *скоростью распространения волны*.

Второе слагаемое решения (4.86), функция  $\varphi(x + at)$ , будет представлять такой же волновой процесс, но только волна будет распространяться со скоростью  $a$  влево.

*Распространение волн отклонения.* Рассмотрим случай, даваемый формулой Даламбера когда отсутствуют начальные скорости ( $F(x) = 0$ ), т. е. струна колеблется в результате начального отклонения. Тогда по формуле (4.86) получим, что:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}. \quad (4.87)$$

Так как функция  $f(x)$  известна, то можно вычислить значение  $u(x, t)$  для любых  $x, t$ . Согласно сказанному выше теперь колебания складываются из двух волн: одна распространяется вправо (*прямая волна*), а вторая — влево (*обратная волна*) с одинаковыми скоростями.

В начальный момент времени профили обеих волн совпадают. Положим, что в начальный момент функция  $f(x)$  отлична от нуля на некотором интервале  $(-l, l)$ . Тогда  $f(x) = 0$  при  $x < -l$  и при  $x > l$ . Тогда можно геометрически проследить за изменением формы струны в любой момент времени.

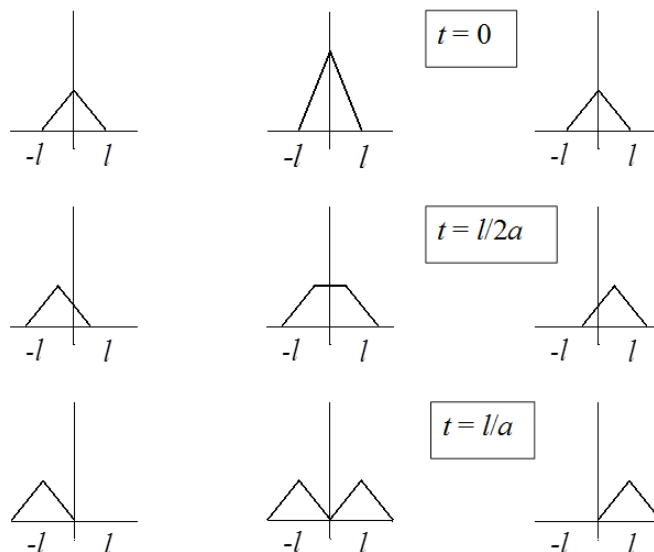


Рис. 4.4 – Результат сложения прямой и обратной волны

На рисунке 4.4 в левом столбце изображена в различные моменты времени волна, бегущая влево, а в правом столбце в те же моменты времени волна, бегущая вправо. В среднем столбце показана сумма этих волн, то есть результирующее отклонение точек струны.



## Контрольные вопросы по главе 4

- 1) При изучении каких электрических цепей следует учитывать сопротивление проводов, их взаимную емкость, утечку тока?
- 2) При каких допущениях выводится телеграфное уравнение?
- 3) Какой вид имеет уравнение Гельмгольца?
- 4) Что описывают уравнения Лоренца–Максвелла?
- 5) При каких допущениях выводится уравнение колебания струны?
- 6) При каких условиях уравнение колебания струны описывает вынужденные колебания, а при каких — свободные?
- 7) Сколько требуется начальных условий для решения гиперболического уравнения на конечном отрезке?
- 8) Какие преобразования необходимо сделать для решения неоднородного уравнения гиперболического типа с однородными краевыми условиями?
- 9) В чем заключается метод Даламбера для решения уравнений гиперболического типа?

---

## Глава 5

# УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

---

В данной главе рассматриваются эллиптические уравнения. Прежде всего рассмотрим важнейший оператор математической физики — оператор Лапласа и приведем его выражение в различных системах координат. Далее рассматриваются метод функции Грина и метод Фурье для решения эллиптических уравнений.

### 5.1 Оператор Лапласа

Оператор Лапласа является важнейшим оператором математической физики. Каков смысл данного оператора и какое отношение имеет сумма трех частных производных к законам природы? Ответ состоит в том, что лапласиан позволяет оценить значение функции в точке через значение функции в соседних точках. Кроме того, лапласиан является обобщением второй производной функции одной переменной на случай многих переменных.

Приведем без доказательства основные свойства лапласиана.

- 1) Если в точке  $(x, y)$  имеет место  $\Delta u > 0$ , то значение функции в этой точке меньше среднего значения в соседних точках. Под средним значением функции в соседних точках понимается среднее значение функции либо по сфере, либо по шару с центром в данной точке.
- 2) Если  $\Delta u = 0$  в точке  $(x, y)$ , то значение  $u(x, y)$  равно среднему значению функции в соседних точках.
- 3) Если выполняется  $\Delta u < 0$  в точке  $(x, y)$ , то значение  $u(x, y)$  больше среднего значения в соседних точках.

Вышеприведенные свойства не зависят от размерности пространства и позволяют дать физическую интерпретацию основных уравнений математической физики.

*Физический смысл лапласиана.*

Из уравнения теплопроводности  $u_t = a^2 \Delta u$  следует, что скорость изменения температуры (или концентрации)  $u_t$  пропорциональна величине  $\Delta u$ . Отсюда сле-

дует, что если температура в точке  $(x, y)$  меньше, чем средняя температура на окружности с центром в данной точке, то температура в данной точке будет возрастать. Согласно волновому уравнению  $u_{tt} = a^2 \Delta u$  для смещений, ускорение точек струны (или, что то же самое, сила, действующая на точку)  $u_{tt}$  пропорционально величине  $\Delta u$ . Значит, точка струны ускорится вверх (сила направлена вверх), если ее смещение по высоте меньше, чем среднее смещение соседних точек.

Если функция удовлетворяет уравнению Лапласа, то ее значение всегда совпадает со средним значением. Например, неподвижная натянутая мембрана удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, смещение мембраны в любой точке равно среднему смещению мембраны на окружности с центром в этой точке.

## 5.2 Преобразование координат

До сих пор лапласиан рассматривался в ортонормированных координатах евклидова пространства. Во многих случаях возникает необходимость знать выражение для лапласиана в других системах координат. Все зависит от формы рассматриваемой области. Если граница области — окружность, то естественно перейти к полярным координатам, а если граница области — сфера, то следует перейти к сферическим координатам.

Наиболее часто используемыми системами координат являются следующие: *декартова прямоугольная* система координат в двумерном и трехмерном евклидовых пространствах, *полярные* координаты в двумерном пространстве, *цилиндрические* и *сферические* системы координат в трехмерном пространстве.

Полярные координаты  $(r, \varphi)$  связаны с декартовыми  $(x, y)$  следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

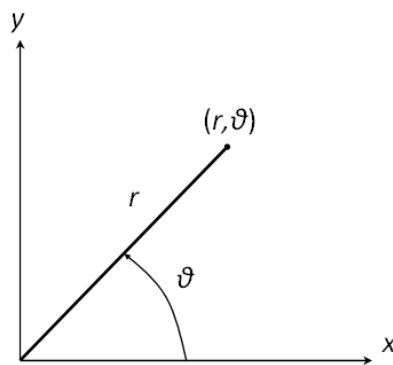


Рис. 5.1 – Полярная система координат



Цилиндрические  $(r, \varphi, z)$  и декартовы  $(x, y, z)$  системы координат связаны соотношениями следующего вида:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

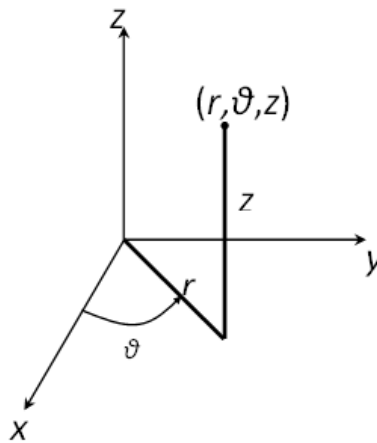


Рис. 5.2 – Цилиндрическая система координат

Сферические и декартовы системы координат связаны соотношениями следующего вида:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

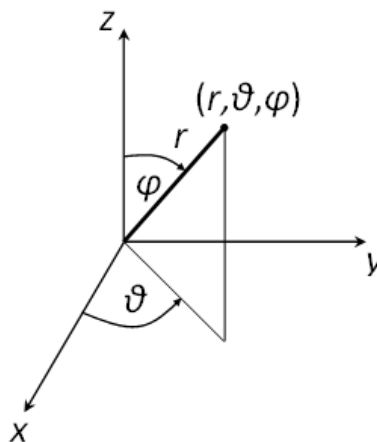


Рис. 5.3 – Сферическая система координат

Рассмотрим, как преобразуется лапласиан при переходе от декартовой к полярной системе координат. В этом легко разобраться, если учесть, что функция, на которую действует лапласиан, будет сложной функцией от полярных координат  $u[r(x, y); \varphi(x, y)]$ .

По правилам дифференцирования сложной функции найдем первые производные:

$$\begin{aligned}u_x &= u_r r_x + u_\varphi \varphi_x = u_r \cos \varphi - u_\varphi \frac{1}{r} \sin \varphi, \\u_y &= u_r r_y + u_\varphi \varphi_y = u_r \sin \varphi + u_\varphi \frac{1}{r} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Обратимся теперь ко вторым производным:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (u_x)_x = (u_x)_r r_x + (u_x)_\varphi \varphi_x = \left( u_{rr} \cos \varphi - u_{r\varphi} \frac{1}{r} \sin \varphi + u_\varphi \frac{1}{r^2} \sin \varphi \right) \cos \varphi - \\&- \left( u_{r\varphi} \cos \varphi - u_r \sin \varphi - u_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \sin \varphi - u_\varphi \frac{1}{r} \cos \varphi \right) \frac{\sin \varphi}{r}; \\u_{yy} &= (u_y)_y = (u_y)_r r_y + (u_y)_\varphi \varphi_y = \left( u_{rr} \sin \varphi + u_{r\varphi} \frac{1}{r} \cos \varphi - u_\varphi \frac{1}{r^2} \cos \varphi \right) \sin \varphi = \\&= \left( u_{r\varphi} \sin \varphi + u_r \cos \varphi + u_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \cos \varphi - u_\varphi \frac{1}{r} \sin \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

Складывая вторые производные, окончательно получим:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} -$$

выражение для лапласиана в полярных координатах. Теперь это оператор с переменными коэффициентами, что затрудняет решение задачи.

Аналогичным образом можно трехмерный лапласиан из декартовой системы координат перевести в цилиндрическую систему:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz},$$

а также и сферическую систему:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}.$$

*Замечание.* Только в декартовой системе координат лапласиан обладает постоянными коэффициентами. Поэтому получить решение задачи в других системах координат существенно труднее. Тем не менее к этим уравнениям применим метод разделения переменных, но получающиеся при этом обыкновенные дифференциальные уравнения так же будут уравнениями с переменными коэффициентами. Таким образом, получаются так называемые классические уравнения математической физики — уравнение Бесселя, уравнение Лежандра и другие.

Кроме упомянутых выше, существуют и другие системы координат.

Уравнением Лапласа, как легко усмотреть, описываются стационарные состояния. Так, волновое уравнение и уравнение теплопроводности переходят в уравнение Лапласа, если искомая функция не зависит от времени. Поэтому, в отличие

от волнового уравнения и уравнения теплопроводности, для уравнения Лапласа не требуется постановка начальных условий.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Искомое решение выбирается из множества всех гармонических функций наложением дополнительного условия, обычно это краевое условие. Поэтому задачи для таких уравнений называют краевыми задачами.

### 5.3 Основные типы граничных условий в краевых задачах

- 1) Наиболее важным случаем краевой задачи является *задача Дирихле* в пространстве, которая формулируется следующим образом: требуется найти функцию, удовлетворяющую в некоторой области  $V$  пространства уравнению Лапласа и принимающую на границе  $S$  этой области заданные значения  $(u)_S = f$ .
- 2) Краевая задача с граничными условиями второго рода (*задача Неймана*): требуется найти решение уравнения Лапласа в некоторой области пространства, которое на границе удовлетворяет следующему краевому условию:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S = f_1,$$

где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

- 3) Требуется найти такое решение уравнения Лапласа в некоторой области пространства, которое на границе области удовлетворяет условию вида (*задача Робэна*):

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - g) = 0,$$

где  $h$  — заданная константа,  $g$  — заданная на границе функция.

Следует обратить внимание, что третья краевая задача является как бы смесью двух первых краевых задач. Наиболее употребляемая форма третьей краевой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u - g).$$

Согласно этому граничному условию тепловой поток, втекающий в область через границу, пропорционален разности между температурой тела  $u$  и некоторой заданной температурой среды  $g$ . Это означает, что:

- 1) если температура  $u$  на границе выше температуры окружающей среды  $g$ , то тепло вытекает из области.
- 2) если температура  $u$  меньше температуры окружающей среды, то тепло втекает в область.

Следовательно, граничные условия третьего типа не что иное, как закон теплообмена Ньютона.

Не будем останавливаться на математической стороне вопроса, а именно имеют ли поставленные краевые задачи решение и будет ли это решение единственным. То, что имеется единственное решение, можно считать очевидным по физическим соображениям. Например, пусть каждая точка поверхности области поддерживается при постоянной температуре, следовательно, в каждой точке области будет устанавливаться своя температура, а ее распределение и будет решением при данных граничных условиях. Очевидно, что каждая точка области не может иметь два или более значения температур. Отсюда следует и единственность поставленной задачи.

Рассмотрим простейшие случаи задачи Дирихле.

Положим, что искомая функция зависит только от двух переменных, например  $(x, y)$  или  $(r, \varphi)$ , следовательно, уравнение Лапласа имеет вид:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$\frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Задачу на плоскости можно сформулировать следующим образом: найти функцию, удовлетворяющую внутри замкнутой кривой  $l$  уравнению Лапласа и принимающую на границе  $l$  заданные значения:

$$(u)_l = f.$$

Задачи такого типа могут возникнуть при анализе распределения температур в тонкой однородной пластинке с теплоизолированными нижней и верхней поверхностями. При этом край пластинки поддерживается при постоянной температуре. Пластинка должна быть тонкой, чтобы пренебречь изменением температуры по ее толщине.

Другая задача возникает при рассмотрении стационарного распределения температур в однородном бесконечном цилиндре, образующие которого параллельны оси  $z$ ; боковая поверхность цилиндра поддерживается при определенной температуре, не зависящей от координаты. Тогда в любом сечении цилиндра плоскостями, параллельными плоскости  $(x, y)$ , распределение температур будет одинаковым. В этом случае температура будет функцией двух координат.

В одномерном случае задача Дирихле решается просто. Так, для тонкого стержня с теплоизолированной поверхностью одномерное уравнение имеет вид (вместо произвольной функции  $u$  поставим температуру  $T$ ):

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

Его общее решение запишется следующим образом:

$$T = A + Bx.$$

Из краевых условий  $(T)_{x=0} = T_0$  и  $(T)_{x=l} = T_l$  найдем константы  $A$  и  $B$ . Здесь  $l$  — длина стержня:

$$A = T_0 \quad \text{и} \quad B = \frac{T_l - T_0}{l}.$$

Задача Дирихле в этом случае имеет решение:

$$T = T_0 + \frac{T_l - T_0}{l}x,$$

которое описывает стационарное распределение температур в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью. Это распределение описывается линейным законом.

Рассмотрим тело, заключенное между двумя цилиндрическими поверхностями с общей осью. Краевые условия заключаются в том, что на внешней и внутренней поверхностях поддерживается постоянная температура  $(T)_{r=a} = T_a$  и  $(T)_{r=b} = T_b$ , где  $a$  и  $b$  — внешний и внутренний радиусы соответственно. Совместим ось  $z$  с осью цилиндра, тогда распределение температур в любом сечении, перпендикулярном оси  $z$ , будет зависеть только от радиуса  $r$ . В этом случае уравнение Лапласа в полярных координатах примет вид:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда легко получить общее решение. Подстановка общего решения в граничные условия позволит определить произвольные константы. Окончательно решение поставленной задачи примет вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln r + \frac{T_b \ln a - T_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}} = \\ &= \frac{T_a \ln r - T_b \ln r + T_b \ln a - T_a \ln b}{\ln a - \ln b} + T_b - T_a = T_a + (T_b - T_a) \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим задачу для сферического слоя, заключенного между двумя сферическими поверхностями с внешним радиусом  $a$  и внутренним радиусом  $b$ .

Найдем стационарное распределение температур при граничных условиях  $(T)_{r=a} = T_a$  и  $(T)_{r=b} = T_b$ . Если температуры  $T_a, T_b$  — постоянные величины, то распределение температур будет зависеть только от расстояния до начала координат, которое совпадает с центром сферы. Уравнение Лапласа в сферических координатах примет вид:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A,$$

а затем получим:

$$T = -\frac{A}{r} + B.$$

Произвольные константы  $A, B$  получим из граничных условий:

$$T_a = -\frac{A}{a} + B \quad \text{и} \quad T_b = -\frac{A}{b} + B.$$

Тогда решение поставленной задачи запишется как

$$T = -\frac{T_a - T_b}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)r} + \frac{T_a a - T_b b}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)ab}.$$

Решение двумерных и трехмерных задач Дирихле можно провести только для сравнительно простых областей. Рассмотрим для таких областей решение задач Дирихле с помощью метода функций Грина.

## 5.4 Метод функции Грина

Покажем, как с помощью функции Грина (функции источника) можно решить неоднородную задачу Дирихле. В этом случае правая часть уравнения рассматривается как некоторое входное воздействие и разлагается в непрерывную совокупность дельтаобразных источников, распределенных по некоторой заданной области. Затем находится отклик системы на каждый такой источник (функция Грина), а затем все отклики суммируются. В результате находим полное решение поставленной задачи.

Этот метод основан на формуле Грина, которая является следствием формулы Остроградского–Гаусса. Формула Остроградского–Гаусса преобразует интеграл по замкнутой поверхности  $S$  в интеграл по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{a} dV, \quad (5.1)$$

где  $\vec{a}$  — поле векторов, заданное в  $V + S$ . Положим, что  $\vec{a}$  можно представить как

$$\vec{a} = u\nabla v - v\nabla u, \quad (5.2)$$

где  $u$  и  $v$  — две любые функции, дифференцируемые дважды.

Учитывая (5.2), преобразуем выражение, стоящее под интегралом в правой части (5.1):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \left( u \frac{\partial v}{\partial x_k} - v \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \vec{e}_k = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right) \delta_{ik} = u\Delta v - v\Delta u. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Преобразуем интеграл левой части (5.1):

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a} = \oint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \oint_S (u\vec{n} \cdot \nabla v - v\vec{n} \cdot \nabla u) dS.$$

Здесь элемент поверхности представлен как  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к элементу поверхности; за положительное направление выбирается направление внешней нормали к области.

Как известно, производная функций по нормали определяется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla u \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla v. \quad (5.4)$$

С учетом (5.3) и (5.4) формула Остроградского–Гаусса примет вид:

$$\oint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV. \quad (5.5)$$

Полученное выражение называют формулой Грина.

Обобщим формулу Грина на двусвязную область, которая ограничена двумя непересекающимися замкнутыми поверхностями, одна из которых  $S_1$  ограничивает объем снаружи, а другая  $S_2$  — изнутри. Тогда (5.5) можно записать в следующем виде:

$$\oint_{S_1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_2} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) лежит в основе решения задачи Дирихле в пространстве методом функции Грина.

### 5.4.1 Определение функции Грина

Рассмотрим односвязную область  $V$ , ограниченную поверхностью  $S$ . Для этой области необходимо решить задачу Дирихле. Для решения поставленной задачи поступим следующим образом. Выберем внутри области произвольную, но фиксированную точку с радиус-вектором  $\vec{R}_0(x, y, z)$ . Вокруг этой точки опишем сферу  $S_2$  малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в этой точке. При этом полагается, что сфера целиком лежит внутри области  $V$ . Возьмем любую точку с радиус-вектором  $\vec{R}$ , отличную от  $\vec{R}_0$ . Расстояние между этими точками определится как (рис. 5.4):

$$|\vec{R} - \vec{R}_0| \equiv r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

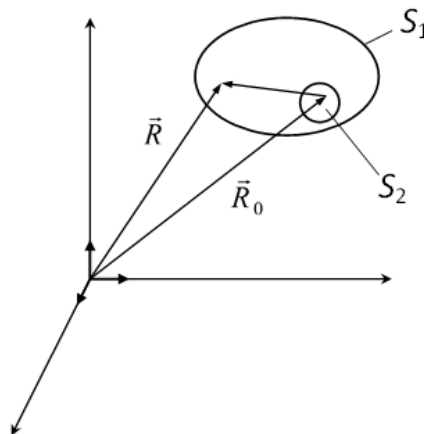


Рис. 5.4 – К выводу функции Грина

Рассмотрим функцию от этого расстояния следующего вида:  $\omega = 1/r_{01}$ . Введенная таким образом функция будет гармонической всюду в области  $V$ , кроме точки  $\vec{R}_0$ , в которой она обращается в бесконечность. То, что функция  $\omega$  гармоническая, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа, можно проверить непосредственным вычислением, если рассмотреть лапласиан в сферических координатах.

Так как  $\omega$  не зависит от координат  $\varphi$  и  $\theta$  (начало координат совмещено с центром сферы), то лапласиан запишется следующим образом:

$$\Delta\omega = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0.$$

Теперь введем новую функцию  $\omega_1$ , гармоническую во всей области  $V$  и на внешней поверхности удовлетворяющую граничным условиям следующего вида:

$$(\omega_1)_{S_1} = (\omega)_{S_1}. \quad (5.7)$$

Из граничных условий следует, что функции  $\omega$  и  $\omega_1$  совпадают, вообще говоря, только на внешней границе области  $S_1$ .

Теперь введем понятие функции Грина. Функцией Грина для данной области называют разность функций  $(\omega_1 - \omega)$  и обозначают как

$$G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \omega_1 - \frac{1}{r_{01}}. \quad (5.8)$$

Из (5.8) видно, что функция Грина зависит как от координат текущей точки, так и от координат произвольно выбранной, но фиксированной точки.

Как следует из граничных условий (5.7), функция Грина обращается в нуль на внешней границе области:

$$(G)_{S_1} = 0. \quad (5.9)$$

После того как ввели функцию Грина и выяснили для нее граничные условия, приступим к решению задачи Дирихле. Необходимо найти гармоническую функцию  $u$  в области  $v$ , ограниченную поверхностью  $S$ , то есть удовлетворяющую уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  в области  $V$  и граничным условиям на поверхности  $(u)_S = f$ .

Для решения воспользуемся формулой Грина (5.6), в которой положим  $v = G$ . Тогда правая часть формулы Грина обратится в нуль, поскольку  $\Delta u = 0$  и  $\Delta G = 0$  в области, ограниченной внешней поверхностью  $S_1$  и внутренней сферической поверхностью  $S_2$ . Первый интеграл левой части формулы Грина ввиду условия (5.9) сведется к:

$$\oint_{S_1} f \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Остается вычислить второй интеграл левой части формулы Грина (5.6). Для его вычисления введем сферическую систему координат с центром в точке  $\vec{R}_0$ . Тогда на сферической поверхности имеем:

$$r_{01} = r = \varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad dS = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$



С учетом изложенного выше формула Грина примет вид:

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \oint_S f \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

Поскольку область, для которой рассматривается задача Дирихле, односвязная, то есть имеет только внешнюю поверхность, необходимо радиус сферической поверхности устремить к нулю ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). При этом интеграл правой части не изменится в силу независимости его от  $\varepsilon$ . В этом случае можно записать:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \oint_{S_1} f \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (5.10)$$

Прежде чем вычислять предел, произведем замену согласно определению функции Грина:  $G = \omega_1 - 1/r$ . Тогда получим:

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ u \frac{\partial \omega_1}{\partial n} - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ -u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta.$$

Поскольку функции  $u$  и  $\omega_1$  гармонические во всей области, включая и точку  $\vec{R}_0$ , то они вместе со своими производными ограничены (доказательство этого не приводим). В силу этого первый интеграл верхнего выражения стремится к нулю.

Теперь найдем предел каждого слагаемого второго интеграла в отдельности. Для первого слагаемого получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left( -u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} \right) \sin \theta d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (u)_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (u)_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Поскольку  $G(x, y; x_0, y_0) = \omega_1 - \omega = \omega_1 - \ln(1/r)$ , то эту величину можно вынести из-под знака интеграла. Тогда для верхнего интеграла получим выражение следующего вида:

$$(u)_{r=0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi(u)_{r=0}.$$

Второе слагаемое преобразуется следующим образом:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = 0,$$

поскольку  $\partial u / \partial r$  ограничена.

Таким образом, левая часть формулы Грина обращается в ноль:

$$\oint_{S_1} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_1 + \oint_{S_2} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_2 = 0.$$

Поскольку при  $r = 0$  получаем значение функции в точке  $\vec{R}_0$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , то окончательно формула Грина принимает вид:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S f \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (5.11)$$

Полученная формула (5.11) дает решение задачи Дирихле в пространстве в том случае, если известна функция Грина, так как за точку  $\vec{R}_0$  можно взять любую точку области  $V$ .

### 5.4.2 Задача Дирихле на плоскости

Задача Дирихле на плоскости формулируется следующим образом. Необходимо найти функцию  $u(x, y)$ , гармоническую в области  $S$  на плоскости  $xu$  и принимающую на границе этой области  $l$  заданные значения. Как и в пространственном случае, решение задачи Дирихле основывается на формуле Грина для плоскости. Формула Грина на плоскости аналогична формуле (5.5):

$$\oint_l \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \int_S (u\Delta v - v\Delta u) dS, \quad (5.12)$$

где  $l$  — замкнутая кривая, ограничивающая область  $S$ ,  $\partial u/\partial n$  и  $\partial v/\partial n$  — производные по направлению внешней нормали к  $l$ . Положительный обход контура  $l$  выбирается так, что область  $S$  остается слева. Формулу (5.12) легко получить из (5.5), если применить ее к цилиндру единичной высоты и с образующими параллельными оси  $z$ . Учитывая, что функции  $u, v$  не зависят от  $z$ , получим для правой части формулы Грина (5.5) следующее соотношение:

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = 1 \cdot \int_S (u\Delta v - v\Delta u) dS,$$

поскольку  $dV = 1 \cdot dS$ .

Левая часть формулы Грина (5.5) преобразуется следующим образом:

$$\int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_{S_1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_{S_2} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Здесь  $S$  — боковая поверхность цилиндра, а  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований цилиндра, нормали к которым направлены противоположно, поэтому сумма второго и третьего интегралов даст ноль. В итоге получим:

$$\int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 1 \cdot \oint_l \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl, \quad \text{т.к. } dS = 1 \cdot dl.$$

Для решения задачи Дирихле понадобится обобщенная функция Грина:

$$\oint_l \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl + \int_{l_1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \int_S (u \Delta v - v \Delta u) dS, \quad (5.13)$$

где  $l_1$  — замкнутая кривая, целиком лежащая внутри  $S$ , а  $S_1$  — область, заключенная между  $l$  и  $l_1$ .

Для решения поставленной задачи в области  $S$  возьмем произвольную, но фиксированную точку  $(x_0, y_0)$ . За контур  $l_1$  возьмем окружность радиусом  $\varepsilon > 0$ , с центром в выбранной точке. Выберем любую точку  $\varepsilon \rightarrow 0$ , отличную от точки  $(x_0, y_0)$ , тогда расстояние между ними запишется как

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Покажем, что функция  $\omega = \ln(1/r) = -\ln r$  является гармонической в области  $S_1$ , то есть удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = 0.$$

Для этого рассмотрим лапласиан в полярной системе координат с центром в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\Delta \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}.$$

Поскольку функция  $\omega$  не зависит от координаты  $\varphi$ , верхнее выражение примет вид:

$$\Delta \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(-\ln r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0,$$

то есть функция  $\omega$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Подобно трехмерному случаю, функцию Грина для плоскости определим следующим образом:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \omega_1 - \omega = \omega_1 - \ln \frac{1}{r}, \quad (5.14)$$

где  $\omega_1$  — функция, аналитическая во всей области  $S$  и на внешней границе удовлетворяющая условию  $(\omega_1)_l = \omega$ , а функция Грина  $G$  зависит от координат двух точек. По своему определению функция Грина удовлетворяет граничному условию:

$$(G)_l = 0. \quad (5.15)$$

Если положить, что  $u$  — искомая гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию  $(u)_l = f$ , и положить, что  $v = G$ , то обобщенная формула Грина (5.13), учитывая (5.15), примет вид:

$$\oint_l \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl + \oint_{l_1} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = 0. \quad (5.16)$$

Введем полярную систему координат с началом в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$ , тогда на окружности  $l_1$  имеем  $r = \varepsilon$  и  $dl = \varepsilon d\varphi$ . В этом случае, учитывая, что на окружности имеет место  $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ , (5.16) можно представить в виде:

$$-\varepsilon \int_0^{2\pi} \left( G \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\varphi = \oint_l f \frac{\partial G}{\partial n} dl. \quad (5.17)$$

В выражении (5.17) перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Правая часть этого выражения не зависит от  $\varepsilon$  и, следовательно, не будет изменяться. В левую часть поставим значение  $G$  согласно (5.14). В этом случае левая часть выражения (5.17) примет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\varepsilon \left[ \int_0^{2\pi} \left( \omega_1 \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \omega_1}{\partial r} \right)_{r=\varepsilon} d\varphi + \int_0^{2\pi} \left( \ln r \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{1}{r} \right)_{r=\varepsilon} d\varphi \right] = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \left( u \frac{1}{r} - \ln r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=\varepsilon} d\varphi = 2\pi u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Первый интеграл в пределе обращается в нуль, поскольку функции  $u$ ,  $\omega_1$  и их производные ограничены в области  $S$ . В силу того, что имеет место  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u)_{r=\varepsilon} = (u)_{r=0} \equiv u(x_0, y_0)$ , окончательно получим формулу:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_l f \frac{\partial G}{\partial n} dl, \quad (5.18)$$

которая дает решение задачи Дирихле на плоскости, если известна функция Грина.

Таким образом, формулы (5.11) и (5.18) позволяют определить неизвестную функцию в некоторой области по ее граничному значению при условии, что известна функция Грина для данной области. Областей, для которых можно определить функции Грина, не так много. Далее рассмотрим некоторые из них.

### 5.4.3 Задача Неймана

Задача Неймана состоит в следующем.

Найти функцию  $u$ , удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности уравнению Лапласа и на границе условию:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{S(l)} = f_1, \quad (5.19)$$

где  $\partial u / \partial n$  — производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ , если рассматривается трехмерный случай, или к замкнутой кривой  $l$  — для двумерного случая, а  $f_1$  — функция, заданная на границе области.

Но в этом случае функция, заданная на границе, не может быть произвольной и будет удовлетворять некоторому условию. Выясним это условие. Полагая в формулах Грина (5.12) или (5.5)  $\nu = 1$ , получим:

$$\oint_{S(l)} \frac{\partial u}{\partial n} dS(dl) = \int_{V(S)} \Delta u dV(dS).$$

Так как функция гармоническая, то получим условие, которое накладывается на функцию  $f_1$ :

$$\oint_S f dS = 0, \quad (5.20)$$

где  $S$  — поверхность или  $l$  замкнутая кривая для трехмерной или двумерной постановки задачи Неймана соответственно.

При соблюдении условий (5.20) задача Неймана всегда имеет решение. Очевидно, что добавление к решению любой константы также будет решением задачи Неймана. Отметим без доказательства, что разность двух любых решений задачи Неймана — величина постоянная, то есть решение единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Метод функций Грина также применим и к решению задачи Неймана на основе формул (5.6) для пространства или на основе формулы (5.13) на плоскости.

Как и прежде, определим функцию Грина как  $G = \omega_1 - (1/r)$  для пространства или как  $G = \omega_1 - \ln(1/r)$  на плоскости.

В случае задачи Неймана на гармоническую функцию  $\omega_1$  накладываются граничные условия следующего вида:

$$\left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial n} \right]_{S(l)} = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right]_{S(l)}.$$

Тогда граничные условия для функции Грина будут:

$$\left[ \frac{\partial G}{\partial n} \right]_{S(l)} = 0. \quad (5.21)$$

Проводя те же преобразования в формуле Грина (5.6), что и при решении задачи Дирихле, учитывая только другие граничные условия, получим следующее выражение:

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left( u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \int_S G \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Переходя к пределу в этом выражении при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим решение задачи Неймана для пространства:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S G \frac{\partial f_1}{\partial n} dS. \quad (5.22)$$

Также легко получить решение задачи Неймана на плоскости, которое имеет вид:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_l G \frac{\partial f_1}{\partial n} dl. \quad (5.23)$$

Задачу Дирихле называют первой краевой задачей для уравнения Лапласа, а задачу Неймана называют второй краевой задачей для уравнения Лапласа.

Существует еще и третья краевая задача (задача Робэна), решение которой мы приводить не будем. Она формулируется следующим образом: требуется найти функцию, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности уравнению Лапласа и на границе — условию:

$$\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{S(l)} + \beta(u)_{S(l)} = \gamma,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — функции, заданные на границе.

#### 5.4.4 Задача Дирихле для шара и полупространства

Как следует из вышеизложенного, задача Дирихле будет решена, если известна функция Грина. Основной трудностью как раз и является нахождение функции Грина. Следует сказать, что функция Грина может быть получена только для простых областей. В частности, такими областями являются шар, круг, полупространство и полуплоскость. При построении функции Грина для таких областей необходимо ввести понятие сопряженных точек.

Две точки  $A$  и  $B$  называются сопряженными относительно плоскости (в пространстве) или относительно прямой (на плоскости), если они симметричны относительно этой плоскости или прямой. Так, точки  $A(x, y, z)$  и  $A^*(x, y, -z)$  будут сопряженными относительно плоскости  $z = 0$ .

Понятие сопряженности относительно сферы в пространстве или относительно окружности на плоскости несколько сложнее. Две точки называются сопряженными относительно сферы или окружности, если они лежат на одном луче, исходящем из центра  $O$  сферы или окружности, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса  $r_{OA}r_{OA^*} = R^2$ , где  $R$  — радиус сферы или окружности.

Поместим начало декартовой системы координат в центр сферы или окружности, тогда точка  $A(x_0, y_0, z_0)$  будет сопряжена с точкой:

$$A^* \left( \frac{R^2}{r_0^2} x_0, \frac{R^2}{r_0^2} y_0, \frac{R^2}{r_0^2} z_0 \right),$$

где  $r_0 = OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ . Убедимся в том, что эти точки сопряженные. Обозначим:

$$OA^* = r_0^* = \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2} + z_0^{*2}}$$

и по определению сопряженных точек имеем  $r_0^* r_0 = R^2$ . Поскольку точки  $A$  и  $A^*$  лежат на одном луче, имеет место следующее соотношение (рис.5.5). Из рисунка легко определить значение координаты сопряженной точки  $A^*$  по оси  $OX$ :

$$\frac{x_0^*}{r_0^*} = \frac{x_0}{r_0},$$

откуда следует:

$$x_0^* = x_0 \frac{r_0^*}{r_0} = x_0 \frac{R^2}{r_0^2}.$$

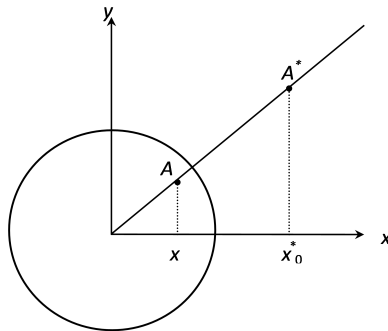


Рис. 5.5 – Сопряженность точек относительно окружности

Точно такие же рассуждения можно провести и для двух других координат сопряженной точки  $A^*$ .

Для плоского случая будем иметь только две координаты и, следовательно, получим, что две точки  $A(x_0, y_0)$  и  $A((R^2/r_0^2)x_0, (R^2/r_0^2)y_0)$  будут сопряженными.

Очевидно, что если точка  $A$  лежит внутри сферы или окружности, то сопряженная ей точка  $A^*$  находится вне сферы или окружности; если точка  $A$  лежит на сфере или окружности, то сопряженная ей точка  $A^*$  совпадает с  $A$ .

Рассмотрим построение сопряженных точек геометрическим способом. Пусть точка  $A$  лежит внутри окружности и не совпадает с ее центром. Проведем через точку  $A$  хорду  $BC$ , перпендикулярную лучу  $OA$ , а через концы хорды  $B$  и  $C$  проведем касательные к окружности. Пересечение касательных и определит точку  $A^*$ , сопряженную точке  $A$  относительно окружности (рис. 5.6). Из подобия треугольников  $OAB$  и  $OBA^*$  имеем, что  $OB/OA = OA^*/OB$  или  $R/r_0 = r_0^*/R$ ,  $r_0 r_0^* = R^2$ .

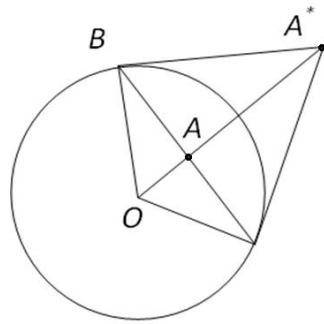


Рис. 5.6 – Построение сопряженных точек для окружности

### Задача Дирихле для шара

Рассмотрим шар радиусом  $R$  с центром в начале координат. Возьмем некоторую фиксированную точку  $A(x_0, y_0, z_0)$  и сопряженную ей точку  $A^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ . Внутри шара возьмем произвольную переменную точку  $P(x, y, z)$ . Тогда расстояния между соответствующими точками запишутся следующим образом (рис. 5.7):

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z - z_0^*)^2}.$$

Введем обозначения  $OP = r$ ,  $OA = r_0$ ,  $OA^* = r_0^*$  и угол  $OAP = \psi$ . Тогда по теореме косинусов имеем (см. рис. 5.7):

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos \psi}.$$

Поскольку  $r_0 r_0^* = R^2$ , то имеем:

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r \frac{R^2}{r_0} \cos \psi}.$$

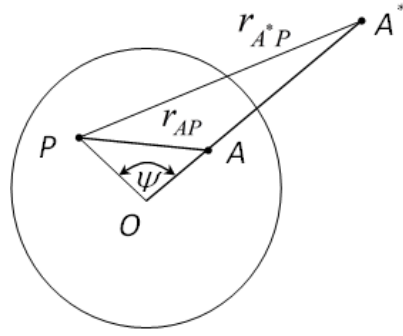


Рис. 5.7 – Построение точек в задаче Дирихле для шара

Ранее уже было показано, что для пространства функция  $\omega_1 = 1/r_{AP}$  удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках внутри шара, кроме точки  $A$ . Функция  $\omega_2 = 1/r_{A^*P}$  будет удовлетворять уравнению Лапласа во всех без исключения точках внутри шара, поскольку точка  $A^*$  лежит вне шара. Если произвольная точка  $P$  лежит на поверхности шара, то имеют место следующие соотношения:

$$(r_{AP})_{r=R} = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi},$$

$$(r_{A^*P})_{r=R} = \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\frac{R^3}{r_0} \cos \psi} = \frac{r}{r_0} \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi}.$$

Из этих соотношений следует, что функция  $\omega_1 = (r/r_0)\omega_2 = (r/r_0) \cdot (1/r_{A^*P})$  будет гармоничной во всем шаре, а ее значения на сфере  $R = r$  совпадают со значением функции  $1/r_{AP}$ .

$$(\omega_1)_S = \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}} = \frac{1}{r_{AP}} = \omega.$$

Согласно определению функции Грина следует взять функцию  $\omega = 1/r_{AP}$  и подобрать гармоническую всюду в шаре функцию  $\omega_1$  так, чтобы их граничные значения совпадали. Как следует из вышеизложенного, за функцию, гармоническую всюду в шаре, выберем функцию  $(R/r_0) \cdot (1/r_{A^*P})$ . Тогда функция Грина для шара запишется как

$$G = \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}} - \frac{1}{r_{AP}}. \quad (5.24)$$

Теперь остается только написать решение задачи Дирихле для шара по общей формуле (5.11), но для этого нужно предварительно вычислить значения производной функции Грина по внешней нормали, то есть  $\partial G/\partial r$  при  $r = R$ .

Согласно формулам, определяющим  $G$ ,  $r_{AP}$ ,  $r_{A^*P}$ , имеем:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r_{AP}^2} \cdot \frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{r_{A^*P}^2} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{1}{r_{AP}^3} (r - r_0 \cos \psi) - \frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{r_{A^*P}^3} \left( r - \frac{R^2}{r_0} \cos \psi \right).$$



Учитывая, что на границе шара имеет место  $(r_{A^*P})_{r=R} = R/r_0(r_{AP})_{r=R}$ , получим:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{R - r_0 \cos \psi}{(r_{AP}^3)_{r=R}} - \frac{R}{r_0} \cdot \frac{R - \frac{R^2}{r_0} \cos \psi}{\frac{R^3}{r_0^3} (r_{AP}^3)_{r=R}} = \frac{R^2 - r^2}{R(R^2 + R_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}}.$$

Введем сферические координаты  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ . Обозначим координаты точки  $P$  через  $(r, \varphi, \theta)$ , а координаты точки  $A$  через  $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$ .

Тогда элемент поверхности выразится как  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Выразим через сферические координаты  $\cos \psi$ . Для этого введем единичные векторы  $\vec{e}_0$ ,  $\vec{e}$ , направленные по  $OA$  и  $OP$  соответственно. Разложение этих векторов в декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= \frac{1}{r_0} O\vec{A} = \frac{1}{r_0} (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}) = \frac{1}{r_0} (r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \vec{i} + r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \vec{j} + r_0 \cos \theta_0 \vec{k}), \\ \vec{e} &= \frac{1}{r} O\vec{P} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}. \end{aligned}$$

Исходя из полученного выше, выражение для единичных векторов запишем как

$$\cos \psi = \vec{e}_0 \cdot \vec{e} = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0. \quad (5.25)$$

Поскольку граничные значения функции  $(u)_S = f$  не зависят от  $r$ , то решение задачи Дирихле для шара в окончательном виде запишется следующим образом:

$$u(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S f(\varphi, \theta) \frac{(R^2 - r_0^2) dS}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.26)$$

где вместо  $\cos \psi$  нужно поставить его значение согласно (5.25). Интеграл (5.26) называют интегралом Пуассона для шара.

При выводе решения (5.26) предполагали, что точка  $A$  не совпадает с началом координат, поскольку в этом случае нет сопряженной точки. Но полученное решение остается в силе и при  $r_0 = 0$ . В этой точке решение примет вид:

$$(u)_{r_0=0} = \frac{1}{2\pi R^2} \oint_S f(\varphi, \theta) dS. \quad (5.27)$$

Из выражения (5.27) следует, что в центре сферы гармоническая функция имеет значение, равное среднему ее значению на сфере. Это так называемая теорема о среднем для гармонических функций.

В общем случае решение (5.26) сложное для вычислений и воспользоваться им можно только в некоторых частных случаях.

### Задача Дирихле для внешности шара

Решение этой задачи может быть получено так же, как и решение (5.26) для шара. Но для внешности шара сопряженные точки следует поменять местами, то

есть  $r_0$  в формуле (5.26) необходимо заменить на  $R^2/r_0$ . Искомое решение для внешности шара примет вид:

$$u(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\varphi, \theta) \frac{r_0(r_0^2 - R^2) \sin \theta d\theta}{(r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.28)$$

Это решение имеет смысл при  $r_0 > R$ . Если сравнивать решения (5.26) и (5.28), то видно, что одно отличается от другого заменой  $R$  на  $r_0$ .

### Задача Дирихле для полупространства

Рассмотрим полупространство  $z > 0$  и возьмем произвольную фиксированную точку  $A(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда сопряженная ей точка будет  $A^*(x_0, y_0, z_0)$ . Выберем произвольную точку  $P(x, y, z)$  в полупространстве  $z > 0$ . Легко понять, что в качестве функции, аналитической всюду, кроме точки  $A$ , следует выбрать  $\omega = 1/r_{AP}$ , где  $r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ .

В качестве функции, аналитической всюду в полуплоскости  $z > 0$ , возьмем функцию  $\omega_1 = 1/r_{A^*P}$ , где

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}.$$

Поскольку границей служит плоскость  $z = 0$ , то на границе имеет место равенство:

$$\left(\frac{1}{r_{AP}}\right)_{z=0} = \left(\frac{1}{r_{A^*P}}\right)_{z=0}.$$

В качестве функции Грина следует взять функцию вида:

$$G = \frac{1}{r_{A^*P}} - \frac{1}{r_{AP}},$$

которая на границе удовлетворяет условию:

$$(G)_{z=0} = 0.$$

Теперь, чтобы воспользоваться общей формулой (5.11), необходимо вычислить производную от функции Грина по внешней нормали, которая направлена в отрицательном направлении оси  $z$ . Запишем значение этой производной:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{r_{A^*P}^2} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial z} - \frac{1}{r_{AP}^2} \frac{\partial r_{AP}}{\partial z} = -\frac{z + z_0}{r_{A^*P}^3} - \frac{z - z_0}{r_{AP}^3}.$$

Значение этой производной на границе будет:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{z=0} = \frac{2z_0}{r_{AP}^3}.$$

Подставляя это значение производной в формулу (5.11), получим решение задачи Дирихле для верхнего полупространства:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y) dy}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.29)$$

Здесь функция  $f(x, y)$  определена на плоскости  $z = 0$ , то есть для  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < y < +\infty$  и ограничена на бесконечности.

В данном случае интеграл (5.29) называется интегралом Пуассона для пространства.

### Решение задачи Дирихле для круга

Решение задачи производится стандартным образом, как для шара и полупространства, но решение для круга и полуплоскости значительно проще. Выберем внутри круга точку  $A(x_0, y_0)$ , отличную от центра, и сопряженную с ней точку  $A^*((R^2/r_0^2)x_0, (R^2/r_0^2)y_0)$ . Введем обозначения (рис. 5.8):

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{r_0^2}x_0\right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{r_0^2}y_0\right)^2},$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

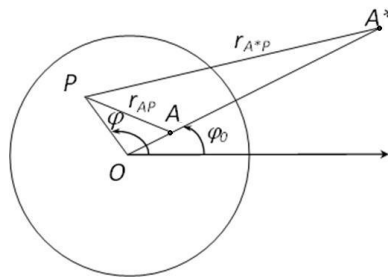


Рис. 5.8 – Построение точек в задаче Дирихле для круга

Ранее было показано, что функция  $\ln(1/r_{A^*P})$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду внутри круга, а функция  $\ln(1/r_{AP})$  аналитическая внутри круга, за исключением точки  $A$ . Как видно из рис. 5.8, по теореме косинусов можно записать следующие выражения:

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

На границе, при  $r = R$ , получим:

$$(r_{AP})_{r=R} = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$(r_{A^*P})_{r=R} = \frac{R}{r_0} \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

то есть имеет место равенство:

$$(r_{A^*P})_{r=R} = \frac{R}{r_0} (r_{AP})_{r=R}.$$

Отсюда следует, что на границе круга значения функций  $\omega_1 = \ln(1/r_{AP})$  и  $\omega = \ln(1/r_{A^*P})$  совпадают. Тогда функцию Грина для круга следует определить как

$$G = \ln \frac{R}{r_0} - \ln r_{A^*P} + \ln r_{AP}.$$

Вычислим производную функции Грина по нормали:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Подставляя значение функции Грина, получим следующее выражение для производной:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r_{AP}} \cdot \frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{1}{r_{A^*P}} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}} - \frac{r - \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{A^*P}^2}.$$

Окончательно получим:

$$\left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{R - \frac{r_0^2}{R}}{R^2 + r_0^2 - 2r_0R \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Тогда по общей формуле решение задачи Дирихле для круга запишется как

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2)f(\varphi) d\varphi}{R^2 + r_0^2 - 2r_0R \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где учтено, что дифференциал дуги окружности определяется как  $dl = R d\varphi$ .

Интеграл, входящий в решение, называется интегралом Пуассона для круга, а выражение:

$$\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

называется ядром Пуассона для круга.

## Задача Дирихле для полуплоскости

Функция Грина для полуплоскости  $y > 0$  имеет вид:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{1}{r_{A^*P}} - \ln \frac{1}{r_{AP}},$$

где  $A(x_0, y_0)$  — произвольная точка полуплоскости  $y > 0$ , а  $A^*(x_0, -y_0)$  — точка, ей сопряженная. В этом случае имеем, что:

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

и границей служит прямая  $y = 0$ . (Рекомендуется получить функцию Грина самостоятельно и вспомнить задачу Дирихле для полупространства.)

Далее найдем граничное значение производной функции Грина:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_S = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{r_{A^*P}} \cdot \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial y} - \frac{1}{r_{AP}} \cdot \frac{\partial r_{AP}}{\partial y} = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Тогда решение задачи Дирихле запишется в виде:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Это решение называется интегралом Пуассона для полуплоскости, а выражение:

$$\frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x - x_0)^2 + y_0^2}$$

называется ядром Пуассона для полуплоскости.

Отсюда следует, что ядро Пуассона дает значение функции в любой точке внутри круга, если она на границе принимает нулевые значения, за исключением одной точки, где обращается в бесконечность.

## 5.5 Применение метода Фурье для уравнений эллиптического типа

Наиболее характерным однородным уравнением эллиптического типа является уравнение вида:

$$\Delta u = 0,$$

которое называется уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа играет важную роль в приложениях. Например, этому уравнению удовлетворяет всякое стационарное распределение температур. Действительно, если температура не зависит от времени, то уравнение теплопроводности сводится к уравнению Лапласа. Уравнение гиперболического типа (уравнение колебаний) также сведется к уравнению Лапласа, если неизвестная функция не будет зависеть от времени.

### 5.5.1 Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга

Метод разделения переменных, который играет большую роль в задачах теплопроводности и колебаний, применим также к решению уравнения Лапласа и задачи Дирихле для простых областей: круг, прямоугольник и т. п. Рассмотрим задачу Дирихле для круга. Радиус круга обозначим через  $R$ , центр круга совместим с началом координат. Решать эту задачу целесообразно в полярных координатах. Задача формулируется следующим образом: необходимо найти функцию  $u = u(r, \varphi)$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.30)$$

для  $r < R$  и принимающую на границе круга заданные значения:

$$(u)_{r=R} = f(\varphi). \quad (5.31)$$

Метод Фурье заключается в том, что решение уравнения (5.30) ищется в виде  $u = U(r)F(\varphi)$ , где неизвестные функции  $U(r)$  и  $F(\varphi)$  зависят каждая только от одной переменной. Подставляя (5.31) в уравнение (5.30), получим следующее выражение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) F = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 F}{d\varphi^2} U$$

или, перегруппировав,

$$\frac{r}{U} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{d\varphi^2}. \quad (5.32)$$

Так как левая часть уравнения (5.32) не зависит от  $\varphi$ , а правая — от  $r$ , то левая и правая части должны быть постоянными, то есть должно выполняться условие:

$$\frac{r}{U} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \lambda, \quad \frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -\lambda, \quad (5.33)$$

где  $\lambda$  — постоянная разделения. Покажем, что эта постоянная должна быть неотрицательной. Второе из уравнений (5.33):

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \lambda F = 0$$

имеет общее решение:

$$F(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi, \quad (5.34)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Покажем, что  $\lambda$  не может принимать любые значения. Это следует из того, что увеличение  $\varphi$  на  $2\pi$  возвращает точку  $(r, \varphi)$  в начальное положение. Значит, все функции от  $\varphi$  должны быть периодическими по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , то есть должно выполняться условие:

$$F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi).$$

Согласно формуле (5.34) это условие означает, что  $\sqrt{\lambda}$  должен быть целым числом  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Отрицательные числа можно не рассматривать, так как знак  $n$  влияет только на знак произвольной постоянной  $B$ . Числа  $\lambda = n^2$  называются собственными числами, а решение (5.34) через них можно представить как

$$F(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi. \quad (5.35)$$

Теперь рассмотрим первое уравнение (5.33):

$$\frac{r}{U} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = n^2.$$

Откуда получим уравнение Эйлера:

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + r \frac{dU}{dr} - n^2 U = 0.$$

Это уравнение может быть решено при помощи подстановки  $U = r^\alpha$ . Подставляя это значение в уравнение для  $U$ , получим:

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0,$$

а отсюда получим уравнение для показателя  $\alpha$ :

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0, \quad \alpha^2 = n^2, \quad \alpha = \pm n.$$

Следовательно, решение имеет вид  $U(r) = r^n$  либо  $U(r) = r^{-n}$ .

Второе решение необходимо отбросить, так как при  $n > 0$  оно обращается в бесконечность в центре круга  $r = 0$ .

Таким образом, мы получили частное решение уравнения Лапласа, которое можно записать как

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

которое обозначено по-другому (с индексом), поскольку зависит от  $n$  так же, как и от произвольных постоянных  $A$  и  $B$ .

Поскольку уравнение Лапласа однородно и линейно, то сумма частных решений также будет решением уравнения:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (5.36)$$

Решение (5.36) содержит две бесконечные последовательности произвольных постоянных  $A_n$  и  $B_n$ .

Придадим решению (5.36) вид, напоминающий ряд Фурье, для чего обозначим:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда решение (5.36) можно представить следующим образом:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n. \quad (5.37)$$

Неизвестные коэффициенты  $a_0, a_n, b_n$  определим из граничного условия (5.31), в котором заданная функция  $f(\varphi)$  также должна быть периодической с периодом  $2\pi$ .

Полагая в решении (5.37)  $r = R$ , получим граничное условие в следующем виде:  $f(\varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi)$ , которое представляет собой разложение функции  $f(\varphi)$  в ряд Фурье. По известным формулам для коэффициентов Фурье можно записать, что:

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi,$$

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi.$$

Отсюда получим выражение для неизвестных коэффициентов:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi. \quad (5.38)$$

Чтобы получить решение задачи Дирихле для круга, остается только подставить выражение для коэффициентов (5.38) в формулу (5.37).

Покажем, что полученное решение совпадает с интегралом Пуассона для круга (то есть с решением, полученным методом функции Грина). Если подставить формулы (5.38) в решение (5.37), то получим следующее выражение:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right] f(\psi) d\psi.$$

Сумма в фигурных скобках может быть вычислена, если воспользоваться формулой Эйлера:

$$\cos n(\varphi - \psi) = \operatorname{Re} e^{in(\varphi - \psi)},$$

где  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть. Тогда выражение в фигурных скобках можно представить как

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi - \psi)} \right].$$

При  $r < R$  отношение  $r/R < 1$  и ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi - \psi)} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем:

$$q = \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}.$$

Поскольку знаменатель меньше единицы, то ряд сходится и его сумма равна:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi - \psi)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \psi)}}.$$

Теперь необходимо в этом выражении выделить вещественную часть (следует проделать самостоятельно). В итоге получим, что имеет место:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)}.$$

В этом случае решение (5.37) примет вид:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)} d\psi$$

интеграла Пуассона для круга, что соответствовало решению, полученному методом функции Грина.



### 5.5.2 Метод разделения переменных для трехмерного уравнения Лапласа в сферических координатах

В трехмерном случае уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Рассмотрим осесимметричный случай, когда функция  $u$  не зависит от  $\varphi$ , то есть  $u = u(r, \theta)$ . Тогда уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5.39)$$

Рассмотрим решения вида  $u = U(r)F(\theta)$ , которые ограничены в шаре радиусом  $R$  с центром в начале координат. Подставив это решение в предыдущее уравнение, находим, что:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) F = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) U$$

или, перегруппировав, получим:

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{1}{F \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right). \quad (5.40)$$

По стандартному для метода Фурье рассуждению о независимости левой части от  $\theta$ , а правой — от  $r$ , обе они должны быть постоянными:

$$\frac{1}{U} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \lambda, \quad \frac{1}{F \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) = -\lambda, \quad (5.41)$$

где  $\lambda$  — постоянная разделения, которую опять будем считать неотрицательной. Для дальнейших вычислений удобно ввести другую постоянную  $\nu$ , связанную с  $\lambda$  соотношением:

$$\lambda = \nu(\nu + 1).$$

Тогда первое уравнение (5.41) примет вид:

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} - \nu(\nu + 1)U = 0.$$

Полагая  $U = r^\alpha$ , найдем для показателя  $\alpha$  уравнение:

$$\alpha(\alpha + 1) = \nu(\nu + 1).$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:  $\alpha = \nu$ ,  $\alpha = -\nu - 1$ . Поскольку решение должно быть ограничено в шаре, то второй корень следует отбросить. Таким образом, остается решение  $U(r) = r^\alpha$ .

Рассмотрим теперь второе уравнение (5.41):

$$\frac{1}{F \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) = -\nu(\nu + 1). \quad (5.42)$$

Так как сферическая координата  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi$ , то решения должны быть ограничены для всех таких  $\theta$ .

Введем новую независимую переменную:

$$x = \cos \theta. \quad (5.43)$$

$x$  изменяется от 1 до  $-1$ , при изменении  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . Кроме того, при дифференцировании необходимо учесть, что теперь  $F$  будет сложной функцией:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\theta} &= \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dF}{dx}, \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dF}{d\theta} \right) &= \sin \theta \frac{d}{dx} \left( \sin^2 \theta \frac{dF}{dx} \right). \end{aligned}$$

С учетом этих производных уравнение (5.42) может быть записано как

$$\frac{d}{dx} \left( \sin^2 \theta \frac{dF}{dx} \right) = -v(v+1)F$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dF}{dx} \right] + v(v+1)F = 0.$$

Теперь обозначим функцию  $F$  через  $y$ :

$$F(\theta) = F(\arccos x) = y(x).$$

Тогда для новой функции получим уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + v(v+1)y = 0, \quad (5.44)$$

которое называется *уравнением Лежандра* и играет большую роль во многих прикладных вопросах. Точки  $x = \pm 1$  являются особыми для дифференциального уравнения (5.44), и поэтому не все решения уравнения будут ограничены на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ .

Приведем без доказательства, что уравнение Лежандра имеет ограниченные решения только в том случае, когда  $v = n$ , ( $n \geq 0$ ), т. е. равно целому числу. Для таких  $v$  решениями являются некоторые многочлены, называемые *многочленами Лежандра*. Эти многочлены имеют следующий вид:

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (5.45)$$

Покажем, что многочлены (5.45) удовлетворяют уравнению (5.44) при  $v = n$ . Для этого положим, что  $(x^2 - 1)^n = z$  и  $y = z^{(n)}$  (пока постоянную  $1/(2^n n!)$  не рассматриваем). Из первого обозначения имеем:

$$\frac{dz}{dx} \equiv z' = 2nx(x^2 - 1) \text{ и } (x^2 - 1)z' = 2nxz.$$

Дифференцируя последнее равенство  $n$  раз по  $x$ , получим:

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)z'] = 2n \frac{d^n}{dx^n} (xz). \quad (5.46)$$

По правилу Лейбница дифференцирования произведения двух функций имеем:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \dots + nu^{(n-1)}v' + uv^{(n)}.$$

Полагая  $u = x^2 - 1$ ,  $v = z'$ , получим:

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)z'] = (x^2 - 1)z^{(n+1)} + 2nxz^n + 2\frac{n(n-1)}{2!}z^{(n-1)},$$

так как все производные функции  $u = x^2 - 1$  порядка выше второго равны нулю. Точно так же по правилу Лейбница при  $u = x$ ,  $v = z$  получим, что:

$$\frac{d^n}{dx^n}(xz) = xz^{(n)} + nz^{(n-1)}.$$

Следовательно, равенство (5.46) можно представить как

$$(x^2 - 1)z^{(n+1)} + 2nxz^{(n)} + n(n-1)z^{(n-1)} = 2nxz^{(n)} + 2n^2z^{(n-1)}$$

или

$$(x^2 - 1)z^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n-1)} = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство еще раз по  $x$ , получим:

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)z^{(n+1)}] + n(n+1)z^{(n)} = 0$$

или, поскольку  $z^{(n)} = y$ ,

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что:

$$y = z^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$$

является решением уравнения Лагранжа (5.44) при  $v = n$ . Поскольку уравнение линейное, то при любой постоянной  $C$  и  $C_y$  также будет решением. Выбор этой постоянной в многочлене Лежандра зависит от условий нормировки. Потребуем, чтобы при любом  $n$  многочлен Лежандра принимал значение, равное единице, при  $x = 1$ .

Тогда нужно выбрать  $C$  так, чтобы выполнялось условие:

$$\left[ C \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n] \right]_{x=1} = 1. \quad (5.47)$$

Используя правило Лейбница, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n] &= \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n] = (x+1)^n \frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n] + \\ &+ n \frac{d}{dx}[(x+1)^n] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x-1)^n] + \dots = (x+1)^n n! + n \frac{d}{dx}[(x+1)^n] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x-1)^n] + \dots \end{aligned}$$

Все члены полученного выражения, начиная со второго, содержат разность  $(x - 1)$  в качестве сомножителя и поэтому обращаются в нуль при  $x = 1$ . В силу этого:

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]_{x=1} = 2^n n!.$$

Тогда из условий нормировки (5.47) следует, что:

$$C = \frac{1}{2^n n!}.$$

Таким образом, было установлено, что в качестве функции  $F(\theta)$  следует взять  $P_n(x) = P_n(\cos \theta)$  и что ограниченными решениями вида  $U(r)F(\theta)$  уравнения Лапласа (5.39) будут функции:

$$u_n(r, \theta) = U_n(r)F_n(\theta) = r^n P_n(\cos \theta). \quad (5.48)$$

### 5.5.3 Некоторые свойства многочленов Лежандра

1. Многочлен  $P_n(x)$  содержит только степени  $x$  одинаковой с  $n$  четности, а именно:  $x^n, x^{n-2}, x^{n-4}, \dots$ ; низшей степенью  $x$  в  $P_n(x)$  будет первая, если  $n$  нечетно, и нулевой, если  $n$  четно.

В качестве примера приведем первые пять многочленов Лежандра, вычисленных по формуле (5.45):

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

2. При  $x = 1$  значение  $P_n(1) = 1$  и при  $x = -1$  значение  $P_n(-1) = (-1)^n$  для всех  $n$ . Первое равенство было показано выше (условие нормировки). Если  $n$  четное, то  $P_n(-x) = P_n(x)$ , а если  $n$  нечетное, то  $P_n(x) = -P_n(-x)$ . Отсюда следует, что соотношение  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

3. На отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  многочлены Лежандра по абсолютной величине не превосходят единицу.

4. Многочлены для  $n > 1$  имеют  $n$  действительных простых корней, расположенных в интервале  $-1 < x < 1$ .

5. Многочлены Лежандра ортогональны в упомянутом выше интервале, то есть для  $n \neq m$  выполняется:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0. \quad (5.49)$$

Докажем это важное свойство. Пусть  $n \neq m$ , а многочлены Лежандра удовлетворяют уравнению (5.44):

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n = 0, \\ \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] + m(m+1)P_m = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на  $P_m(x)$ , а второе на  $P_n(x)$  и вычтем из первого полученного равенства второе:

$$P_m \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] - P_n \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] = [m(m+1) - n(n+1)] P_n P_m.$$

Левую часть полученного выражения нетрудно преобразовать следующим образом:

$$P_m \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] - P_n \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \left[ P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right] \right).$$

Проинтегрируем предпоследнее равенство с учетом последнего выражения, получим:

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \left[ (1-x^2) \left( P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right) \right]_{-1}^1 = 0.$$

Последнее равенство обращается в нуль из-за множителя  $(1-x^2)$ . Поскольку в левой части последнего равенства множитель  $[m(m+1) - n(n+1)] \neq 0$ , то придем к равенству (5.49).

6. В приложениях многочленов Лежандра важную роль играет формула:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.50)$$

#### 5.5.4 Решение задачи Дирихле для шара разложением по многочленам Лежандра

Для осесимметричного случая, рассмотренного выше, задача Дирихле для шара радиусом  $R$  с центром в начале координат состоит в определении функции  $u[r, \theta]$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа и граничным условиям:

$$[u]_{r=R} = f(\theta). \quad (5.51)$$

Выше было установлено, что для  $n = 1, 2, \dots$  решениями уравнения (5.39) являются функции  $r^n P_n(\cos \theta)$ . Поскольку уравнение Лапласа однородное и линейное, то его решением также будет функция:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (5.52)$$

где  $C_n$  — произвольные постоянные коэффициенты, которые определим из граничного условия (5.52). Подставляя решение (5.52) в граничное условие (5.51), получим:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\cos \theta), \quad (5.53)$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Неизвестные коэффициенты можно определить, воспользовавшись свойством ортогональности многочленов Лежандра. Умножим граничное условие (24) на  $P_m(\cos \theta)$ , где  $m \geq 0$  — некоторое фиксированное целое число, и проинтегрируем его по сфере радиусом  $R$ :

$$\oint_S f(\theta) P_m(\cos \theta) dS = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \oint_S P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) dS. \quad (5.54)$$

Элемент площади поверхности сферы  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  и интегрирование по сфере по  $0 \leq \theta \leq \pi$  и по  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  дают для интеграла правой части следующее выражение:

$$\begin{aligned} \oint_S P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi R^2 \frac{2}{2m+1}, & n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

В верхнем выражении интегрирование по  $\varphi$  дало множитель  $2\pi$ , а замена переменной  $\cos \theta = x$ ,  $-\sin \theta d\theta = dx$  приводит к последнему интегралу, который в силу ортогональности многочленов Лежандра равен нулю при  $n \neq m$  и  $2/(2m+1)$  при  $n = m$ .

Таким образом, в правой части (5.54) все члены суммы, кроме одного, равны нулю. Следовательно, правая часть будет равна:

$$C_m R^m \frac{4\pi R^2}{2m+1}.$$

Это позволяет определить неизвестные коэффициенты через функцию, заданную на границе:

$$C_m = \frac{1}{R^m} (2m+1) \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S f(\theta) P_m(\cos \theta) dS. \quad (5.55)$$

Так как  $m$  — произвольный фиксированный номер, пробегающий значения от 0 до  $\infty$ , то его можно заменить на  $n$  и подставить выражение (5.55) в решение (5.52). В этом случае получим окончательное решение задачи Дирихле для шара.

Методом функции Грина уже было получено решение задачи Дирихле для шара в виде интеграла Пуассона. Можно показать, что в осесимметричном случае эти решения совпадают.

Однако решение задачи Дирихле в виде ряда по многочленам Лежандра имеет ряд преимуществ перед решением в виде интеграла Пуассона. Рассмотрим одно следствие из формулы (5.52). Пусть граничное значение  $f(\theta)$  является одним из многочленов Лежандра или их линейной комбинацией, тогда в правой части формулы (5.52) останется одно или несколько слагаемых, отличных от нуля. Например,

пусть  $f(\theta) = \cos \theta = P_1(\cos \theta)$ , тогда в формуле (5.55) интеграл будет отличным от нуля только для значения  $m = 1$ , следовательно, только один коэффициент, отличный от нуля, будет равен:

$$C_1 = \frac{3}{R} \cdot \frac{1}{2\pi R^2} \oint_S \cos \theta \cdot P_1(\cos \theta) dS = \frac{3}{2R} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{1}{R}.$$

Тогда решение задачи Дирихле при граничных условиях  $f(\theta) = \cos \theta$ , если подставить значение коэффициента  $C_1$  в формулу (5.52), примет вид:

$$u(r, \theta) = \frac{r}{R} \cos \theta.$$

Рассмотрим другой пример, когда граничная функция имеет вид  $f(\theta) = \cos 2\theta$ . Представим эту функцию в виде линейной комбинации многочленов Лежандра:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2(x) - \frac{1}{3}P_0(x) = \frac{4}{3}P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3}P_0(\cos \theta).$$

Как легко видеть, в решении (5.52) останутся только два отличных от нуля члена, соответствующих  $n = 0$ ,  $n = 2$ :

$$C_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S f(\theta) P_0(\cos \theta) dS = -\frac{1}{3},$$

$$C_2 = \frac{5}{R^2} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S f(\theta) P_2(\cos \theta) dS = \frac{4}{3R^2},$$

так что решение примет вид:

$$u(r, \theta) = \frac{4}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3}.$$

Метод Фурье применим не только для решения задачи Дирихле в осесимметричном случае. В общем случае применение метода разделения переменных в сферических координатах приводит к более сложным уравнениям вместо уравнения Лежандра. Решениями этих уравнений будут так называемые присоединенные функции Лежандра, тесно связанные с многочленами Лежандра.



## Контрольные вопросы по главе 5

- 1) В чем заключается физический смысл лапласиана?
- 2) Как называются функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа?
- 3) Как формулируются задачи Дирихле, Неймана и Робена?
- 4) Как записывается закон теплообмена Ньютона?

- 5) Какой вид имеет решение уравнения Лапласа для одномерного приближения в декартовой системе координат? В полярной системе координат? В сферической системе координат?
- 6) На какой формуле основан метод функций Грина?
- 7) Что является функцией Грина для задачи Дирихле в пространственном случае?
- 8) Какому условию удовлетворяет функция Грина на границе области для задачи Дирихле? Для задачи Неймана?
- 9) Какая точка называется сопряженной относительно сферы (круга) заданной точке?
- 10) О чем гласит теорема о среднем для гармонических функций?
- 11) Решение какой задачи называют интегралом Пуассона?
- 12) Для каких областей решение эллиптических уравнений представляется в виде ряда Фурье?
- 13) Для каких областей решение эллиптических уравнений записывается через многочлены Лежандра?



---

## Глава 6

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

### 6.1 Основные понятия метода конечных разностей

#### 6.1.1 Общие представления о конечно-разностных формулах

Наряду с классическими методами решения уравнений математической физики, которые имеют ограниченную область применения, большое распространение получили численные методы решения. Их широкое использование стало возможным благодаря появлению высокопроизводительных ЭВМ, способных хранить в памяти большие массивы данных и производить над ними арифметические действия с большой скоростью.

Сущность численного метода решения дифференциального уравнения состоит в приближенной его замене дискретным аналогом — разностным уравнением. При этом область непрерывного изменения аргумента  $x$  заменяется дискретным множеством точек (узлами)  $x_k$ , которые составляют разностную сетку. Набор разностных уравнений образует систему линейных алгебраических уравнений, которая решается каким-либо известным (прямым или итерационным) методом.

Искомая функция непрерывного аргумента  $y(x)$  приближенно заменяется функцией дискретного аргумента  $y_k$  на заданной сетке. Эта функция называется сеточной функцией. Она определена только в узлах разностной сетки.

Для получения разностного аналога для производной первого порядка  $y'(x)$  привлекают определение производной:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Поскольку в ЭВМ невозможно осуществить операцию нахождения предела отношения бесконечно малых чисел, то точное соотношение (6.1) заменяют приближенным:

$$y'(x) \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (6.2)$$

Эта формула носит название *правых разностей*. Если в (6.2) вместо  $\Delta x$  взять  $-\Delta x$ , то формула примет вид:

$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (6.3)$$

Эта формула называется формулой *левых разностей*.

Если сложить (6.2) и (6.3) и разделить результат на 2, то получим формулу *центральных разностей*:

$$y'(x) \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (6.4)$$

Разностный аналог для производной второго порядка можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} y''(x) = [y'(x)]' &\approx \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} \approx \frac{\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}, \\ y''(x) &= \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Формулы (6.2)–(6.5) являются приближенными. Для того чтобы найти погрешность разностных формул, разложим функцию  $y(x + \Delta x)$  и/или  $y(x - \Delta x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$ :

$$y(x \pm \Delta x) = y(x) \pm y'(x)\Delta x + \frac{y''(x)}{2!}\Delta x^2 \pm \frac{y'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

Тогда формула (6.2) принимает вид:

$$y'(x) \approx y'(x) + \Delta x \left( \frac{y''(x)}{2!} + \frac{y'''(x)}{3!}\Delta x + \dots \right),$$

формула (6.3):

$$y'(x) \approx y'(x) + \Delta x \left( -\frac{y''(x)}{2!} + \frac{y'''(x)}{3!}\Delta x + \dots \right),$$

формула (6.4):

$$y'(x) \approx y'(x) + \Delta x^2 \left( \frac{y'''(x)}{3!} + \frac{y^{(4)}(x)}{5!}\Delta x^2 + \dots \right),$$

формула (6.5):

$$y''(x) \approx y''(x) + \Delta x^2 \left( \frac{y^{(4)}(x)}{12} + \frac{y^{(6)}(x)}{360}\Delta x^2 + \dots \right).$$

Видно, что правые части отличаются от левых на некоторую величину, которая является погрешностью формулы конечных разностей.

Более подробно о том, как получить разностные аналоги для производных и определить их погрешность, можно узнать в специальной литературе [9–11].

### 6.1.2 Метод конечных разностей для решения обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим пример использования формулы конечных разностей для решения обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть на отрезке  $x \in [0, 1]$  требуется решить следующее уравнение:

$$y'(x) + Ay(x) = 0 \quad (6.6)$$

с начальным условием:

$$y(0) = 1.$$

Разобьем область изменения аргумента  $x$  на  $N$  отрезков длиной  $h = 1/N$ . Концы этих отрезков образуют узлы разностной сетки с координатами  $x_k = k \cdot h$ . Величину  $h$  называют шагом разностной сетки.

В качестве малой величины  $\Delta x$  выберем шаг разностной сетки  $h$ , тогда уравнение (6.6) для  $x = x_k$  запишется в виде:  $(y(x_k + h) - y(x_k))/h + Ay(x_k) = 0$ . Поскольку полученное уравнение есть приближение уравнения (6.1), то результатом его решения будет не точное значение функции  $y(x_k)$ , а приближенное, которое обозначим как  $y_k$ . Следовательно, вместо уравнения (6.6) следует записать уравнение:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + Ay_k = 0.$$

Это уравнение справедливо для любого  $k$ , из которого можно выразить  $y_{k+1}$  через  $y_k$ :

$$y_{k+1} = y_k(1 - Ah), \quad (6.7)$$

где  $k = \overline{0, N-1}$ . Полученное множество уравнений (6.7) образуют систему уравнений относительно  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ , которая вместе с начальным условием  $y_0 = 1$  называется *разностной схемой* для дифференциального уравнения (6.6).

Получим решение системы (6.7). Для этого запишем для каждого узла разностной сетки уравнения (6.7):

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0(1 - Ah), \\ y_2 &= y_1(1 - Ah), \\ &\dots \\ y_N &= y_{N-1}(1 - Ah) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0(1 - Ah), \\ y_2 &= y_0(1 - Ah)^2, \\ &\dots \\ y_N &= y_0(1 - Ah)^N. \end{aligned}$$

Поскольку  $h = 1/N$ , а  $y_0 = 1$ , то  $y_N = (1 - (A/N))^N$ . При  $N \rightarrow \infty$ , т.е. при уменьшении шага  $h$ , решение, в соответствии со вторым замечательным пределом, стремится к точному решению дифференциального уравнения (6.6):  $y_n \rightarrow e^{-A}$ .

Однако не всякая разностная схема дает удовлетворительное решение. К разностной схеме предъявляют требования относительно их *аппроксимации, устойчивости и сходимости*. Рассмотрим подробно эти понятия.

Любое дифференциальное уравнение можно записать в операторной форме в следующем виде:

$$L(y) = f(x). \quad (6.8)$$

В нашем случае  $L_y \equiv y'(x) + Ay(x), f(x) \equiv 0$ .

Разностный аналог дифференциального уравнения (6.8), т. е. соответствующая разностная схема в операторной форме записывается как

$$L_h(y_k) = f(x_k). \quad (6.9)$$

В нашем случае  $L_h y_k \equiv (y_{k+1} - y_k)/h + Ay_k, f(x_k) \equiv 0$ .



.....  
*Погрешностью аппроксимации (погрешностью приближения) называют разность между дифференциальным уравнением и его разностным аналогом, записанным для функции  $y(x_k)$ :*

$$R_k = L(y(x_k)) - L_h(y(x_k)). \quad (6.10)$$

.....  
 В рассмотренном примере:

$$R_k = y'(x_k) + Ay(x_k) - \left( \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + Ay_k(x_k) \right).$$

Выполним преобразования. Для этого разложим в ряд Тейлора значение сеточной функции  $y(x_{k+1})$  в окрестности  $x_k$ :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_k)\frac{h^3}{3!} + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} R_k &= y'(x_k) + Ay(x_k) - \left( y'(x_k) + y''(x_k)\frac{h}{2!} + y'''(x_k)\frac{h^3}{3!} + \dots + Ay_k(x_k) \right) = \\ &= - \left( y''(x_k)\frac{h}{2!} + y'''(x_k)\frac{h^3}{3!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части называется главным членом погрешности.



.....  
*Степень у  $h$  в главном члене погрешности называют **порядком аппроксимации** разностной схемы.*

.....  
 В рассмотренном примере порядок аппроксимации разностной схемы (6.7) равен единице. Этот факт записывают следующим образом:  $R_k = O(h)$ .



.....  
 Говорят, что разностная схема **аппроксимирует** дифференциальное уравнение с порядком  $p$ , если погрешность аппроксимации стремится к нулю при измельчении разностной сетки как  $O(h^p)$ .  
 .....



.....  
 Разностная схема называется **устойчивой**, если на каждом шаге счета любая ошибка (погрешность аппроксимации, погрешность округления и т. д.) не возрастает при переходе от одного шага к другому.  
 .....

Если обозначить через  $\delta_k$  разность между значением сеточной функции и истинной функцией в точке  $x_k$ , т. е.  $\delta_k = y_k - y(x_k)$ , то  $y(x_k) = y_k - \delta_k$ . Тогда из (6.10) следует, что  $R_k = L(y(x_k)) - L_h(y(x_k)) = L(y(x_k)) - L_h(y_k) + L_h(\delta_k) = f(x_k) - f(x_k) + L_h(\delta_k) = L_h(\delta_k)$ .

Если  $\delta = \max_k \delta_k \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то говорят, что разностная схема *сходится* (т. е. решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи). Сходимость считается одним из важных критериев качества разностной схемы. Часто бывает, что сходимость трудно установить прямым путем, поэтому для некоторого класса линейных задач используют *теорему Лакса*:



.....  
 Если имеется корректно поставленная линейная задача с начальными условиями и конечно-разностная схема аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, то устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости, или кратко:

*аппроксимация + устойчивость = сходимость.*

.....

Из этой теоремы следует, что для того, чтобы доказать, что разностная схема будет давать сходящееся решение  $y_k \rightarrow y(x_k)$ , нужно доказать, что разностная схема аппроксимирует соответствующее дифференциальное уравнение и эта разностная схема является устойчивой.

Для доказательства устойчивости разностной схемы (6.7) запишем приближенное решение в виде:  $y_k = y(x_k) + \varepsilon_k$ , где  $\varepsilon_k$  — погрешность решения в  $k$ -ой точке. Тогда из (6.7) получаем:

$$y(x_{k+1}) + \varepsilon_{k+1} = (y(x_k) + \varepsilon_k)(1 - Ah)$$

ИЛИ

$$y(x_{k+1}) - y(x_k)(1 - Ah) + \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k(1 - Ah),$$

ИЛИ

$$h(y'(x_k) + Ay(x_k)) - hO(h) + \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k(1 - Ah),$$

откуда следует

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k(1 - Ah) + hO(h). \quad (6.11)$$

Это означает, что погрешность за один шаг увеличивается на величину  $hO(h)$ , если:

$$|1 - Ah| \leq 1. \quad (6.12)$$

Применяя последовательно (6.11) для  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  и учитывая, что  $Nh = 1$ , получим:

$$|\varepsilon_N| \leq |\varepsilon_0(1 - Ah)^N| + O(h). \quad (6.13)$$

Если учесть, что значение функции при  $x = x_0$  определяется точно, т. е.  $\varepsilon_0 = 0$ , то из (6.13) следует, что ошибка в  $N$ -ой точке меньше чем  $O(h)$ .

Из условия (6.12) и неравенства (6.13) следует, что при  $h < 2/A$  и  $Ah > 0$  ошибка вычисления значения функции в последней точке не превосходит  $O(h)$ . То есть погрешность при переходе от  $x = x_0$  к  $x = x_N$  не будет возрастать, следовательно, разностная схема (6.7) будет устойчивой.

Итак, поскольку разностная схема (6.7) устойчива и аппроксимирует дифференциальное уравнение (6.6), то, согласно теореме Лакса, она будет сходиться.

### 6.1.3 Метод конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных

При решении дифференциальных уравнений в частных производных искомая функция зависит уже не от одной переменной, а от нескольких и в уравнении присутствуют производные от разных переменных. В этом случае при построении разностных схем необходимо провести замену (аппроксимировать) всех частных производных их разностными аналогами. Тогда ошибка аппроксимации будет зависеть не только от шага разностной сетки по переменной  $x$ , но и от шага по времени или от шага по другой пространственной переменной.

Все рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, относительно аппроксимации, устойчивости и сходимости имеют силу и для разностных схем применительно к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Исследование устойчивости разностных схем с постоянными коэффициентами проводят с помощью спектрального метода, частным случаем которого является метод гармоник. При этом устойчивость устанавливается для частных решений разностной схемы, имеющих вид гармоники:

$$u_k^n = u_0 \lambda^n e^{i\varphi kh}, \quad (6.14)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $\varphi$  — произвольное действительное число,  $h$  — шаг разностной сетки,  $k$  — номер узла.

Решение (6.14) подставляется в разностную схему, и определяются условия, при которых для всех  $\varphi$  выполняется неравенство:

$$|\lambda(\varphi)| \leq 1. \quad (6.15)$$

Это условие называется условием Неймана. Оно является необходимым условием устойчивости.

## 6.2 Разностные схемы для решения уравнений параболического типа

### 6.2.1 Метод конечных разностей

Численные методы являются мощным и гибким средством решения задач параболического типа. Их можно успешно применять для решения задач, которые трудно решить другими методами. При использовании численного метода конечных разностей (МКР), например для нестационарных задач теплопроводности, тело представляют в виде совокупности узлов. Для каждого узла, используя уравнение (2.2) и представление частных производных конечными разностями, записывают баланс энергии. В итоге получается алгебраическое уравнение для температуры в каждом узле. Для каждого узла, расположенного на границе тела, записывают отдельные уравнения. При этом используют граничные условия. В результате применения метода конечных разностей получают  $n$  алгебраических уравнений для  $n$  узлов в твердом теле, которые решают стандартными математическими методами с помощью ЭВМ.

Построение разностной схемы рассмотрим на примере уравнения теплопроводности.

Интегральная форма баланса тепла в области  $a < x < b$  с учетом таких механизмов распространения тепла, как конвективный и кондуктивный, имеет вид:

$$\oint \left( c\rho uT - \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt - c\rho T dx = \iint f(x, t) dt dx. \tag{6.16}$$

Здесь для простоты предположено, что  $c\rho = \text{const}$  и  $u = \text{const}$ .

Уравнение (6.16) в дифференциальной форме имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + c\rho u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(x, t). \tag{6.17}$$

Пусть в начальный момент времени  $t = t_0$  известен профиль температур  $T(x, t_0) = T_0(x)$ , а на границах отрезка  $[a, b]$  задано одно из следующих условий (Таблица 6.1):

Таблица 6.1 – Краевые условия для параболического уравнения

|    | $x = a$  | $x = b$   |
|----|--|---|
| 1) | $T = T_1(t)$   | $T = T_2(t)$  |
| 2) | $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_n(t)$                | $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_n(t)$                |
| 3) | $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1 (T_{ж1} - T)$ | $\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 (T_{ж2} - T)$ |

Требуется найти решение на отрезке  $[a, b]$  в течение промежутка времени  $[t_0, t_n]$ .

### 6.2.2 Построение разностной сетки

Как видно из уравнения (6.16), его решение зависит от двух переменных:  $t$  — времени и  $x$  — пространства. Построим систему координат, в которой переменная  $x$  будет меняться вдоль оси абсцисс, а переменная  $t$  — по оси ординат (рис. 6.1).

Вдоль оси  $x$  отложим отрезок  $[a, b]$ , а вдоль оси  $t$  — отрезок  $[t_0, t_n]$ . Прямоугольник, образованный пересечением линий  $x = a, x = b, t = t_0, t = t_n$ , определяет пространственно-временную область, в которой требуется найти решение. Разобьем отрезок  $[a, b]$  равноотстоящими узлами на  $N$  отрезков, длина которых  $h = (b - a)/N$ . Координата каждого узла по пространству будет определяться по формуле  $x_i = a + i \cdot h$ . Отрезок  $[t_0, t_n]$  разобьем равноотстоящими узлами на  $M$  отрезков, длина каждого из которых  $\tau = (t_n - t_0)/M$ . Координата каждого узла по времени будет определяться по формуле  $t_k = t_0 + k \cdot \tau$ . Длину  $h$  и длину  $\tau$  называют соответственно шагами по пространству и времени. Проведем вертикальные прямые  $x = x_i, 0 \leq i \leq N$  и горизонтальные прямые  $t = t_k, 0 \leq k \leq M$ . Точки пересечения этих прямых образуют пространственно-временные узлы, каждый из которых будет характеризоваться двумя координатами  $x_i$  и  $t_k$  или двумя номерами  $i, k$ . Полученный набор узлов и образует разностную сетку. Набор узлов на временном слое  $k$  называют нижним временным слоем, а набор узлов на слое  $(k + 1)$  называют верхним временным слоем. Значение функции  $T(x, t)$ , найденное в результате численного решения (6.16) или (6.17) в точке  $x = x_i, t = t_k$ , записывают как  $T_i^k$ .

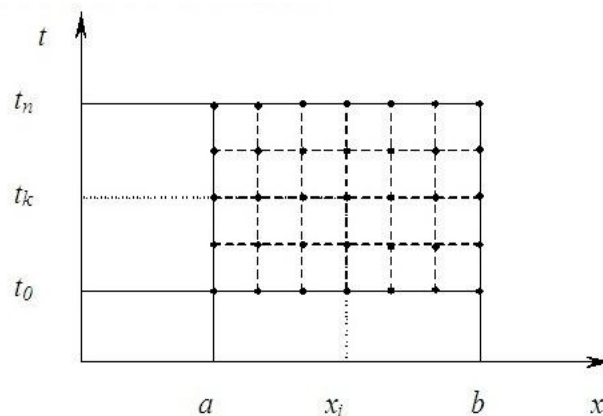


Рис. 6.1 – Разностная сетка

### 6.2.3 Аппроксимация уравнения (6.16)

Рассмотрим часть дискретной области, образованной шестью узлами (рис. 6.2). Проведем контур через середины отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $[x_i, x_{i+1}]$  на нижнем и верхнем временных слоях. На рис. 6.2 этот контур обозначен штриховой линией.



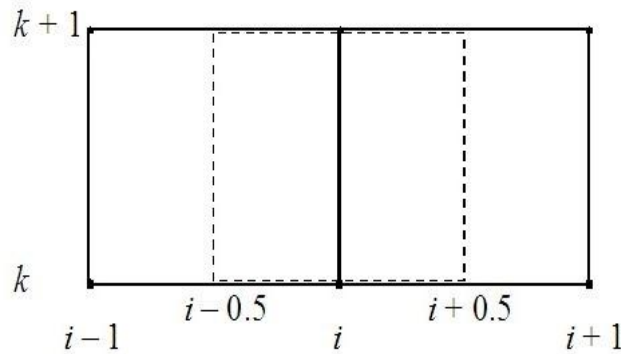


Рис. 6.2 – Область интегрирования

Записывая интеграл в (6.16) по выделенному контуру, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} c\rho T(x, t_k) dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} c\rho T(x, t_{k+1}) dx + \\
 & + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( c\rho u T - \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0.5}} dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( c\rho u T - \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-0.5}} dt = \quad (6.18) \\
 & = \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt dx.
 \end{aligned}$$

Интегралы по пространству, стоящие в первой строке уравнения (6.18), заменяются приближенными соотношениями следующего вида:

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \varphi(x, t) dx \approx \varphi(x_i, t)h,$$

а интеграл в правой части:

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt dx \approx f(x_i, t_k)h\tau.$$

В зависимости от того, как будут вычисляться интегралы, стоящие во второй строке (6.18), будут получаться явные или неявные разностные схемы.

### 6.2.4 Явная разностная схема

Явная разностная схема получается из (6.18) путем замены интегралов по времени с помощью формулы левых прямоугольников:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( c\rho u T - \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0.5}} dt \approx \tau \left( c\rho u T^k - \lambda(x, T^k) \frac{\partial T^k}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0.5}}.$$

Тогда, определяя производную  $\partial T^k / \partial x|_{x_{i+0.5}}$  как  $(T_{i+1}^k - T_i^k)/h$ , получим следующую разностную схему:

$$T_i^{k+1} = T_i^k - \frac{u\tau}{h}(T_{i+0.5}^k - T_{i-0.5}^k) + \frac{\tau}{(c\rho)_i h^2} (\lambda_{i+0.5} T_{i+1}^k - (\lambda_{i+0.5} + \lambda_{i-0.5}) T_i^k + \lambda_{i-0.5} T_{i-1}^k) + \varphi_i^k \tau, \quad (6.19)$$

$$1 \leq i \leq N - 1.$$

Здесь  $\varphi_i^k = f_i^k / (c\rho)_i$ ;  $\lambda_{i+0.5} = (\lambda_i + \lambda_{i+1})/2$ ;  $(c\rho)_i = ((c\rho)_{i-0.5} + (c\rho)_{i+0.5})/2$ . Значение функции на вертикальной стороне выделенного контура определяется по правилу:

$$T_{i+0.5}^k = \begin{cases} T_i^k, & \text{при } u > 0, \\ T_{i+1}^k, & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

Из разностной схемы (6.19) видно, что для получения решения на верхнем  $(k+1)$  временном слое в  $i$ -ом узле необходимо знать три значения на нижнем  $k$ -ом временном слое, а именно: значения в узлах  $(i-1)$ ,  $i$ ,  $(i+1)$ .

Заметим, что аналогичная разностная схема получится из уравнения (6.17), если заменить производные соответствующими конечными разностями:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+0.5}^k - T_{i-0.5}^k}{h};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \approx \frac{\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+0.5} - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-0.5}}{h}.$$

### 6.2.5 Неявная разностная схема

Неявная разностная схема получается из (6.18) путем замены интегралов по времени с помощью формулы правых прямоугольников:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( c\rho u T - \lambda(x, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0.5}} dt \approx \tau \left( c\rho u T^{k+1} - \lambda(x, T^k) \frac{\partial T^{k+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0.5}}.$$

Тогда, вычисляя производную по пространству по формуле  $(\partial T^{k+1}) / \partial x|_{x_{i+0.5}} \approx (T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1})/h$ , а температуру как  $T_{i+0.5}^{k+1} = \begin{cases} T_i^{k+1}, & \text{при } u > 0, \\ T_{i+1}^{k+1}, & \text{при } u < 0, \end{cases}$  получим:

$$\frac{u\tau}{h} (T_{i+0.5}^{k+1} - T_{i-0.5}^{k+1}) + \left( -\frac{\tau \lambda_{i-0.5}}{(c\rho)_i h^2} T_{i-1}^{k+1} + \left[ 1 + \frac{\tau}{(c\rho)_i h^2} (\lambda_{i+0.5} + \lambda_{i-0.5}) \right] T_i^{k+1} - \frac{\tau \lambda_{i+0.5}}{(c\rho)_i h^2} T_{i+1}^{k+1} \right) = T_i^k + \varphi_i^k \tau, \quad (6.20)$$

$$1 \leq i \leq N - 1.$$

Здесь выражения для  $\varphi_i^k$ ,  $(c\rho)_i$ ,  $\lambda_{i+0.5}$  такие же, как и для явной разностной схемы (6.19).

Полученная система уравнений (6.20) представляет собой систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которую можно решить методом прогонки.

### 6.2.6 Порядок аппроксимации явной разностной схемы

Рассмотрим уравнение (6.17), у которого все коэффициенты постоянны, а скорость  $u = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varphi(x, t). \quad (6.21)$$

Здесь  $\kappa = \lambda/(c\rho)$  — коэффициент температуропроводности.

Тогда разностная схема (6.19) будет записана в виде:

$$T_i^{k+1} = r_t T_{i+1}^k + (1 - 2 \cdot r_t) T_i^k + r_t T_{i-1}^k + \varphi_i^k \tau, \quad (6.22)$$

где  $r_t = (\tau\kappa)/h^2$  — «кондуктивное» число Куранта.

Разложим в ряд Тейлора сеточные функции  $T_{i+1}^k, T_{i-1}^k, T_i^k$  в окрестности точки  $x_i, t_k$ :

$$\begin{aligned} & T_i^k + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k \tau + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^k \frac{\tau^2}{2} + \dots = \\ & = r_t T_i^k + r \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^k h + r_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k \frac{h^2}{2} + r_t \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^k \frac{h^3}{6} + r_t \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^4}{24} + \dots \\ & + (1 - 2 \cdot r_t) T_i^k + r_t T_i^k - r_t \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^k h + r_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k \frac{h^2}{2} - r_t \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^k \frac{h^3}{6} + \\ & + r_t \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^4}{24} + \dots + \varphi_i^k \tau. \end{aligned}$$

Приводя подобные, получим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k \tau = r_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k h^2 + \varphi_i^k \tau - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^k \frac{\tau^2}{2} + r_t \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^4}{12} + \dots$$

или

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k + \varphi_i^k - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^k \frac{\tau}{2} + \kappa \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^2}{12} + \dots \quad (6.23)$$

Как видно, полученное уравнение (6.23) отличается от исходного уравнения (6.21) наличием бесконечного числа слагаемых, два из которых являются максимальными и пропорциональны  $\tau$  и  $h^2$ . Эти два слагаемых определяют порядок аппроксимации разностной схемы. Таким образом, явная разностная схема обладает первым порядком аппроксимации по времени и вторым по пространству  $O(\tau, h^2)$ .

Разностная схема (6.22) будет устойчива при  $r_t < 0.5$ .

Теперь рассмотрим уравнение теплопроводности с конвективной составляющей:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varphi(x, t). \quad (6.24)$$

Для определенности положим  $u > 0$ . Тогда разностная схема (6.19) запишется в следующем виде:

$$T_i^{k+1} = r_t T_{i+1}^k + (1 - r_g - 2 \cdot r_t) T_i^k + (r_t + r_g) T_{i-1}^k + \varphi_i^k \tau. \quad (6.25)$$

Здесь  $r_g = (u\tau)/h$  — «конвективное» число Куранта.

Разлагая сеточные функции  $T_i^{k+1}$ ,  $T_{i-1}^k$ ,  $T_{i+1}^k$  как и в предыдущем случае в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_i$ ,  $t_k$ , приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k + u \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i^k &= \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k + \varphi_i^k - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^k \frac{\tau}{2} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k \frac{uh}{2} + \\ &+ \left[ \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{\kappa}{12} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_i^k \frac{u}{6} \right] h^2. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что порядок аппроксимации разностной схемы (6.25) равен единице не только по времени, но и по пространству, т. е.  $O(\tau, h)$ .

Для повышения порядка аппроксимации разностной схемы по пространству до второго используют преобразование А. А. Самарского, суть которого заключается в том, что разностную схему (6.25) применяют к уравнению (6.24), у которого вместо коэффициента температуропроводности  $\kappa$  записан видоизмененный коэффициент:  $\kappa - (uh)/2$ . В этом случае «кондуктивное» число Куранта имеет вид:  $\tilde{r}_t = \tau(\kappa - (uh)/2)/h^2 = r_t - r_g/2$ . Тогда разностная схема (6.19) переписывается как

$$T_i^{k+1} = \left(r_t - \frac{r_g}{2}\right) T_{i+1}^k + (1 - 2 \cdot r_t) T_i^k + \left(r_t + \frac{r_g}{2}\right) T_{i-1}^k + f_i^k \tau. \quad (6.26)$$

Схема (6.26) будет устойчивой при  $r_t < 0.5$  и  $r_g < 2r_t$ .

Во избежание дополнительного ограничения  $r_g < 2r_t$  видоизмененный коэффициент температуропроводности  $\kappa - (uh)/2$  может быть переписан в следующем виде:

$$\kappa - \frac{uh}{2} = \kappa \left(1 - \frac{uh}{2\kappa}\right) \approx \kappa \exp\left(-\frac{uh}{2\kappa}\right).$$

В этом случае можно использовать разностную схему (6.25), у которой вместо «кондуктивного» числа Куранта  $r_t$  будет стоять видоизмененное число:

$$\tilde{r}_t = r_t \exp\left(-\frac{uh}{\kappa}\right).$$

### 6.2.7 Порядок аппроксимации неявной разностной схемы

Запишем неявную разностную схему (6.20) применительно к уравнению теплопроводности (6.21):

$$-r_t T_{i-1}^{k+1} + [1 + 2r_t] T_i^{k+1} - r_t T_{i+1}^{k+1} = T_i^k + \varphi_i^k \tau. \quad (6.27)$$

Разлагая в ряд Тейлора сеточные функции  $T_i^{k+1}$ ,  $T_{i-1}^{k+1}$ ,  $T_{i+1}^{k+1}$  в окрестности точки  $x_i$ ,  $t_k$ , получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k + \varphi_i^k + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - 2\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^k \frac{\tau}{2} + \kappa \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^2}{12} + \dots$$

Как видно, неявная разностная схема, как и явная схема, имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству. Но, в отличие от явной схемы, неявная схема (6.27) безусловно устойчива.

Запишем неявную разностную схему (6.20) для уравнения теплопроводности с конвективной составляющей (6.24):

$$-(r_t + r_g)T_{i-1}^{k+1} + (1 + r_g + 2 \cdot r_t)T_i^{k+1} - r_t T_{i+1}^{k+1} = T_i^k + \varphi_i^k \tau. \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k &= \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k + \varphi_i^k + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - 2\frac{\partial f}{\partial t} - 2u\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}\right)_i^k \frac{\tau}{2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k \frac{uh}{2} + \kappa \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^k \frac{h^2}{12} + \dots \end{aligned}$$

Здесь, как и в случае явной схемы, порядок аппроксимации по пространству получился первым. Для повышения порядка аппроксимации разностной схемы (6.28) до второго следует вместо коэффициента теплопроводности  $\kappa$  использовать коэффициент  $\kappa - (uh)/2$ . Тогда разностная схема (6.28) переписется по аналогии с (6.26) в виде:

$$-\left(r_t + \frac{r_g}{2}\right)T_{i-1}^{k+1} + (1 + 2 \cdot r_t)T_i^{k+1} - \left(r_t - \frac{r_g}{2}\right)T_{i+1}^{k+1} = T_i^k + \varphi_i^k \tau. \quad (6.29)$$

Также можно применять неявную схему (6.27), у которой вместо  $r_t$  используется  $r_t \exp(-(uh)/(2\kappa))$ .

### 6.2.8 Реализация граничных условий

#### Явная разностная схема

1. Граничные условия первого рода.

Для явной разностной схемы значение температуры на границах находится прямо из граничного условия:

$$T_0^{k+1} = T_{\text{л}}(t_{k+1}); \quad T_N^{k+1} = T_{\text{н}}(t_{k+1}). \quad (6.30)$$

2. Граничные условия второго рода.

Поскольку порядок аппроксимации разностной схемы (6.22) по пространству равен двум, то и граничные условия должны быть аппроксимированы со вторым порядком точности. Для этого поступают следующим образом:

а) заменяют производную в точке  $x_0$  конечно-разностным аналогом со вторым порядком точности:

$$-\lambda \frac{T_1^k - T_{-1}^k}{2h} = q_{\text{л}}(t_k)$$

или

$$T_{-1}^k = T_1^k + \frac{2hq_{\text{л}}(t_k)}{\lambda}. \quad (6.31)$$

Здесь  $T_{-1}^k$  — значение температуры, записанное в фиктивном узле  $i = -1$ ;

- б) из предположения, что решение непрерывно, записывают уравнение (6.22) для  $i = 0$ :

$$T_0^{k+1} = r_t T_{-1}^k + (1 - 2r_t) T_0^k + r_t T_1^k + \varphi_0^k \tau.$$

Из полученного соотношения исключают  $T_{-1}^k$  с помощью (6.31):

$$T_0^{k+1} = (1 - 2r_t) T_0^k + 2r_t T_1^k + \frac{2r_t h}{\lambda} q_n + \varphi_0^k \tau. \quad (6.32)$$

Соотношение (6.32) служит для определения значения температуры на левой границе (в точке  $x_0$ ) в случае граничного условия второго рода.

Проводя подобные рассуждения для правого граничного условия (только в этом случае уравнение (6.22) записывается для точки  $i = N$ ), получим:

$$T_N^{k+1} = 2r_t T_{N-1}^k + (1 - 2r_t) T_N^k + \frac{2r_t h}{\lambda} q_n + \varphi_N^k \tau. \quad (6.33)$$

### 3. Граничные условия третьего рода.

Для нахождения температуры в крайней левой и крайней правой точках в случае граничного условия третьего рода поступают по аналогии с граничным условием второго рода.

$$-\lambda \frac{T_1^k - T_{-1}^k}{2h} = \alpha_1 (T_{ж1} - T_0^k); \quad \lambda \frac{T_{N+1}^k - T_{N-1}^k}{2h} = \alpha_2 (T_{ж2} - T_N^k). \quad (6.34)$$

Из (6.22), записанного для  $i = 0$  и  $i = N$ , и (6.34) получим соответственно:

$$T_0^{k+1} = [1 - 2r_t(1 + Bi_1)] T_0^k + 2r_t T_1^k + 2Bi_1 r_t T_{ж1} + \varphi_0^k \tau, \quad (6.35)$$

$$T_N^{k+1} = 2r_t T_{N-1}^k + [1 - 2r_t(1 + Bi_2)] T_N^k + 2Bi_2 r_t T_{ж2} + \varphi_0^k \tau, \quad (6.36)$$

где  $Bi_i = (\alpha_i h) / \lambda$  — сеточное число Био, характеризующее отношение внутреннего термического сопротивления, построенного по длине ячейки разностной сетки,  $h/\lambda$  к внешнему термическому сопротивлению,  $1/\alpha_i$ .

### 4. Граничные условия четвертого рода.

Для получения соотношения, служащего для определения температуры на новом временном слое в точке соприкосновения двух сред, необходимо использовать разностную схему (6.19). Пусть точка соприкосновения двух сред совпадает с узлом  $i = m$ . Обозначим свойства среды слева от точки соприкосновения индексом «1», а справа от точки соприкосновения индексом «2». Положим для простоты  $u = 0$ . Тогда из (6.19) следует:

$$T_m^{k+1} = r_{t2} T_{m+1}^k + (1 - r_{t1} - r_{t2}) T_m^k + r_{t1} T_{m-1}^k + \varphi_m^k \tau. \quad (6.37)$$

Здесь  $r_{ti} = (\kappa_i \tau) / h^2$ , где  $\kappa_i = (2\lambda_i) / (c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2)$ ;  $\varphi_m^k = (2f_m^k) / (c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2)$ .

## Неявная разностная схема

Система из  $(N - 1)$  линейного алгебраического уравнения (6.27), представляющая неявную разностную схему, должна быть дополнена еще двумя линейными

алгебраическими уравнениями, которые должны быть получены из известных граничных условий. Для неявной разностной схемы граничные условия аппроксимируются неявно.

1. Граничные условия первого рода:

$$T_0^{k+1} = T_{\text{л}}(t_{k+1}); \quad T_N^{k+1} = T_{\text{п}}(T_{k+1}). \quad (6.38)$$

2. Граничные условия второго рода:

$$-\lambda \frac{T_1^{k+1} - T_{-1}^{k+1}}{2h} = q_{\text{л}}(t_{k+1}); \quad \lambda \frac{T_{N+1}^{k+1} - T_{N-1}^{k+1}}{2h} = q_{\text{п}}(t_{k+1}). \quad (6.39)$$

Записывая (6.27) для  $i = 0$  и  $i = N$  (для простоты положив  $u = 0$  и  $\lambda = \text{const}$ ) и исключая  $T_{-1}^{k+1}$  и  $T_{N+1}^{k+1}$  с помощью (6.39), получим следующие уравнения:

$$(1 + 2r_t)T_0^{k+1} - 2r_t T_1^{k+1} = T_0^k + \varphi_0^k \tau + \frac{2hq_{\text{л}}}{\lambda} r_t, \quad (6.40)$$

$$-2r_t T_{N-1}^{k+1} + (1 + 2r_t)T_N^{k+1} = T_N^k + \varphi_N^k \tau + \frac{2hq_{\text{п}}}{\lambda} r_t. \quad (6.41)$$

3. Граничные условия третьего рода:

$$-\lambda \frac{T_1^{k+1} - T_{-1}^{k+1}}{2h} = \alpha_1 (T_{\text{ж1}} - T_0^{k+1}); \quad \lambda \frac{T_{N+1}^{k+1} - T_{N-1}^{k+1}}{2h} = \alpha_2 (T_{\text{ж2}} - T_N^{k+1}). \quad (6.42)$$

Из (6.20), записанного для  $i = 0$  и  $i = N$ , и (6.42) получим, соответственно:

$$[1 + 2r_t(1 + Bi_1)]T_0^{k+1} - 2r_t T_1^{k+1} = T_0^k + \varphi_0^k \tau + 2Bi_1 \cdot r_t T_{\text{ж1}}, \quad (6.43)$$

$$-2r_t T_{N-1}^{k+1} + [1 + 2r_t(1 + Bi_2)]T_N^{k+1} = T_N^k + \varphi_N^k \tau + 2Bi_2 \cdot r_t T_{\text{ж2}}. \quad (6.44)$$

4. Граничное условие четвертого рода:

Для определения температуры в точке соприкосновения двух сред требуется записать уравнение для точки  $x_m$ , которое следует из (6.20):

$$-r_{t1} T_{m-1}^{k+1} + (1 + r_{t1} + r_{t2})T_m^{k+1} - r_{t2} T_{m+1}^{k+1} = T_m^k + \varphi_m^k \tau. \quad (6.45)$$

### 6.2.9 Метод прогонки

Метод прогонки — это модифицированный метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, у которых матрица является трехдиагональной.

Запишем систему алгебраических уравнений в виде:

$$\begin{aligned} b_0 y_0 + c_0 y_1 &= d_0, \\ a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 &= d_1, \\ a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 &= d_2, \\ &\dots \\ a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} + c_{n-1} y_n &= d_{n-1}, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n &= d_n. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Для нахождения решения системы (6.46) сначала выполняют прямую прогонку, вычисляя при этом прогоночные коэффициенты  $A_i, B_i$  по формулам:

$$A_0 = -\frac{c_0}{b_0}; \quad B_0 = \frac{d_0}{b_0};$$

$$A_i = \frac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i}; \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Затем выполняют обратную прогонку, в результате которой находится решение системы:

$$y_n = \frac{d_n - B_{n-1} a_n}{b_n + A_{n-1} a_n};$$

$$y_i = A_i y_{i+1} + B_i, \quad i = \overline{n-1, 0}.$$

Метод прогонки устойчив при выполнении условия преобладания диагональных элементов, т. е. если  $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ , причем хотя бы для одного значения  $i$  имеет место строгое неравенство (достаточное условие устойчивости).

## 6.3 Разностные схемы для решения уравнений гиперболического типа

### 6.3.1 Метод конечных разностей

Численные методы, наряду с классическими методами, являются мощным и гибким средством решения гиперболических уравнений в математической физике. Их можно успешно применять для решения задач, которые трудно решить другими методами. При использовании численного метода конечных разностей (МКР) струну, стержень или проводник представляют в виде совокупности узлов. Для каждого узла, используя уравнение (2.3) и представление частных производных конечными разностями, записывают соответствующие разностные уравнения. В итоге получается алгебраическое уравнение для искомой функции в каждом узле. Для каждого узла, расположенного на границе тела, записывают отдельные уравнения. При этом используют граничные условия. В результате применения метода конечных разностей получают  $n$  алгебраических уравнений для  $n$  узлов в твердом теле, которые решают стандартными математическими методами с помощью ЭВМ.

Построение разностной схемы рассмотрим на примере уравнения колебания струны в среде без сопротивления:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (6.47)$$

где  $a^2 = T_0/\rho$ .

Пусть в начальный момент времени  $t = t_0$  известно отклонение струны от положения равновесия  $u(x, 0) = U_0(x)$  и известна скорость движения точек струны  $u_t(x, 0) = V_0(x)$ , а на концах струны задано одно из условий (Таблица 6.2):



Таблица 6.2 – Краевые условия для гиперболического уравнения

|    | $x = a$                | $x = b$                |
|----|------------------------|------------------------|
| 1) | $u = f_1(t)$           | $u = f_2(t)$           |
| 2) | $u_x = \tau_1(t)$      | $u_x = \tau_2(t)$      |
| 3) | $u_x - \alpha_1 u = 0$ | $u_x + \alpha_2 u = 0$ |

Требуется найти решение на отрезке  $[a, b]$  в течение промежутка времени  $[t_0, t_n]$ .

### 6.3.2 Построение разностной сетки

Как видно из уравнения (6.47), его решение зависит от двух переменных:  $t$  — времени и  $x$  — пространства. Построим систему координат, в которой переменная  $x$  будет меняться вдоль оси абсцисс, а переменная  $t$  — по оси ординат (рис. 6.3).

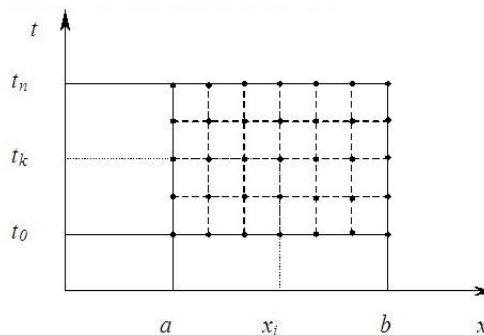


Рис. 6.3 – Область решения

Вдоль оси  $x$  отложим отрезок  $[a, b]$ , а вдоль оси  $t$  — отрезок  $[t_0, t_n]$ . Прямоугольник, образованный пересечением линий  $x = a, x = b, t = t_0, t = t_n$ , определяет пространственно-временную область, в которой требуется найти решение. Разобьем отрезок  $[a, b]$  равноотстоящими узлами на  $N$  отрезков, длина которых  $h = (b - a)/N$ . Координата каждого узла по пространству будет определяться по формуле  $x_i = i \cdot h$ . Отрезок  $[t_0, t_n]$  разобьем равноотстоящими узлами на  $M$  отрезков, длина каждого из которых  $\tau = (t_n - t_0)/M$ . Координата каждого узла по времени будет определяться по формуле  $t_k = t_0 + k \cdot \tau$ . Длину  $h$  и длину  $\tau$  называют соответственно шагами по пространству и времени. Проведем вертикальные прямые  $x = x_i, 0 \leq i \leq N$  и горизонтальные прямые  $t = t_k, 0 \leq k \leq M$ . Точки пересечения этих прямых образуют пространственно-временные узлы, каждый из которых будет характеризоваться двумя координатами  $x_i$  и  $t_k$  или двумя номерами  $i, k$ . Полученный набор узлов и образует разностную сетку. Набор узлов на временном слое  $k$  называют нижним временным слоем, а набор узлов на слое  $(k + 1)$  называют верхним временным слоем. Значение функции  $u(x, t)$ , найденное в результате численного решения в точке  $x = x_i, t = t_k$ , записывают как  $u_i^k$ .

### 6.3.3 Аппроксимация уравнения (6.47). Разностная схема «крест»

Рассмотрим часть дискретной области, образованной пятью узлами (рис. 6.4). Заменяем производные в уравнении (6.47) их разностными аналогами, причем разностный аналог для производной  $u_{tt}$  будем строить на узлах  $(i, k-1)$ ,  $(i, k)$ ,  $(i, k+1)$ , а для  $u_{xx}$  — на узлах  $(i-1, k)$ ,  $(i, k)$ ,  $(i+1, k)$ .

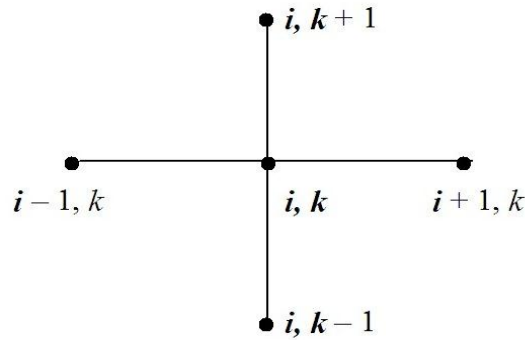


Рис. 6.4 – Шаблон разностной схемы «крест»

Разностные аналоги имеют следующий вид:

$$u_{tt} \approx \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2}; \quad u_{xx} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}.$$

Известную функцию  $g(x, t)$  в момент времени  $t_k$  и в точке пространства  $x_k$  обозначим как  $g_{i,k}$ .

Тогда разностная схема для уравнения (6.47) запишется в виде:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + g_{i,k}. \quad (6.48)$$

Разностные аналоги имеют следующий вид:

$$u_{tt} \approx \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2}; \quad u_{xx} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}.$$

В этом уравнении искомой величиной является отклонение струны  $u_i^{k+1}$  от положения равновесия в точке  $x_i$  в момент времени  $t_{k+1}$ .

Введем число Куранта  $r = a \cdot (\tau/h)$  и перепишем уравнение в виде:

$$u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + r^2 u_{i-1}^k + 2(1 - r^2) u_i^k + r^2 u_{i+1}^k + \tau^2 g_{i,k}. \quad (6.49)$$

Здесь  $k = \overline{1, M-1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ .

Как видно из уравнения (6.49), для нахождения значения функции в узле  $i$  на  $(k+1)$ -ом временном слое необходимо знать значения функции в трех узлах  $(i-1)$ ,  $i$ ,  $(i+1)$  на  $k$ -ом временном слое и одно значение в узле  $i$  на  $(k-1)$ -ом временном слое.

Разностная схема будет устойчивой для  $r \leq 1$ .

### 6.3.4 Порядок аппроксимации разностной схемы «крест»

Разложим сеточные функции  $u_{i\pm 1}^k, u_{i-1}^k, u_i^{k-1}, u_i^{k+1}$  в окрестности точки  $x, t$  в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u_{i\pm 1}^k &= u(x, t) \pm \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{24} \pm \dots, \\ u_i^{k\pm 1} &= u(x, t) \pm \frac{\partial u}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} \pm \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \cdot \frac{\tau^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \cdot \frac{\tau^4}{24} \pm \dots \end{aligned}$$

Отсюда  $u_{i+1}^k + u_{i-1}^k = 2u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{h^4}{12} + \dots$

Аналогично  $u_i^{k+1} + u_i^{k-1} = 2u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \cdot \frac{\tau^4}{12} + \dots$

Тогда из (6.49) получаем:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x,t} - g(x, t) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{a^2 h^2}{12} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \frac{\tau^2}{12} + \dots \quad (6.50)$$

Таким образом, разностное уравнение (6.49) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (6.47) со вторым порядком точности как по пространству, так и по времени.

Отметим, что в случае однородного уравнения (6.47), т.е. когда  $g(x, t) = 0$ , погрешность аппроксимации разностной схемы (6.49) будет равна нулю для значения числа Куранта  $r$ , равного 1, и разностная схема будет давать точное решение уравнения (6.47).

### 6.3.5 Реализация начальных и граничных условий

#### Начальные условия

При использовании разностной схемы для нахождения значений функции на временном слое с номером 1 требуются значения функций  $u_i^{-1}$  с фиктивного слоя  $k = -1$ , на котором они не определены. В этом случае поступают следующим образом.

Заменим в начальном условии  $u_t(x, 0) = V_0(x)$  производную по времени  $u_t$  разностным аналогом со вторым порядком точности:

$$\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\tau} = V_0(x_i). \quad (6.51)$$

Исключая из (6.51) и (6.49), записанного для  $k = 0$ , величину  $u_i^{-1}$ , получим уравнение для нахождения значения функции на первом временном слое:

$$u_i^1 = \frac{r^2}{2} u_{i-1}^0 + (1 - r^2) u_i^0 + \frac{r^2}{2} u_{i+1}^0 + \tau^2 \frac{g_{i,0}}{2} + V_0(x_i) \tau. \quad (6.52)$$

Значения функции на нулевом временном слое известны из начальных условий:

$$u_i^0 = U_0(x_i).$$

#### Граничные условия

Реализация граничных условий *первого* рода не составляет труда:

$$u_0^{k+1} = f_1(t_{k+1}); \quad u_N^{k+1} = f_2(t_{k+1}). \quad (6.53)$$

При реализации граничных условий *второго* рода производные в точке  $x_0$  и в точке  $x_N$  заменяют конечно-разностным аналогом со вторым порядком точности:

$$\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} = \tau_1(t_k); \quad \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} = \tau_2(t_k).$$

Выражая отсюда  $u_{-1}^k$ ,  $u_{N+1}^k$  и подставляя в уравнения (6.49) и (6.52), записанные соответственно для  $i = 0$  и  $i = N$ , получим следующие уравнения для нахождения значения функции в крайней левой и крайней правой точках области:

на первом временном слое:

$$u_0^1 = r^2 u_1^0 + (1 - r^2) u_0^0 - hr^2 \tau_1(t_0) + 0.5 \tau^2 g_{0,0} + V_0(x_0) \tau; \quad (6.54)$$

$$u_N^1 = r^2 u_{N-1}^0 + (1 - r^2) u_N^0 + hr^2 \tau_2(t_0) + 0.5 \tau^2 g_{N,0} + V_0(x_N) \tau; \quad (6.55)$$

на последующих временных слоях ( $k \geq 1$ ):

$$u_0^{k+1} = -u_0^{k-1} + 2r^2 u_1^k + 2(1 - r^2) u_0^k - 2hr^2 \tau_1(t_k) + \tau^2 g_{0,k}; \quad (6.56)$$

$$u_N^{k+1} = -u_N^{k-1} + 2r^2 u_{N-1}^k + 2(1 - r^2) u_N^k + 2hr^2 \tau_2(t_k) + \tau^2 g_{N,k}. \quad (6.57)$$

При реализации граничных условий *третьего* рода поступают аналогично. Разностные аналоги граничных условий имеют вид:

$$\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} - \alpha_1 u_0^k = 0; \quad \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} + \alpha_2 u_N^k = 0.$$

Тогда из уравнений (6.49) и (6.52) получаем

на первом временном слое:

$$u_0^1 = r^2 u_1^0 + [1 - r^2(1 + \alpha_1 h)] u_0^0 + 0.5 \tau^2 g_{0,0} + V_0(x_0) \tau; \quad (6.58)$$

$$u_N^1 = r^2 u_{N-1}^0 + [1 - r^2(1 + \alpha_2 h)] u_N^0 + 0.5 \tau^2 g_{N,0} + V_0(x_N) \tau; \quad (6.59)$$

на последующих временных слоях ( $k \geq 1$ ):

$$u_0^{k+1} = -u_0^{k-1} + 2r^2 u_1^k + 2[1 - r^2(1 + \alpha_1 h)] u_0^k + \tau^2 g_{0,k}; \quad (6.60)$$

$$u_N^{k+1} = -u_N^{k-1} + 2r^2 u_{N-1}^k + 2[1 - r^2(1 + \alpha_2 h)] u_N^k + \tau^2 g_{N,k}. \quad (6.61)$$

Для граничных условий третьего рода условие устойчивости имеет вид:

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_i h}}.$$

## 6.4 Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа

### 6.4.1 Метод конечных разностей для решения уравнения Пуассона

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\Delta u = -f(x, y), \quad (6.62)$$

где  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — оператор Лапласа.

Будем искать решение уравнения (6.62) в области, представляющей собой прямоугольник (рис. 6.5):  $\{a \leq x \leq b; \quad c \leq y \leq d\}$ , на границах которого заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} y = c, \quad a < x < b, \quad u(x, c) = u_1(x); \quad y = d, \quad a < x < b, \quad u(x, d) = u_2(x); \\ x = a, \quad c < y < d, \quad u(a, y) = u_3(y); \quad x = b, \quad c < y < d, \quad u(b, y) = u_4(y). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Такая задача называется первой краевой задачей или задачей Дирихле.

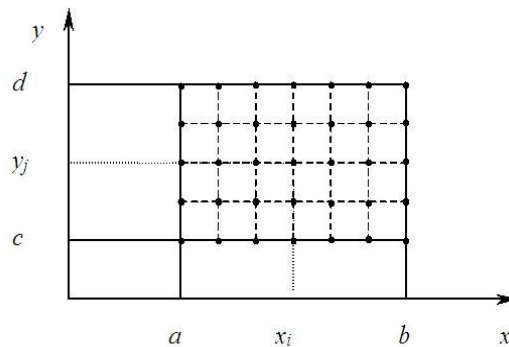


Рис. 6.5 – Расчетная область

### Разностная схема «крест»

Для численного решения задачи (6.62)–(6.63) введем для рассматриваемой области разностную сетку, образованную пересекающимися вертикальными и горизонтальными линиями (рис. 6.5):  $x_i = a + i \cdot h_x$ ;  $y_j = c + j \cdot h_y$ , где  $h_x = (b - a)/N$ ;  $h_y = (d - c)/M$ ;  $i = \overline{0, N}$ ;  $j = \overline{0, M}$ . Точки пересечения этих линий будем называть узлами разностной сетки и обозначать  $(i, j)$ .

Заменяем производные  $\partial^2 u/\partial x^2$ ,  $\partial^2 u/\partial y^2$  в дифференциальном операторе Лапласа (6.62) разностными аналогами, каждый из которых будем строить на трехточечном шаблоне (рис. 6.6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x + h_x, y) - 2u(x, y) + u(x - h_x, y)}{h_x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\approx \frac{u(x, y + h_y) - 2u(x, y) + u(x, y - h_y)}{h_y^2}. \end{aligned}$$

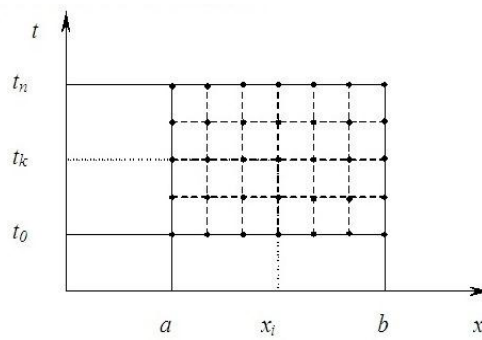


Рис. 6.6 – Шаблон разностной схемы для эллиптического уравнения

Заменяя значения функции в точке  $x, y$ :  $u(x, y)$  сеточной функцией  $u_{i,j}$ , получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Тогда уравнение Пуассона (6.62) переписется в виде:

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - 2u_{i,j} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = -f_{i,j}. \quad (6.64)$$

Разностное уравнение (6.64) записано на пятиточечном шаблоне (рис. 6.6). Граница разностной сетки состоит из узлов  $(0, j)$ ,  $(N, j)$ ,  $(i, 0)$ ,  $(i, M)$ . Из рис. 6.5 и рис. 6.6, а также из разностного уравнения (6.64) следует, что угловые точки разностной сетки (вершины прямоугольника) в разностной схеме не используются.

Разностная схема (6.64) может быть записана в виде:

$$(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})h_y^2 - 2u_{i,j}(h_x^2 + h_y^2) + (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})h_x^2 = -f_{i,j}h_x^2h_y^2 \quad (6.65)$$

или

$$u_{i,j} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j})\alpha + (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})\beta + f_{i,j}\gamma, \quad (6.66)$$

где

$$\alpha = \frac{h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}; \quad \beta = \frac{h_x^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}; \quad \gamma = \frac{h_x^2 \cdot h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}.$$

Краевые условия (6.63) запишутся как:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= u_1(a + ih_x); & u_{i,M} &= u_2(a + ih_x); \\ u_{0,j} &= u_3(c + jh_y); & u_{N,j} &= u_4(c + jh_y). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Полученное уравнение (6.65) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений размером  $(N + 1)(M + 1)$ , которая может быть решена любым из известных методов, прямым или итерационным.

### Погрешность разностного уравнения (6.65)

Разложим сеточные функции  $u_{i+1,j}$ ,  $u_{i-1,j}$  в окрестности точки  $x$ ,  $y$  в ряд Тейлора:

$$u_{i\pm 1,j} = u(x, y) \pm \frac{\partial u}{\partial x} h_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{h_x^2}{2} \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{h_x^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{h_x^4}{24} \pm \dots$$

Отсюда  $u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h_x^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{h_x^4}{12} + \dots$

Аналогично  $u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 2u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h_y^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \frac{h_y^4}{12} + \dots$

Тогда из (6.66) получаем:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{x,y} + f(x, y) = - \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cdot \frac{h_x^2}{12} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \cdot \frac{h_y^2}{12} \right) + \dots$$

Таким образом, разностное уравнение (6.66) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (6.62) со вторым порядком точности по переменным  $x$  и  $y$ .

### 6.4.2 Методы решения уравнения (6.66)

#### Итерационный Метод Гаусса-Зейделя

Из уравнения (6.66) видно, что для получения решения в узле  $(i, j)$  требуется знание значений в соседних четырех узлах  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j-1)$ ,  $(i, j+1)$ . При решении задачи Дирихле значения в узлах  $(i-1, j)$ ,  $(i, j-1)$  уже известны и можно построить следующий итерационный процесс. На нулевой итерации во всех узлах, кроме граничных, задаем некоторые значения функции  $u_{i,j}^{(0)}$ , например нулевые. Значения на следующей итерации вычисляем из (6.66) по формуле:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \left( u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \alpha + \left( u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \beta + f_{i,j} \gamma. \quad (6.68)$$

Расчет начинается для узла с  $i = 1$  и  $j = 1$ . Значения  $u_{0,j}^{(k+1)}$  и  $u_{i,0}^{(k+1)}$  уже известны из граничных условий. Далее идем по горизонтальной линии  $j = 1$ , увеличивая значение индекса  $i$  до  $(N-1)$ . После того как вычислим все значения  $u_{i,1}^{(1)}$ , переходим на новый горизонтальный слой узлов  $j = 2$  и вычисляем  $u_{i,2}^{(1)}$ . Операцию повторяем снова до тех пор, пока не будут вычислены все значения  $u_{i,j}^{(1)}$ . Последним вычисляемым горизонтальным слоем будет слой с номером  $j = M-1$ , т. к. значения  $u_{i,M}^{(k+1)}$  известны из граничного условия. Далее проводим сравнение найденных значений функции на первой итерации  $u_{i,j}^{(1)}$  и значений функции на нулевой итерации. Если различия невелики, то вычислительный процесс останавливаем, в противном же случае все повторяем заново. В качестве критерия останова можно взять следующее условие:

$$\frac{1}{(N-1) \cdot (M-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)}| < \delta,$$

где  $\delta$  — некоторая малая величина.

## Метод релаксации

Для увеличения скорости сходимости итерационного процесса в методе Гаусса-Зейделя используют метод релаксации, который состоит из двух этапов.

Пусть на  $k$ -ой итерации известны значения функции  $u_{ij}^{(k)}$ . Сначала выполняется один итерационный шаг по методу Гаусса-Зейделя и определяются значения функции  $u_{ij}^*$ . Далее полученные значения пересчитываются на  $(k+1)$  итерационный слой по формуле:

$$u_{ij}^{(k+1)} = u_{ij}^* \omega + u_{ij}^{(k)} (1 - \omega). \quad (6.69)$$

При  $\omega < 1$  метод носит название «нижней» релаксации, а при  $1 < \omega < 2$  — «верхней» релаксации.

### 6.4.3 Решение уравнения Пуассона со смешанными граничными условиями

Рассмотрим решение уравнения Пуассона (6.62) со смешанными граничными условиями, т. е. когда на одних границах заданы краевые условия первого рода, а на других — краевые условия второго рода.

Пусть на двух вертикальных границах  $x = a$ ,  $x = b$  и одной горизонтальной границе  $y = d$  заданы условия первого рода, а на другой горизонтальной границе  $y = c$  — граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} a < x < b, \quad -\lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=c} &= q_1(x); & a < x < b, \quad u(x, d) &= u_2(x); \\ c < y < d, \quad u(a, y) &= u_3(y); & c < y < d, \quad u(b, y) &= u_4(y). \end{aligned}$$

Аппроксимация краевых условий первого рода дается формулами (6.67). Поскольку разностная схема решения уравнения Пуассона (6.64) имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным, то и краевое второго рода необходимо аппроксимировать со вторым порядком точности:

$$-\lambda \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2h_y} = q_1(a + ih_x), \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (6.70)$$

В полученном соотношении появился слой фиктивных точек  $j = -1$ , выходящих за область определения, в которых сеточная функция  $u$  не определена. Для исключения этого слоя из рассмотрения запишем разностный аналог уравнения Пуассона (6.66) для  $j = 0$ :

$$u_{i,0} = (u_{i+1,0} + u_{i-1,0})\alpha + (u_{i,1} + u_{i,-1})\beta + f_{i,0}\gamma. \quad (6.71)$$

Выражая  $u_{i,1}$  из (6.70) и подставляя в (6.71), получим:

$$u_{i,0}^{(k+1)} = \left( u_{i+1,0}^{(k)} + u_{i-1,0}^{(k+1)} \right) \alpha + 2u_{i,1}^{(k)} \beta + \left( f_{i,0} + \frac{2q_1(a + ih_x)}{\lambda h_y} \right) \gamma. \quad (6.72)$$

Уравнение (6.72) служит для нахождения значения функции на  $(k+1)$  итерации на горизонтальной линии  $j = 0$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ .



Если граничное условие второго рода задано на вертикальной границе  $x = a$ :  $-\lambda (\partial u / \partial x)|_{x=a} = q_3(y)$ ,  $c < y < d$ , а на других границах заданы краевые условия первого рода, то уравнение для нахождения сеточной функции на вертикальной линии  $i = 0$ ,  $1 \leq j \leq M - 1$  получается аналогичным образом и имеет вид:

$$u_{0,j}^{(k+1)} = 2u_{1,j}^{(k)} \alpha + \left( u_{0,j+1}^{(k)} + u_{0,j-1}^{(k+1)} \right) \beta + \left( f_{0,j} + \frac{2q_3(c + jh_y)}{\lambda h_x} \right) \gamma. \quad (6.73)$$

Пусть краевое условие второго рода задано на двух соседних границах:  $x = a$  и  $y = c$ . Тогда сеточная функция на горизонтальной линии  $j = 0$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$  будет находиться по формуле (6.72), на вертикальной линии  $i = 0$ ,  $1 \leq j \leq M - 1$  — по формуле (6.73), а в левой нижней угловой точке ( $i = 0, j = 0$ ) по формуле:

$$u_{0,0}^{(k+1)} = 2u_{1,0}^{(k)} \alpha + 2u_{0,1}^{(k)} \beta + \left( f_{0,0} + \frac{2q_3(c + jh_y)}{\lambda h_x} + \frac{2q_1(a + ih_x)}{\lambda h_y} \right) \gamma. \quad (6.74)$$

Подобным же образом можно получить формулы для правой и верхней границ, а также для трех других угловых точек.



## Контрольные вопросы по главе 6

- 1) В чем заключается сущность численного метода решения дифференциальных уравнений?
- 2) Каков принцип получения разностных аналогов?
- 3) Что называют шагом разностной сетки?
- 4) Что называется разностной схемой для дифференциального уравнения?
- 5) Что такое погрешность аппроксимации?
- 6) Что такое главный член погрешности? Что называется порядком аппроксимации?
- 7) Что означает сходимость разностной схемы?
- 8) Какую разностную схему называют устойчивой?
- 9) О чем гласит теорема Лакса?
- 10) Что такое условие Неймана?
- 11) Какие разностные схемы называют явными, а какие неявными?
- 12) Для чего используют преобразование А. А. Самарского?
- 13) В чем отличие разностных схем для решения гиперболических уравнений от разностных схем для параболических уравнений?
- 14) Для чего используется метод релаксации?

---

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Стремительно развивающиеся наука и техника выдвигают повышенные требования к современному инженеру, который должен не только глубоко понимать суть происходящих физических процессов, но и иметь высокую математическую культуру.

Изученный курс предполагает формирование у студента начальных навыков в описании физических процессов с помощью математических моделей, сформулированных в виде задач математической физики, для решения которых обучающийся должен овладеть основными численными и аналитическими методами.

Безусловно, в данном пособии не было рассмотрено все многообразие физических моделей и с ними связанных задач, с которыми будущий инженер может встретиться в своей профессиональной деятельности. Прежде всего, данный курс призван дать основные представления о методах решения задач математической физики.

---

## ЛИТЕРАТУРА

---

- [1] Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. — М. : Наука, 1964. — 288 с.
- [2] Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Высшая школа, 1966. — 724 с.
- [3] Кошляков Н. С. Уравнения частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
- [4] Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — 3-е изд. — М. : Наука; Физматлит, 1980. — 678 с.
- [5] Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. — М. : Мир, 1985. — 383 с.
- [6] Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. — М. : наука, 1974. — 432 с.
- [7] Арсеньев А. А. Что такое математическая физика / А. А. Арсеньев, А. А. Самарский. — М. : Знания, 1983. — 64 с.
- [8] Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. — Наука, 1973. — 400 с.
- [9] Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — Наука, 1977. — 656 с.
- [10] Берковский Б. М. Разностные схемы исследования задач теплообмена / Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. — Минск : Наука и техника, 1976. — 144 с.
- [11] Миньков С. Л. Методы вычислений : учеб. пособие / С. Л. Миньков, Л. Л. Миньков. — Томск : Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. — 224 с.
- [12] Самарский А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : Наука, 1997. — 320 с.

- [13] Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием / А. Б. Горстко. — М. : Знание, 1991. — 160 с.
- [14] Никифоров А. Ф. Лекции по уравнениям и методам математической физики : учеб. пособие / А. Ф. Никифоров. — Долгопрудный : Интеллект, 2009. — 133 с.
- [15] Задачи по математическим методам физики / И. В. Колоколов [и др.]. — 4-е изд., стер. — М. : URSS, 2009. — 286 с.
- [16] Будаков Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будаков, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — 4-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004. — 688 с.
- [17] Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. — 3-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2008. — 480 с. : ил.

---

# ГЛОССАРИЙ

---

*Аппроксимация* — замена одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми.

*Био Жан-Батист* (1774–1862) — знаменитый французский учёный, физик, геодезист и астроном, член Парижской Академии наук (1803). Открыл законы вращения плоскости поляризации кварцем и различными жидкостями. Изучал неравномерность действия земного притяжения. Вместе с Саваром определил, путём опыта, закон действия проводника, по которому проходит гальванический ток, на магнитную стрелку.

*Вектор* — последовательность однородных элементов. Можно сказать, что это тензор первого ранга, который задаётся одномерным массивом (строкой или столбцом).

*Гаусс Иоганн Карл Фридрих* (1777–1855) — немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён, «король математиков». В 1824 году избран иностранным почётным членом Петербургской Академии наук.

*Градиент* (от лат. *gradiens* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины (скалярного поля).

*Грин Джордж* (1793–1841) — английский математик, внёсший значительный вклад во многие разделы математической физики. Главнейшие заслуги Грина заключаются в выводе одной основной теоремы теории потенциальных функций и в открытии особого метода вывода дифференциальных уравнений теории упругости.

*Гук Роберт* (1635–1703) — английский естествоиспытатель, учёный-энциклопедист. Изобретатель спиральной пружины для регулирования хода часов; первой в мире системы оптического телеграфа; винтовых зубчатых колёс. Предложил точки замерзания и кипения воды использовать в качестве реперных для шкалы термометра. Открыл: теоретическое положение о сущности теплоты как движения частиц тела; живую клетку; пропорциональность между упругими растяжениями, сжатиями и изгибами и производящими их напряжениями. Высказал гипотезу о поперечном характере световых волн и волнообразном распространении света.

*Д'Аламбер Жан Лерон* (1717–1783) — французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Петербургской (1764) и других академий. Он дал метод решения дифференциального уравнения 2-го порядка в частных

производных, описывающего поперечные колебания струны. В теории рядов его имя носит широкоупотребительный достаточный признак сходимости.

*Дивергенция* (от лат. *divergere* — обнаруживать расхождение) — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное, который определяет (для каждой точки), «насколько расходитя входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле».

*Дирихле́ (Ио́ганн Пе́тер Гу́став Лежён-Дирихле́)* (1805–1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской (1837).

*Дифференциальное уравнение в частных производных* — дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные.

*Диффузия* (лат. *diffusio* — распространение, растекание, рассеивание) — процесс взаимного проникновения молекул одного вещества между молекулами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму.

*Зейдель Филипп Людвиг* (1821–1896) — немецкий математик и астроном. В области чистой математики труды Зейделя касаются, главным образом, теории рядов и других бесконечных форм. В астрономии известен своими исследованиями о сравнительной силе света (яркости) неподвижных звезд.

*Кулон Шарль Огюстен* (1736–1806) — французский военный инженер и учёный-физик, исследователь электромагнитных и механических явлений; член Парижской Академии наук. Его именем названы единица электрического заряда и закон взаимодействия электрических зарядов.

*Курант Рихард* (1888–1972) — немецкий и американский математик, педагог и научный организатор. В 1966 году Курант стал иностранным членом АН СССР. Основные научные результаты Куранта относятся к теории конформных отображений, к краевым задачам для уравнений математической физики.

*Лакс Питер Дэвид* (род 1926) — венгерский и американский математик. Принимал участие в Манхэттенском проекте — программе по разработке ядерного оружия. Поле деятельности Лакса многогранно: изучение интегрируемых систем, ударной волны, гидродинамики, теория солитонов. С его именем связаны: лемма Лакса—Мильграма, теорема эквивалентности Лакса, схема Лакса—Фридрихса, схема Лакса—Вендрофа, условие энтропии Лакса и теория Лакса—Левермора.

*Лаплас Пьер-Симон* (1749–1827) — выдающийся французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

*Лежандр Адриен Мари* (1752–1833) — французский математик. Член Парижской Академии наук с 1783 года. Обосновал и развил теорию геодезических измерений, продвинул сферическую тригонометрию. Им введены так называемые многочлены Лежандра, преобразование Лежандра и исследованы эйлеровы интегралы I и II рода. Лежандра преследовал какой-то злой рок — стоило ему сделать

выдающееся открытие, как тут же оказывалось, что другой математик сделал то же самое немного раньше.

*Математическая физика* — теория математических моделей физических явлений. В математической физике исследуются физические задачи на математическом уровне. К ней относятся такие разделы механики, как теоретическая механика, гидродинамика, теория упругости, акустика, а также теория теплопроводности, диффузии, оптики, электродинамики и т. д.

*Моделирование* — исследование объектов на их моделях; построение и изучение моделей реально существующих объектов, процессов или явлений с целью получения объяснений этих явлений, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя.

*Модель* (от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») — это упрощенное представление реального устройства и/или протекающих в нем процессов, явлений.

*Нейман Карл Готфрид* (1832–1925) — немецкий математик, профессор университетов в Базеле (с 1863), Тюбингене (с 1865) и Лейпциге (с 1868). Основные труды написаны по дифференциальным уравнениям и алгебраическим функциям. В теории дифференциальных уравнений с частными производными Нейману принадлежат работы, относящиеся к теории потенциала (в частности, к теории логарифмического потенциала), где им дан метод (метод Неймана) решения задачи Дирихле для случая выпуклых контуров (на плоскости) и выпуклых поверхностей (в пространстве). Исследовал вторую краевую задачу.

*Ньютон Исаак* (1642–1727) — английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

*Пуассон Симеон Дени* (1781–1840) — знаменитый французский физик и математик. Число учёных трудов Пуассона превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики.

*Разностная схема* — это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче.

*Ротор* (от лат. *roto* — вращаю(сь)) — векторный дифференциальный оператор над векторным полем; вектор, характеризующий вращательное движение в данной точке векторного поля.

*Савар Феликс* (1791–1841) — сначала врач в Страсбурге (1816), затем преподаватель физики в одном частном учебном заведении в Париже и, наконец, консерватор физического кабинета в Коллеж де Франс. Знаменит своими научными исследованиями, главным образом в области акустики. Принимал участие в опытах Био над изучением взаимодействия между электрическим током и магнитным полем.



*Самарский Александр Андреевич* (1919–2008) — российский математик, академик РАН, председатель Ученого совета ИММ РАН, зав. каф. вычислительных методов факультета ВМК МГУ, зав. каф. математического моделирования МФТИ. Крупнейший специалист в области вычислительной математики, математической физики, теории математического моделирования. Создатель теории операторно-разностных схем, общей теории устойчивости разностных схем.

*Скаляр* (от лат. *scalaris* — ступенчатый) — величина, каждое значение которой может быть выражено одним числом. Можно сказать, что это тензор нулевого ранга, который задаётся одним числом (нульмерным массивом с единственным элементом).

*Тензор* (от лат. *tensus* — напряженный) — геометрический объект, который описывается многомерным массивом, то есть набором чисел, занумерованных несколькими индексами, или, иначе говоря, таблицей (вообще говоря,  $n$ -мерной).

*Теплопроводность* — это перенос энергии молекулами, атомами, ионами в процессе их теплового движения.

*Устойчивость* — способность системы сохранять текущее состояние при наличии внешних воздействий.

*Фарадэй Майкл* (1791–1867) — английский физик, химик и физико-химик, основоположник учения об электромагнитном поле, член Лондонского королевского общества (1824).

*Фик Адольф* (1829–1901) — выдающийся немецкий физиолог. Объяснял вопросы физиологии на основании данных математики и механики. В 1855 году опубликовал количественное описание процесса диффузии.

*Физический закон* — эмпирически установленная и выраженная в строгой словесной и/или математической формулировке устойчивая связь между повторяющимися явлениями, процессами и состояниями тел и других материальных объектов в окружающем мире.

*Фурье Жан Батист Жозеф* (1768–1830), французский математик и физик. Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами. Исследовал вопрос об условиях применимости разработанного Исааком Ньютоном метода численного решения уравнений. Вывел уравнение теплопроводности в твёрдом теле и разработал методы его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов. Открыл термоэлектрический эффект, показал, что он обладает свойством суперпозиции, создал термоэлектрический элемент.

*Эксперимент* (от лат. *experimentum* — проба, опыт) в научном методе — метод исследования некоторого явления в управляемых условиях. Отличается от наблюдения активным взаимодействием с изучаемым объектом. Обычно эксперимент проводится в рамках научного исследования и служит для проверки гипотезы, установления причинных связей между явлениями.

---

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

---

- Аналог разностный, 114  
Аппроксимация, 118
- Вектор, 34  
Векторное произведение, 35  
Вязкость, 39
- Главный член погрешности, 117  
Градиент, 35  
Граничные условия  
    1-го рода, 28  
    2-го рода, 29  
    3-го рода, 29  
    неоднородные, 34  
    однородные, 33
- Дивергенция, 35  
Дифференциальное уравнение  
    в частных производных, 26  
    неоднородное, 69  
    обыкновенное, 26  
    однородное, 68  
Диффузия, 38
- Емкость, 17, 50, 51
- Задача  
    Дирихле, 84, 85, 87–89, 91, 97, 99, 105  
    Неймана, 84, 93, 94  
    Робэна, 84, 94
- Закон  
    Био-Савара, 54  
    Гаука, 58, 59  
    Кулона, 54  
    Фарадея, 54
- Фика, 39  
Фурье, 29, 39
- Концентрация вещества, 39, 40  
Коэффициент  
    самоиндукции, 51  
    температуропроводности, 41, 124  
    теплообмена, 43  
    теплопроводности, 39, 41  
    утечки, 51
- Кулона, 7
- Метод  
    Даламбера, 75  
    Фурье, 33, 44  
    интегральных преобразований, 32  
    преобразования зависимой  
        переменной, 32  
    преобразования координат, 32  
    разделения переменных, 34  
    функций Грина, 33  
    численный, 33
- Метод Гаусса-Зейделя, 135  
    верхняя релаксация, 136  
    нижняя релаксация, 136
- Многочлен Лежандра, 107
- Моделирование, 11  
    аналоговое, 12  
    математическое, 13  
    физическое, 12
- Модель, 11  
    математическая, 13, 21
- Набла, 35  
Напряжение, 51

- Напряженность поля  
магнитного, 55  
электрического, 54
- Ньютона, 7
- Погрешность аппроксимации, 117
- Подход к построению моделей  
аналогий, 21  
вариационный, 21  
фундаментальный, 21
- Поле  
магнитное, 55  
электрическое, 54
- Порядок аппроксимации, 117
- Поток вектора напряженности, 54
- Преобразование Самарского А. А., 125
- Разностная схема  
неявная, 123, 125  
явная, 122, 124
- Ротор, 35
- Сила  
внешняя, 59, 60  
натяжения, 58, 59  
тока, 17
- Система координат  
декартова прямоугольная, 81  
ортогональная, 63  
сферическая, 81  
цилиндрическая, 81
- Скаляр, 34
- Скалярное произведение, 34
- Сопrotивление, 51
- Суперпозиция, 31, 33, 44, 64
- Схема  
крест, 130
- Схема разностная, 116
- Сходимость, 118
- Тензор, 53
- Теплоемкость, 18, 40
- Теплопроводность, 39
- Тип уравнения  
гиперболический, 32  
параболический, 31  
эллиптический, 32
- Требования к моделям  
адекватности, 21  
достаточной простоты, 22  
наглядности, 23  
полноты, 23  
продуктивности, 23  
робастности, 23
- Узел разностной сетки, 116, 131, 136
- Уравнение  
Гельмгольца, 52  
Лапласа, 32  
Лежандра, 107  
Пуассона, 27  
волновое, 32  
колебания струны, 59
- Уравнения Лоренца-Максвелла, 53
- Условие устойчивости, 120, 124, 125
- Условия  
геометрические, 29  
граничные, 32  
начальные, 32  
однозначности, 27  
физические, 29
- Устойчивость, 118
- Формула  
Грина, 87, 88, 91  
Остроградского-Гаусса, 87  
левых разностей, 115  
правых разностей, 115  
центральных разностей, 115
- Функция Грина, 87, 88, 91  
для полуплоскости, 101
- Функция грина  
для шара, 97
- Фурье, 6
- Число Куранта, 132  
конвективное, 125  
кондуктивное, 124
- Этапы построения моделей, 24
- иерархический, 21
- микроскопический, 8
- статистический, 8
- феноменологический, 9

Учебное издание

**Гриняев** Юрий Васильевич  
**Миньков** Леонид Леонидович  
**Тимченко** Сергей Викторович  
**Ушаков** Владимир Михайлович

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.  
Компьютерная верстка Зернаева М. П.

Подписано в печать 24.12.12. Формат 60x84/8.  
Усл. печ. л. 17,21. Тираж 300 экз. Заказ

---

Издано в ООО «Эль Контент»  
634029, г. Томск, ул. Кузнецова д. 11 оф. 17  
Отпечатано в Томском государственном университете  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40  
Тел. (3822) 533018.