

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники"**

Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТЕОРИИ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

2013

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники"
(ТУСУР)**

**Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники
(СВЧ и КР)**

**Утверждаю
Зав. кафедрой СВЧ и КР
_____ С.Н. Шарангович
" ____ " _____ 2013**

Методы математической физики

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТЕОРИИ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

Руководство к лабораторной работе для направления подготовки бакалавров
210700.62 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Разработчики:
профессор каф. СВЧ и КР
_____ Г.Г. Гошин
аспирант каф. СВЧ и КР
_____ А.Ю. Попков

2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы	4
2. Введение.....	4
3. Основные теоретические сведения	5
3.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода	5
3.2. Метод квадратур и его применение к решению интегральных уравнений.....	6
3.3. Особенности применения метода квадратур к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода	12
4. Описание интерфейса и методика работы с программой	15
5. Рекомендации по выполнению работы	16
5.1. Уравнения Фредгольма	16
5.2. Уравнения Вольтерра	17
6. Содержание отчета	18
7. Контрольные вопросы	18
8. Список литературы	19

1. Цель работы

Целью работы является: изучение и применение метода квадратур к численному решению интегральных уравнений.

2. Введение

Неизменным этапом математического моделирования является использование описывающих изучаемое явление выражений для получения численных результатов. Этот этап называется численной реализацией математических моделей и сводится к решению различных типов уравнений. Нас интересуют интегральные уравнения. Под интегральными уравнениями понимаются уравнения, в которые независимая функция входит под знак интеграла. Если функция входит линейно, то интегральное уравнение называется линейным.

При численном решении интегральных уравнений на ЭВМ неизбежно приходится заменять входящие в них интегралы конечными суммами. При этом полученные конечные соотношения могут быть вспомогательными или несут самостоятельный характер как окончательные расчетные выражения [1-4].

В компьютерной лабораторной работе рассматриваются интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода, численное решение которых находится методом квадратур.

3. Основные теоретические сведения

3.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода

Линейное неоднородное уравнение Фредгольма II рода относительно неизвестной функции $y(x)$ имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \cdot y(s) ds = f(x), \quad (1)$$

где независимые переменные изменяются в интервале $[a, b]$, а ядро $K(x,s)$ определено в квадрате $V\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ на плоскости (x, s) . Кроме того, полагается, что ядро, являясь фредгольмовским, непрерывно в V или имеет разрыв при условии, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds = B^2 < \infty \quad (2)$$

ограничен конечным значением $B^2 = const$.

Параметр λ (числовой множитель) имеет существенное значение при качественных исследованиях и решении интегральных уравнений Фредгольма II рода. Пределы интегрирования могут быть конечными или бесконечными.

Линейное неоднородное уравнение Вольтерра II рода имеет вид

$$y(x) - \int_0^x K(x,s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3)$$

С различными ограничениями на ядро уравнения $K(x, s)$ и правую часть $f(x)$ связаны определенные условия существования и единственности решения уравнения (3). В частности, решение существует и единственно, если ядро непрерывно внутри и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми $s=a, x=b, x=s$ (при $b>a$), а функция $f(x)$ на промежутке $[a, b)$ имеет конечное число точек разрыва, причём она может быть и неограниченной.

3.2. Метод квадратур и его применение к решению интегральных уравнений

Метод квадратур относится к аппроксимационным методам, он широко распространён, поскольку достаточно универсален в отношении принципа построения алгоритмов решения линейных уравнений.

В основе метода лежит квадратурная формула

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \varphi(x_j) + R(\varphi), \quad (4)$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$, – абсциссы, принадлежащие к отрезку $[a, b]$; A_j – коэффициенты, не зависящие от функции $\varphi(x)$; $R(\varphi)$ – ошибка замены интеграла суммой (остаточный член квадратурной формулы).

Если в линейном неоднородном интегральном уравнении (1) принять $x = x_i, i = \overline{1, n}$, то получим исходное для данного метода соотношение

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

из которого после замены интеграла суммой получается система

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + \lambda R_i, \quad (6)$$

где

$$R_i = R[K(x_i, s) y(s)].$$

После отбрасывания в ней малой величины λR_i для отыскания приближенных значений $\tilde{y}(x_i) = y_i$ решения $y(x)$ в узлах x_1, x_2, \dots, x_n получается линейная система алгебраических уравнений

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

Решение системы (7) дает значения y_1, y_2, \dots, y_n , по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (1) на всем отрезке $[a, b]$. При этом в качестве приближенного решения можно принять функцию, полученную из таблицы $\{y_i\}$ линейной интерполяцией, т. е. совпадающую с y_i в точках x_i и линейную в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Кроме того, в качестве аналитического выражения приближенного решения уравнения применяется функция

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) \cdot y_j, \quad (8)$$

также имеющая в узлах x_1, x_2, \dots, x_n значения y_1, y_2, \dots, y_n .

Значения элементов некоторых квадратурных формул приведены в [1, таблица 2]. Существует несколько особенностей их применения, требующих внимания при использовании метода.

При аналитическом задании правой части имеется возможность применения любых квадратурных формул, в том числе формулы Гаусса, дающей наивысшую точность. Для применения формулы Гаусса интервал $[a, b]$ разбивается на произвольное число m подынтервалов (не обязательно равных)

$$[a_1 = a, b_1], [a_2 = b_1, b_2], \dots, [a_m = b_{m-1}, b_m = b],$$

т.е. интервал по основному промежутку $[a, b]$ представляется как

$$\int_a^b \longrightarrow \int_{a_1}^{b_1} + \int_{a_2}^{b_2} + \dots + \int_{a_m}^{b_m}. \quad (9)$$

Затем на каждом подынтервале применяется формула Гаусса для n узлов, и в итоге получается система $n \cdot m$ линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узлах.

Часто коэффициенты и абсциссы узлов для формулы Гаусса записываются применительно к стандартному интервалу $[-1,1]$. В таком случае применение формулы с переходом к интервалу $[a, b]$ соответствует следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \left(\frac{b-a}{2} \right) \int_{-1}^1 \varphi \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) x + \left(\frac{b+a}{2} \right) \right] dx \approx \\ &\approx \left(\frac{b-a}{2} \right) \sum_{k=1}^n A_k \varphi \left[\left(\frac{b-a}{2} \right) x_k + \left(\frac{b+a}{2} \right) \right], k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Значения коэффициентов A_k и координат узлов x_k при различных n приводятся в [3].

С учётом разбиения (9) можно записать

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i - a_i}{2} \right) \sum_{k=1}^n A_k \varphi \left[\left(\frac{b_i - a_i}{2} \right) x_k + \left(\frac{b_i + a_i}{2} \right) \right] \quad (10)$$

Если на каждом i -ом подынтервале обозначить

$$\tilde{y}_i(x_k) = y_{ik} ; \quad K \left[\left(\frac{b_i - a_i}{2} \right) x_k + \left(\frac{b_i + a_i}{2} \right), \left(\frac{b_i - a_i}{2} \right) s_j + \left(\frac{b_i + a_i}{2} \right) \right] = K_{ikj} ;$$

$$f_i(x_k) = f_{ik} ; \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n},$$

то результат применения формулы Гаусса к уравнению (1) (при $\lambda=1$) можно представить в виде системы

$$y_{ik} - \sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i - a_i}{2} \right) \sum_{j=1}^n A_j K_{ikj} y_{ij} = f_{ik}; \quad i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}; \quad (11)$$

В качестве примера рассмотрим решение двух задач.

1. Решение задачи о вынужденных колебаниях ограниченной струны

Одним из характерных приложений интегральных уравнений Фредгольма II рода является задача о вынужденных поперечных колебаниях струны.

Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$; внешнее воздействие представляет собой гармоническую функцию $f(x,t) = \varphi(x) \cos(\omega t)$, а искомой является функция $u(x, t)$, определяющая вынужденные колебания на частоте ω , т. е. $u(x,t) = v(x) \cos(\omega t)$, где t – время, $v(x)$ – неизвестная функция. Подстановка приведенных выражений в уравнение вынужденных поперечных колебаний струны

$$\rho \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} = p \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} + f(x,t)$$

приводит к краевой задаче

$$p v'' = -\rho \cdot \omega^2 v - \varphi(x), \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (12)$$

где p и ρ – заданные постоянные.

Известно, что решение задачи о стационарном отклонении струны при $\omega = 0$ имеет вид

$$v(x) = -\frac{1}{p} \int_0^x G(x,s) \varphi(s) ds, \quad (13)$$

где функция влияния равна

$$G(x,s) = \begin{cases} -(l-s) \frac{x}{l}, & 0 \leq x \leq s \leq l, \\ -s(l-x) \frac{1}{l}, & 0 \leq s \leq x \leq l. \end{cases}$$

В решаемой задаче при $\omega \neq 0$ в дифференциальное уравнение (12) кроме $\varphi(x)$ входит также член $\rho \omega^2 v(x)$, добавление которого с использованием решения в форме (13) приводит к выражению

$$= -\frac{\rho \cdot \omega^2}{p} \int_0^l G(x,s) \cdot v(s) ds - \frac{1}{p} \int_0^l G(x,s) \cdot \varphi(s) ds, \quad (14)$$

которое в качестве неизвестной функции содержит $v(x)$.

Это интегральное уравнение имеет определённое решение только в том случае, если возбуждающая частота ω отлична от всех собственных чисел однородной задачи, т. е. за исключением случаев резонанса. Механически это означает, что внешние силы не должны совершать никакой работы, когда струна совершает движение, соответствующее собственному колебанию [4].

Упростим задачу, приняв значения p и ρ равными 1. Тогда $\lambda = \omega^2$. Пусть $\varphi(s) = A \sin(ns)$. Решение задачи находится применением квадратурной формулы Гаусса (11).

2. Решение задачи о распределении потенциала

Рассмотрим задачу Дирихле. Пусть дана конечная область D , ограниченная простым замкнутым контуром L . Предположим, что уравнение контура дано в параметрическом виде; за параметр принята дуга s :

$$x=x(s); y=y(s) \quad (0 \leq s \leq s_0)$$

при этом предполагаем, что функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся в нуль одновременно. Требуется найти функцию u , гармоническую в области D , которая на контуре обращается в заданную непрерывную функцию дуги $f(s)$:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Пусть теперь $\mu(s)$ – произвольная непрерывная, функция, и в таком случае интеграл

$$V(x, y) = \int_0^{s_0} \frac{\cos \varphi}{r} \mu(s) ds \quad (15)$$

есть гармоническая функция переменных x и y в области D . Функция V носит название потенциала двойного слоя, а $\mu(s)$ называют его плотностью.

Требуется найти решение задачи Дирихле в форме потенциала двойного слоя, а именно найти плотность $\mu(s)$ так, чтобы функция

$$u(x, y) = \int_0^{s_0} \mu(s) \frac{d\omega}{ds} ds \quad (16)$$

имела при приближении к контуру L значение $f(s)$.

Уравнение

$$\mu(\sigma) - \int_0^{s_0} K(s, \sigma) \mu(s) ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma), \quad (17)$$

является интегральным уравнением для определения функции μ . Ядро $K(s, \sigma)$ может быть записано в виде:

$$K(s, \sigma) = -\frac{1}{\pi} \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)}. \quad (18)$$

Заметим, что интегральное уравнение могло быть составлено таким же образом, если бы за параметр в уравнении контура L была взята не дуга s , а некоторый другой параметр t . Уравнение имело бы тогда вид:

$$\mu(\tau) + \int_0^{T_0} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\sigma)}{x(s) - x(\sigma)}. \quad (19)$$

Рассмотрим задачу Дирихле для эллипса:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, (a \geq b),$$

т. е. задачу определения гармонической внутри эллипса функции $u(x, y)$, которая на контуре обращается в заданную функцию $g(t)$. Эта задача, если искать решение в виде потенциала двойного слоя (16), приводит к уравнению типа (19):

$$\mu(\tau) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)} \mu(t) dt = \frac{1}{\pi} g(\tau). \quad (20)$$

Обозначим для краткости

$$K(t, \tau) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)}. \quad (21)$$

Раскрывая это выражение, получаем:

$$\begin{aligned}
K(t, \tau) &= \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b \sin t - b \sin \tau}{a \cos t - a \cos \tau} = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{b \frac{2 \cos \frac{t+\tau}{2} \cdot \sin \frac{\tau-t}{2}}{-2 \sin \frac{t+\tau}{2} \sin \frac{\tau-t}{2}}}{a} = \\
&= -\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \frac{t+\tau}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2} ab}{a^2 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} + b^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Или предполагая $b \neq a$, т.е. исключая случай круга, можем $K(t, \tau)$ придать удобный для численных расчётов вид:

$$K(t, \tau) = \frac{\frac{ab}{a^2 - b^2}}{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \cos(t + \tau)}. \tag{23}$$

Далее для решения задачи применяем квадратурную формулу Гаусса (10) и решение ищем на интервале $(0, 2\pi)$.

3.3. Особенности применения метода квадратур к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода

Чтобы применить к решению линейного уравнения (3) метод квадратур, необходимо переписать его в виде выражения

$$y(x_i) - \int_0^{x_i} K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{24}$$

которое получается из исходного уравнения при фиксированных значениях x_i независимой переменной x . Значения x_i могут быть выбраны специальным образом или заданы заранее, если, например, правая часть $f(x)$ задана таблицей. Принимая значения x_i в качестве узлов квадратурной формулы и заменяя с её помощью интеграл в (24) конечной суммой, получим систему

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + R_i[y], \tag{25}$$

где $R_i[y]$ – ошибка аппроксимации. Получение выражения (25) обычно связывается с предположением о непрерывности ядра и свободного члена в за-

данных треугольнике и промежутке. Полагая ошибки $R_i [y]$ малыми и отбрасывая их, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$y_i - \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

где введены следующие обозначения, которых будем придерживаться и далее,

$$\tilde{y}(x_i) = y_i, \quad f(x_i) = f_i, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}.$$

Решение (26) даёт приближённые значения искомой функции $\tilde{y}(x_i) = y_i$ в узлах x_i . Система (26) может быть приведена к виду

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i, i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

Это позволяет последовательно найти y_1, y_2, \dots, y_n по рекуррентной формуле

$$y_i = (1 - A_i K_{ii})^{-1} (f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j), i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

при условии $(1 - A_i K_{ii}) \neq 0$, которое всегда можно выполнить путём выбора узлов и обеспечения достаточной малости коэффициентов A_i .

В случае применения формулы трапеций (28) примет вид

$$y_i = (1 - \frac{h}{2} K_{ii})^{-1} (f_i + \frac{h}{2} K_{i1} y_1 + h \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} y_j). \quad (29)$$

Отметим особенность выражения (29), состоящую в росте количества вычислений вместе с номером шага дискретизации из-за увеличения количества членов суммы. При этом значения коэффициентов $A_j K_{ij}$ при y_j , меняются для каждого i , что в общем случае не позволяет воспользоваться результатами вычислений на предыдущих шагах.

В качестве примера рассмотрим решение методом квадратур задачи анализа переходных процессов в электрических цепях. В случае линейных цепей с сосредоточенными параметрами задача сводится к решению уравнений Вольтерра II рода или их систем с разностными степенными или экспоненциальными ядрами. В качестве примера рассмотрим задачу анализа переходного процесса в электрической цепи второго порядка (с двумя инерционными элементами), схема которой приведена на рис. 1 [1].

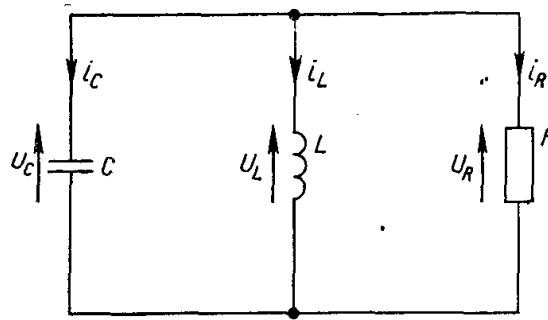


Рисунок 1 – Схема электрической цепи

Заданы: параметры цепи R , L , C , начальное значение (при $t = 0$) тока в катушке индуктивности $I_L(0) = I_0$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0) = U_0$. Для получения модели цепи в виде интегрального уравнения используются уравнения для ветвей:

$$i_R = Gu_R, (G = R^{-1}), i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L_0} \int_0^t u_L(\tau) d\tau, i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad (30)$$

а также соотношение $i_R + i_L + i_C = 0$, представляющее собой второй закон Кирхгофа. Тогда естественным образом получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$Gu_R(t) + \frac{1}{L_0} \int_0^t u_L(\tau) d\tau + C \frac{du_C(t)}{dt} = 0, u_C(0) = U_0. \quad (31)$$

Из этого выражения путём дифференцирования получается дифференциальное уравнение. Если же (31) проинтегрировать, то получим интегральное уравнение

$$Cu_C(t) + G \int_0^t u_R(\tau) d\tau + \frac{1}{L_0} \int_0^t \int_0^{\tau} u_L(\tau) d\tau dt_1 = U_0. \quad (32)$$

Учитывая для анализируемой цепи равенство $u_C = u_R = u_L$ и выполняя простые преобразования, окончательно

$$Cu_C(t) + \int_0^t [G + \frac{1}{L}(t - \tau)] u_C(\tau) d\tau = U_0. \quad (33)$$

Решение данной задачи будем искать методом квадратур, используя формулу трапеций (29).

4. Описание интерфейса и методика работы с программой

Программа имеет стандартный интерфейс – главное меню и "быстрые кнопки". Размеры главного окна можно изменять, т.е. минимизировать или раскрыть на весь экран. Главное окно содержит компонент – "рисунок", предназначенный для построения графиков уравнений Фредгольма II рода, и таблицу, куда заносятся результаты решения данных уравнений.

Для построения графика необходимо заполнить таблицу и выбрать соответствующую строку в таблице параметров задачи, а затем нажать левую клавишу курсора "мыши". При этом в список рисунка (находится справа от рисунка) помещается содержимое ячейки первой колонки для выбранной строки и строится график. Если, поставив курсор "мыши" на график, и нажав левую кнопку повести вниз, то можно посмотреть выделенную часть рисунка в увеличенном виде. Для возвращения в исходное состояние необходимо нажать левую кнопку курсора и повести вверх.

Для того чтобы очистить рисунок, нужно выбрать в главном меню "Вид/Очистить рисунок" или воспользоваться соответствующей кнопкой. Построенный график можно вывести на печать (команда главного меню "Вид/Вывести рисунок на печать") или скопировать в буфер ("Вид/Копировать в буфер") и затем вставить его в текст в редакторе Word. Для выполнения этих команд можно также воспользоваться "быстрыми кнопками".

Перед повторным заполнением таблицы необходимо очистить её, выбрав в главном меню "Вид/Очистить таблицу" или при помощи "быстрой кнопки".

При решении уравнений Вольтерра вычисления и построения графиков проводится в текущем окне, где размещаются исходные данные решаемой задачи. Построение графика проводится нажатием кнопки "Рисунок". Для того чтобы очистить рисунок, нужно нажать кнопку "Очистить". Кнопка "Копировать" помещает рисунок в буфер.

5. Рекомендации по выполнению работы

Варианты задания для каждого типа уравнений представлены в таблицах. В них содержатся значения параметров, входящих в уравнения.

Для выполнения варианта задания, при решении уравнений Фредгольма II рода нужно:

- выбрать в главном меню "Уравнение" и соответствующий вид уравнения или воспользоваться кнопками (выбор вида уравнения можно также провести, нажав сочетания клавиш, указанных в главном меню);
- в появившемся окне задать необходимые параметры, соответствующие варианту задания; если в задании нет указаний, то оставить по умолчанию;
- после установки всех параметров нажать кнопку "Расчёт"; закончив вычисления для выхода в главное меню нажать кнопку "Закреть";
- для построения графиков нажать в соответствующих таблицах кнопки с выбранными значениями параметров.

Для выполнения варианта задания, при решении уравнений Вольтерра II рода нужно:

- выбрать соответствующий вид уравнения, как и в случае решения уравнений Фредгольма, и задать необходимые параметры;
- после установки задания всех данных нажать кнопку "Рисунок" для построения графика;
- при завершении работы в текущем окне нажать кнопку "Закреть".

5.1. Уравнения Фредгольма.

1. Вынужденные поперечные колебания струны.

Для $A=10$ задавая $n=1,2,3,4,5$ и взяв из таблицы 1 значения параметров предложенного преподавателем варианта, описать процесс распространения волн отклонения вдоль струны. Построить графики.

Таблица 1.

Параметры/Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l, \text{ м}$	3,0	3,5	3,0	3,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5
λ	0,2	0,02	0,1	0,01	0,4	0,3	0,04	0,5	0,03	0,04

2. Решение задачи Дирихле для эллипса.

Таблица 2.

Параметры/Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, \text{ м}$	1	1,5	2	1	1	2	1,5	2	1	1
$b, \text{ м}$	0,5	1	1	0,5	0,5	1	1	1	0,5	0,5

При заданных в таблице параметрах построить распределение потенциала.

5.2 Уравнения Вольтерра.

Задача анализа переходных процессов в линейных электрических цепях.

1. Для заданных параметров цепи, при $n=100$ построить характеристику переходного процесса.
2. Приняв $n=40$ построить характеристику. Увеличивая число узлов повторить вычисления. Найти оптимальное значение числа узлов. Оценить полученные результаты.

Таблица 3.

Параметры/ Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L, \text{ нГн}$	30	30	30	10	10	20	22	10	60	30
$C, \text{ пФ}$	100	100	10	10	20	200	200	200	400	40
$G, \text{ См}$	0,01	0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	0,01	0,001	0,01	0,001
$t, \text{ мкс}$	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1	0,07

6. Рекомендации по оформлению отчёта

Отчёт по лабораторной работе должен иметь титульный лист и содержать следующие данные:

- номера вариантов задания и выбранные параметры;
- результаты решения задач в графическом виде, характеризующие рассматриваемые процессы;
- физическая интерпретация результатов с описанием влияния параметров на характеристики процессов;
- выводы по существу проделанной работы (а не перечисление выполненных операций)

Отчет должен быть представлен в виде текстового файла.

7. Контрольные вопросы

1. Запишите линейные уравнения Фредгольма и Вольтерра. В чем их отличие?
2. Объясните процессы, описываемые этими уравнениями.
3. В чем заключается метод квадратур? Приведите вид квадратурной формулы.
4. В чем состоит отличие квадратурной формулы Гаусса от формулы трапеций?
5. Запишите окончательные соотношения для решения линейных уравнений Фредгольма и Вольтерра. Поясните их.
6. Запишите вид нелинейного уравнения Вольтерра. В чем состоит отличие решения данного уравнения от решения линейного уравнения.
7. Ваши суждения по поводу ожидаемого поведения решений, описывающих исследуемые процессы: колебания струны, распределение электрического потенциала в плоскости эллипса, переходные процессы в электрических цепях, колебания тока в нелинейном контуре.

8. Список литературы

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наук. думка, 1986. - 544с.
2. Кантарович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. - Л.: Физматгиз, 1962. - 708с.
3. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. - Л.: ОНТИ, 1937. - 999с.
4. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. - М.: Наука, 1966. - 372с.