МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники"

Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ В СРЕДЕ MATHCAD

2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники"
(ТУСУР)

Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники
(СВЧ и КР)

Утверждаю
Зав. кафедрой СВЧ и КР
________С.Н. Шарангович
"____"____________2013

Методы математической физики

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ MATHCAD

Руководство к лабораторной работе для направления подготовки бакалавров 210700.62 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Разработчики:
профессор каф. СВЧ и КР
_____________Г.Г. Гошин

аспирант каф. СВЧ и КР
_____________А.Ю. Попков

2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы

Целью работы является изучение возможностей системы автоматизированного проектирования (САПР) PTC MathCAD при решении линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также систем этих уравнений.

2. Введение

MathCAD – это специализированное программное обеспечение (ПО), предназначенное для решения различных математических задач. Основным преимуществом данного математического пакета является отсутствие необходимости знания каких-либо языков программирования. Достаточно задать формулу в рабочей области программы, чтобы MathCAD привел ее решение. Оператор получит результат, даже не зная, как программа устроена. Это, несомненно, является преимуществом, поскольку специалиста интересуют, прежде всего, результаты расчетов.

Одной из важных задач в инженерной практике является решение различного типа уравнений. В данном методическом пособии приведены некоторые возможности MathCAD, связанные с решением алгебраических и дифференциальных уравнений, а также их систем.

Для нахождения решений дифференциальных уравнений требуется задание дополнительных условий, из которых находятся постоянные интегрирования. Число постоянных зависит от порядка уравнений и количества переменных. В математической физике, рассматривающей дифференциальные уравнения в частных производных, такой переменной может быть время и дополнительные условия во временной области называют начальными. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений переменная обычно не имеет чёткого физического смысла и дополнительные условия называются начальными. При этом подразумевается, что должны быть заданы в определенных точках интервала изменения переменной начальные значения неизвестной функции.

3. Методы решения алгебраических уравнений и их систем

3.1. Символьный метод решения алгебраических уравнений

Для решения любых алгебраических уравнений MathCAD обладает рядом встроенных операторов. Одним из таковых является оператор *solve* (Рис. 1).

Перед тем, как ввести уравнение, его необходимо привести к каноническому виду (в левой части само уравнение, в правой - ноль). Далее необходимо открыть панель инструментов «Символьные преобразования с ключевыми словами», выделить уравнение левой кнопкой мыши и нажать на оператор *solve*. После чего программа почти сразу выдаст результат в виде столбца матрицы.

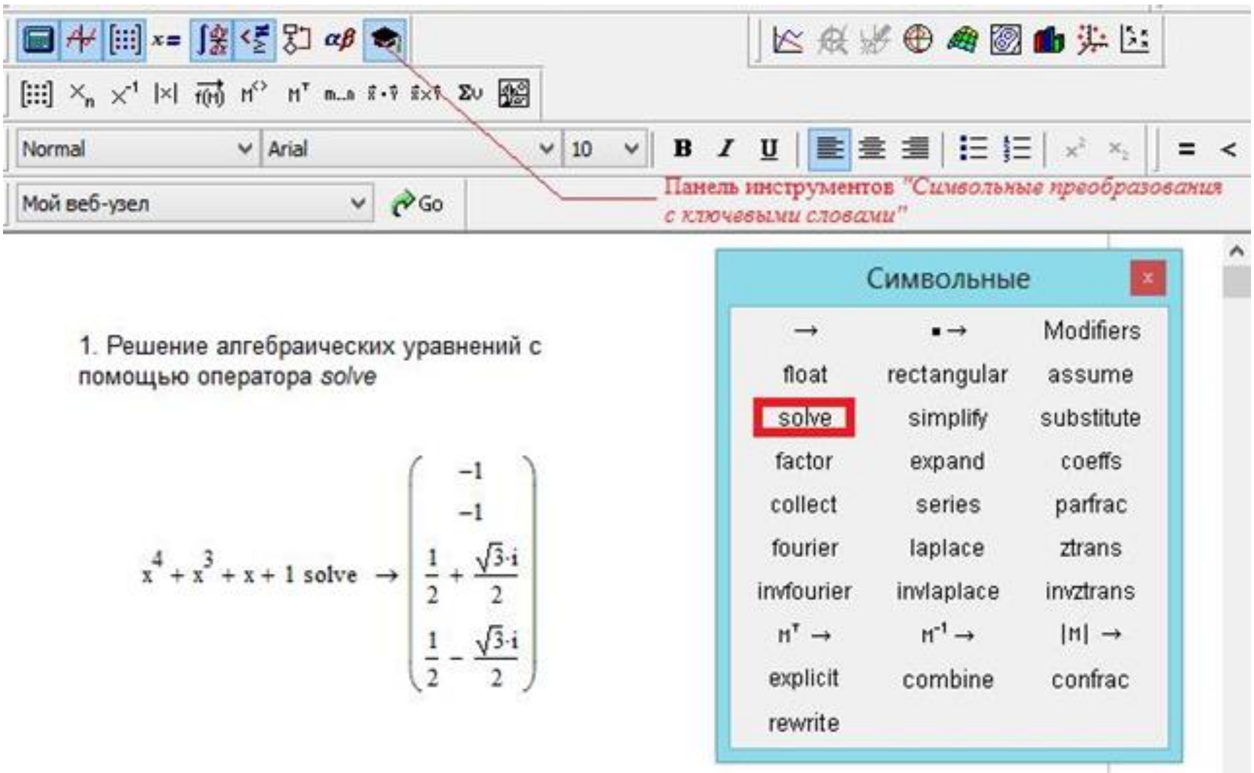


Рис. 1. Решение алгебраических уравнений с помощью оператора *solve*

3.2. Решение алгебраических уравнений с помощью функции “*root*”

Другим способ решения является использование функции *root* (Рис. 2).

Чтобы решить уравнение с помощью функции *root* надо выполнить такую последовательность действий:

- задать произвольное, начальное значение аргумента, неизвестной переменной решаемого уравнения;
- сообщить вид функции *f(x)*:=…;
- задать функцию *root* по схеме *root(f(x),x)*;
- вывести значение результата *root(f(x),x)*=…..

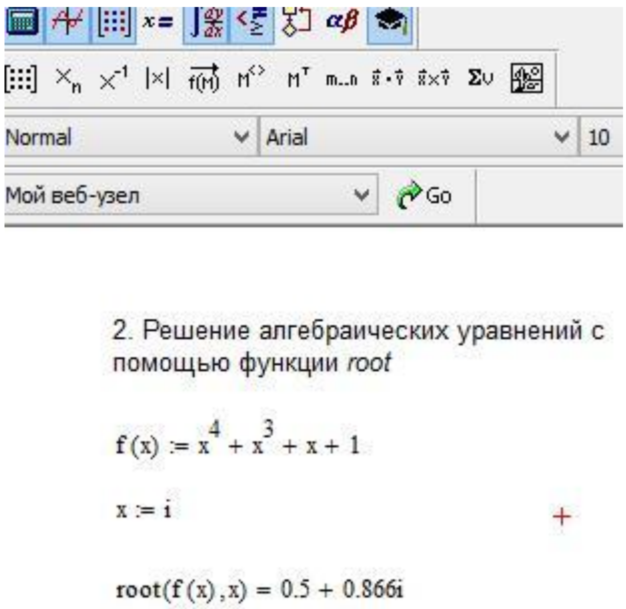


Рис. 2. Решение алгебраических уравнений с помощью функции *root*

Примечание:

Функция *root* определяет только один корень уравнения. Если в уравнении несколько корней, то определяется тот, к которому ближе всего заданное начальное значение переменной.

Итак, в MathCAD уравнение можно решать символьным методом, и тогда будут определены все его корни, или через функцию *root*, но будет найден только тот корень, который ближе всего к заданному, начальному значению переменной.

3.3. Решение систем уравнений с помощью оператора *Given/Find*

Для решения систем уравнений с помощью оператора *Given/Find* (Рис. 3) необходимо следовать следующему алгоритму:

- задать некоторое начальное значение искомых переменных;

- записать систему уравнений после оператора *Given*. Вместо обычного знака равно необходимо использовать «Булево равенство» (*ctrl*+=);
- использовать стандартную функцию *Find*;
- запросить значения определяемых переменных (задать знак равно после функции *Find*).

Вместо двух последних пунктов можно функции *Find* задать «векторный» идентификатор в шаблонной форме, а затем запросить значения элементов этого вектора (Рис. 3 (справа)).

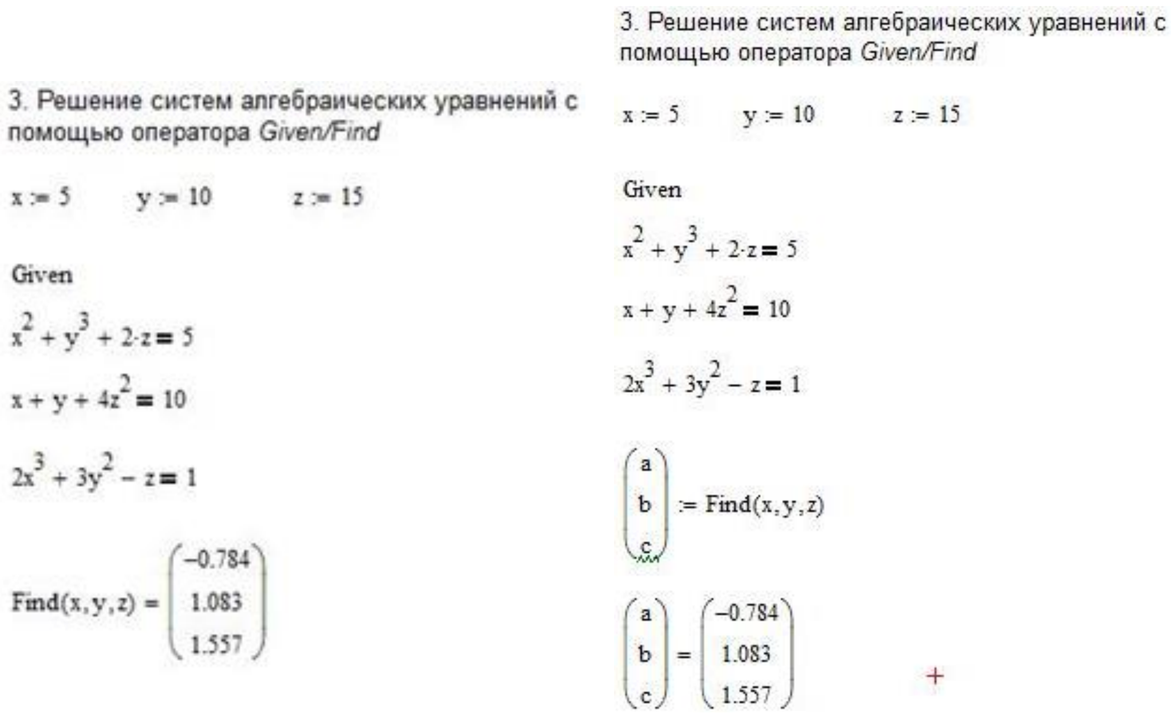


Рис. 3. Возможные пути решения систем алгебраических уравнений с помощью оператора *Given/Find*

3.4. Решение систем уравнений с помощью оператора *Given/Minerr*

Оператор *Given/Minerr* (Рис.4) применяется в тех случаях, когда функция *Find* не находит решений системы уравнений. Функция *Minerr* (от англ. minimal error) находит приближенные значения искомых переменных, при которых значения функций, составляющих систему, наиболее приближены к заданным.

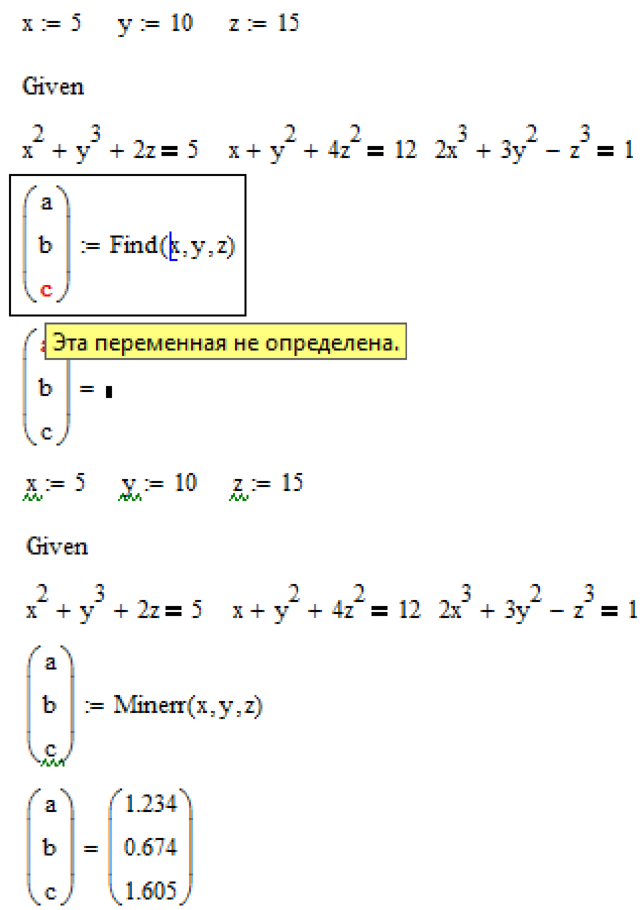


Рис. 4. Решение систем алгебраических уравнений с помощью оператора *Given/Minerr*

Алгоритм решения с помощью оператора *Given/Minerr* аналогичен алгоритму решения с помощью оператора *Given/Find*. Различие заключается в том, что вместо функции *Find*, в решении используется функция *Minerr*. Из рисунка видно, что там, где *Find* не может решить систему уравнений, *Minerr* находит приближенные значения искомых переменных.

3.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными можно воспользоваться матричным методом. Для этого необходимо:

- записать матрицу системы уравнений (коэффициенты перед неизвестными);
- записать вектор столбец свободных членов (то, чему равны уравнения);

- провести математическую операцию нахождения корней системы уравнения матричным методом, как показано на Рис. 5;
- запросить вывод полученного результата.

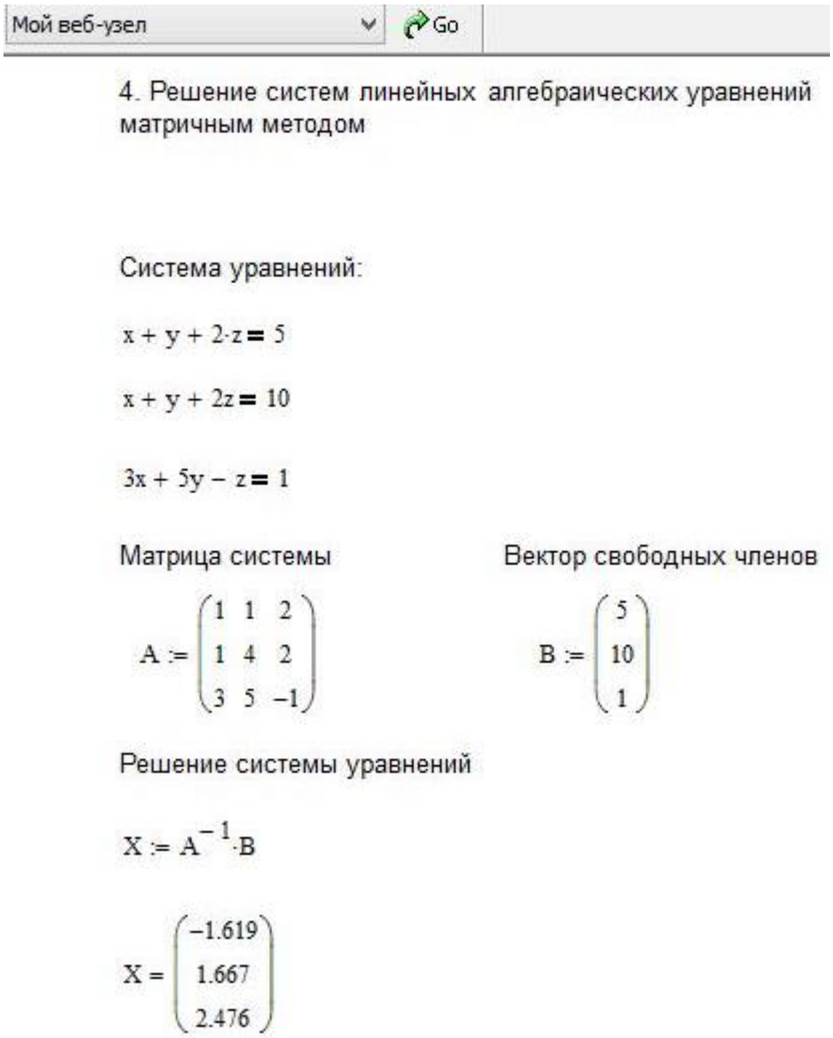


Рис. 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

Решить обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), значит найти исходную функцию одной переменной. Имеется ряд функций, с помощью которых Mathcad может решить ОДУ. Результат решения – матрица значений функции, вычисленных в некоторых точках. Не зависимо от применяемого алгоритма решения ОДУ, каждая из используемых в Mathcad функций требует, чтобы были заданы необходимые для поиска решения следующие величины:

- начальные условия (НУ) – значение искомой функции в определенной точке;
- интервал изменения переменной, в которых нужно найти решение (интервал вычисления);
- дифференциальное уравнение.

4.1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью функции *Odesolve*

Дифференциальное уравнение первого порядка не содержит производных выше первого порядка от неизвестной функции. На рис. 6 и рис. 7 показаны примеры решения дифференциального уравнения следующего вида:

$$\frac{dy}{dz} = -\cos(z) + \frac{10}{y}$$

с начальными условиями: $y(0) = 1$.

Решение дифференциальных уравнений в среде MathCAD может быть осуществлено с помощью оператора “*Odesolve*”. Расчет проводится по следующему алгоритму (Рис. 6):

- задаются исходное уравнение $y'(z)=f(z,y)$, начальные (НУ) условия $y(0)$ и $z(0)$, а также интервал вычисления;
- записывается блок решения *Given/Odesolve*, который решает уравнение при заданных НУ;
- вывод искомой функции.

Примечания:

1. Результат выводится в виде графика искомой функции как зависимость от переменной дифференцирования.

2. Знаки равенства в блоке решений задаются комбинацией клавиш *Ctrl+=* («Булево равенство»).

3. Знак дифференцирования задается комбинацией клавиш *Ctrl+F7*.

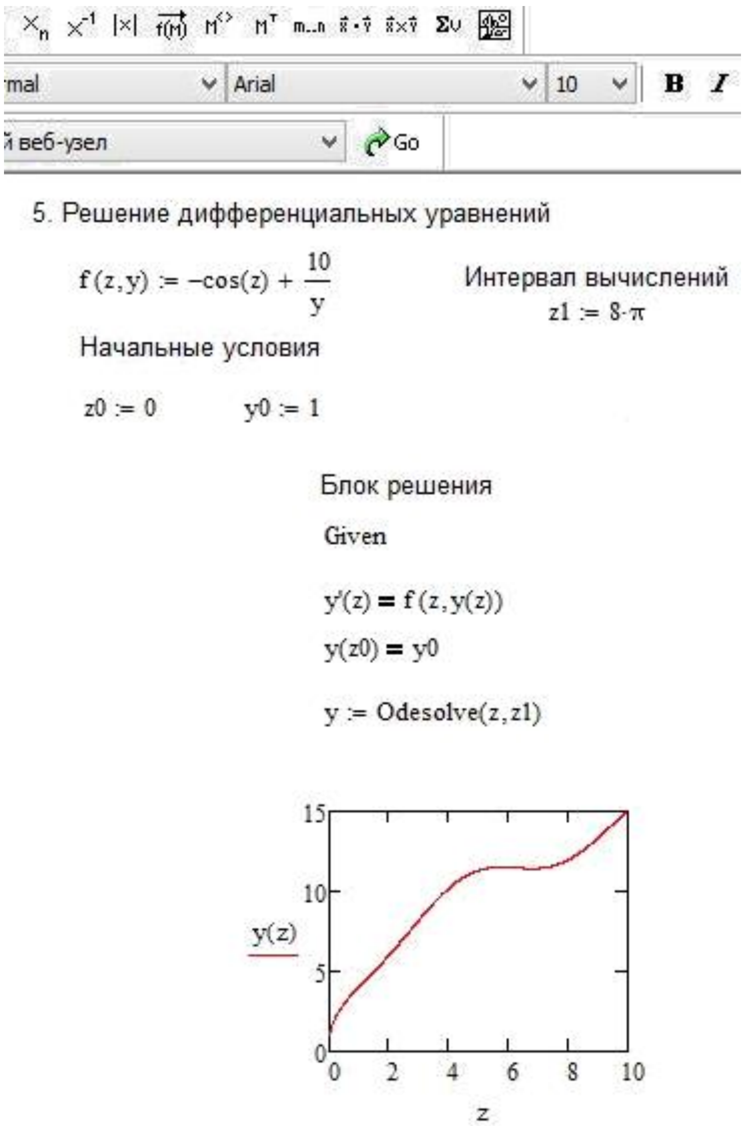


Рис. 6. Решение дифференциальных уравнений в среде MathCAD с помощью оператора Odesolve

4.2. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью функции *rkfixed*

Функция *rkfixed*(*y*, *x*1, *x*2, *npoints*, *D*) имеет следующие аргументы:

y = Вектор начальных условий размерности *n*, где *n* — порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений). Для дифференциального уравнения первого порядка, как, например, для уравнения, приведенного на рис. 7, вектор начальных значений вырождается в одну точку *y*0 = *y*(*x*1).

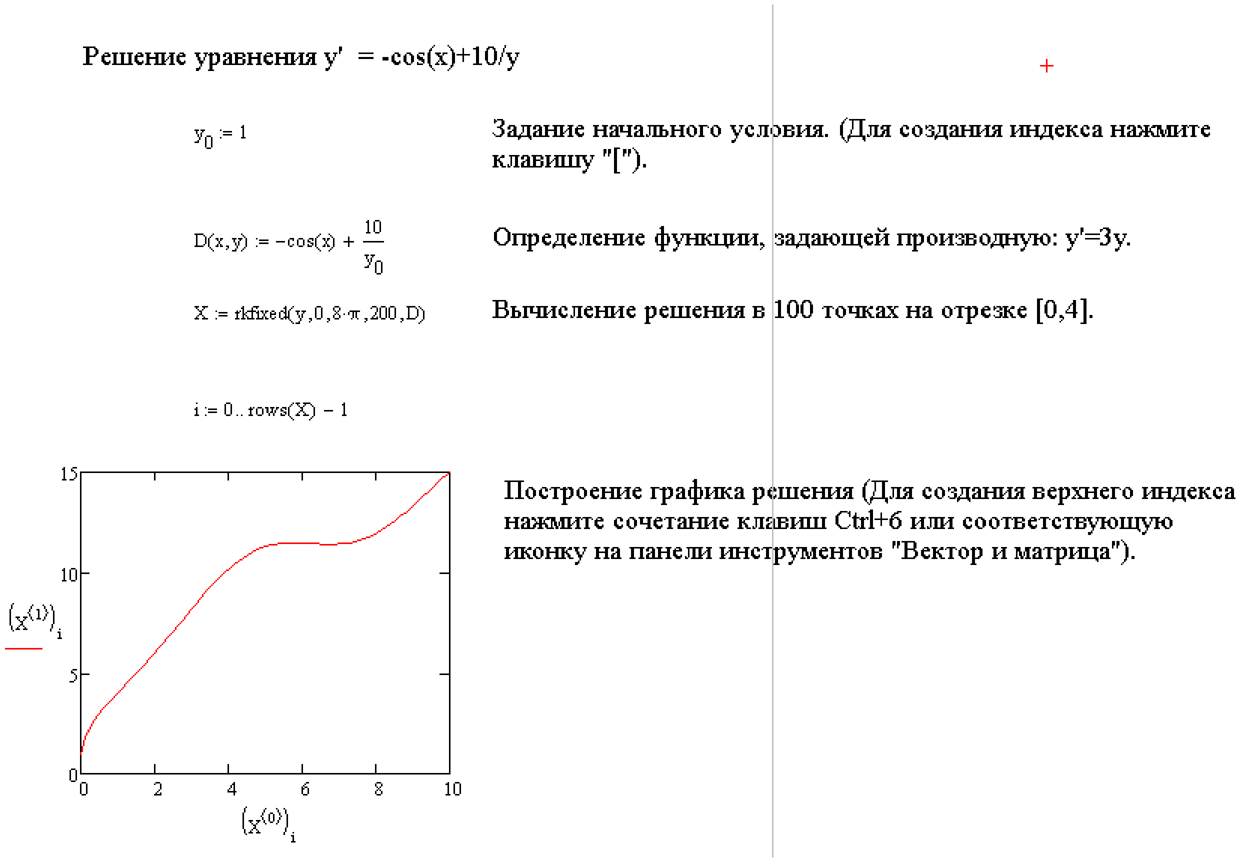


Рис. 7. Решение ОДУ первого порядка, использую функцию *rkfixed*

*x*1, *x*2 = Граничные точки интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений. Начальные условия, заданные для вектора ***y*** — это значение решения в точке *x*1.

npoints = Число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк (1 + *npoints*) в матрице, возвращаемой функцией *rkfixed*.

$D(x,y) =$ Функция, возвращающая значение в виде вектора из n элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

В результате решения с помощью функции *rkfixed* получается матрица, имеющая два столбца:

- первый столбец содержит точки, в которых ищется решение дифференциального уравнения;

- второй столбец содержит значения найденного решения в соответствующих точках.

4.3. Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка

Оператор *Odesolve* также решает и системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Рис. 8). Для этого оператору необходимо задать вектор-столбец искомых функций, переменную дифференцирования и интервал вычислений.

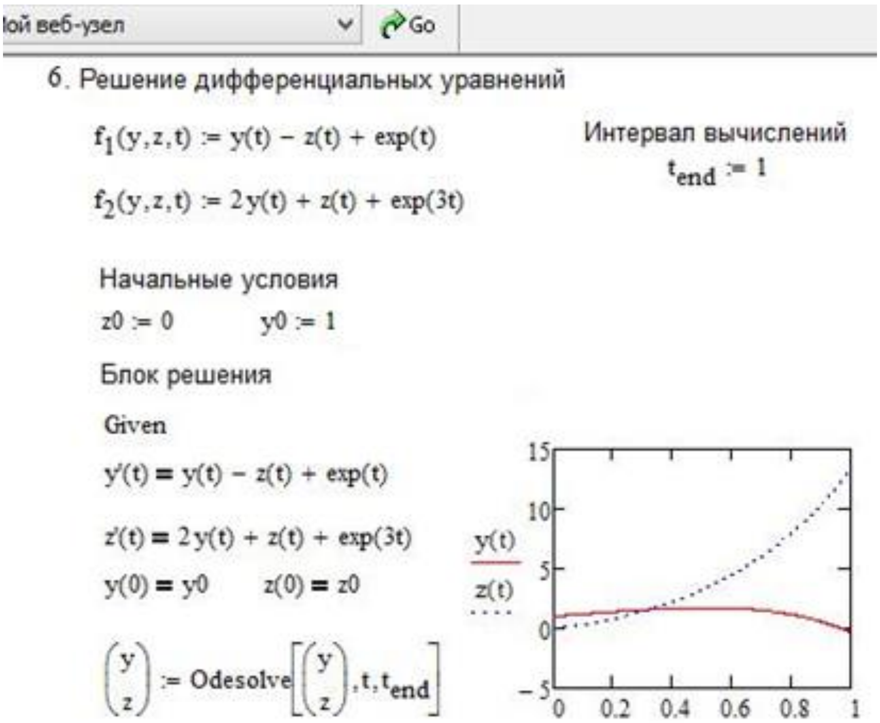


Рис. 9. Решение систем дифференциальных уравнений в среде MathCAD с помощью оператора *Odesolve*

4.4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков в среде Mathcad можно решить с помощью функции *rkfixed* (Рис. 10).

Решение уравнения y'' = 2y' - y   y(0) = 1   y'(0) = 1

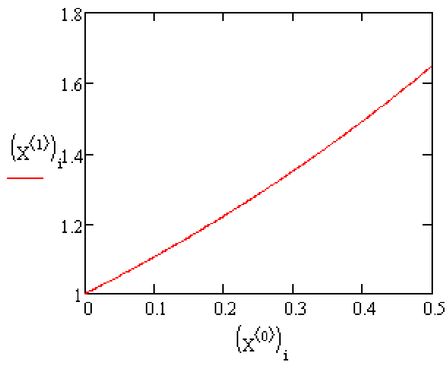
$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Задание начальных условий $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ Первая производная
Вторая производная

X := rkfixed(y,0,0.5,400,D)   Вычисление решения в 400 точках на интервале от 0 до 0.5

i := 0..400

Построение графика решения



Решение в виде матрицы

X =

t	y(t)	y'(t)
0	1	1
$1.25\cdot10^{-3}$	1.001	1.001
$2.5\cdot10^{-3}$	1.003	1.003
$3.75\cdot10^{-3}$	1.004	1.004
$5\cdot10^{-3}$	1.005	1.005
$6.25\cdot10^{-3}$	1.006	1.006
$7.5\cdot10^{-3}$	1.008	1.008
$8.75\cdot10^{-3}$	1.009	1.009
0.01	1.01	1.01
0.011	1.011	1.011
0.013	1.013	1.013
0.014	1.014	1.014
0.015	1.015	1.015
0.016	1.016	1.016
0.018	1.018	1.018
0.019	1.019	...

Рис. 10. Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Основные отличия уравнения второго порядка от уравнения первого порядка состоят в следующем:

- вектор начальных условий ***y*** теперь состоит из двух элементов — значений функции и её первой производной в начальной точке интервала x1;
- функция $D(t, y)$ является теперь вектором с двумя элементами

$$D(t,y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix};$$

- матрица, полученная в результате решения, содержит теперь три столбца: первый столбец содержит значения t, в которых ищется решение; второй столбец содержит $y(t)$; и третий — $y'(t)$.

На рис. 10 приведен пример решения следующего дифференциального уравнения:

$$y'' = 2y' - y$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

Методика решения дифференциальных уравнений более высокого порядка является развитием методики, которая применялась для решения дифференциальных уравнений второго порядка.

На рис. 11 приведен пример решения следующего дифференциального уравнения:

$$y^{(5)} - k^2 y'''' + 2ky'' - ky = 2y' - y$$
$$k = 2$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$
$$y''(0) = 2$$
$$y'''(0) = 3$$
$$y''''(0) = 4$$

Основное отличие заключается в следующем:

- вектор начальных значений $\boldsymbol{y}$ содержитз n элементов, определяющих начальные условия для искомой функции и ее производных y, y', y'',....$y^{(n\text{-}1)}$;
- функция D является вектором, содержащим n элементов

$$D(t, y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix};$$

- матрица, получаемая в результате решения, содержит *n* столбцов:
- первый — для значений *t*, а оставшиеся столбцы — для значений *y*(*t*), *y*'(*t*), *y*''(*t*),..., $y^{(n-1)}(t)$.

Мой веб-узел Go

Решение уравнения $y^{(5)} - k^2 \cdot y''' + 2k \cdot y'' - k \cdot y = 0$ $k := 2$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ Задание начальных условий

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ k^2 \cdot y_3 - 2 \cdot k \cdot y_1 + k \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Первая производная
Вторая производная
Третья производная
Четвертая производная
Пятая производная

$X := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 5, 100, D)$ Вычисление решения в 100 точках на интервале от 0 до 5

$i := 0 .. 100$

X =

0	0	1	2	3	4
0.05	0.053	1.104	2.155	3.21	4.413
0.1	0.111	1.216	2.321	3.442	4.854
0.15	0.174	1.336	2.5	3.696	5.327
0.2	0.244	1.466	2.691	3.975	5.834
0.25	0.321	1.606	2.898	4.28	6.381
0.3	0.405	1.756	3.12	4.614	6.97
0.35	0.497	1.918	3.36	4.978	7.606
0.4	0.597	2.092	3.618	5.375	8.295
0.45	0.706	2.28	3.898	5.808	9.041
0.5	0.825	2.482	4.2	6.28	9.849
0.55	0.955	2.7	4.526	6.794	10.727
0.6	1.096	2.935	4.88	7.354	11.68
0.65	1.249	3.189	5.263	7.964	12.716
0.7	1.415	3.462	5.677	8.627	13.843
0.75	1.595	3.757	6.126	9.35	...

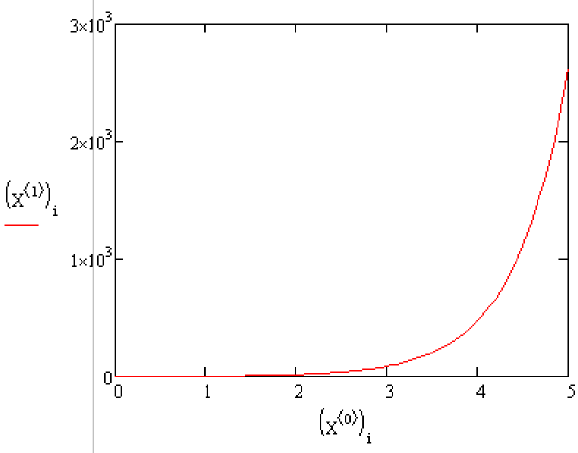


Рис. 11. Пример решения обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка

5. Решение дифференциальных уравнений в частных производных и их систем

В среде Mathcad имеется возможность решать дифференциальные уравнения в частных производных и их системы. Средства Mathcad позволяют решать одномерные параболические и гиперболические уравнения (с одной пространственной и одной временной переменными), а также двумерное уравнение Пуассона.

5.1. Решение дифференциальных уравнений параболического типа

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа используют группу решений с функцией Mathcad *Pdesolve* (Рис. 12). Эта группа решений состоит из следующих элементов:

1. Ключевое слово *Given*.

2. Уравнение, которое необходимо решить. Оно должно иметь вид: $u_t(x,t) = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$. Для ввода производных в данном случае нельзя использовать обычный оператор производной, а нужно пользоваться нижним индексом, как это обычно делается в литературе для записи уравнений в частных производных. При этом нижний индекс следует вводить не как элемент массива (клавиша <[>), а как текстовый нижний индекс (клавиша <.>).

3. Граничные условия для функции $u(x, t)$. Если уравнение второго порядка по x, то и граничных условий должно быть два.

4. Начальное значение для неизвестной функции — $u(x, 0)$.

5. Функция *pdesolve*(*u*, *x*, *xrange*, *t*, *trange*, *xpts*, *tpts*). Её аргументы имеют следующее назначения:

• *u* — имя функции, относительно которой решается уравнение. Для системы уравнений здесь должен быть вектор имен функций (как в *odesolve*);

• *x* — имя пространственной переменной;

• *xrange* — двухкомпонентный вектор, задающий начало и конец интервала изменения пространственной переменной;

• *t* — имя временной переменной. Основная разница между пространственной и временной переменными в данном случае — это то, что все уравнения могут содержать только первые производные по временной переменной;

• *trange* — еще один двухкомпонентный вектор. Этот вектор задаёт начало и конец временного интервала, на котором решается задача;

• *xpts*, *tpts* — количество точек, разбивающих пространственный и временной интервалы интегрирования, соответственно. Эти два параметра можно не указывать, тогда количество точек будет выбрано автоматически из соображений достаточной точности. Рекомендовано задавать эти параметры во всех задачах, кроме самых простых, поскольку во многих случаях высокая точность вычислений теряет смысл из-за погрешности, вносимой самим методом.

Как пример решения уравнений с помощью функции *pdesolve*, на рис. 12 решена одномерная задача теплопроводности для однородного стержня длиной L с заданными значениями температуры T_1 и T_2 на его концах. Она соответствует следующему уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

На рис. 12 использован оператор глобального присваивания переменной. Эту переменную можно использовать в любой точке документа. Оператор вводится сочетанием клавиш <Shift + ~ >.

На рис. 12 также показан ответ в виде искомой поверхности, заданной с помощью функции Mathcad *CreateMesh*(F, $x0$, $x1$, $y0$, $y1$). Функция имеет следующие параметры:

• F – функция заданной поверхности;

• $x0$, $x1$, $y0$, $y1$ – диапазон изменения переменных.

Для отображения поверхности необходимо нажать кнопку «График поверхности» на панели инструментов «График» . И далее ввести название поверхности в пустое поле.

Given

$u_t(x,t) = K^2 \cdot u_{xx}(x,t)$

$u(0,t) = T_1$

$u(L,t) = T_2$

$u(x,0) = 0$

$T \equiv 2$ Время наблюдения

$L \equiv 5$ Длина стержня

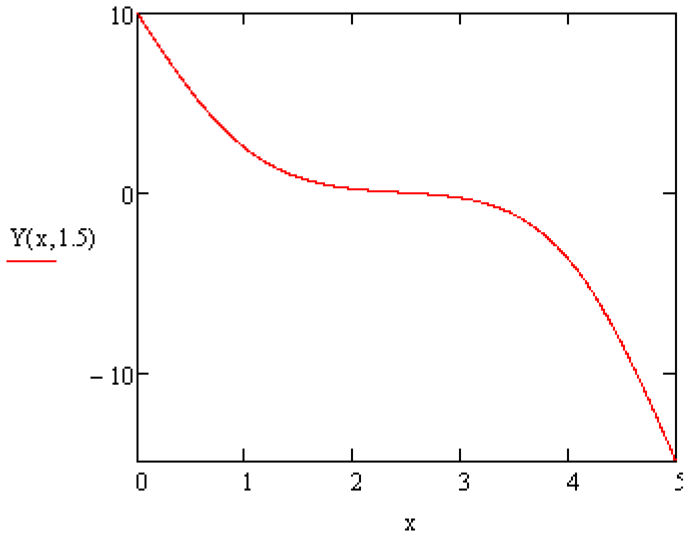
$K \equiv 0.5$ Коэффициент температуропроводности

$T_1 \equiv 10$ Температура на левом конце стержня

$T_2 \equiv -15$ Температура на правом конце стержня

$Y := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 100\right]$

$M := \mathrm{CreateMesh}(Y, 0, L, 0, T)$



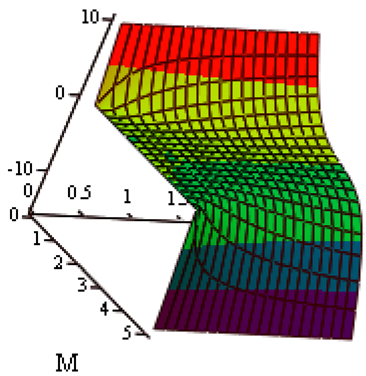


Рис. 12. Пример решения дифференциального уравнения параболического типа

5.2. Решение дифференциальных уравнений гиперболического типа и систем дифференциальных уравнений в частных производных

Функция *pdesolve* также позволяет решать системы ДУ в частных производных первого порядка по времени. Такая возможность может быть использована для решения задач с ДУ гиперболического типа (Рис. 13).

Поскольку уравнения гиперболического типа содержат вторую производную по времени, то они не могут быть напрямую введены для решения функцией *pdesolve*. ДУ гиперболического типа должно быть приведено к системе из двух уравнений первого порядка по времени и далее решено с помощью функции *pdesolve* как система уравнений.

На рис. 13 приведено решение задачи для однородного уравнения колебания струны относительно функции $U(x,t)$, которая описывает смещение точек струны относительно равновесного состояния и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

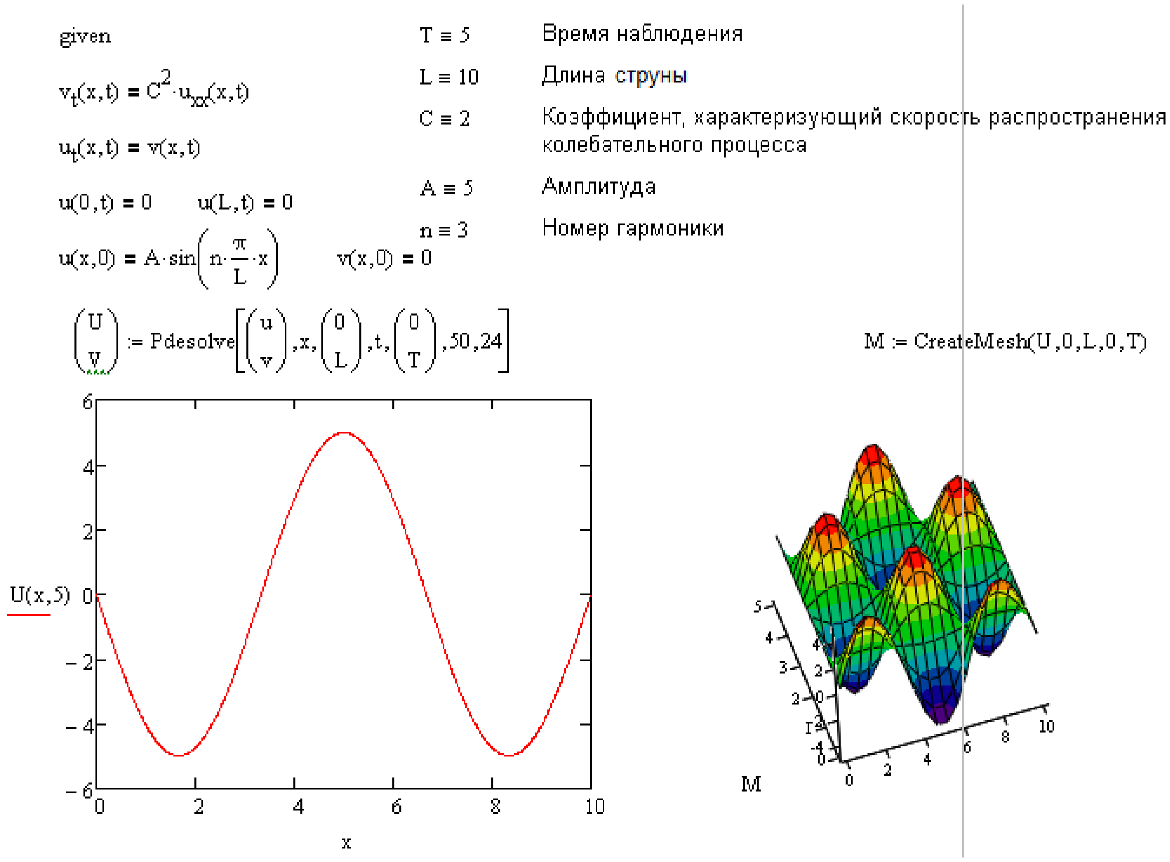


Рис. 13. Пример решения дифференциального уравнения гиперболического типа, представленного системой дифференциальных уравнений

В примере показано, как привести уравнение гиперболического типа к системе из двух уравнений и решить полученную систему для волн отклонения.

5.3. Решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

Описанные выше функции не решают уравнения эллиптического типа. В среде Mathcad имеется возможность решать одно уравнение эллиптического типа, а именно двумерное уравнение Пуассона. Если требуется решить уравнение

Пуассона с нулевыми граничными условиями, то можно воспользоваться функцией Mathcad *multigrid* (Рис. 14).

$R := 32$ Задание размера матрицы

$M_{R,R} := 0$

$M_{11,10} := -25$

Задание элементов матрицы

$M_{12,20} := -10$

$M_{20,20} := 25$

$U := \mathrm{multigrid}(M, 5)$

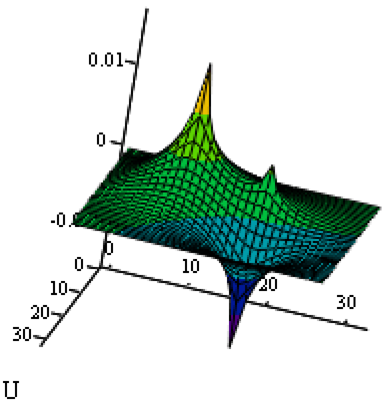


Рис. 14. Решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

Следует отметить, что решение возможно только в квадратной области и только в виде матрицы. То есть решение в среде Mathcad для данного типа уравнений не может быть представлено в виде искомой функции. Это заметно усложняет задачу при решении уравнений применительно к физическим процессам, протекающих в заданной области.

Условия использования функции *multigrid* включают в себя задание матрицы *M* размера 2^n+1, где $n = 1,2,3,\ldots$. Каждый элемент этой матрицы – число, задающее интенсивность источника в определённой точке квадратной области интегрирования.

Функция *multigrid*(*M*, *a*) имеет следующие параметры:

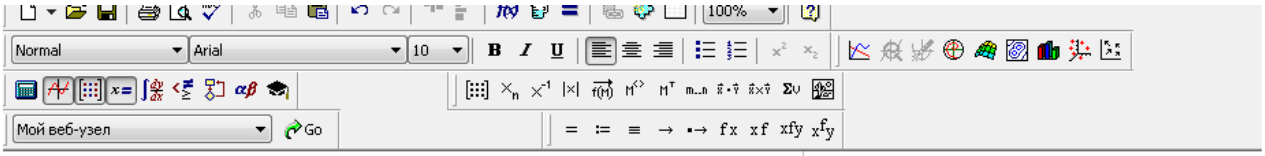
M – матрица заданных значений интенсивности источников в квадратной области интегрирования;

a – количество циклов каждой операции нахождения решения. Для решения большинства задач достаточно, чтобы *a* было равно 2.

Как было сказано выше, результатом функции *multigrid* является матрица того же размера, что и матрица *M*, содержащая решения уравнения во всех точках области. Точность вычислений никак не контролируется и определяется только размерами матрицы *M* – чем больше количество элементов, тем точнее результат.

5.4. Решение уравнения Пуассона с ненулевыми граничными условиями

Решение уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями выполняется с помощью функции Mathcad *relax*, поскольку уравнение решается методом релаксаций (Рис. 15).



$R := 10 \quad i := 0..R \quad j := 0..R$ Задание размерности матриц

$a_{i,j} := 1 \quad b_{i,j} := 1 \quad c_{i,j} := 1$

$d_{i,j} := 1 \quad e_{i,j} := -4$ Задание коэффициентов уравнения Лапласа

$s_{i,j} := 0$ Задание матрицы s, определяющей интесивность источника в заданной области

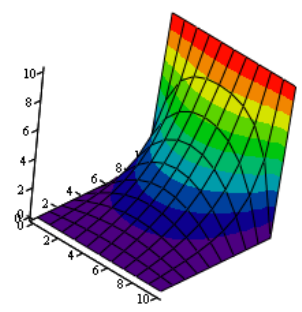
$r := 1 - \frac{\pi}{4R}$ Задание спектрального радиуса Якоби

$U1 \equiv 10$

$f_{0,j} := 0 \quad f_{R,j} := 0$ Задание граничных условий

$f_{i,0} := 0 \quad f_{i,R} := U1$

$U := relax(a,b,c,d,e,s,f,r)$



U =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
1	0	0.111	0.233	0.38	0.57	0.829	1.203	1.788	2.809	4.889	10
2	0	0.21	0.441	0.718	1.071	1.542	2.197	3.141	4.559	6.748	10
3	0	0.288	0.604	0.98	1.453	2.072	2.9	4.02	5.537	7.544	10
4	0	0.337	0.707	1.144	1.69	2.393	3.31	4.503	6.026	7.889	10
5	0	0.354	0.742	1.2	1.77	2.5	3.444	4.656	6.174	7.988	10
6	0	0.337	0.707	1.144	1.69	2.393	3.31	4.503	6.026	7.889	10
7	0	0.288	0.604	0.98	1.453	2.072	2.9	4.02	5.537	7.544	10
8	0	0.21	0.441	0.718	1.071	1.542	2.197	3.141	4.559	6.748	10
9	0	0.111	0.233	0.38	0.57	0.829	1.203	1.788	2.809	4.889	10
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

Рис. 15. Решение уравнения Пуассона с ненулевыми граничными условиями

Для решения задач с помощью данной функции необходимо руководствоваться следующим алгоритмом:

1. Задать пять квадратных матриц a, b, c, d, e, являющихся коэффициентами в формуле приближенного вычисления Лапласиана $(\Delta u)_{i,j} = a_{i,j}\cdot u_{i+1,j} + b_{i,j}\cdot u_{i-1,j} + c_{i,j}\cdot u_{i,j+1} + d_{i,j}\cdot u_{i,j-1} + e_{i,j}\cdot u_{i,j}$. Стандартные значения элементов этих матриц $a_{i,j} = b_{i,j} = c_{i,j} = d_{i,j} = 1$, $e_{i,j} = -4$. Матрицы могут быть любых размеров; единственное условие – они должны быть одинаковыми.

2. Задать матрицу s, определяющую интенсивность источника в заданных точках области. Если все элементы этой матрицы равны 0, то решается уравнение Лапласа.

3. Задать матрицу f. Первый и последний столбцы и первая и последняя строки задают граничные условия для решения уравнения. Значения внутренних элементов матрицы не играют особой роли, а используются как начальное приближение при поиске решения.

4. Задать функцию *relax*(a, b, c, d, e, s, f, r) (Рис. 15), параметрами которой являются все вышеперечисленные матрицы. Здесь r – так называемый спектральный радиус Якоби. Это число в диапазоне от 0 до 1. Если функция *relax* не может решить уравнение, попробуйте уменьшить значение спектрального радиуса.

6. Порядок выполнения работы

6.1. Из таблицы 1, согласно номеру своего варианта, выбрать алгебраическое уравнение и решить его символьным методом и с помощью функции *root*.

Таблица 1.

№ варианта	Алгебраическое уравнение
1	$x^7+5x-7=x^3+5$
2	$x^3+15x^2-2=x+1$
3	$x^2-x^3+5x=3$
4	$x^2-5x+3=10x^3$
5	$x^3+5x-42=3$
6	$x^3+9-x=3x^2$
7	$x^5+10x^4=3x^2-x+1$
8	$x^4+7=x^2+5$
9	$3-x^6+5x-7=0$
10	$x^2+2x=3-x^3$

6.2. Системы алгебраических уравнений из таблицы 2 решить с помощью оператора *Given/Find*. Если *Given/Find* не даёт результатов, решить с помощью оператора *Given/Minerr*.

Таблица 2.

№ варианта	Система алгебраических уравнений
1	$\begin{cases} z = x^3 + y^2 - 1 \\ x + y = 2z - 1 \\ z = x \end{cases}$
2	$\begin{cases} x - y = z^2 + 5 \\ x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z^2 - 3 = 9x^2 + x - y \end{cases}$

3	$\begin{cases} x^2 - y^3 + z = 0 \\ x^4 + y + z = 0 \\ x + y + z^3 = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^3 + 5x = 3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x^2 - 8x = y^2 - 9y \\ y - x = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x^2 + y^3 = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = y^2 + 13z \\ z + 5 = y - 1 + x^2 \\ z^2 - x + 5 = y + 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x + y + 2z^6 = 5 \\ y^2 + 4z^2 = 12 - y \\ 2x^3 + 3y - z^3 = 1 + 5x \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^2 + y^3 - 3x = y + 5y^2 \\ x^2 - y + 5x = 2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x - y = y^3 + 13z^2 \\ z = y - 1z^2 + x^2 \\ z^2 + y + 5y^2 = y + 10x \end{cases}$

6.3. Системы линейных алгебраических уравнений из таблицы 3 решить матричным методом.

Таблица 3.

№ варианта	Система линейных алгебраических уравнений
1	$\begin{cases} x + y = 1 \\ z - 1 = 9x + y \\ z + y + x - 1 = 0 \end{cases}$

2	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x - y - z - a = 3 \\ a + 2z - 4x = 2 \\ z + 3 - a = 4 \\ a = 5 \end{cases}$
4	$\begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 3y - 4x = z \\ z - 3 = y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x - y - 4z - 3a + 3b = 10 \\ 10x - 9y + z + 3b = 11 \\ 15a + 14x = 3 \\ 5a - 16b = 15 \\ 13a - 15z + 5y = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x - z - 3 = y \\ 4x + 3y = 0 \\ z - 3y + x = 3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 3z = 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ z - 5 = 5x - y \\ z + y + x = 2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = 7x - y \\ z + x - 1 = y \end{cases}$

6.4. Решить обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью функций *Odesolve* и *rkfixed*, а также системы линейных дифференциальных уравнений, приведённые в таблице 4. Интервал дифференцирования выбрать произвольно так, чтобы MathCAD нашел решение. Для функции *rkfixed* взять значения *npoints* = 5 и *D*=100.

Таблица 4.

№ вар-та	Уравнение и начальные условия	Система дифференциальных уравнений	Начальные условия
1	$f(x,y)=x^2-tg(y)$; $x(0)=0$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=2y(t)-z(t)+\sin(t)-1 \\ z'(t)=z(t)+y(t)+3\sin(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
2	$f(x,y)=tg(x)-z^2$; $z(0)=0$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)-z(t)+\sin(t) \\ z'(t)=3z(t)+2y(t)-\cos(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
3	$f(x,y)=x^2+\sin(y)$; $x(0)=0$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)+z(t)-\cos(3t) \\ z'(t)=y(t)-z(t)+\sin(3t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
4	$f(x,y)=\cos(x)+y^2$; $x(0)=0$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=z(t)-3y(t)+tg(t) \\ z'(t)=3z(t)+y(t)+tg(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
5	$f(x,y)=\frac{1}{x}+\sin(y)$; $x(0)=0{,}1$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=-y(t)+z(t)+\exp(2t) \\ z'(t)=-z(t)+2y(t)-\exp(t) \end{cases}$	$z(0)=0{,}1$ $y(0)=0$
6	$f(x,y)=\exp(x)-\frac{1}{y}$; $x(0)=0$ $y(0)=6$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)-z(t)+\cos(t) \\ z'(t)=z(t)+y(t)-\cos(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
7	$f(x,y)=x+y^2-tg(y)$ $x(0)=0$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)+z(t)-\sin(3t) \\ z'(t)=y(t)-z(t)+\cos(2t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$

8	$f(x,y)=x^2-y^2-\cos(z)$ $x(0)=-2$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)-5z(t)-sh(3t) \\ z'(t)=y(t)-3z(t)+tg(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
9	$f(x,y)=y^3+\sin(x)$ $x(0)=5$ $y(0)=2$	$\begin{cases} y'(t)=y(t)-sh(3t) \\ z'(t)=y(t)-\dfrac{z(t)}{2}+3\cos(t) \end{cases}$	$z(0)=0$ $y(0)=0$
10	$f(x,y)=y^5+sh(x)$ $x(0)=2$ $y(0)=0$	$\begin{cases} y'(t)=z(t)+y(t)-\sin(3t) \\ z'(t)=y(t)+\cos(3t^2) \end{cases}$	$z(0)=3$ $y(0)=10$

6.5. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с помощью функции *rkfixed* для значений *npoints* = 10 и *D* = 100. Исходные данные взять из таблицы 5, согласно номеру варианта.

Таблица 5.

№ вар-та	Уравнение	Начальные условия
1	$y''=y'+\sin(y)$	$y'(0)=2$ $y(0)=0$
2	$y''=\dfrac{1}{y'}-y^3$	$y'(0)=-20$ $y(0)=-2$
3	$y''=\dfrac{y'}{2}+\exp(y)$	$y'(0)=-2$ $y(0)=1$
4	$y''=y'-\exp(y)$	$y'(0)=2$ $y(0)=2$
5	$y''=y'+\sin(y^2)$	$y'(0)=2$ $y(0)=2$
6	$y''=\dfrac{2}{y'}+tg(y)$	$y'(0)=10$ $y(0)=2$
7	$y''=\dfrac{3}{y'}+tg(y^2)$	$y'(0)=-1$ $y(0)=0$

8	$y''=y'+\cos(y^2)$	$y'(0)=-0.5$ $y(0)=2$
9	$y''=y'-5$	$y'(0)=-10$ $y(0)=1$
10	$y''=y'-\dfrac{y}{3}$	$y'(0)=1$ $y(0)=-1$

6.6. Решить уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности) для пяти различных значение коэффициента температуропроводности K = 0,2; 0,6; 1; 1,5; 2. Остальные исходные данные взять из таблицы 6, согласно номеру варианта.

Таблица 6.

Параметры	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L, м	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
T_1,	10	10	10	-10	-10	-10	10	10	5	-5
T_2,	-10	-5	0	10	5	0	5	-10	10	-10

6.7. Решить уравнение гиперболического типа (уравнение колебания струны) для трёх значений номера гармоник n = 1,2,3. Выбрать T = 5, C = 1, A = 10. Длину струны L выбрать из таблицы 7 согласно номеру варианта.

Таблица 7.

Параметры	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L, м	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5

6.8. Решить уравнения Пуассона с нулевыми и ненулевыми граничными условиями. Данные для расчета взять из таблицы 8 согласно номеру варианта.

Таблица 8.

№ вар-та	С нулевыми граничными условиями		С ненулевыми граничными условиями	
	Размерность матрицы, 2^n	Интенсивность источников	Размерность матрицы	Граничные условия
1	n=3	$M_{5,7}=-10$ $M_{2,3}=20$	10	$U(0,y)=f_1(y)$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_1(y)=\begin{cases}U=5, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$
2	n=4	$M_{12,12}=-15$ $M_{10,14}=10$	15	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)$ $f_2(x)=\begin{cases}U=3, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$ $f_4(x)=\begin{cases}U=-3, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$
3	n=5	$M_{30,10}=8$ $M_{15,15}=-20$	18	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)$ $U(x,R)=f_4(x)$ $f_3(y)=\begin{cases}U=15, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$ $f_4(x)=\begin{cases}U=3, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$

4	*n*=6	$M_{40,30}=18$ $M_{55,30}=9$	20	$U(0,y)=f_1(y)$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_1(y)=\begin{cases}U=25, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$
5	*n*=5	$M_{15,7}=-1$ $M_{2,10}=2$	22	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_3(y)=\begin{cases}U=-5, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$
6	*n*=4	$M_{5,7}=1$ $M_{2,3}=2$	25	$U(0,y)=f_1(y)$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_1(y)=\begin{cases}U=-15, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$
7	*n*=3	$M_{3,7}=5$ $M_{2,5}=-7$	28	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_2(x)=\begin{cases}U=-13, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$
8	*n*=6	$M_{29,27}=-10$ $M_{32,32}=20$	30	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)$ $U(x,R)=f_4(x)$ $f_3(y)=\begin{cases}U=-15, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$ $f_4(x)=\begin{cases}U=3, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$

9	n=4	$M_{10,10}=10$ $M_{2,3}=10$	32	$U(0,y)=f_1(y)\equiv 0$ $U(x,0)=f_2(x)\equiv 0$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)$ $f_4(x)=\begin{cases}U=-14, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$
10	n=5	$M_{23,15}=-10$ $M_{22,23}=10$	35	$U(0,y)=f_1(y)$ $U(x,0)=f_2(x)$ $U(R,y)=f_3(y)\equiv 0$ $U(x,R)=f_4(x)\equiv 0$ $f_1(y)=\begin{cases}U=-5, y\in[0,R]\\ 0, \quad y\notin[0,R]\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}U=-3, x\in[0,R]\\ 0, \quad x\notin[0,R]\end{cases}$

7. Содержание отчёта

7.1. Цель работы.

7.2. Краткие сведения о методах решения уравнений в среде MathCAD.

7.3. Решение алгебраических уравнений и их систем в соответствии с номером варианта, со скриншотами и пояснениями.

7.4. Решение дифференциальных уравнений и их систем в соответствии с номером варианта, со скриншотами с пояснениями.

7.5. Решение параболических, гиперболических уравнений и уравнений Лапласа в соответствии с номером варианта, со скриншотами с пояснениями.

7.5. Общие выводы о проделанной работе.

8. Контрольные вопросы

8.1. Какие требования предъявляются к уравнению при его решении с помощью оператора *solve*?

8.2. В каком виде приводится решение уравнения при использовании оператора *solve*?

8.3. Каков алгоритм решения уравнения с помощью функции *root*?

8.4. В чём недостаток метода решения с помощью функции *root*?

7.5. Каков алгоритм решения систем уравнений с помощью оператора *Given/Find*?

8.6. В каком случае вместо функции *Find* необходимо применить функцию *Minerr*?

8.7. В чём принципиальная разница между функциями *Find* и *Minerr*?

8.8. Какие системы уравнений можно решить с помощью матричного метода?

8.9. Каков алгоритм решения систем уравнений матричным методом?

8.10. Каков алгоритм решения в среде MathCAD линейных обыкновенных дифференциальных уравнений? Какие функции при этом используются?

8.11. В каком виде приводится решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения в среде MathCAD?

8.12. Что меняется в алгоритме при решении системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений?

8.13. Каков алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков?

8.14. Каков алгоритм решения параболических уравнений?

8.15. Каков алгоритм решения гиперболических уравнений?

8.16. В каком виде в среде Mathcad приводится решение уравнения эллиптического типа (уравнение Пуассона)?

8.17. Какие функции позволяют решать уравнения Пуассона с нулевыми и ненулевыми граничными условиями?

8.18. Почему для физических задач встроенные функции MathCAD при решении уравнений эллиптического типа не применяются?

9. Список литературы

1. Гурский Д.А. Вычисления в MathCAD. – Минск: Новое знание, 2003. – 813 с.

2. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб: БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.

3. http://www.exponenta.ru/soft/mathcad/usersguide/chapter16/16_1.asp

4. http://www.dialektika.com/PDF/5-8459-0869-8/part.pdf