

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники"**

**Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОНОВ  
(компьютерный эксперимент)**

**2013**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники"  
(ТУСУР)**

**Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники  
(СВЧ и КР)**

**Утверждаю  
Зав. кафедрой СВЧ и КР  
\_\_\_\_\_ С.Н. Шарангович  
"\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2013**

**Методы математической физики**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОНОВ  
(компьютерный эксперимент)**

Руководство к лабораторной работе для направления подготовки бакалавров  
210700.62 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи

Разработчики:  
профессор каф. СВЧ и КР  
\_\_\_\_\_ Г.Г. Гошин  
аспирант каф. СВЧ и КР  
\_\_\_\_\_ А.Ю. Попков

**2013**

## Содержание

1. Введение.....	4
2. Цель работы .....	6
3. Основные теоретические сведения .....	6
3.1. Исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией. Уравнение Кортевега-де Вриза.....	6
3.2. Распространение сверхкоротких импульсных сигналов в волоконном световоде. Нелинейное уравнение Шрёдингера .....	10
3.3. Флюксоны в распределенных контактах Джозефсона. Синус-уравнение Гордона .....	14
4. Описание эксперимента и методика работы с программой .....	20
5. Задания и рекомендации по проведению эксперимента.....	21
5.1. Нелинейная линия передачи с дисперсией (уравнение Кортевега-де Вриза).....	21
5.2. Сверхкороткий импульс в волоконном световоде (нелинейное уравнение Шрёдингера).....	22
5.3. Флюксон в распределенном контакте Джозефсона (синус-уравнение Гордона .....	23
6. Рекомендации по оформлению отчета.....	24
7. Контрольные вопросы .....	24
8. Рекомендуемая литература .....	25

## 1. Введение

Понятие «уединённая волна», являющееся прототипом солитона, впервые было введено Скоттом Расселом в зарождавшуюся в то время гидродинамику с помощью такого восторженного описания: «Я наблюдал за движением баржи, которую с большой скоростью тянула по узкому каналу пара лошадей, как вдруг баржа резко остановилась. Но отнюдь не остановилась приведенная ею в движение масса воды в канале. Неистово бурля, она стала собираться вокруг носовой части судна, а затем вдруг, покинув его, с огромной скоростью покатила вперед, приняв форму обособленного крупного возвышения – округлого, гладкого и резко очерченного скопления воды, которое продолжило свой путь по каналу без сколько-нибудь заметного изменения формы или уменьшения скорости. Я поскакал за ним верхом и когда нагнал его, оно еще катило вперед со скоростью восьми-девяти миль в час, сохраняя свою первоначальную форму в виде фигуры футов тридцати длиной и один – полтора фута высотой. Высота скопления постепенно уменьшалась и, проскакав за ним одну – две мили, я потерял его в извилах канала. Таким в августе месяце 1834 года оказалась моя первая встреча со столь своеобразным и прекрасным явлением...» [1]. В 1895г. Кортевег и де Вриз вывели уравнения волн на мелкой воде с учетом нелинейных и дисперсионных эффектов, получив его решение в виде уединённой волны.

Солитон – это однополярный спектрально-ограниченный импульс, распространяющийся в нелинейной среде с дисперсией и характеризующийся постоянной скоростью распространения и неизменной формой. Дисперсия и нелинейность изменяют огибающую волнового пакета или форму импульса. Причем эти изменения тем больше, чем меньше длительность импульса. В средах с дисперсией ширина импульса зависит от частоты. Дисперсия приводит к расширению импульса, а нелинейность – к его сжатию. При определенных условиях возможна компенсация этих двух противоположных тенденций, в результате которой рождаются солитоны.

Много предстоит еще сделать в области использования солитонов, т.е. в области разработки устройств, использующих солитоны. Особенно актуальны эти

вопросы для волоконно-оптических линий связи (ВОЛС). Так как длительность солитона меньше длительности входного импульса, а скорость распространения его больше, то использование солитонных режимов обеспечивает повышение быстродействия и расширение полосы пропускания линий передач и устройств, выполненных на их основе [2], [3]. Перспективно применение солитонов в создании сверхбыстродействующих систем обработки информации.

Наряду с теоретическими работами проводились также экспериментальные исследования солитонов в различных системах и средах. Однако, эти эксперименты довольно сложны и часто требуют дорогостоящего оборудования. Поэтому с развитием вычислительной техники стали предприниматься попытки проводить вычислительные эксперименты. В 1990г. в Томском государственном университете была поставлена лабораторная работа по исследованию солитонов с использованием диалоговых вычислительных комплексов (ДВК) [4]. Стремительная компьютеризация за прошедшее с тех пор время дала возможность поставить вычислительный эксперимент с использованием персональных компьютеров (ПК) и разработанного для них программного обеспечения.

Впервые данная работа в ТУСУР была поставлена в 2000г. и тогда же были составлены к ней методические указания. В новое издание методических указаний внесены исправления и уточнения, учитывающие накопленный опыт проведения лабораторной работы.

## 2. Цель работы

Целью работы является проведение компьютерного эксперимента по исследованию солитонов в трех различных системах: импульс напряжения в радиотехнических цепях с нелинейными реактивными элементами; сверхкороткий импульс в волоконном световоде; квант магнитного потока в распределенном контакте Джозефсона.

## 3. Основные теоретические сведения

### 3.1. Исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией. Уравнение Кортевега-де Вриза

Нелинейная линия передачи с дисперсией – физическая система, процессы в которой удовлетворяют уравнению Кортевега-де Вриза [5]

$$U_t + \beta U_{xxx} + \gamma U U_x = 0, \quad (1)$$

где  $\beta = const$ ,  $\gamma = const$  – коэффициенты уравнения.

Реальные линии передачи, как правило, являются нелинейными и имеют дисперсию. Нелинейность линии обусловлена зависимостью индуктивности отрезка линии от тока и емкости от напряжения. Дисперсия в линии связана с зависимостью указанных параметров от частоты. Эквивалентные схемы таких линий показаны на рис. 1.

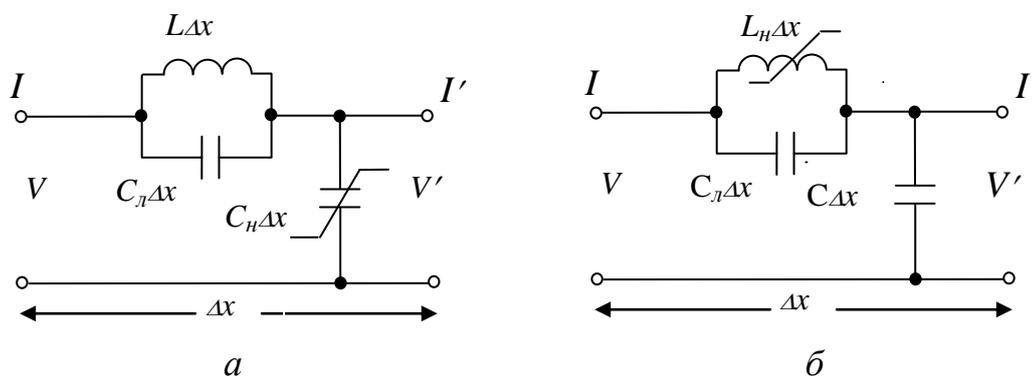


Рис. 1. Эквивалентные схемы звена нелинейной линии передачи с дисперсией: *а* – с нелинейной емкостью; *б* – с нелинейной индуктивностью.

Нелинейными элементами  $C_n$  и  $L_n$  служат либо диоды, емкость которых является нелинейной функцией напряжения смещения (варикапы), либо катушки индуктивности с насыщающимися ферромагнитными сердечниками, индуктивность которых является нелинейной функцией тока. Конденсатор  $C_n$  добавлен для увеличения дисперсии сверх той, которая обусловлена дискретностью параметров линии и межвитковыми емкостями. Благодаря ему уменьшается требуемое число звеньев [5]. В длинноволновом приближении  $(\Delta x/\lambda) \rightarrow 0$ , где  $\Delta x$  – длина звена, цепочка таких звеньев описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial Q(V)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + L \cdot \frac{\partial I'}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{1}{C_n} (I - I') &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти уравнения описывают изменение тока в линии, обусловленное изменением заряда  $Q(V)$  на нелинейном конденсаторе  $C_n$ , а также изменение напряжения  $V$ , вызываемое изменениями тока  $(I - I')$  в индуктивности  $L$  и линейном конденсаторе  $C_n$ . Из системы (2) можно получить одно уравнение для напряжения

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{LC_n} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{C_n} \cdot \frac{\partial^2 Q(V)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

которое приводится к уравнению Кортевега-де Вриза. С этой целью вводятся новые безразмерные переменные  $\xi$  и  $\tau$ , а заряд  $Q(V)$  аппроксимируется как

$$Q(V) \approx C_0 V - C_n V^2 \quad (4)$$

где  $C_0$  – линейная составляющая нелинейной емкости  $C_n$  при отсутствии на ней напряжения смещения.

Если обозначить  $V \cong \varepsilon U$ , где  $\varepsilon$  – малый безразмерный параметр, то для напряжения  $U$  получается уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{C_n}{2C_0} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \frac{C_n}{C_0} \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (5)$$

Это и есть уравнение Кортевега-де Вриза.

Солитонное решение уравнения (5) в переменных  $x$  и  $t$  имеет вид

$$U_c = U_{\max} \cdot \operatorname{sch}^2 \left\{ \sqrt{\frac{C_H \cdot U_{\max}}{6C_L}} \cdot \left[ x - \left( 1 + \frac{C_H U_{\max}}{3C_0} \right) \cdot \frac{t}{\sqrt{LC_0}} \right] \right\} \quad (6)$$

где  $U_{\max}$  – максимальная амплитуда солитона.

Нетрудно заметить, что в данном случае скорость солитона равна

$$V_c = \left( 1 + \frac{C_H U_{\max}}{3C_0} \right) \cdot \frac{t}{\sqrt{LC_0}}, \quad (7)$$

в то время как у обычного импульса она меньше и составляет  $V_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ . Из (7) видно, что скорость солитона возрастает с увеличением его амплитуды. Если нелинейность отсутствует ( $C_H = 0$ ), то солитона не будет.

В рассмотренной математической модели нелинейной линии передачи с дисперсией пренебрегают потерями и зависимостью заряда от напряжения на нелинейном конденсаторе, в соответствии с (4), в степени третьей и выше. Кроме того, предполагается, что длина волны значительно больше размеров звена линии передачи.

При малых амплитудах стационарная волна для уравнения Кортевега-де Вриза – это гармоническая волна (рис.2, а) [6]. Затем с увеличением амплитуды соответствующая стационарная волна остается периодической, но уже испытывает на себе влияние нелинейных эффектов (рис.2, б). И, наконец, на рис. 2, в видим уединённую волну или солитон.

Теперь остановимся на взаимодействии двух солитонов (рис. 3). Предположим, что в среде распространяются две стационарные уединенные волны с различными амплитудами. Если первый солитон с большей амплитудой в начальный момент времени расположен позади второго солитона с меньшей амплитудой, то, обладая большей скоростью распространения, первый солитон догонит второй и начнется их взаимодействие (рис. 3, а). При взаимодействии образуется возмущение, но оно не является линейной суперпозицией двух солитонов. Затем это возмущение распадается на два солитона, в точности совпадающих с исходными. Таким образом, несмотря на нелинейность процесса, происходит как бы независимое

прохождение одного солитона через другой. Однако такое взаимодействие имеет место только при значительной разнице в амплитудах солитонов.

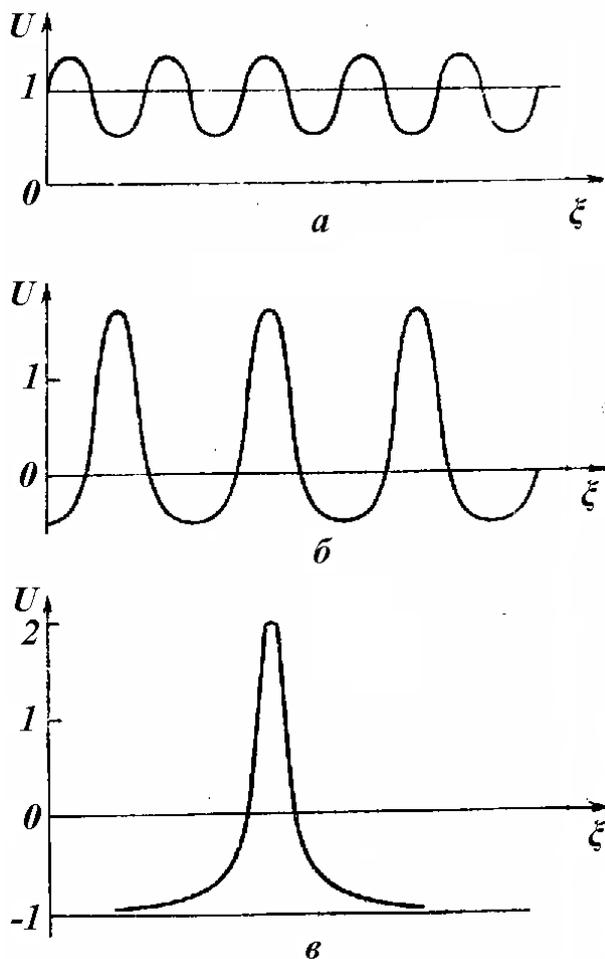


Рис. 2. Форма стационарных волн различной амплитуды для уравнения Кортевега-де Вриза.

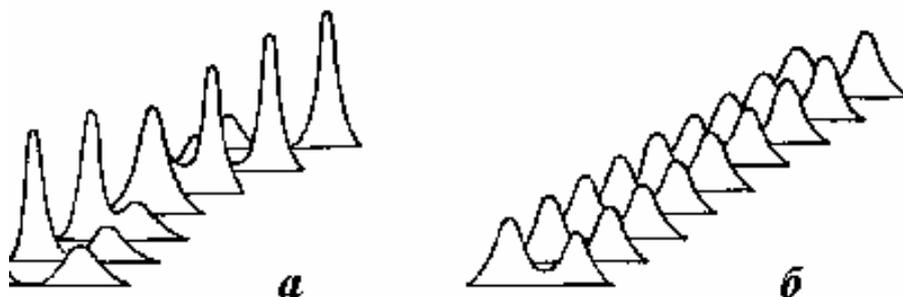


Рис. 3. Процесс столкновения двух солитонов с сильно различающимися (*a*) и близкими по значению (*б*) амплитудами

Если амплитуды сталкивающихся солитонов близки (рис. 3, б), их полного перекрытия не происходит. Солитоны сближаются, но так, что связанное состояние имеет два выраженных максимума. Затем в течение некоторого времени относительное расположение максимумов не изменяется, но изменяется их значение: меньший максимум вырастает до большего. При этом больший, напротив, достигает значение меньшего, после чего солитоны расходятся. Такой процесс напоминает упругое столкновение двух частиц одинаковой массы, при котором частицы обмениваются скоростями.

### 3.2. Распространение сверхкоротких импульсных сигналов в волокноном световоде. Нелинейное уравнение Шредингера

Оптическое волокно или волоконный световод – *нелинейная диспергирующая* среда, удобная для изучения нестационарных волновых явлений, в частности, оптических солитонов.

В случае слабых сигналов оптическое волокно можно рассматривать как линейную диспергирующую среду. Дисперсия приводит к уширению импульсов, которое описывается параметром [1]

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{вых}^2 - \tau_{вх}^2},$$

где  $\tau_{вых}$  и  $\tau_{вх}$  – длительности импульсов на выходе и входе в световод по уровню 0,5 от максимального значения. Уширение, в свою очередь, ограничивает полосу частот  $\Delta f$  и скорость передачи информации. Эти искажения принято относить к участку световода, длина которого равна 1 км. Одномодовые волокна, диаметр сердцевины которых  $d = 5...10$  мкм, имеют полосу пропускания  $\Delta f = 1...100$  ГГц; многомодовые с градиентным профилем и  $d \approx 50$  мкм имеют  $\Delta f = 100...1000$  МГц; многомодовые со ступенчатым профилем и  $d \approx 80...400$  мкм имеют  $\Delta f = 10...100$  МГц. Хорошо известна простая оценка

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau_y}.$$

Например,  $\tau_y = 20$  нс/км соответствует  $\Delta f = 50$  МГц.

Существенное ограничение полосы частот в многомодовых оптических волокнах по сравнению с одномодовыми связано с межмодовой дисперсией (взаимодействием мод).

В одномодовых волокнах реализуется режим распространения сверхкоротких импульсов, аналогичный распространению плоских волн в неограниченной диспергирующей среде [2]. Дисперсия обусловлена зависимостью групповой скорости  $V_{gp}$  распространения импульса от частоты  $\omega$ , что, в свою очередь, связано с частотной зависимостью постоянной распространения  $k(\omega)$  или частотной зависимостью показателя преломления среды  $n(\omega)$ . Часто эта зависимость аппроксимируется полиномом порядка не выше второго

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + K_1 \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot (\omega - \omega_0)^2, \quad (8)$$

где  $K_1 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{V_{gp}} \Big|_{\omega_0}$ ,  $V_{gp}$  – групповая скорость;

$K_2 = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = -\frac{1}{V_{gp}} \cdot \left. \frac{\partial V_{gp}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$  – дисперсия групповой скорости;

$\omega_0$  – средняя несущая частота импульса.

При  $K_2 > 0$  дисперсию называют *нормальной*, при  $K_2 < 0$  – *аномальной*.

Дисперсию характеризуют параметром

$$L_D = \tau_{ex} / |K_2|, \quad (9)$$

где  $L_D$  – дисперсионная длина, при распространении на которую интенсивность импульса снижается в  $e$  раз за счет уширения или расплывания пакета.

В случае сильных сигналов оптическое волокно является нелинейной диспергирующей средой, показатель преломления которой зависит от амплитуды волны  $|U|$  или ее интенсивности  $I$ , т.е.  $n = n(\omega, I)$ . Для *слабонелинейной* среды действительная часть показателя преломления может быть представлена в виде

$$n \approx n_0 + \frac{1}{2} n_2 |U|^2 = n_0 + \tilde{n}_2 I, \quad (10)$$

где  $\tilde{n}_2 = \frac{n_2 |U^2|}{2I}$  имеет размерность  $m^2/Vm$ ,

$n_0$  – линейная составляющая показателя преломления;

$n_2 > 0$  – коэффициент, определяющий величину нелинейной добавки.

Нелинейность характеризуют параметром

$$L_n = \frac{\tau_{ex}}{\sqrt{k_0 |K_2 n_2 I_0|}}, \quad (11)$$

где  $L_n$  – нелинейная длина, определяемая по аналогии с дисперсионной длиной;

$I_0$  – пиковое значение интенсивности при  $\omega = \omega_0$ ;  $k_0 = k(\omega_0)$ .

В оптических волокнах аномальная дисперсия групповой скорости ( $K_2 < 0$ ) наблюдается в спектральном диапазоне  $\lambda \geq 1,3 \text{ мкм}$ , в котором при определенном уровне входной мощности совместное проявление дисперсии и нелинейности приводит к стабилизации длительности импульса, т.е. к образованию солитона.

Математически это выражается соотношением

$$L_\partial = L_n, \quad (12)$$

откуда следует выражение для мощности солитона

$$P_c = \frac{1}{2} I_0 S_{\text{эф}} = \frac{|K_2|}{k_0 n_2 \tau_{ex}^2} \cdot S_{\text{эф}}, \quad (13)$$

где  $S_{\text{эф}}$  – эффективная площадь моды.

Для одномодового световода  $S_{\text{эф}} \leq S$ ,  $S$  – площадь сердцевины.

Солитон образуется, если мощность сигнала на входе в световод  $P_{\text{вх}}$  равна мощности солитона  $P_c$ . При  $P_{\text{вх}} > P_c$  будет развиваться процесс самосжатия импульса, при  $P_{\text{вх}} < P_c$  будет наблюдаться уширение импульса.

Оценим мощность солитона, подставив в формулу (13) типичные значения параметров:  $\lambda_0 \approx 1,5 \text{ мкм}$ ,  $\tau_{ex} \approx 3...4 \text{ пс}$ ,  $S_{\text{эф}} \approx 100 \text{ мкм}^2$ ,  $\tilde{n}_2 \approx 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 / \text{Вт}$ ,  $K_2 \approx -15 \lambda_0^2 / 2\pi c$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . В результате получим  $P_c \approx 1 \text{ Вт}$ . Таким

образом, для возбуждения солитона лазер должен иметь мощность не менее  $1 \text{ Вт}$ .

Процесс распространения сверхкоротких импульсов в световоде для случая, когда несущая частота  $\omega_0$  находится вдали от резонансных частот  $\omega_{рез}$  среды (оптического волокна) и поглощение в среде несущественно, описывается нелинейным дифференциальным уравнением Шредингера

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - i \frac{K_2}{|K_2|} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + i \frac{k_0 n_2 \tau_{ex}^2}{2|K_2| n_0} \cdot |U|^2 U = 0, \quad (14)$$

где  $U(\xi, \tau)$  – амплитуда импульса напряжения;

$$\tau = \frac{(t - x/V_{gp})}{\tau_{ex}} \quad \text{– безразмерное время;}$$

$$\xi = x/L_0 \quad \text{– безразмерное расстояние;}$$

$t$  – время;  $x$  – координата вдоль оси световода.

Уравнение (14) имеет солитонное решение вида

$$U_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{2n_0}{k_0 n_2 |K_2|}} \cdot \chi \text{sch}(\chi \tau) \cdot \exp\left(\frac{-i \chi^2 \xi}{2}\right). \quad (15)$$

Параметр  $\chi$  есть отношение длительности  $\tau_{a\delta}$  входного импульса к длительности солитона  $\tau_c$  и называется форм-фактором. Из (15) следует, что параметр  $\chi$  определяет не только длительность, но и амплитуду солитона.

В рассмотренной математической модели оптического солитона пренебрегают потерями на излучение, членами третьего и более высоких порядков малости в разложении волнового числа по степеням  $(\omega - \omega_0)$ , дисперсией нелинейности, инерционностью нелинейного отклика. Кроме того, волоконный световод, в котором распространяется оптический солитон, предполагается одномодовым, что позволяет пренебречь межмодовой дисперсией, и не имеет потерь.

### 3.3. Флюксоны в распределенных контактах Джозефсона. Синус-уравнение Гордона

Распределенный контакт Джозефсона представляет собой одну из многих физических систем, описываемых синус-уравнением Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi, \quad (16)$$

в которой возможно существование солитонов [5]. В данном случае физическим объектом, соответствующим общему понятию солитона, является квант магнитного потока или флюксон. Флюксоны устойчивы, их можно хранить, перемещать в нужном направлении и приводить во взаимодействие с электронными приборами, благодаря чему флюксон в принципе может служить битом в электронных системах обработки информации. А поскольку подобные операции можно проводить с исключительно высокими скоростями и с чрезвычайно малыми затратами энергии, такая мысль представляется весьма заманчивой с технической стороны. Кроме того, движение флюксонов в контактах Джозефсона сопровождается СВЧ излучением, и это позволяет использовать такие контакты в генераторах и детекторах.

В своем простейшем виде контакт Джозефсона – это сандвич, составленный из двух слоев сверхпроводящего металла, разделенных тонким диэлектрическим барьером (рис. 4). Когда оба металла находятся в нормальном состоянии, вольтамперная характеристика всего устройства имеет примерно омический вид (пунктирная кривая на рис. 5). Если же оба металла являются сверхпроводниками, то возникают два туннельных тока, которые приводят к появлению на вольтамперной кривой двух независимых ветвей (сплошная кривая на рис. 5).

Такие системы изготавливаются методом вакуумного напыления, который применяется при изготовлении пленочных интегральных схем. Толщина сверхпроводящих слоев обычно равна тысячам ангстрем, толщина диэлектрического слоя порядка  $25 \cdot 10^{-10}$  м, а поперечные размеры контакта, изготовленного обычным фотолитографическим методом, могут составлять от нескольких микрометров до десятков сантиметров.

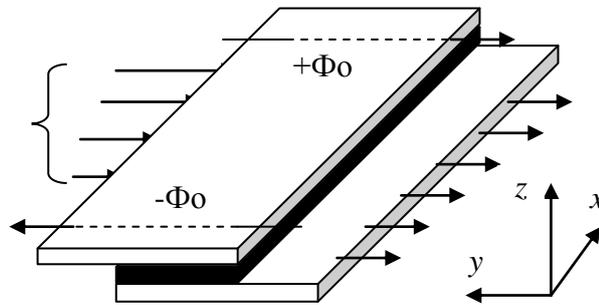


Рис. 4. Туннельный контакт Джозефсона

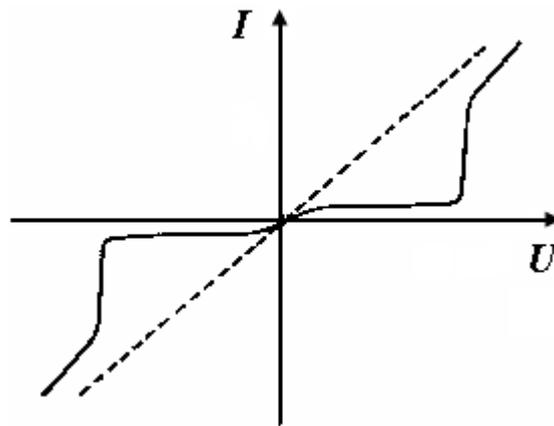


Рис. 5. Вольтамперная характеристика туннельного перехода

В контактах Джозефсона с малыми поперечными размерами и однородным туннельным барьером электрические величины в первом приближении подчиняются уравнениям [6]

$$I(x, t) = I_0 \sin \varphi, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\phi_0} U(x, t), \quad (18)$$

где  $I$  – туннельный сверхпроводящий ток через изолирующий барьер;

$I_0$  – параметр, называемый критическим постоянным током Джозефсона, который зависит от используемых материалов, геометрии контакта и температуры;

$\varphi$  – относительная разность фаз между макроскопическими квантовыми волновыми функциями двух сверхпроводников;

$U$  – разность потенциалов на контакте;

$\phi_0 = \frac{h}{2e}$  – квант магнитного потока ( $h$  – постоянная Планка,  $e$  – заряд электрона).

В практической системе единиц величина  $\phi_0$  примерно равна  $2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб} \cdot \text{с}$ , что дает представление о порядках величин, характерных для систем обработки информации на флюксонах.

Известны два важных свойства контактов Джозефсона:

1. Ток через контакт возможен даже в отсутствии напряжения (равенство  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  означает  $\varphi = \text{const}$ , но не обязательно  $\varphi = 0$ ).

2. При постоянном напряжении возникает переменный ток с частотой 484 МГц. Это так называемый эффект Джозефсона.

Более интересной конфигурацией является та, в которой, как показано на рис. 4, протяженность контакта в направлении  $y$  мала, а в направлении  $x$  велика. Чтобы описать электрические свойства такого распределенного одномерного контакта, необходимо объединить уравнения (17) и (18) с уравнениями Максвелла, описывающими сверхпроводящий полосковый резонатор. Эквивалентная схема контакта приведена на рис. 6.

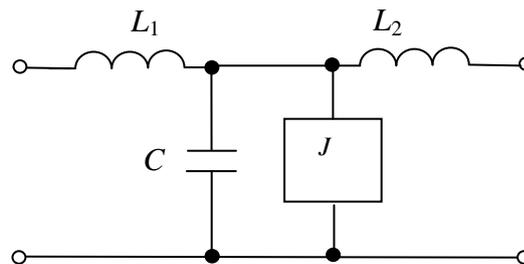


Рис. 6. Эквивалентная схема распределенного контакта Джозефсона

Погонные индуктивность  $L$  и емкость  $C$  даются формулами

$$L = \frac{\mu_0}{a} \cdot (d + \delta_1 + \delta_2) , \quad (19)$$

$$C = \bar{\epsilon} \epsilon_0 \frac{a}{d} , \quad (20)$$

где  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  – магнитная и диэлектрическая проницаемости свободного пространства;

$\bar{\varepsilon}$  – относительная диэлектрическая проницаемость барьерного слоя;

$a$  – ширина контакта в направлении оси  $y$ ;

$d$  – толщина барьерного слоя в направлении оси  $z$ ;

$\delta_{1,2}$  – глубины проникновения тока (толщины скин-слоя) для двух сверхпроводников.

Элемент  $J$  описывается уравнениями (17) и (18), в которых  $I$  и  $I_0$  имеют размерность тока на единицу длины. В этой модели предполагается, что толщина каждого сверхпроводника велика по сравнению с соответствующей глубиной проникновения тока; характерные масштабы изменения физических и электромагнитных параметров таковы, что краевыми (граничными) эффектами можно пренебречь; можно пренебречь всеми видами диссипации энергии.

Глубина проникновения тока – величина обычно порядка  $500\text{Å}$ . Так как толщина барьерного слоя  $d$  в типичных контактах равна примерно  $25\text{Å}$ , из (19) и (20) следует, что магнитная толщина полоскового контакта Джозефсона гораздо больше его электрической толщины. Кроме того, так как скорость распространения электромагнитных волн в такой полосковой линии равна  $(LC)^{-1/2}$ , это устройство можно считать замедляющей системой.

Уравнения для эквивалентной схемы (рис. 6) можно получить, записав законы Кирхгофа:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - I_0 \sin \varphi, \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\phi_0} U. \quad (23)$$

Путем элементарных преобразований эти уравнения можно свести к одному

$$\frac{\phi_0}{2\pi L} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{C\phi_0}{2\pi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = I_0 \sin \varphi. \quad (24)$$

Если в качестве масштаба длины взять джозефсоновскую глубину проникновения тока  $\lambda_j = \sqrt{\phi_0/2\pi LI_0}$ , а в качестве масштаба времени – обратную плазменную частоту Джозефсона  $\omega_j = \sqrt{2\pi I_0/C\phi_0}$ , то уравнение (24) в безразмерных величинах примет вид синус-уравнения Гордона (20). Поскольку из уравнений (21) – (23) следует, что напряжение  $U$  на барьере пропорционально производной от  $\varphi$  по  $t$ , а продольный ток  $I$  – производной от  $\varphi$  по  $x$ , то ясно, что динамика электрических величин, характеризующих контакт Джозефсона, полностью определяется функцией  $\varphi$ .

Простые решения уравнения (16) могут быть получены, если искать их в виде бегущих волн неизменной формы, распространяющихся с постоянной скоростью. С математической точки зрения это эквивалентно предположению, что зависимость  $\varphi$  от  $x$  и  $t$  имеет вид  $\varphi = \varphi(x - u \cdot t) \equiv \varphi(\xi)$ , где  $u$  – скорость распространения, умноженная на  $(LC)^{-1/2}$ . Такие решения могут существовать только в бесконечно протяженной линии. Подставив это выражение для  $\varphi$  в (16), можно получить уравнение, по форме совпадающее с уравнением обычного плоского маятника

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{\sin\varphi}{1-u^2}. \quad (25)$$

Это уравнение имеет решения двух типов: плазменные волны, в механическом аналоге соответствующие обычным колебаниям маятника, и флюксоновские волны, отвечающие его вращательному движению.

1. *Плазменные волны.* При  $u^2 > 1$  уравнение (25) имеет решение

$$\varphi = 2 \arcsin \left( R \cdot \operatorname{sn} \left[ \frac{\xi - \xi_0}{(u^2 - 1)^{1/2}}; R \right] \right), \quad (26)$$

где  $\operatorname{sn}$  – эллиптическая функция Якоби с модулем  $R$ ,  $0 < R < 1$ ;  $\xi_0$  – произвольная постоянная.

Для напряжения, деленного на  $\omega_j\phi_0$ , уравнение (23) переписывается в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi U. \quad (27)$$

Из него нетрудно найти безразмерное напряжение, соответствующее решению (26),

$$U = -\frac{u}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{uR}{\pi(u^2-1)^{1/2}} \cdot \operatorname{cn} \left[ \frac{\xi - \xi_0}{(u^2-1)^{1/2}}; R \right]. \quad (28)$$

Это решение описывает периодическую волну с нулевым средним значением.

2. *Флюксоновские волны.* При  $u^2 < 1$  уравнение (23) имеет решение вида

$$\varphi = \arcsin \left\{ \pm \operatorname{cn} \left[ -\frac{\xi - \xi_0}{R \cdot (1-u^2)^{1/2}}; R \right] \right\}, \quad (29)$$

в котором, как и раньше,  $\xi_0$  – произвольная постоянная,  $0 < R < 1$ , а знаки плюс и минус соответствуют флюксону и антифлюксону.

Эти решения представляют собой монотонно убывающие либо монотонно возрастающие, в зависимости от выбора знака, функции переменной  $\xi$ . Из уравнения (27) следует, что безразмерное напряжение, соответствующее решению (29), равно

$$U = \pm \frac{u}{\pi R \cdot (1-u^2)^{1/2}} \cdot \operatorname{cn} \left[ \frac{\xi - \xi_0}{R \cdot (1-u^2)^{1/2}}; R \right]. \quad (30)$$

Возвращаясь к размерным величинам, получаем, что каждый положительный (отрицательный) импульс напряжения содержит ровно один положительный (отрицательный) квант потока  $\phi_0$ .

Особое решение уравнения (25) получается при переходе к пределу  $R \rightarrow 1$  в формулах (29) и (30):

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[ \pm \frac{\xi - \xi_0}{(1-u^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (31)$$

$$U_c = \pm \frac{u}{\pi(1-u^2)^{1/2}} \cdot \operatorname{sch} \left[ \frac{\xi - \xi_0}{(1-u^2)^{1/2}} \right]. \quad (32)$$

Это решение, соответствующее распространению по линии одиночного изолированного флюксона (антифлюксона), и есть классическое солитонное решение синус-уравнения Гордона.

#### 4. Описание эксперимента и методика работы с программой

Последовательность проведения эксперимента заключается в следующем: сначала задаются исходные параметры солитонов и интервал значений пространственной переменной отдельно для каждой из трех моделей физических сред. Наблюдаем изменение формы солитона в зависимости от изменения параметров среды. Наряду с односолитонными решениями рассматриваются двухсолитонные решения уравнений Кортевега – де Вриза и нелинейного уравнения Шрёдингера. Задаем параметры второго солитона, отличающимися от параметров первого, и наблюдаем взаимодействие солитонов.

Запуск программы осуществляется путем запуска на исполнение файла `soliton.exe`, в результате чего на экране появляется главное окно программы "Демонстрация солитонов". Программа содержит три пункта меню: "Главная", "Настройки" и "Помощь". Панель быстрых кнопок дублирует пункты меню "Главная".

В меню "Главная" содержатся опции: "Пуск", "Стоп", "Печать". Опция "Пуск" приводит к появлению диалогового окна, которое предоставляет пользователю выбор графика. После нажатия кнопки "ОК" активизируется на рабочем окне закладка "Работа" и демонстрируется движение солитонов. Опция "Стоп" останавливает движение. Опция "Печать" печатает активную закладку. Если пользователь пытается печатать закладку "Работа" во время движения, то появляется сообщение о невозможности печати до остановки. "Выход" выгружает из памяти приложение.

В меню "Настройки" содержатся опции:

"График 1" (уравнение Кортевега – де Вриза);

"График 2" (синус-уравнение Гордона);

"График 3" (нелинейное уравнение Шрёдингера).

"График 1". Выбор этой опции приводит к появлению диалогового окна "Настройки", где по умолчанию указаны первоначальные параметры солитонов. В нем пользователь может изменять параметры. В случае если пользователь вводит параметр, не позволяющий нормально произвести математические вычисления, то программа предупредит об этом и исправит значение параметра на то, которое предусмотрено по умолчанию. Неправильный ввод числа программой не обрабатывается. При нажатии кнопки "ОК" окно исчезает и мы видим изменённые графики. При использовании кнопки "Применить" окно не исчезает. Можно для удобства перемещать его мышью по полю. Это удобно при быстром просмотре графиков. Кнопка "По умолчанию" возвращает прежние параметры. Прекратить работу с данным окном можно с помощью кнопки "Заккрыть".

"График 2". Выбор этой опции приводит к появлению диалогового окна "Настройки". Здесь возможны два варианта: выбор параметра  $u > 1$  – наблюдаем периодическую волну, выбор параметра  $u < 1$  – наблюдаем солитонный режим.

"График 3". Выбор этой опции в пояснениях уже не нуждается.

В меню "Помощь" содержатся краткие сведения о солитонах.

## 5. Задания и рекомендации по проведению эксперимента

### 5.1. Нелинейная линия передачи с дисперсией (уравнение Кортевега-де Вриза)

- При исследовании солитона в длинной линии изучить влияние каждого из параметров  $C_n$ ,  $C_l$  ( $C_s$ ),  $C_0$ ,  $L$  на ширину солитона. В скобках, здесь и далее, приведены обозначения, используемые в меню "Настройки".

Допустимые границы изменения параметров:

- нелинейная ёмкость линии  $C_n$  от  $7E-10$  Ф до  $7E-4$  Ф;

- линейная ёмкость линии  $C_l$  от  $2,2E-10$  Ф до  $2,2E-7$  Ф;

- на изменение других параметров ограничений нет.

Чтобы работать с одиночным солитоном, необходимо задать  $U_{c1} = U_{c2} = 2,0$ . В программе амплитуды обозначены через  $V_0$ .

- Выбрать параметры цепи, при которых ширина солитона по уровню 0,5 принимала бы заданное в табл. 1 значение. Привести значения выбранных параметров цепи.

Таблица 1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ширина	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0

- Построить зависимость ширины заданного солитона от его амплитуды  $U_{c1} = 1 \dots 10$  (через 1,0).
- Построить зависимость скорости  $V_c$  исследуемого солитона от его амплитуды  $U_{c1} = 1 \dots 10$  (через 1,0), используя формулу (7) и Mathcad.
- Визуально определить координату взаимодействия (координату совпадения максимумов амплитуд) двух солитонов с заданной в табл.2 амплитудой  $U_{c1}$  и для  $U_{c2} = 1,0$ . Скорость перемещения солитонов можно уменьшать, увеличивая пределы изменения переменной. Для получения правильной формы солитона приращение следует уменьшить до 0,1. Стоп-кадр вставить в отчёт.

Таблица 2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_{c1}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10

## 5.2. Сверхкороткий импульс в волоконном световоде (нелинейное уравнение Шрёдингера)

- При исследовании сверхкороткого импульса в волоконном световоде изучить влияние форм-фактора  $\chi$  (в программе  $H$ ) и нормированного времени  $\tau$  (в программе  $T$ ) на амплитуду и скорость движения солитонов.

- Построить зависимость ширины солитона от параметра  $T = 1 \dots 10$  (через 1,0) для заданного в табл. 3 значения форм-фактора.

Таблица 3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi$	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Визуально определить координату взаимодействия двух солитонов с заданными в табл. 4 амплитудами  $U_{c1}$  для  $U_{c2} = 1,0$ . Стоп-кадр вставить в отчет.

Таблица 4

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_{c1}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2

### 5.3. Флюксон в распределенном контакте Джозефсона (синус-уравнение Гордона)

- Пронаблюдать поведение флюксона в распределенном контакте Джозефсона. Возможны два варианта: скорость распространения  $u > 1$  и  $0 < u < 1$ . Увидеть и проанализировать разницу. Соответствующие варианту значения  $u$  взять из табл. 5.

Таблица 5

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u < 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$u > 1$	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1

- Для заданной в табл. 5 скорости оценить ширину флюксона.
- По формуле (32) построить зависимость амплитуды флюксона  $U_c$  от скорости  $u = 0,9 \dots 0,1$  (через 0,1).

## **6. Рекомендации по оформлению отчёта**

Отчёт должен быть оформлен в текстовом редакторе Microsoft Word. Для того чтобы сделать форму программы активной нужно одновременно нажать на кнопки “Alt – Print Screen” и вставить форму в нужное место отчета.

Отчёт должен содержать:

- титульный лист;
- графики зависимости амплитуды и ширины солитона от параметров задачи;
- графики, поясняющие взаимодействие двух солитонов и влияние параметров на скорость движения солитонов;
- выводы по работе должны объяснять влияние параметров рассматриваемых систем на амплитуду, длительность и скорость движения солитонов, а также на характер их взаимодействия.

## **7. Контрольные вопросы**

1. Что такое солитон? Основные параметры, характеризующие солитон.
2. Математическая модель солитона в волоконном световоде.
3. При каких условиях образуется солитон в волоконном световоде.
4. Математическая модель солитона в линии передачи с нелинейными реактивными элементами.
5. Что происходит при взаимодействии двух различных солитонов?
6. Математическая модель, используемая при описании распределенного контакта Джозефсона.
7. Периодические и солитонные решения синус-уравнения Гордона.
8. Перспективы применения солитонных режимов в оптоволоконных линиях передачи и устройствах на их основе.

## 8. Рекомендуемая литература

1. Волоконно – оптические системы передачи / Под ред. В.Н. Гомзина. – М.: Радио и связь, 1992. – 416с.
2. Ахматов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемптосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 321с.
3. Слепов Н. Солитонные сети. Сети, март, 1999. С. 90 – 100.
4. Паскаль И.Ю., Пойзнер Б.Н., Сафьянов Д.Б. Распространение солитонов в оптических и радиофизических системах. Методические указания. Вычислительный эксперимент. – Томск: ТГУ, 1990. – 36с.
5. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. – М.: Мир, 1981. – 309с.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432с.