

**Министерство образования и науки Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Гошин Г.Г.

Методы математической физики

Учебно-методическое пособие

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 210700.62

«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

2013

УДК 537.8

Гошин Г.Г.

Методы математической физики: Учебно-методическое пособие. – Томск, ТУСУР, 2013. – 139 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

© Томск. гос. ун-т систем управления и
радиоэлектроники, 2013

© Гошин Г.Г., 2013

Содержание

1. Основные понятия и определения.....	5
2. Уравнения гиперболического типа.....	10
2.1. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка задачи	10
2.2. Решение задачи для неограниченной струны. Метод наложения бегущих волн Д'Аламбера.....	15
2.3. Решение задачи для ограниченной струны. Метод Фурье разделения переменных.....	18
2.4. Постановка задачи о вынужденных колебаниях ограниченной струны. Метод суперпозиции решений.....	24
2.5. Колебания в электрических цепях. Телеграфные уравнения.....	26
2.6. Физические аналогии.....	35
3. Уравнения параболического типа.....	37
3.1. Постановка задач для уравнений параболического типа.....	38
3.2. Решение задачи теплопроводности для бесконечно протяжённого стержня.....	41
3.3. Задача теплопроводности без начальных условий	46
3.4. Решение задачи теплопроводности для ограниченного стержня.....	47
4. Уравнения эллиптического типа. Функция Грина и δ -функция Дирака. Метод перевала.....	52
4.1. Постановка граничных задач для уравнений эллиптического типа ...	52
4.2. Функция Грина и δ -функция Дирака.....	55
4.3. Построение одномерной функции Грина.....	62
4.4. Построение двумерной функции Грина.....	67
4.5. Метод перевала асимптотической оценки интегралов в комплексной плоскости.....	70
5. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Солитоны.....	76

5.1. Солитоны. Основные понятия, история.....	76
5.2. Нелинейные линии передачи с дисперсией. Уравнение Кортевега –де Вриза.....	78
5.3. Сверхкороткий лазерный импульс в волоконном световоде. Нелинейное уравнение Шрёдингера.....	82
6. Интегральные уравнения и некоторые методы их решений.....	88
6.1. Основные понятия и определения.....	88
6.2. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода..	89
6.3. Интегральные уравнения Вольтерра.....	95
6.4. Интегральные уравнения в граничных задачах электродинамики.....	98
7. Вариационные методы.....	105
7.1. Постановка задачи вариационного исчисления.....	105
7.2. Метод непосредственного интегрирования.....	107
7.3. Метод Ритца.....	112
7.4. Метод конечных разностей.....	118
8. Методы интегральных преобразований и их применение к решению задач математической физики.....	121
8.1. Основные понятия и определения.....	121
8.2. Примеры решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.....	125
Список литературы.....	138

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Математическая физика - это теория математических моделей различных физических явлений и процессов.

Методы математической физики - это математические методы, которые применяются для построения и изучения математических моделей, описывающих различные физические явления и процессы, с выделением в них общих закономерностей. Методы математической физики позволили изучить математические модели явлений, связанных с физическими полями и волновыми процессами в электродинамике, акустике, теории упругости, теории теплопроводности, гидро- и аэродинамике. Зарождение и развитие математической физики связано с именами таких выдающихся ученых как: Ньютон, Лагранж, Эйлер, Фурье, Гаусс, Риман, Остроградский, Ляпунов, Стеклов.

Математическая модель - это, строго говоря, приближенное описание посредством математического аппарата (математических символов) различных явлений и процессов.

Математическое моделирование, т.е. изучение явлений с помощью математических моделей, можно разделить на 4 этапа:

1 *этап* - начинается с выбора модели, формулировки законов, связывающих основные параметры модели. Он требует знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, знания взаимосвязей между параметрами модели. Заканчивается постановкой краевой задачи, включающей формулировку уравнений, граничных и начальных условий.

2 *этап* - решение посредством математических методов сформулированной задачи. Методы могут быть аналитическими, численно-аналитическими (когда значительная часть решения прорабатывается аналитически, а затем применяются численные методы) и вычислительными. Понятно, что роль последних постоянно возрастает с развитием вычислительной техники и совершенствованием программного обеспечения.

3 этап - анализ полученных решений и результатов, их физическая интерпретация, сопоставление полученных результатов с известными фактами, которые учитывались при постановке задачи; сравнение с экспериментальными данными. Естественно, это совпадение должно быть в пределах удовлетворяющей нас точности. Высокую точность иногда требовать опасно, - из-за накопления ошибок модель может потерять устойчивость.

4 этап - совершенствование и уточнение исходной модели или построение новой. Этот этап необходим, если полученные результаты нас не удовлетворяют или нам требуется более углубленное изучение явления.

Остановимся более подробно на *первом* этапе. Очевидно, что математическая модель должна отражать основные закономерности изучаемых физических явлений. Протекающие процессы обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, которым удовлетворяют величины, характеризующие процесс. Хотя многие задачи могут быть сформулированы и посредством интегральных уравнений. При выборе модели исходят из основных физических законов, учитывающих только наиболее существенные черты явлений и процессов, отвлекаясь от второстепенных. Такими законами часто являются *законы сохранения*, например, сохранения количества движения, энергии, числа частиц и т.п. Это приводит к тому, что для описания процессов различной физической природы, имеющих общие характерные черты, оказываются применимы одни и те же математические модели.

Например, простейшее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

выведенное Д'Аламбером для описания свободных механических колебаний однородной струны, применимо также для описания волновых процессов оптики, акустики, гидродинамики, электродинамики и др.

Аналогично, уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

полученное Лапласом при построении теории тяготения, в дальнейшем нашло применение при решении многих задач теории упругости, электростатики, теории движения идеальной жидкости и т.д. Таким образом, можно утверждать, что одна и та же математическая модель может описывать целый ряд процессов и явлений различной физической природы.

Однако, любое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество частных решений, поэтому в каждой конкретной задаче из всех решений необходимо выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из физического смысла задачи и входящим в её постановку.

Таковыми дополнительными условиями являются: *начальные условия*, характеризующие процесс в некоторый начальный фиксированный момент времени, с которого начинается изучение этого процесса; *граничные условия*, т.е. условия на границе той области, в которой протекает процесс. Если граница области простирается до бесконечности, имеется граница раздела двух полупространств или для ограниченной области рассматривается внешняя задача, то необходимо также сформулировать *условия в бесконечно удаленных точках* пространства. Совокупность начальных и граничных условий часто называют *краевыми условиями*, а задача для дифференциального уравнения в частных производных с заданными краевыми условиями называют *краевой задачей* математической физики.

Краевая задача считается *корректно поставленной*, если ее решение удовлетворяет следующим трем требованиям: оно должно *существовать*, должно быть *единственным* и *устойчивым*. Первые два требования очевидны. Последнее означает, что любым малым изменениям входных параметров задачи должны соответствовать малые изменения ее решения. Фактически это означает, что решение должно *непрерывно* зависеть от начальных и граничных условий, от пара-

метров среды, от частоты и т.д. Требование непрерывной зависимости решения связано с тем, что входные физические параметры задачи, а также начальные и граничные значения могут находиться экспериментальным путем. И необходимо быть уверенным в том, что решение задачи существенно не зависит от погрешностей измерений. Иначе оно будет не корректным.

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка. Для определенности будем рассматривать уравнения с двумя независимыми переменными x и y . Уравнением в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными называется соотношение

$$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}) = 0, \quad (1.1)$$

связывающее между собой неизвестную функцию $U(x, y)$, её частные производные до второго порядка включительно и независимые переменные. Здесь

$$U_x = \frac{\partial}{\partial x} U, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U, \quad U_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U \quad \text{и так далее.}$$

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F(x, y, U, U_x, U_y) = 0, \quad (1.2)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y .

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят также от U, U_x, U_y , но не от вторых производных, то такое уравнение называется *квазилинейным* относительно старших производных. Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции $U(x, y)$ и её первых производных

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + b_1U_x + b_2U_y + cU + f = 0, \quad (1.3)$$

где все коэффициенты являются только функциями x и y .

Если коэффициенты не зависят от x и y , то (1.3) называется уравнением с постоянными коэффициентами. Если свободный член $f(x, y)$ равен нулю, то уравнение называется *однородным*.

Говорят, что дифференциальные уравнения (1.2), (1.3) принадлежат *гиперболическому типу*, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

- *параболическому типу*, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;
- *эллиптическому типу*, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Это три основных типа дифференциальных уравнений математической физики, к рассмотрению которых мы переходим.

2. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Подобные уравнения наиболее часто встречаются в задачах, связанных с колебательными процессами. Простейшее одномерное уравнение гиперболического типа

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

называется *уравнением колебаний струны*; t – время, x – координата вдоль оси струны. Основным параметром этих процессов является скорость распространения колебаний $a = const$, которая входит в уравнение (2.1). Функция $U(x, t)$ имеет смысл смещения точек струны относительно равновесного состояния. Уравнение впервые изучено Д'Аламбером в 1747г. Это уравнение называют также *волновым*.

2.1 Вывод уравнения колебаний струны. Постановка задачи.

Построим математическую модель, описывающую колебания струны. Будем рассматривать струну, как абсолютно гибкую упругую однородную нить длиной l . Математически понятие *абсолютной гибкости* заключается в том, что силы натяжения T , возникающие, например, в закрепленной на концах струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю, т.е. струна не сопротивляется изгибу. Понятие *абсолютной упругости* заключается в том, что струна подчиняется известному из механики закону Гука, из которого следует, что сила натяжения струны пропорциональна изменению её длины. *Однородность* струны означает, что ее линейная плотность ρ , т. е. масса единицы длины струны, является величиной постоянной. Это всё упрощающие предположения, которые позволяют не рассматривать второстепенные параметры процесса. Главное для нас – это колебания струны.

Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, U) и что вектор смещения \vec{U} в любой момент времени t перпендикулярен оси x . То-

гда процесс колебания можно описать одной функцией $U(x,t)$, характеризующей поперечные вертикальные перемещения струны. Теперь струну туго натянем, а концы ее закрепим. Если вывести струну из положения равновесия (например, оттянуть или ударить по ней), то она начнет колебаться. Пусть центр декартовой системы координат помещен в начало струны (рис. 2.1). В каждый момент времени $t = const$ график функции $U(x,t)$ представляет форму колеблющейся струны, а ее частная производная по x равна $U_x(x,t) = tg\alpha$, где $\alpha = \alpha(x,t)$. Это следует из геометрического смысла производной. В сечении $x = const$ функция $U(x,t)$ описывает закон движения некоторой точки струны во времени; $U_t(x,t)$ – скорость этого движения, а $U_{tt}(x,t)$ – ускорение. Очевидно, амплитуда колебаний струны связана с углом α и пропорционально ему. При выводе

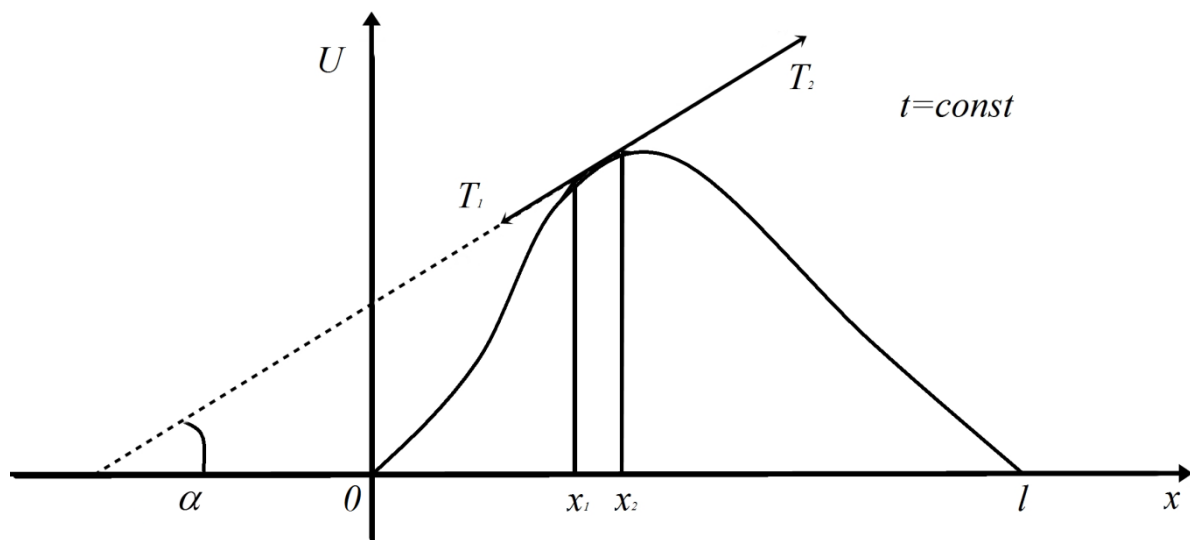


Рис. 2.1. Геометрия задачи о колебаниях струны.

дифференциального уравнения ограничимся *малыми* по амплитуде колебаниями, что означает $U_x(x,t) = tg\alpha \cong \alpha \ll 1$. Такое приближение справедливо, например, для струнных музыкальных инструментов.

Определим натяжение T , испытываемое произвольным участком струны (x_1, x_2) . Длина дуги этого участка s_{12} , как следует из дифференциальной геометрии, равна

$$s_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (U_x)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + tg^2 \alpha(x)} \cdot dx \cong \int_{x_1}^{x_2} dx = s,$$

где s – линейная длина участка вдоль оси x .

Это означает, что в случае малых колебаниях удлинение струны можно не учитывать.

Проекция силы натяжения T на оси x и U равны:

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) tg \alpha = T(x) U_x.$$

На любой участок струны могут действовать следующие силы: натяжения, инерции (вес) и внешние. Все они направлены перпендикулярно оси x , так как мы рассматриваем только *поперечные колебания*. Поэтому проекция всех сил на ось x должна быть равной нулю (в противном случае появились бы продольные колебания). Силы имеют противоположные знаки, так как направлены из точек x_1 и x_2 в стороны закрепленных концов. Поэтому

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \text{ или } T_x(x_2) = T_x(x_1).$$

Точки x_1 и x_2 выбраны произвольно, следовательно $T(x) = T_0 = const$. Таким образом, если удлинение струны не происходит, то сила натяжения постоянна.

Мы специально очень детально рассматриваем процесс колебания струны с той целью, чтобы на этом довольно простом примере было понятно, что создание математической модели, в данном случае вывод дифференциального уравнения, требуют глубокого проникновения в физическую сущность явления, а также знания основных разделов высшей математики. Без этого хорошую модель не создать.

Пусть две произвольные точки струны находятся на бесконечно малом расстоянии dx друг от друга, т.е. имеют координаты x и $(x+dx)$, а углы наклона касательных в этих точках равны соответственно α_1 и α_2 . Сумма проекций сил T_1 и T_2 на ось U равна

$$\begin{aligned}
&= T_0 \sin a_1 - T_0 \sin a_2 \cong T_0 (tga_2 - tga_1) = \\
&= T_0 [U_x(x+dx, t) - U_x(x, t)] = T_0 U_{xx} dx,
\end{aligned}$$

так как

$$U_x(x) = \frac{U(x+dx) - U(x)}{dx}, \quad U_x(x) = \frac{U_x(x+dx) - U_x(x)}{dx}.$$

Предположим, что на струну могут действовать также внешние силы $F(x, t)$, распределённые вдоль струны с плотностью $g(x, t)$, т.е. $F(x, t) = g(x, t)dx$. Теперь воспользуемся *вторым законом Ньютона*, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих на материальную точку сил. Масса участка dx равна ρdx .

Окончательно

$$\rho dx \cdot U_{tt} = T_0 U_{xx} dx + g dx$$

или

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = G(x, t), \tag{2.2}$$

где

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho} > 0, \quad G(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t).$$

Уравнение (2.2) является неоднородным. Колебания, которые оно описывает, называются *вынужденными*. Если внешние силы отсутствуют, то $g(x, t) = 0$ и уравнение (2.2) переходит в однородное уравнение (2.1), которое описывает *свободные* колебания. Уравнения (2.1), (2.2) называются также *одномерными волновыми уравнениями*, так как в них входит только одна пространственная координата.

Уравнение (2.2) мы получили, исходя из детального физического анализа процесса колебания струны. Сделали при этом ряд упрощающих предположений, чтобы оставить только основные черты процесса. А затем использовали классический закон Ньютона и записали само уравнение, т.е. создали *математическую модель процесса*. Конечно, мы не случайно пришли к использованию второго за-

кона Ньютона. Другими словами, при создании модели следует заранее установить, на основе каких фундаментальных законов будет выводиться уравнение модели и какие величины нам потребуются для подстановки в математическую формулировку того или иного закона. Но насколько полученная модель соответствует физическому явлению? На этот вопрос можно будет дать ответ только после сравнения с другими известными результатами, с результатами экспериментов. Естественно, мы должны сравнивать решения уравнений, удовлетворяющие определенным начальным и граничным условиям. Теперь перейдем к заданию этих условий, т.е. к постановке задачи.

Начальные условия показывают, в каком положении струна находится в момент времени $t=0$, т.е. в момент начала процесса колебаний. Начальное положение струны и ее начальная скорость задаются условиями

$$U(x,0) = f(x), \quad U_t(x,t)|_{t=0} = F(x), \quad (2.3)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – функции, которые мы должны знать заранее. Они могут быть также постоянными, включая нули.

Применительно к струне начальные условия могут означать, например, следующее: при игре на гитаре, мы оттягиваем струну, т.е. задаем начальное смещение, а при игре на рояле по струне ударяет молоточек, сообщая ей начальную скорость.

В данной задаче граничные условия показывают, что происходит с концами струны во время колебательного процесса. Если концы струны закреплены, то очевидно

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0. \quad (2.4)$$

Если, допустим, один из концов $x = 0$ не закреплен и нам известны закон его движения во времени или закон изменения угла наклона касательной, то граничные условия будут иметь вид:

$$U(0,t) = \mu(t) \quad \text{или} \quad U_x(0,t) = v(t). \quad (2.5)$$

Если мы можем допустить при моделировании, что струна является полуограниченной или неограниченной, то необходимо задать условие на её концах, уходящих в бесконечность. Физический смысл этих условий сводится к тому, что бесконечно удаленные точки не должны оказывать влияние на колебательный процесс. А это означает, что не должно быть волн, отраженных от бесконечно удаленных точек струны. Математическая формулировка подобных условий обычно сводится к следующей:

$$U(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

При задании начальных и граничных условий необходимо помнить о тех ограничениях, которые были заложены при выводе уравнения модели. Например, мы моделировали случай *малых* поперечных смещений струны относительно положения равновесия. В начальных и граничных условиях эти смещения также должны быть малыми.

2.2. Решение задачи для неограниченной струны. Метод наложения бегущих волн Д'Аламбера.

После того, как мы сформулировали постановку задачи, приступим к ее решению. Следуя Д'Аламберу, начнем с решения задачи для неограниченной или бесконечно протяженной струны. Если предположить, что колебания возникли в срединной части струны, то от этой части в противоположные стороны будут распространяться бегущие волны. В силу условий на бесконечно удаленных точках струны (2.6), мы не учитываем отраженные от них волны, т.е. не ставим в этих точках граничные условия типа (2.5). Тогда в задаче останутся только начальные условия (2.3). Задача с начальными условиями называется *задачей Коши*. Метод её решения, который мы сейчас рассмотрим, называется *методом наложения бегущих волн* или *методом Д'Аламбера*. Этим методом получим решение задачи о свободных колебаниях струны.

Постановка однородной задачи Коши имеет вид:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} U(x,0) &= f(x), \\ U_t(x,t)|_{t=0} &= F(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение характеристик, соответствующее уравнению (2.1), запишется как

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Оно распадается на два уравнения

$$dx \mp a dt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x \mp at = C_{1,2}$$

Поэтому решение уравнения (2.1) может быть представлено в виде

$$U(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at), \quad (2.7)$$

где функции φ и ψ , согласно (2.1) должны быть дважды дифференцируемы по x и по t . Однако это требование не распространяется на начальные и граничные условия, в которых функции могут иметь или не иметь производных.

Для нахождения неизвестных функций, подставим (2.7) при $t=0$ в начальные условия (2.3). Получим систему

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= f(x), \\ -a\varphi_t(x-at)|_{t=0} + a\psi_t(x+at)|_{t=0} &= F(x). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение по x в пределах от 0 до x , найдем

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(\xi) d\xi + C,$$

где $C = -\varphi(0) + \psi(0) = const$.

Решив систему, получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} f(x) \mp \frac{1}{2a} \int_0^x F(\xi) d\xi \mp \frac{1}{2} C,$$

верхние знаки относятся к $\varphi(x)$, нижние – к $\psi(x)$. Заменяв x в аргументе на $(x - at)$ или $(x + at)$ и подставив в (2.7), запишем решение задачи Коши в виде

$$U(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

Чтобы убедиться в его правильности, обычно достаточно решение подставить в исходную задачу (2.1), (2.3). Ей решение (2.8) удовлетворяет, если учесть формулу дифференцирования интегралов с переменными пределами. Это и есть решение, полученное Д'Аламбером.

Если задать конкретный вид функций $f(x \pm at)$, $F(x \pm at)$ и построить графики решения (2.8) для различных моментов времени, то получим две бегущих волны, характеризующих процесс передвижения вдоль струны отклонения от её первоначального положения. Одна из волн распространяется в положительном направлении оси x , другая – в отрицательном. Называются они *прямой* и *обратной* волнами. Скорости их одинаковы и равны $a = \sqrt{T_0/\rho}$. То, что данный параметр имеет размерность скорости следует из (2.1) или (2.7).

Чтобы лучше представить характер волнового процесса, рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $F(x)=0$, т. е. начальные скорости у точек струны отсутствуют. Тогда

$$U(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2}.$$

Имеем прямую и обратную *волны отклонения*. После прохождения волн отклонения точки струны возвращаются в исходное состояние.

2. Пусть $f(x)=0$, т. е. начальные отклонения у точек струны отсутствуют, а колебания начались в результате того, что точки струны получили некоторые начальные скорости. Тогда

$$U(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx = \varphi(x+at) - \varphi(x-at),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx.$$

В этом случае по струне распространяются прямая и обратная *волны импульса*, также в двух противоположных направлениях. После прохождения волн импульса точки струны сдвигаются и остаются в новом положении. Волны импульса, как говорят, оставляют после себя след. След остается в случае неограниченной струны. А, например, для ограниченной струны с закрепленными концами его не будет из-за действия сил натяжения.

2.3. Решение задачи для ограниченной струны. Метод Фурье разделения переменных.

После того как мы рассмотрели случай неограниченной струны, получим решение задачи для отрезка струны длиной l . Для нахождения решения используем *метод разделения переменных (метод Фурье)* и сначала ограничимся случаем *свободных* колебаний струны с закрепленными концами. Постановка такой задачи имеет вид:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0; \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = f(x), \\ U_t(x,t)|_{t=0} = F(x); \end{cases} \tag{2.3}$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0. \tag{2.4}$$

Метод разделения переменных является одним из важнейших методов решения уравнений математической физики. Основная идея метода заключается в том, что решение краевой задачи, которое является функцией двух переменных x и t , ищется в форме

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{2.9}$$

Тогда

$$U_{tt} = X \cdot T'', \quad U_{xx} = T \cdot X''$$

уравнение (2.1) может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как левая и правая части являются функциями разных переменных, то выполнение равенства возможно только, если обе его части равны некоторой постоянной $C = const$. Откуда следует, что функции T и X должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X''(x) - CX(x) = 0, \quad (2.10)$$

$$T''(t) - \tilde{N}a^2T(t) = 0. \quad (2.11)$$

Граничные условия (2.4) должны выполняться для любых моментов времени t , поэтому

$$U(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$U(l,t) = X(l)T(t) = 0,$$

что возможно, если

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2.12)$$

В результате мы пришли к следующей задаче:

найти решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка (2.10), удовлетворяющее условиям (2.12) на концах интервала интегрирования.

Эта задача является простейшим случаем задачи Штурма - Лиувилля, заключающейся в отыскании решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Решения должны удовлетворять заданным граничным условиям, налагаемым на функцию на концах интервала изменения переменной интегрирования.

Полагая $X(x) = e^{\tau x}$, составим для уравнения (2.10) характеристическое уравнение

$$\tau^2 - C = 0$$

и рассмотрим возможные случаи.

- 1) Пусть $C = \lambda^2 > 0$, тогда характеристическое уравнение имеет корни $\tau = \pm \lambda$ и общее решение (2.10) будет:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Подставив в условия (2.12), получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0.$$

Так как определитель этой однородной системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$.

- 2) Пусть $C=0$. Это также приводит к тривиальному решению $C_1 = C_2 = 0$.

- 3) Пусть $C = -\lambda^2 < 0$. Общее решение Уравнения (2.10) известно и имеет вид

$$X(x) = C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x.$$

Из граничного условия (2.12) следует

$$X(0) = C_3 = 0, \quad X(l) = C_4 \sin \lambda l = 0.$$

Должно быть $C_4 \neq 0$, поэтому обращение $X(l)$ в ноль возможно, если $\lambda l = \pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$; $m \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, так как $l \neq 0$.

Таким образом, если

$$\lambda_m = m \frac{\pi}{l}, \quad C_m = -\left(m \frac{\pi}{l}\right)^2,$$

то существуют решения уравнения (2.10), не равные нулю, имеющие вид

$$X_m(x) = A_m \sin(\lambda_m x), \quad (2.13)$$

где A_m – произвольные постоянные.

Величины $\lambda_m = m \frac{\pi}{l}$, называются *собственными числами*, а функции $\sin(\lambda_m x)$ называются *собственными функциями* дифференциального уравнения (2.10) с граничными условиями (2.12). Эти собственные функции с разными собственными числами ортогональны на интервале $[0, l]$, так как

$$\int_0^l \sin(\lambda_m x) \cdot \sin(\lambda_n x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Найденные собственные числа войдут в уравнение (2.11), которое примет вид

$$T_m''(t) + (\lambda_m a)^2 T_m(t) = 0.$$

Его общим решением будет

$$T_m(t) = B_m \cos(\lambda_m a t) + D_m \sin(\lambda_m a t), \quad (2.14)$$

где B_m, D_m – произвольные постоянные. Подставив (2.13), (2.14) в (2.9), запишем после переобозначения постоянных

$$U_m(x, t) = [b_m \cos(\lambda_m a t) + d_m \sin(\lambda_m a t)] \sin(\lambda_m x). \quad (2.15)$$

Решения $U_m(x, t)$ называются *собственными функциями краевой задачи*. Соответствующие им колебания струны называются *собственными или свободными колебаниями*, происходящими вследствие придания точкам струны начальных отклонений и скоростей.

Общее решение задачи должно представлять собой суперпозицию всех возможных решений (2.15), поэтому

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [b_m \cos(\lambda_m a t) + d_m \sin(\lambda_m a t)] \sin(\lambda_m x). \quad (2.16)$$

Этот ряд должен быть сходящимся, а его члены быть дважды дифференцируемыми. Чтобы найти две оставшиеся постоянные, необходимо использовать два начальных условия. Подставив (2.16) в (2.3), получим

$$U(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\pi \frac{x}{l}) = f(x),$$

$$\begin{aligned} U_t(x,t)|_{t=0} &= \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{m\pi a}{l}) [-b_m \sin(m\pi \frac{a}{l} t) + d_m \cos(m\pi \frac{a}{l} t)]_{t=0} \cdot \sin(m\pi \frac{x}{l}) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (m\pi \frac{a}{l}) d_m \cdot \sin(\frac{m\pi x}{l}) = F(x). \end{aligned}$$

Из этих выражений и теории рядов Фурье следует, что коэффициенты b_m и d_m являются коэффициентами разложения известных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0,l)$. Как известно, они имеют вид

$$\begin{cases} b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(m\pi \frac{x}{l}) dx, \\ (m\pi \frac{a}{l}) d_m = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin(m\pi \frac{x}{l}) dx. \end{cases} \quad (2.17)$$

После подстановки (2.17) в (2.16) получим искомое решение задачи.

Дадим физическую интерпретацию полученному решению. Как видно из (2.16), с учетом периода тригонометрических функций, равного $2\pi m$, в моменты времени $t = 2l/a, 4l/a, \dots$, струна возвращается в свое первоначальное положение, какое было в момент времени $t=0$, т. е. она совершает *незатухающие*, повторяющиеся с периодом $T=2l/a$ колебания. Колебания незатухающие, так как силы трения модель не учитывает. Выражение (2.15) для собственных функций задачи можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} U_m(x,t) = \sqrt{b_m^2 + d_m^2} \sin(m \frac{\pi x}{l}) \cdot \sin(\frac{m \pi a}{l} t + \varphi_m), \\ \varphi_m = \text{arctg}(\frac{d_m}{b_m}). \end{cases}$$

Отсюда видно, что каждый тип колебаний $m=const$ имеет свою частоту

$$\omega_m = \frac{m\pi a}{l}, \text{ амплитуду } \sqrt{b_m^2 + d_m^2} \sin(m \frac{\pi x}{l}) \text{ и фазу } \varphi_m. \text{ Распределение амплитуд}$$

первых двух колебаний в фиксированные моменты времени показано на рис.2.2.

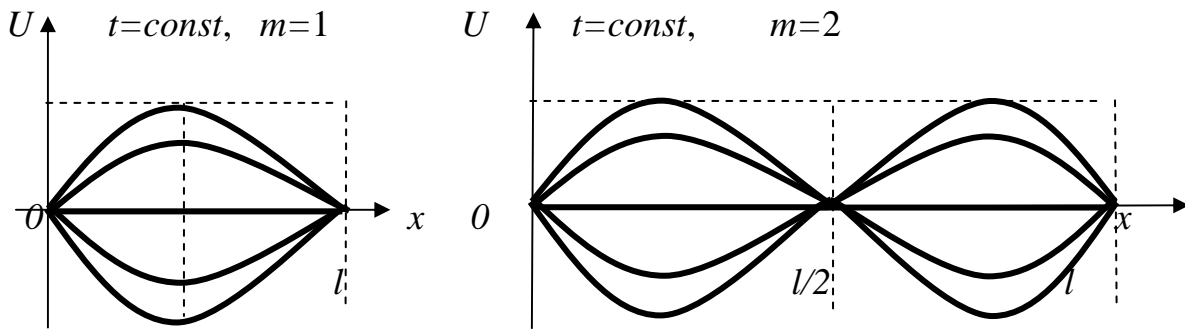


Рис. 2.2. Распределение амплитуды в стоячей волне.

Из графиков следует, что в некоторый момент времени струна достигает своего максимального отклонения от положения равновесия (ось x). Распределение амплитуд такого вида называется *стоячей волной*. Стоячая волна имеет столько неподвижных точек, сколько корней имеет уравнение $\sin(m \frac{\pi x}{l}) = 0$ на интервале $[0, l]$. Число их равно $(m+1)$, где $m=1,2,3,\dots$. Положения нулей имеют координаты $x=0, l/m, 2l/m, \dots, (m-1)l/m, l$. Неподвижные точки называются *нулями* или *узлами* стоячей волны. Посередине между узлами располагаются точки максимального отклонения, которые называются *максимумами* или *пучностями*.

Каждая струна может иметь собственные колебания лишь строго определенных частот

$$\omega_m = \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad (2.18)$$

где T_0 – натяжение струны, ρ – её плотность.

Эти частоты называются *собственными частотами*. Механические колебания струны вызывают в воздушной среде звуковые (акустические) колебания, которые улавливает ухо. Колебания с наименьшей собственной частотой ($m=1$) называется *основным*. Издаваемый этим колебанием звук называется основным тоном. Остальные типы колебаний называются *высшими типами*, *гармониками* или *обертонами*.

Из (2.18) следует, что частота звука будет тем выше, чем короче и тоньше струна, сильнее ее натяжение и больше номер гармоники. Сверхнизкочастотные колебания или *инфразвук* с частотой $f < 10 \text{Гц}$, которые соответствуют, например, слабо натянутой толстой струне, ухо человека не воспринимает. Не способно оно воспринимать и *ультразвуковые* колебания с частотой $f > 20 \text{кГц}$. Мы не слышим также большую часть обертонов. Проводя аналогию с радиотехническими устройствами можно сказать, что ухо является биопреобразователем со свойствами полосового фильтра. Как видно из (2.16), свободные колебания ограниченной струны имеют *бесконечный спектр* в виде наложения бесконечного числа стоячих волн, которые образуются в результате отражений от концов струны. При этом характер звучания струны (тон, сила звука, тембр) будет зависеть от соотношений между амплитудами, фазами и частотами отдельных колебаний, а также от вида внешнего воздействия. Каждый может проверить сделанные выводы экспериментально, взяв, например, в руки гитару.

2.4. Постановка задачи о вынужденных колебаниях ограниченной струны. Метод суперпозиции решений.

Вместо однородного уравнения (2.1) следует написать неоднородное уравнение

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = G(x, t), \quad (2.2)$$

где $G(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t)$, ρ – плотность струны, $g(x, t)$ – линейная плотность распределения внешних сил. Начальные и граничные условия оставим прежними – выражения (2.3), (2.4). Решение уравнения (2.2), как это делается в случае линейных дифференциальных уравнений, будем искать в виде суперпозиции двух функций

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t). \quad (2.19)$$

Функцию $V(x, t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла однородному уравнению (2.1) и неоднородным условиям (2.3), (2.4). Решение этой задачи уже

найденно – выражения (2.16), описывающее свободные колебания. Тогда, как следует из подстановки (2.19) в (2.2), функция $W(x,t)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению (2.2) и однородным (нулевым) граничным и начальным условиям

$$W(0,t) = W(l,t) = 0, \quad (2.20)$$

$$W(x,0) = W_t(x,t)|_{t=0} = 0. \quad (2.21)$$

Функция $W(x,t)$ описывает *вынужденные* колебания, которые совершаются только под действием внешних сил при отсутствии начальных возмущений. Её будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующей однородной задачи

$$W(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(t) \sin(m\pi \frac{x}{l}), \quad (2.22)$$

где $\gamma_m(t)$ подлежат определению.

Видно, что при $x=0, l$ функция $W(x,t)$ удовлетворяет граничному условию (2.20) за счёт функции $\sin(m\frac{\pi x}{l})$. Чтобы $W(x,t)$ удовлетворяла нулевым начальным условиям (2.21), необходимо потребовать выполнение соотношений:

$$\gamma_m(0) = \gamma(t)|_{t=0} = 0, \quad (2.23)$$

которые являются начальными условиями для $\gamma_m(t)$.

Подставив (2.22) в (2.2), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_m''(t) + (m\pi \frac{a}{l})^2 \cdot \gamma_m(t)] \sin(m\pi \frac{x}{l}) = G(x,t).$$

Обычно функцию $G(x,t)$ на интервале $[0,l]$ также можно представить в виде разложения в ряд Фурье по тем же собственным функциям

$$G(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) \sin(m\pi \frac{x}{l}),$$

где

$$g_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x,t) \sin(m\pi \frac{x}{l}) dx.$$

Такое представление правой части дает возможность в дальнейшем рассматривать задачу для каждой гармоники в отдельности. Задача для $\gamma_m(t)$ включает уравнение

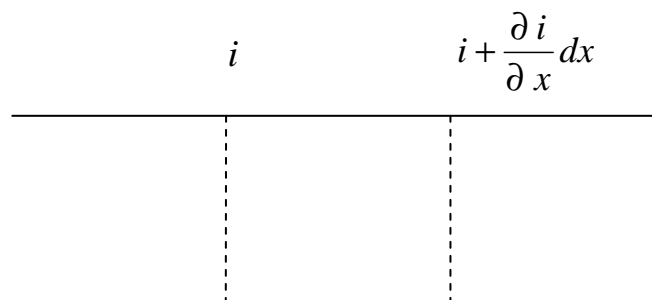
$$\gamma_m''(t) + (m\pi \frac{a}{l})^2 \cdot \gamma_m(t) = g_m(t) \quad (2.24)$$

и начальные условия (2.23).

2.5. Колебания в электрических цепях. Телеграфные уравнения.

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него образуется электромагнитное поле, которое вызывает изменение как силы тока, так и величины напряжения. Эти изменения поля приводят к возникновению в проводе колебательного процесса.

Создадим математическую модель этого процесса, то есть выведем для его описания дифференциальное уравнение. Возьмем двухпроводную линию бесконечной протяженности, напряжение между проводниками которой и ток являются функциями x и t : $u(x,t)$, $i(x,t)$. В случае однопроводной линии функция $u(x,t)$ есть потенциал точек линии относительно земли. Будем рассматривать линию с распределенными параметрами, что имеет место на сверхвысоких частотах (СВЧ), когда линейные размеры элементов цепи сравнимы с длиной волны. Эквивалентная двухпроводная линия представлена на рис. 2.3.



$$\frac{t = \text{const} \quad u \quad \quad u + \frac{\partial u}{\partial x} dx}{x \quad \quad (x + dx)}$$

Рис. 2.3. Эквивалентная двухпроводная линия.

Введем погонные (рассчитанные на единицу длины линии) параметры:

R – активное сопротивление, Ом/м;

L – индуктивность, мкГн/м;

C – емкость, пФ/м;

G – активная проводимость, См/м.

Включение элементов с этими параметрами в линию показано на рис. 2.4.

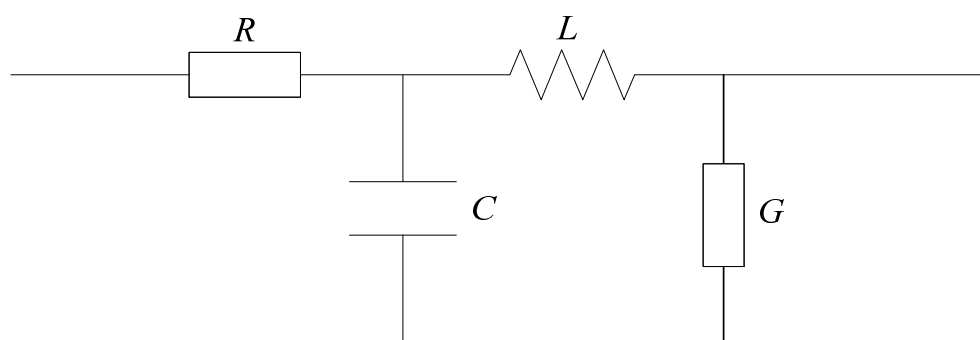


Рис. 2.4. Включение элементов в линию.

Рассмотрим малый участок линии длиной dx . Разность напряжений в начале и конце участка согласно закону Ома равна сумме падений напряжений на активном сопротивлении и индуктивности

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = iRdx + \frac{\partial i}{\partial t} Ldx,$$

или

$$u_x + iR + Li_t = 0. \quad (2.25)$$

Изменение тока на этом же участке обусловлено током утечки (вследствие не-совершенства изоляции) и током смещения, поэтому

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = uGdx + C \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

$$i_x + Gu + Cu_t = 0. \quad (2.26)$$

Мы имеем систему двух уравнений (2.25), (2.26) в частных производных первого порядка. Из этой системы для каждой из функций, u или i , можно получить одно дифференциальное уравнение второго порядка. Чтобы исключить из системы, например ток, продифференцируем уравнение (2.25) по x , а уравнение (2.26) по t . Тогда

$$u_{xx} + i_x R + Li_{tx} = 0, \quad (2.27)$$

$$i_{xt} + Gu_t + Cu_{tt} = 0. \quad (2.28)$$

Выразив i_x из (2.26), а i_{tx} из (2.28) и подставив в (2.27), получим

$$u_{tt} + \left(\frac{RC + LG}{LC} \right) u - \frac{1}{LC} u_{xx} = 0. \quad (2.29)$$

В точности такое же уравнение будет и для тока. Однако начальные условия для нахождения постоянных интегрирования в этих уравнениях будут разными. Разными будут и сами решения.

Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка типа (2.29) называется *телеграфным уравнением*. Впервые оно было получено при изучении передачи телеграфных сообщений по проводам.

Уравнение (2.29) можно преобразовать к более простому виду, если ввести новую функцию $W = ue^{b_0 t/a_0}$, для которой получим

$$W_{tt} - a^2 W_{xx} - b^2 W = 0, \quad (2.30)$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{a_0}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0}$, $a_0 = LC$, $2b_0 = RC + LG$, $c_0 = RG$.

Решение уравнения (2.30) выражается через интегралы от функции Бесселя. Так как по предположению линия имеет бесконечную протяженность, то в задаче должны присутствовать условия на бесконечности и начальные условия, характеризующие распределение тока и напряжения в начальный момент времени

$$u \Big|_{t=0} = f(x), \quad i \Big|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2.31)$$

Как известно, задача с начальными условиями называется *задачей Коши*.

Рассмотрим два частных случая.

1. Линия без потерь.

Если сопротивление провода очень мало и он хорошо изолирован, то потерями в линии можно пренебречь, т.е. следует положить $R = 0$, $G = 0$. Тогда $b = 0$ и уравнение (2.30) переходит в уравнение колебаний струны (2.1). При этом также $b_0 = 0$ и $W = u$. Его решение – формула (2.8). Оно даёт суперпозицию двух волн, распространяющихся в обе стороны от области начального воздействия со скоростью $a = 1/\sqrt{LC}$. Нам только необходимо знать начальные условия для функции и её первой производной. Их можно записать из (2.31) и (2.26) при $G = 0$:

$$u_t \Big|_{t=0} = -\frac{1}{C} \varphi'(x).$$

В результате решение будет иметь вид

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} - \frac{1}{2aC} \int_{x-at}^{x+at} \varphi'(\xi) d\xi.$$

Интеграл от производной есть значение самой функции на заданных пределах интегрирования, поэтому

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\varphi(x-at) - \varphi(x+at)}{2}. \quad (2.32)$$

Аналогично для тока из (2.25) при $R=0$ и начальных условий (2.31) можно получить

$$i(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{f(x-at) - f(x+at)}{2}. \quad (2.33)$$

Формулы (2.32), (2.33) и есть решение телеграфного уравнения в случае безграничной линии при отсутствии в ней потерь.

Отношение напряжения к току в линии в режиме бегущей волны называется *волновым сопротивлением*. Волновое сопротивление – важная техническая характеристика любой линии передачи. Для любой линии оно имеет своё постоянное вещественное значение и противоположные знаки у прямой и обратной волн. Действительно, для прямых волн с аргументом $(x-at)$ у функций имеем

$$\frac{u(x-at)}{i(x-at)} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ а для обратных волн с аргументом } (x+at) \text{ будет } \frac{u(x+at)}{i(x+at)} = -\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Выясним, какой физический смысл может заключаться в начальных условиях (2.31). Например, возникновение волн в открытых электрических линиях передачи часто бывает связано с атмосферными разрядами. Пусть на каком-то участке линии вследствие молнии возник индуцированный заряд. Под действием этого заряда в линии возникают волны напряжения и тока. Поскольку заряд является генератором напряжения, а не тока, то этот факт в начальных условиях будет

$$\text{учитываться следующим образом } u \Big|_{t=0} = f(x), \quad i \Big|_{t=0} = \varphi(x) = 0.$$

2. Линия без искажений.

Так называется линия, у которой её погонные параметры связаны соотношением $RC = LG$. При этом условии $b=0$, $b_0 \neq 0$ и уравнение (2.30) снова переходит в уравнение (2.1), решение которого при тех же начальных условиях будет иметь вид

$$u(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left[\frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\varphi(x-at) - \varphi(x+at)}{2} \right], \quad (2.34)$$

$$i(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left[\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{f(x-at) - f(x+at)}{2} \right]. \quad (2.35)$$

Таким образом, в линии без искажений, как и в линии без потерь, между напряжением и током в прямой и обратных волнах сохраняется постоянное соотношение, равное волновому сопротивлению линии. Отличие от линии без потерь будет в том, что в линии без искажений волновой процесс во времени будет носить затухающий характер и затухание будет тем сильнее, чем больше отношение R/L . Это затухание связано с омическими потерями и током утечки.

Если провод имеет конечную длину, то на его концах должны быть заданы граничные условия, без которых решение задачи не может быть определено единственным образом. Возможные варианты простейших схем и граничных условий:

- 1) В начале линии ($x=0$) включен источник ЭДС с $E=const$, а конец линии ($x=l$) однопроводной заземлён, двухпроводной короткозамкнут:

$$u(0) = E, \quad u(l) = 0.$$

- 2) В начале линии приложено синусоидальное напряжение, а конец линии однопроводной изолирован, двухпроводной разомкнут:

$$u(0) = A \sin \omega t, \quad i(l) = 0.$$

- 3) В начале линии включен источник ЭДС с $E=const$, а к концу линии подсоединен приёмник с последовательно включенными омическим сопротивлением R и самоиндукцией L :

$$u(0) = E, \quad u(l) = \left(Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \Big|_{x=l}$$

В качестве примера решим задачу о включении линии. Пусть двухпроводная линия длиной l не имеет потерь ($R=G=0$) и одним концом подключена к источнику переменного тока с ЭДС $E = A \sin \omega t$, а другой её конец короткозамкнут. В момент включения напряжение и ток в линии равны нулю. Необходимо определить распределение напряжения в линии.

Постановка задачи имеет вид: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{2.1}$$

нулевым начальным условиям

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t(x,t) \Big|_{t=0} = 0, \tag{2.36}$$

и неоднородным граничным условиям

$$u(x,t) \Big|_{x=0} = A \sin \omega t, \quad u(x,t) \Big|_{x=l} = 0. \tag{2.37}$$

По своей сути эта задача аналогична задаче о вынужденных колебаниях ограниченной струны, которая была рассмотрена в 2.4. Отличие только в том, в задаче о включении линии внешнее воздействие входит в граничные условия, а не в правую часть уравнения, как было в задаче для струны. Однако, обе постановки идентичны и приводят к одинаковым результатам. Метод аналогичен, т.е. решение задачи ищется в виде суперпозиции двух функций

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \tag{2.19}$$

каждая из которых является решением однородного волнового уравнения.

Функцию $V(x,t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла только граничным условиям (2.37), т.е.

$$V(0,t) = A \sin \omega t, \quad V(l,t) = 0. \tag{2.38}$$

Следуя методу разделения переменных, положим

$$V(x,t) = X(x) \sin \omega t.$$

Из волнового уравнения (2.1) и граничных условий (2.38) имеем задачу:

$$\begin{cases} X''(x) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \cdot X(x) = 0, \\ X(0) = A, X(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right).$$

Неизвестные постоянные находятся из граничных условий:

$$C_1 = A, C_2 = -A \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega l}{a}\right).$$

Чтобы C_2 не обращалось в бесконечность, необходимо потребовать $(\omega l/a) \neq m\pi$, $m=1,2,\dots$. Окончательно

$$V(x,t) = A \left[\cos \frac{\omega x}{a} - \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{a} \cdot \sin \frac{\omega x}{a} \right] \sin \omega t = A \frac{\sin \frac{\omega}{a}(l-x)}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t. \quad (2.39)$$

Функция $W(x,t)$ будет удовлетворять однородному волновому уравнению (2.1) с нулевыми граничными условиями

$$W(0,t) = 0, \quad W(l,t) = 0. \quad (2.31)$$

Очевидно, что суперпозиция двух решений (2.19) должна удовлетворять неоднородным граничным условиям (2.37), а также начальным условиям (2.36). Начальные условия для $W(x,t)$ находятся подстановкой (2.19) в (2.36) и с учётом (2.39) имеют вид

$$W(x,t) \Big|_{t=0} = 0, \quad W_t(x,t) \Big|_{t=0} = -A\omega \frac{\sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}. \quad (2.40)$$

Для функции $W(x,t)$ мы пришли к рассмотренной в **2.3** задаче Коши. Её общее решение давалось формулой (2.16). Поэтому

$$W(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[b_m \cos\left(m\pi \frac{a}{l} t\right) + d_m \sin\left(m\pi \frac{a}{l} t\right) \right] \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right). \quad (2.41)$$

В силу первого условия (2.40) имеем $b_m = 0$. Коэффициенты d_m находятся по формуле (2.17):

$$\left(m\pi \frac{a}{l}\right) d_m = \frac{2}{l} \int_0^l \left[-A\omega \frac{\sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx.$$

Используя известную из тригонометрии формулу

$$\sin \frac{\omega(l-x)}{a} \sin m\pi \frac{x}{l} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{l} + \frac{\omega(l-x)}{a}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{l} - \frac{\omega(l-x)}{a}\right) \right]$$

и проводя интегрирование, получим

$$d_m = \frac{2A\omega a}{l \left[\left(\frac{m\pi a}{l}\right)^2 - \omega^2 \right]}.$$

Окончательно решение задачи о включении линии примет вид

$$U(x,t) = A \frac{\sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t + 2A\omega \frac{a}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a t}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}}{\left[\left(\frac{m\pi a}{l}\right)^2 - \omega^2 \right]}. \quad (2.42)$$

Мы потребовали $\omega \neq \omega_m = m\pi a/l$, т.е. частота приложенного к линии напряжения не должна совпадать с частотами собственных колебаний линии. Другими словами, полученное решение справедливо для линий при отсутствии в них явлений резонанса, при которых $\omega = \omega_m$.

2.6. Физические аналогии.

Для линии передачи с распределенными параметрами в 2.5 была получена система телеграфных уравнений (2.25), (2.26), которая в случае линии без потерь ($R = 0, G = 0$) имеет вид

$$\begin{cases} u_x + Li_t = 0, \\ i_x + Cu_t = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Механическим аналогом телеграфных уравнений является система уравнений продольных колебаний стержня

$$\begin{cases} T_x + \rho V_t = 0, \\ V_x + \frac{1}{k} T_t = 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

где T – натяжение стержня,

V – скорость колебаний,

ρ – плотность стержня,

k – коэффициент упругости стержня.

При изучении движения газа по трубам в случае пренебрежения его трением о стенки трубы имеем систему уравнений газодинамики

$$\begin{cases} P_x + \rho V_t = 0, \\ V_x + \frac{1}{\tau} P_t = 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

где P – давление газа,

V – скорость движения,

ρ – плотность газа,

τ – коэффициент упругости газа.

Распространение звука по трубам, т.е. задача акустики, также описывается системой уравнений (2.45).

Таким образом, не смотря на разную физическую природу явлений, эти явления могут быть описаны одной и той же математической моделью или одними и теми же уравнениями математической физики; в рассмотренных случаях – дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа.

3. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

Простейшее однородное уравнение параболического типа впервые было получено при изучении распространения тепла вдоль однородного металлического стержня. Поэтому его называют также уравнением теплопроводности. Оно имеет вид

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

где $U(x,t)$ – функция распределения температуры,

x - координата вдоль оси стержня,

$a = \sqrt{k/C\rho}$ - коэффициент температуропроводности,

k - коэффициент теплопроводности,

P - плотность стержня,

C - удельная теплоемкость металла, из которого выполнен стержень.

В отличие от уравнения гиперболического типа вместо второй производной по времени в него входит первая производная.

При выводе уравнения (3.1) стержень предполагался тонким, а его поверхность теплоизолированной, т.е. процесс теплообмена с окружающей средой не учитывался. Понятие тонкости заключается в том, что распределение температуры по поперечному сечению стержня считается постоянным. Ось x совпадает с осью стержня. Если в начальный момент времени стержень нагрет, и нагрет неравномерно, то с течением времени происходит выравнивание его температуры. И если нет теплообмена с окружающей средой, то температура вдоль стержня во времени устанавливается и достигает определённого постоянного значения.

Если предположить, что на некоторых участках стержня может выделяться или поглощаться тепло, то такая ситуация соответствует наличию тепловых источников. И тогда уравнение (3.1), как и уравнение колебаний струны под действием внешних сил, должно быть неоднородным

$$U_t - a^2 U_{xx} = G(x,t), \quad (3.2)$$

где $G(x,t) = \frac{1}{CS\rho} g(x,t)$,

S – площадь поперечного сечения стержня,

$g(x,t)$ – плотность сторонних тепловых источников.

Если тепло поглощается, то $g(x,t) < 0$; если выделяется, то $g(x,t) > 0$. Естественно, уравнения (3.1), (3.2) получены при некоторой идеализации процесса, т.е. с учетом только наиболее существенных параметров, определяющих процесс.

3.1. Постановка задач для уравнений параболического типа.

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. Начальное условие применительно к уравнению теплопроводности заключается в задании распределения температуры по стержню в начальный момент времени, т.е.

$$U(x,t) \Big|_{t=0} = f(x) . \quad (3.3)$$

Начальное условие на первую производную не требуется, так как в уравнения (3.1), (3.2) вторая производная по времени не входит.

Граничные условия должны задаваться в тех точках, в которых возможен теплообмен с окружающей средой. Если боковая поверхность стержня теплоизолирована, а размеры стержня конечны, то теплообмен возможен только через торцы. Пусть торцы стержня имеют координаты $x=0$, $x=l$. Самый простой случай граничных условий на торцах, когда они поддерживаются при постоянной температуре, т.е.

$$U(x,t) \Big|_{x=0} = U_0 , \quad U(x,t) \Big|_{x=l} = U_l , \quad (3.4)$$

где U_0 и U_l – заданные числовые значения температуры.

Однако чаще бывает, когда через торцы происходит теплообмен с окружающей средой, который, как обычно предполагают, подчиняется закону Ньютона. Согласно этому закону поток тепла в единицу времени через единицу поверхности пропорционален разности температур тела и окружающей среды, т.е. пропорцио-

нален $h_{0,l}(U_{0,l} - U_{среды})$, где h – коэффициент теплообмена, зависящий от физических свойств стержня и среды. В итоге граничные условия на торцах стержня могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} k\partial U / \partial x \Big|_{x=0} = h_0(U_0 - U_{среды}), \\ -k\partial U / \partial x \Big|_{x=l} = h_l(U_l - U_{среды}), \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\partial U / \partial x$ – градиент температуры в направлении оси стержня,

k – коэффициент теплопроводности,

разные знаки связаны с противоположными направлениями потоков тепла.

Если торцы стержня теплоизолированы, то $h_{0,l}=0$ и тогда граничные условия переходят в однородные.

В общей теории дифференциальных уравнений в частных производных показывается, что уравнения (3.1) или (3.2) с начальными условиями (3.3) и граничными условиями типа (3.4), (3.5) имеют единственное решение.

Уравнениями параболического типа описываются также процессы *диффузии*, т.е. распространение или перенос вещества в какой-либо среде в направлении убывания его концентрации, обусловленный тепловым движением частиц, молекул, атомов. Диффузия используется в ряде технологических процессов, в частности при производстве оптических волокон. Неизвестной функцией является распределение концентрации диффундирующего вещества $C(x, t)$. Для однородной задачи диффузии в тонкой трубке с непроницаемой поверхностью имеем

$$C_t - DC_{xx} = 0, \quad (3.6)$$

где D – коэффициент диффузии,

x – координата вдоль оси трубки.

Начальное условие типа

$$C(x, t)_{t=0} = f(x) \quad (3.7)$$

задаёт распределение начальной концентрации вещества.

Простейшие из граничных условий имеют вид

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left. C \right|_S = C_0, \quad (3.8)$$

где S – граница области, в которой происходит диффузия,

n – нормаль к граничной поверхности.

Первое из условий соответствует непроницаемой границе, а второе задаёт значение концентрации вещества на границе области.

В большинстве практически важных задач коэффициент диффузии является величиной переменной. Рассмотрим два частных случая.

1. Коэффициент диффузии является функцией только времени $D=D(t)$. В этом случае имеем уравнение с переменным коэффициентом

$$C_t - D(t)C_{xx} = 0. \quad (3.9)$$

От него можно перейти к уравнению с постоянным коэффициентом, если ввести новую переменную по формуле

$$\theta = \int_0^t D(\tau) d\tau$$

и учесть, что

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot D(t) = C_\theta D(t).$$

В результате уравнение (3.9) примет простой вид

$$C_\theta - C_{xx} = 0.$$

Начальные и граничные условия при этом не изменятся, так как в них не входит $D(t)$.

2. Коэффициент диффузии является функцией только расстояния, т.е. $D=D(x)$. В этом случае уравнение не сводится к уравнению с постоянными коэффициентами и его приходится решать приближенно. Один из приближенных методов основан на аппроксимации $D(x)$ кусочно-постоянной функцией. Для этого трубка условно разбивается на N частичных интервалов и в каждом частичном интервале считают, что $D(x) = D_n = \text{const}$, $n=1,2,3,\dots,N$. На границе между интервалами

требуют непрерывность решения и задают так называемые условия сопряжения или сшивания, а в каждом частичном интервале задачу решают как для трубки с постоянным коэффициентом диффузии D_n .

3.2. Решение задачи теплопроводности для бесконечно протяженного стержня.

Рассмотрим тонкий теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Реальный стержень всегда имеет ограниченные размеры. Предположим, что стержень достаточно длинный, длинный в том смысле, что влияние температурных условий на концах стержня в течение некоторого временного интервала не будет сказываться на процессе, возникшем в начальный момент времени в его серединной части. При этих условиях стержень можно считать бесконечно протяженным и для него сформулировать задачу только с начальными условиями, т.е. задачу Коши. Если сделать замену переменных $\tau = a^2 t$, то параметра a^2 в уравнении (3.1) не будет, а вид начальных условий сохранится. Постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} U_\tau - U_{xx} = 0, \\ U(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = f(x), \\ U(x, \tau) \rightarrow const, |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

Применим уже известный нам метод разделения переменных, положив

$$U(x, \tau) = X(x) \cdot T(\tau). \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в уравнение (3.9), получим

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как левая и правая части равенства зависят от разных переменных, то его выполнение возможно, если они равны некоторой постоянной $b = const$. Общим решением уравнения во временной области

$$T'(\tau) - bT(\tau) = 0$$

является

$$T(\tau) = Ce^{b\tau}.$$

Поскольку из физических соображений температура не может неограниченно возрастать с течением времени, то необходимо считать $b < 0$. Пусть $b = -\lambda^2 < 0$. Тогда общим решением второго уравнения

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

будет

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

В итоге решение уравнения (3.9) примет вид

$$U = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}.$$

Вообще говоря, для каждого значения λ мы должны выбирать разные значения постоянных A, B, C . Другими словами эти постоянные будут функциями параметра λ . Поэтому можно записать

$$U(x, \tau; \lambda) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \cdot e^{-\lambda^2 \tau}, \quad (3.11)$$

где λ может принимать любые значения из интервала $(-\infty, +\infty)$.

Так как уравнение (3.9) линейное, то его общим решением будет суперпозиция решений (3.11), непрерывным образом зависящих от λ , т.е. интеграл типа

$$U(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \tau; \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \cdot e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (3.12)$$

Теперь, чтобы (3.12) являлось решением задачи (3.9), из начального условия необходимо найти функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$. При $\tau = 0$ имеем

$$U(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda,$$

т.е. известная функция $f(x)$ оказалась представленной суперпозицией двух интегралов Фурье (разложений в интеграл Фурье по косинусам и по синусам). Как

следует из общей теории интеграла Фурье или интегрального преобразования Фурье, функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ также имеют представления в виде интегралов Фурье:

$$\begin{cases} \alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \\ \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \end{cases} \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (3.12) и учтя известное из тригонометрии соотношение

$$\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi = \cos \lambda(x - \xi)$$

получим решение задачи Коши в виде двойного интеграла

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) \cdot e^{-\lambda^2 \tau} d\xi. \quad (3.14)$$

где $f(\xi)$ - известная из начальных условий функция.

Если в (3.14) изменить порядок интегрирования, то интеграл по λ

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda$$

может быть вычислен. Для этого сделаем замену $\sigma^2 = \lambda^2 \tau$ или $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$ и обозна-

чим $\frac{x - \xi}{\sqrt{\tau}} = \omega$. Теперь интеграл

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \omega \sigma d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}} I(\omega)$$

можно будет вычислить методом дифференцирования по параметру. Возьмем производную и проинтегрируем по частям

$$I'(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \sin \omega \sigma \cdot \sigma d\sigma =$$

$$\frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sin \omega \sigma \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \omega \sigma d\sigma = -\frac{1}{2} \omega I(\omega).$$

Внеинтегральный член обращается в ноль за счет экспоненты и мы приходим к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Процедура стандартная:

$$\frac{I'(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{1}{2} \omega, \quad \ln I(\omega) = -\frac{1}{4} \omega^2 + \ln C_1, \quad I(\omega) = C_1 e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из условия при $\omega=0$. В этом случае интеграл является известным интегралом Пуассона

$$I(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}.$$

Окончательно

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}, \quad I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}.$$

Поставив в (3.14) значение I_1 , получим решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в случае бесконечно протяженного стержня

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi, \quad \tau = a^2 t.$$

Оно может быть переписано в виде

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi) f(\xi) d\xi. \quad (3.15)$$

Функцию

$$G(x, t; \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (3.16)$$

называют *фундаментальным решением* или *функцией мгновенного точечного источника задачи теплопроводности для неограниченного стержня*. Функция $G(x,t;\xi)$ описывает распределение температуры по стержню (вдоль координаты x) в любой момент времени $t > 0$ при условии, что в начальный момент времени $t=0$ в некоторой точке $x = \xi$ было выделено некоторое количество тепла $Q_0 = c\rho$, где c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность стержня.

Количества тепла, выделенного в стержне, в любой произвольный момент времени $t > 0$, будет равно

$$Q = Q_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t;\xi) d\xi = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}. \quad (3.17)$$

Сделаем замену $\alpha = \frac{|x-\xi|}{2a\sqrt{t}}$, $d\alpha = \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$.

В результате получим

$$Q = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q_0.$$

Таким образом, количество тепла в стержне с течением времени не меняется и является величиной постоянной. Этого следовало, и ожидать, поскольку при постановке задачи стержень предполагался теплоизолированным и для него должен выполняться закон сохранения количества тепла. График функции $G(x,t;\xi)$ от аргумента $(x - \xi)$ для разных моментов времени $\tau = a^2t$ приведён на рис. 3.1.

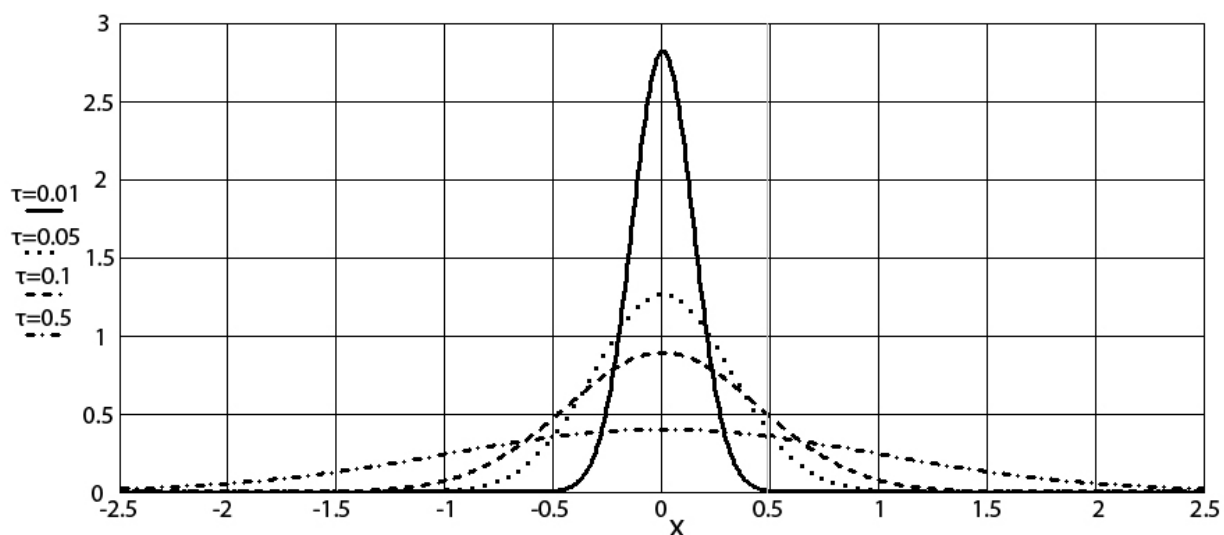


Рис. 3.1. График функции мгновенного точечного источника.

Видно, что для малых значений времени τ почти все количество тепла сосредоточено вблизи точки $x = \xi$, где оно было выделено в начальный момент времени $\tau = 0$. В точке $x = \xi$ значение функции мгновенного точечного источника равно

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}$$

и неограниченно возрастает при $\tau \rightarrow 0$. Площади, ограниченные кривыми и осью $(x - \xi)$, представляют значения интегралов типа (3.17) для разных τ и определяют количество тепла в разные моменты времени. А оно является величиной постоянной, поэтому все площади под кривыми одинаковы. Из вида функции $G(x, t; \xi)$ – формула (3.16), также следует, что при $\tau > 0$ вклад в значение интеграла точек, достаточно удаленных от точки $x = \xi$, будет экспоненциально мал, что оправдывает переход к неограниченному стержню, сделанный при постановке задачи.

3.3. Задача теплопроводности без начальных условий.

Если исследуется процесс теплопроводности в момент времени, достаточно удалённый от начального, то влияние начальных условий на распределение температуры практически не сказывается. В качестве примера рассмотрим крае-

вую задачу для полугораниченного стержня в случае установившегося гармонического во времени процесса, который поддерживается источником, включенным на конце стержня $x = 0$. Постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, \\ U(x, t) \Big|_{t=0} = U_0 e^{i\omega t}, \\ U(x, t) \rightarrow \text{const}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.18)$$

Её решение будем искать в форме

$$U(x, t) = U_0 e^{(\alpha x + \beta t)}, \quad (3.19)$$

где α и β – неопределённые постоянные.

Подставляя (3.19) в уравнение (3.18), находим $\beta = \alpha^2 a^2$, $\beta = i\omega$.

Тогда
$$\alpha = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right).$$

С учетом найденных значений α и β для $U(x, t)$ окончательно получаем

$$U(x, t) = U_0 \exp \left[\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i(\omega t \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x) \right].$$

Поскольку температура не может неограниченно возрастать при $x \rightarrow \infty$, то физическому требованию ограниченности при $x \rightarrow \infty$ будет удовлетворять решение с нижними знаками.

3.4. Решение задачи теплопроводности для ограниченного стержня.

Постановка задачи имеет вид:

Найти непрерывное в замкнутой области ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$) решение однородного уравнения

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

и однородным граничным условиям

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.20)$$

Последние условия означают, что концы стержня поддерживаются при нулевой температуре.

Известно, что решение этой задачи удовлетворяет так называемому *принципу максимального значения*, который может быть сформулирован в виде следующей *теоремы*:

Если функция $U(x,t)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, то максимальные значения функции $U(x,t)$ достигаются или в начальный момент времени $t = 0$ или в конечных точках границы $x = 0$, $x = l$.

Физический смысл теоремы очевиден: если температура в конечных точках и в начальный момент не превосходит некоторого значения U_{max} , то внутри тела при отсутствии тепловых источников не может создаваться температура, большая U_{max} . Функция $U(x,t) = const$ удовлетворяет уравнению (3.1) в любой точке области. Однако это не противоречит теореме, так как эти же значения должны достигаться или при $t = 0$ или при $x = 0$ и при $x = l$. Доказательство теоремы проводится методом от противного.

Для решения задачи применим *метод разделения переменных*, т.е. представим ее решение в виде:

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставив в уравнение (3.1), получим соотношение

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \text{const} = -\lambda^2,$$

из которого следуют два уравнения

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T' + a^2 \lambda^2 T = 0.$$

С учетом граничных условий (3.20) относительно функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Эту задачу мы уже рассматривали в 2.3 и установили, что она имеет нетривиальное решение

$$X_m(x) = A_m \sin(\lambda_m x),$$

только для значений параметра

$$\lambda_m = m \frac{\pi}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда решением второго уравнения

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

будет

$$T_m(t) = B_m e^{-a^2 \lambda_m^2 t}.$$

Функции

$$U_m(x, t) = C_m \sin(\lambda_m x) e^{-a^2 \lambda_m^2 t} \quad (3.21)$$

являются решениями уравнения (3.1) с однородными граничными условиями (3.20). Составим формально ряд

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(m \frac{\pi}{l} x\right) e^{-\left(m \frac{\pi}{l} a\right)^2 t}. \quad (3.22)$$

Функция (3.22) удовлетворяет граничным условиям (3.20), поскольку каждый член ряда удовлетворяет им. Требуя выполнения начальных условий (3.3), получим

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(m \frac{\pi}{l} x\right),$$

т.е. C_m являются коэффициентами разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0,l)$ и имеют вид

$$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\left(m \frac{\pi}{l} \xi\right) d\xi. \quad (3.23)$$

Подставим (3.23) в (3.22), изменив порядок суммирования и интегрирования, что возможно в силу равномерной сходимости ряда по ξ при $t > 0$. В результате получим

$$U(x,t) = \frac{2}{l} \int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(m \frac{\pi}{l} a\right)^2 t} \sin\left(m \frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{l} \xi\right) f(\xi) d\xi. \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) может быть переписано как

$$U(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi) f(\xi) d\xi, \quad (3.25)$$

где функция

$$G(x,t;\xi) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(m \frac{\pi}{l} a\right)^2 t} \sin\left(m \frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{l} \xi\right) \quad (3.26)$$

называется *функцией мгновенного точечного источника* или фундаментальным решением задачи теплопроводности для ограниченного стержня. Функция (3.26), как функция от x , описывает распределение температуры по стержню $0 \leq x \leq l$ в любой момент времени t , если температура в начальный момент времени $t = 0$

равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла. При этом на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Сравнивая между собой выражения (3.15) и (3.26) приходим к выводу о том, что решения задач теплопроводности с произвольным распределением тепловых источников, если для них найдена функция мгновенного точечного источника, могут быть представлены в виде интеграла по длине стержня от произведения этой функции на функцию распределения источников.

4. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. ФУНКЦИЯ ГРИНА И δ -ФУНКЦИЯ ДИРАКА. МЕТОД ПЕРЕВАЛА.

4.1. Постановка граничных задач для уравнений эллиптического типа.

При исследовании стационарных процессов различной физической природы обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Простейшим уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0, \quad (4.1)$$

где Δ – оператор Лапласа в соответствующей системе координат.

Функция U , непрерывная в области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

В качестве примера рассмотрим несколько задач, связанных с уравнением Лапласа.

1. Нестационарное тепловое поле или нестационарное распределение температуры в случае линейной задачи теплопроводности удовлетворяет уравнению параболического типа

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0, \quad a^2 = k/c\rho.$$

В случае трехмерной задачи, т.е. когда решение зависело бы от трёх пространственных координат (x, y, z) , уравнение (3.1) имело бы вид

$$U_t - a^2 \Delta U = 0. \quad (4.2)$$

Если процесс стационарный, т.е. не меняется во времени, то $U_t = 0$ и уравнение (4.2) переходит в уравнение Лапласа (4.1).

При наличии источников тепла это уравнение было бы неоднородным

$$\Delta U(x, y, z) = -f(x, y, z). \quad (4.3)$$

Неоднородное уравнение Лапласа обычно называют уравнением Пуассона.

2. Пусть внутри некоторого объема имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости, характеризуемое вектором скорости \vec{V} . Если течение жид-

кости не вихревое, то скорость является потенциальной векторной функцией от некоторой скалярной функции φ , называемой потенциалом скоростей. Они связаны дифференциальным соотношением

$$\vec{V} = - \text{grad} \varphi. \quad (4.4)$$

Например, в декартовой системе координат, характеризуемой единичными ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, функция $\text{grad} \varphi$ имеет наиболее простой вид:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Поскольку производная от функции по координате определяет скорость изменения функции, то в данном случае $\text{grad} \varphi$ определяет скорость изменения потенциала в виде проекции на координатные оси. В этом физический смысл градиента.

Если источники отсутствуют, то для вектора скорости \vec{V} выполняется соотношение

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (4.5)$$

где скаляр $\text{div} \vec{V}$ в декартовой системе координат через проекции вектора скорости \vec{V} на координатные оси выражается соотношением

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Подставив (4.5) в (4.4), получим

$$\text{div} \text{grad} \varphi = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0,$$

т.е. потенциал скоростей удовлетворяет однородному уравнению Лапласа (4.1).

3. Пусть в проводящей среде, характеризуемой проводимостью σ , имеется стационарный ток с объемной плотностью \vec{j} . Если в среде нет других источников, то $\text{div} \vec{j} = 0$. Из векторной формы закона Ома для вектора напряженности электри-

ческого поля \vec{E} имеем $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$. Поскольку процесс стационарный, то как ток, так и электрическое поле являются безвихревыми или потенциальными, т.е. выражаются через некоторую скалярную функцию φ , называемую потенциалом, $\vec{A} = -grad\varphi$, $\vec{j} = -\sigma grad\varphi$. В случае отсутствия сторонних источников потенциал будет удовлетворять однородному уравнению Лапласа (4.1).

Подобные примеры можно было бы продолжать. Все они имеют дело со стационарными процессами, поэтому в постановках задач отсутствуют начальные условия. Подобные задачи называются граничными.

Обратимся к постановке граничных задач для уравнений Лапласа, а затем и Гельмгольца.

В некотором объеме V , ограниченном поверхностью S , протекает стационарный процесс, который описывается функцией $U(x,y,z)$. В зависимости от вида граничных условий могут быть сформулированы три, отличающиеся видом граничных условий, задачи для уравнения Лапласа: найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую внутри V уравнению

$$\Delta U = 0 \quad (4.1)$$

и одному из граничных условий на поверхности S :

1) $U|_S = f_1$ – первая граничная задача или задача Дирихле,

2) $\frac{\partial U}{\partial n}|_S = f_2$ – вторая граничная задача или задача Неймана, 3)

$\left[\frac{\partial U}{\partial n} + qU \right]|_S = f_3$ – третья (смешанная) граничная задача;

n – внешняя к поверхности S нормаль, $q=const$.

Если решение ищется в области, внутренней или внешней по отношению к поверхности S , то соответствующую задачу называют внутренней или внешней.

Скалярное уравнение Гельмгольца описывает установившиеся гармонические колебания в радиотехнических системах или распространение волн в средах

и линиях передачи, характеризующиеся временной зависимостью типа $e^{\pm i\omega t}$, ω – угловая частота. Оно является частным случаем трехмерного волнового уравнения и после взятия второй производной по времени от экспоненты приводится к виду

$$\Delta U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0, \quad (4.6)$$

где $k = \omega \sqrt{\bar{\epsilon} \bar{\mu}} = \omega / V_\phi = 2\pi / \lambda_g$ – постоянная распространения,

$\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$ – безразмерные относительные параметры среды,

V_ϕ – фазовая скорость волны в среде,

$\lambda_g = \lambda / \sqrt{\bar{\epsilon} \bar{\mu}}$ – волновая длина волны в линии или среде,

λ – длина плоской волны в вакууме или длина волны генератора,

\vec{r} – вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения.

Видно, что уравнение Лапласа (4.1) является частным случаем уравнения Гельмгольца (4.6) при $\omega = 0$, т.е. в случае стационарных, не зависящих от времени и частоты процессов или статических полей. Граничные условия по внешнему виду для уравнения Гельмгольца совпадают с граничными условиями для уравнения Лапласа, поэтому постановки задач отличаются только видом самих уравнений.

4.2. Функция Грина и δ -функция Дирака.

При решении сложных задач математические физики часто вводят вспомогательные функции, являющиеся решением более простой граничной задачи и связанные с искомой функцией простыми соотношениями. Выбор вспомогательной функции определяется либо формальными преобразованиями, либо физическим смыслом задачи. Такую функцию в случае уравнений эллиптического типа называют функцией Грина или функцией точечного источника (но не мгновенного, так как процесс гармонический). Естественно функции типа Грина могут быть введены при решении различных физических задач, описываемых различными

типами уравнений. Рассмотрим введение функции Грина на примере неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta U(\vec{r}, \vec{r}_0) + k^2 U(\vec{r}, \vec{r}_0) = -f(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad (4.7)$$

где \vec{r}_0 – вектор, проведенный из начала координат в точку источника,

$f(\vec{r}, \vec{r}_0)$ – плотность распределения внешних источников.

Пусть источники распределены в некотором объеме V_0 , точки которого характеризуются вектором \vec{r}_0 (рис.4.1). Вне этого объема точки характеризуются вектором \vec{r} ; $Q(\vec{r}_0)$ и $P(\vec{r})$ – произвольные точки.

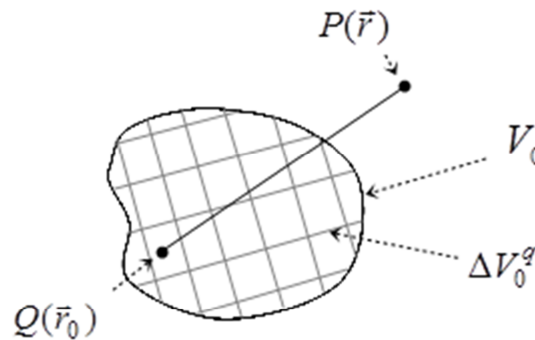


Рис. 4.1. Геометрия задачи

Для нахождения решения уравнения (4.7), т.е. поля, порождаемого заданным в объеме V_0 распределением источников, воспользуемся принципом суперпозиции полей. Разобьем V_0 на элементарные объемы ΔV_0^q , $q = 1, 2, 3, \dots$, которые предполагаются настолько малыми, что в пределах них $f(\vec{r}, \vec{r}_0^q) = const$. Обозначим через $G(\vec{r}, \vec{r}_0^q)$ поле, создаваемое в точке $P(\vec{r})$ элементарным источником единичной интенсивности, сосредоточенным в элементе ΔV_0^q . Под источником единичной интенсивности будем понимать источник, для которого интеграл от функции плотности распределения по всему объему, занятому источником, равен

единице. Вообще, интенсивностью или силой источника (в зависимости от природы явления) называется интеграл

$$I(\vec{r}) = \int_{V_0} f(\vec{r}, \vec{r}_0) dV_0. \quad (4.8)$$

Тогда поле, создаваемое в пространстве элементом ΔV_0^q с плотностью $f(\vec{r}, \vec{r}_0^q) = \text{const}$ внутри него, будет равно

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0^q) = G(\vec{r}, \vec{r}_0^q) f(\vec{r}, \vec{r}_0^q) \cdot \Delta V_0^q.$$

Просуммировав поля всех элементов, получим

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_q G(\vec{r}, \vec{r}_0^q) f(\vec{r}, \vec{r}_0^q) \cdot \Delta V_0^q. \quad (4.9)$$

При $\Delta V_0^q \rightarrow 0$ от суммы можно перейти к интегралу с непрерывными распределениями источников и тогда

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) = \int_{V_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}, \vec{r}_0) dV_0. \quad (4.10)$$

Функция $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ называется функцией Грина. Она описывает поле, создаваемое в точке $P(\vec{r})$ точечным источником единичной интенсивности, расположенным в точке $Q(\vec{r}_0)$. Функция Грина является решением неоднородного уравнения, правая часть которого (плотность распределения источников) отлична от нуля лишь в одной точке $\vec{r} = \vec{r}_0$. Очевидно, точечный источник является удобной идеализацией и с математической точки зрения представляет предел

$$f(\vec{r}, \vec{r}_0) = \lim_{dV_0 \rightarrow 0} I(\vec{r}) / dV_0 = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_0; \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Кроме того, функция $f(\vec{r}, \vec{r}_0)$ такого источника единичной интенсивности, как мы уже говорили, должна удовлетворять условию

$$\int_{V_0} f(\vec{r}, \vec{r}_0) dV_0 = \begin{cases} 1, & \vec{r}_0 \in V_0; \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Функцию, удовлетворяющую условиям (4.11) и (4.12) обозначают символом $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ и называют дельта-функцией. Она впервые была введена в 1923 г. английским физиком-теоретиком П. Дираком для обозначения точечных масс и зарядов (тогда ему был 21 год).

Условия (4.11) и (4.12) противоречивы, так как интеграл от обычной функции, отличной от нуля только в одной точке, должен быть равен нулю. Кроме того, при $\vec{r} = \vec{r}_0$ эта функция не определена (обращается в бесконечность). Поэтому δ -функция не может рассматриваться как функция в обычном смысле. Она относится к классу так называемых *обобщенных функций*. Проще всего обобщенную функцию представить через понятие слабого предела для последовательности непрерывных или кусочно-непрерывных функций.

Под *слабым пределом* последовательности непрерывных или кусочно-непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ понимается такая функция $f(x)$, для которой существует предел

$$Lf(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Lf_n(x),$$

где L – некоторый непрерывный линейный функционал. В частности, для функций, определенных на интервале $[a, b]$, широко известным примером такого

функционала является определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Если выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (4.13)$$

то такой предел называется *строгим пределом* последовательности функций $\{f_n(x)\}$. Если же строгий предел (4.13) не существует, но существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

то говорят, что существует *слабый предел* и он равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.14)$$

В данном случае предел понимается в интегральном смысле. Интегрирование сглаживает функцию, делает ее более «хорошей». Например, вычет в особой точке конечен, хотя сама функция в ней обращается в бесконечность. Очевидно, что под понятие слабого предела подпадает значительно больший класс функций.

Рассмотрим функцию $\gamma(x, \alpha)$, непрерывно зависящую от x при $\alpha > 0$ и такую, что при $\alpha \rightarrow \infty$ она принимает значения

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(x, \alpha) = \gamma(x) = \begin{cases} 1/2, & x > 0; \\ -1/2, & x < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Это так называемая ступенчатая функция или функция единичного скачка. Одной из таких функций является функция

$$\gamma(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \frac{\sin(x\tau)}{\tau} d\tau, \quad (4.16)$$

имеющая представление в виде интеграла Лапласа. При $\alpha > 0$ ее производная по x равна

$$\gamma'_x(x, \alpha) = \delta(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(x\tau) d\tau, \quad (4.17)$$

т.е. при $\alpha > 0$ эта функция является непрерывной и дифференцируемой. При $\alpha \rightarrow 0$ она отлична от нуля лишь в точке $x = 0$, где неограниченно возрастает. Это свойство можно записать следующим образом

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(x, \alpha). \quad (4.18)$$

Определим интеграл от $\delta(x)$ как

$$\int_{-a}^a \delta(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-a}^a \delta(x, \alpha) dx. \quad (4.19)$$

Тогда с учетом (4.15), (4.17) при $\alpha \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{-a}^a \delta(x) dx = \gamma(a, \alpha) - \gamma(-a, \alpha) = 1, \quad (4.20)$$

т.е. и второе свойство δ -функции выполняется. Поэтому введенная нами посредством формул (4.16) - (4.20) функция действительно является δ -функцией Дирака.

Её основные свойства:

1. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$.
2. $\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), x_0 \in (a, b); \\ 0, x_0 \notin (a, b). \end{cases}$
3. $x\delta(x) = 0$.
4. $\delta(x - x_0)$ имеет размерность $1/x$.

Другим примером функции, из которой посредством предельного перехода может быть получена δ -функция, является функция

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\alpha}{4\pi} e^{-\alpha^2 x^2}, \quad (4.21)$$

График этой функции для разных значений α показан на рис. 4.2

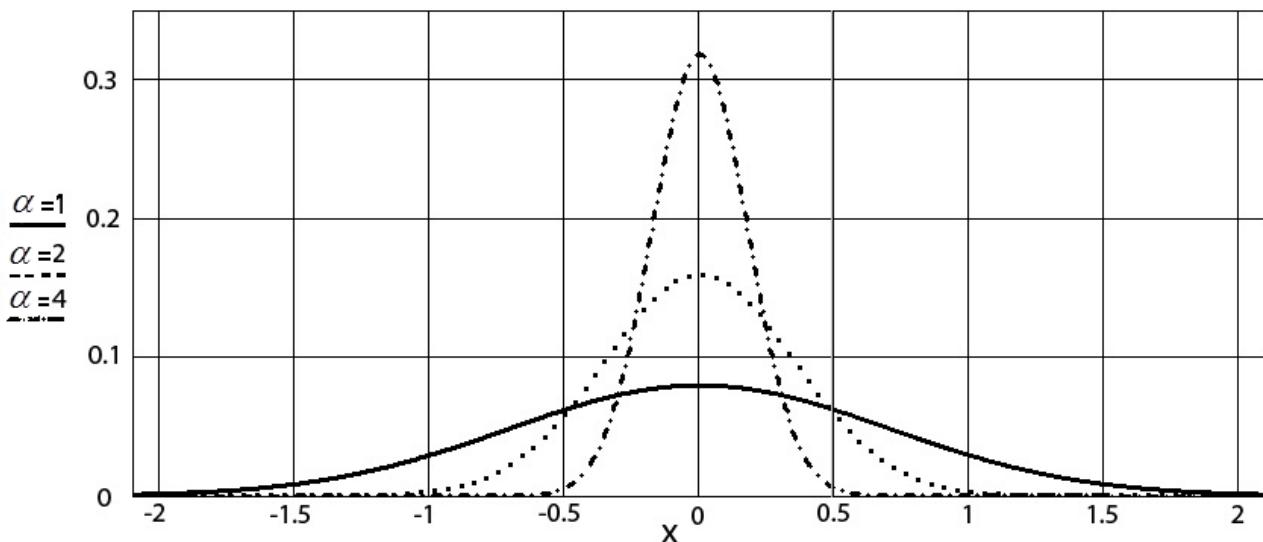


Рис. 4.2. График функции $\delta(x, \alpha)$.

При $\alpha \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$ эта функция неограниченно возрастает. В то время как интеграл остается равным единице

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \alpha) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Понятие точечных источников широко применяется в физике. Такому источнику соответствует источник, размеры которого много меньше расстояния до точки наблюдения, а для переменных во времени полей много меньше длины волны. Например, точечный заряд в электростатике, точечная масса в механике, точечный источник или элементарный диполь в электродинамике. Математически такому источнику соответствует точка, в которой сосредоточены определенные заряд, масса или ток. Но это означает, что соответствующие распределения плотностей источников должны в этой точке стремиться к бесконечности. Для описания таких точечных источников и вводится δ -функция.

Теперь снова вернемся к функции Грина. Она в трехмерном случае должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца с δ -образной правой частью

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.22)$$

Для свободного пространства, т.е. в случае точечного источника, находящегося в однородной изотропной среде, в декартовой системе координат функция Грина равна

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikR}}{R}, \quad (4.23)$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Двойные знаки соответствуют временным зависимостям $e^{\mp i\omega t}$. Видно, что при совпадении точек источника и наблюдения ($\vec{r} = \vec{r}_0$) функция Грина обращается в бесконечность.

Если рассматривается двумерная задача, в которой поля зависят лишь от двух координат, например, x и y , то роль точечного источника играет бесконечно

тонкая неограниченная нить, ориентированная вдоль оси z . Для такой нити, находящейся в свободном пространстве, выражение для функции Грина в цилиндрической системе координат имеет вид

$$G(\rho, \rho_0) = -\frac{1}{4} H_0^{(1),(2)}(k\rho), \quad (4.24)$$

где $\rho = |\vec{\rho} - \vec{\rho}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $H_0^{(1),(2)}(k\rho)$ – функция Ханкеля первого или второго рода нулевого порядка, соответственно для временных зависимостей вида $e^{\mp i\omega t}$.

Эта функция соответствует двумерному точечному источнику единичной интенсивности. При совпадении точек источника и наблюдения ($\vec{\rho} = \vec{\rho}_0$) она обращается в бесконечность по логарифмическому закону.

4.3. Построение одномерной функции Грина

Многомерные функции Грина могут быть построены на основе разложений по одномерным функциям. Построение одномерной функции Грина рассмотрим на примере задачи Штурма-Лиувилля, т.е. для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Одномерная функция Грина в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \right] + [\lambda q(x) - g(x)] G(x, x_0) = -\delta(x - x_0), \quad (4.25)$$

где $x, x_0 \in (a, b)$.

В качестве граничных условий можем записать смешанные условия третьего рода, как наиболее общие,

$$\begin{cases} [\alpha_1 G(x, x_0) + \beta_1 G'_x(x, x_0)]_{x=a} = 0, \\ [\alpha_2 G(x, x_0) + \beta_2 G'_x(x, x_0)]_{x=b} = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Для решения задачи нам необходимо знание поведения функции Грина в особой точке $x = x_0$, т.е. в точке источника. С этой целью проинтегрируем уравнение (4.25) в окрестности точки источника в пределах от $(x_0 - \varepsilon)$ до $(x_0 + \varepsilon)$

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \frac{d}{dx} \left(\partial \frac{dG}{dx} \right) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} (\lambda q - g) G dx = -1.$$

Если точка $x = x_0$ для однородного уравнения (4.25) является правильной, то сама функция $G(x, x_0)$ в этой точке ограничена и непрерывна, а производная может иметь разрыв. Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\partial(x_0) \left[\frac{dG}{dx} \Big|_{x_0 + 0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x_0 - 0} \right] = -1,$$

если $p(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Таким образом, производная одномерной функции Грина в точке источника имеет разрыв непрерывности, равный $-1/p(x_0)$, а сама функция Грина в этой точке непрерывна. Теперь дополнительно к граничным условиям (4.26) мы можем добавить условия в точке источника

$$\begin{cases} G(x_0 + 0, x_0) - G(x_0 - 0, x_0) = 0, \\ \frac{dG}{dx} \Big|_{x_0 + 0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x_0 - 0} = -\frac{1}{p(x_0)}. \end{cases} \quad (4.27)$$

и перейти к решению однородного уравнения с условиями (4.27). Окончательно, формулировка задачи будет выглядеть так:

найти решение однородного уравнения типа (4.25)

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{dG}{dx} \right) + (\lambda q - g) G = 0 \quad (4.28)$$

с условиями (4.26) в концевых точках интервала интегрирования и (4.27) в точке источника. Можно показать, что решение такой задачи существует и при том единственное.

Так как точка $x = x_0$ находится внутри интервала интегрирования, то при $x \in (a, x_0)$ решение уравнения должно удовлетворять граничному условию в точке $x = a$, а при $x \in (x_0, b)$ - в точке $x = b$. Обозначим эти решения как

$$G_1(x, x_0) = C_1(x)U_1(x) \quad \text{и} \quad G_2(x, x_0) = C_2(x)U_2(x). \quad (4.29)$$

Постоянные C_1, C_2 можно найти из условия (4.27), подставив в них (4.29):

$$\begin{cases} C_1U_1(x_0) - C_2U_2(x_0) = 0 \\ C_1 \frac{dU_1}{dx} \Big|_{x=x_0} - C_2 \frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{1}{p(x_0)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Эта алгебраическая система уравнений относительно C_1 и C_2 имеет нетривиальное решение, если ее вронскиан отличен от нуля

$$W(U_1, U_2)_{x=x_0} = U_1(x_0) \frac{dU_2}{dx} \Big|_{x=x_0} - U_2(x_0) \frac{dU_1}{dx} \Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

В соответствие с методом решения подобных систем получаем

$$C_1 = -\frac{U_2(x_0)}{[p(x_0)W(U_1, U_2)]_{x=x_0}}, \quad C_2 = -\frac{U_1(x_0)}{[p(x_0)W(U_1, U_2)]_{x=x_0}}. \quad (4.31)$$

Окончательно

$$G(x, x_0) = \frac{-1}{[p(x_0)W(U_1, U_2)]_{x=x_0}} \begin{cases} U_1(x)U_2(x_0), & x \in [a, x_0], \\ U_1(x_0)U_2(x), & x \in [x_0, b]. \end{cases} \quad (4.32)$$

По этой формуле мы можем найти функцию Грина любого обыкновенного дифференциального оператора второго порядка или однородной задачи Штурма-Лиувилля.

Решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{dU}{dx} \right) + (\lambda q - g)U = f(x) \quad (4.33)$$

выражается через решение однородной задачи следующим образом

$$U(x) = \int_a^b f(x_0)G(x, x_0)dx_0 - p(x_0) \left[G(x, x_0) \frac{dU(x_0)}{dx_0} - U(x_0) \frac{dG(x, x_0)}{dx_0} \right]_a^b. \quad (4.34)$$

Конкретный вид решения определяется конкретным видом коэффициентов и параметров уравнения.

В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях струны с закрепленными концами под воздействием внешней периодической силы. Пусть отклонение струны описывается функцией $U(x, t)$. Постановка соответствующей задачи для уравнения гиперболического типа имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(x) e^{-i\omega t}, \\ U(0, t) = U(l, t) = 0; x \in (0, l), t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (4.35)$$

где $0, l$ – координаты концов струны, c – скорость распространения колебаний.

Периодическое (вынужденное) воздействие заставляет струну колебаться с такой же угловой частотой ω . Поэтому можно положить

$$U(x, t) = V(x) e^{-i\omega t}$$

и получить уравнение эллиптического типа с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 V(x) = f(x), \\ V(0) = V(l) = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Решение задачи (4.36) определяется формулой типа (4.34) и требует знания функции Грина, для которой имеем задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} + k^2 G(x, x_0) = -\delta(x - x_0), \\ G(x, x_0) \Big|_{x=0} = G(x, x_0) \Big|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Следуя методу, сначала найдем решение однородного уравнения типа (4.37), удовлетворяющее граничным условиям (4.38). Общее решение однородного уравнения известно

$$\begin{aligned} G_1(x, x_0) &= A_1 \sin kx + B_1 \cos kx, \quad x < x_0; \\ G_2(x, x_0) &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx, \quad x > x_0. \end{aligned}$$

Подставив его в граничные условия (4.38), получим

$$B_1 = 0, \quad A_2 \sin kl + B_2 \cos kl = 0, \quad \text{или}$$

$$G_1(x, x_0) = A_1 \sin kx, \quad x < x_0;$$

$$G_2(x, x_0) = \frac{A_2}{\cos kl} [\sin kx \cos kl - \cos kx \sin kl] = \frac{A_2}{\cos kl} \sin k(x - l), \quad x > x_0.$$

A_1 и A_2 могут быть найдены по формулам (4.31) с учетом того, что

$p(x_0) = 1, W(G_1, G_2)_{x=x_0} = k \sin kl$. Окончательно решение задачи может быть записано с использованием формул (4.32), (4.34) в виде:

$$U(x,t) = e^{-i\omega t} \int_0^l f(x_0)G(x,x_0)dx_0, \quad (4.38)$$

$$G(x,x_0) = \frac{-1}{k \sin kl} \begin{cases} \sin kx \sin k(x_0 - l), & x < x_0; \\ \sin kx_0 \sin k(x - l), & x > x_0. \end{cases} \quad (4.39)$$

4.4. Построение двумерной функции Грина.

Построение двумерной функции Грина рассмотрим на примере двумерного уравнения Гельмгольца, записанного в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = -f(x,y). \quad (4.40)$$

Соответствующее уравнение для функции Грина имеет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k^2 G = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0). \quad (4.41)$$

Сначала методом разделения переменных найдем решение однородного уравнения типа (4.41). Полагая $G(x,y) = X(x)Y(y)$, получим два одномерных уравнения, зависящих от параметра разделения λ :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.42)$$

$$Y'' + (k^2 - \lambda)Y = 0. \quad (4.43)$$

Уравнение (4.42) имеет систему решений, удовлетворяющих на концах интервала интегрирования по x тем же граничным условиям, что и функция Грина. Эти решения с собственными числами λ_n имеют вид

$$X_n(x) = a_n \psi_n(x),$$

где $\psi_n(x)$ – система ортонормированных собственных функций однородного уравнения

$$\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + \lambda_n\psi_n(x) = 0. \quad (4.44)$$

Под *ортонормированными* понимают ортогональные и нормированные с некоторым весом $\rho(x)$ на интервале $[a, b]$ функции, удовлетворяющие условию

$$\int_a^b \rho(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad (4.45)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера.

Как функция Грина, так и δ -функции могут быть разложены в ряды по функциям $\psi_n(x)$:

$$G(x, x_0; y, y_0) = \sum_n A_n(y, y_0)\psi_n(x)\psi_n^*(x_0), \quad (4.45)$$

$$\delta(x - x_0) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_0), \quad (4.46)$$

где (*) означает комплексно сопряженную величину.

С целью выяснения вида $A_n(y, y_0)$ подставим эти разложения в уравнение (4.41):

$$\sum_n \left\{ A_n \left[\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \lambda_n\psi_n \right] \psi_n^*(x_0) + \left[\delta(y - y_0) + \frac{d^2A_n}{dy^2} + (k^2 - \lambda_n)A_n \right] \psi_n(x)\psi_n^*(x_0) \right\} = 0.$$

Выражение в первой квадратной скобке согласно (4.44) обращается в ноль. Оставшаяся сумма равна нулю, если ее члены по отдельности равны нулю. В результате для $A_n(y, y_0)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 A_n(y, y_0)}{dy^2} + (k^2 - \lambda_n) A_n(y, y_0) = -\delta(y - y_0). \quad (4.47)$$

А это уравнение есть не что иное, как уравнение для одномерной функции Грина (12), в котором $\lambda = \lambda_n$, т.е. $A_n(y, y_0) \equiv G_n(y, y_0; k^2 - \lambda_n)$ и

$$G(x, x_0; y, y_0) = \sum_n G_n(y, y_0; k^2 - \lambda_n) \psi_n^*(x_0) \psi_n(x). \quad (4.48)$$

Мы могли бы провести разложение функций Грина и $\delta(y - y_0)$ по собственным функциям $\varphi_m(y)$ другого уравнения (4.42). Тогда получили бы аналогично

$$G(x, x_0; y, y_0) = \sum_n G_m(x, x_0; \lambda_m) \varphi_m^*(y_0) \varphi_m(y), \quad (4.49)$$

где $G_m(x, x_0; \lambda_m)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G_m}{dx^2} + \lambda_m G_m = -\delta(x - x_0). \quad (4.50)$$

Таким образом, построение двумерной функции Грина методом разделения переменных сводится к задаче построения одномерных функций Грина.

Без вывода приведем формулу, дающую представление двумерной функции Грина в виде интеграла по замкнутому контуру от произведения одномерных функций Грина:

$$G(x, x_0; y, y_0) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C G(x, x_0; \lambda) G(y, y_0; k^2 - \lambda) d\lambda. \quad (4.51)$$

Их также называют *характеристическими* и они являются решениями уравнений (4.42), (4.43). Интегрирование ведется в плоскости комплексного переменного λ .

Замкнутый контур C может быть проведен двояким образом: он должен охватывать все особенности либо функции $G(x, x_0; \lambda)$, либо функции $G(y, y_0; k^2 - \lambda)$. Такими особенностями в задачах математической физики могут быть полюсы, вычеты в которых определяют дискретный спектр волны (колебаний) и точки ветвления, которые связаны с многозначностью подынтегральной функции. Во многих задачах простейшей двузначной функцией является корень квадратный. Эта функция имеет две однозначные ветви, которые отличаются знаками. Точками ветвления будут точка, в которых подкоренное выражение обращается в ноль или бесконечность. Для выделения однозначной ветви между этими точками проводятся разрезы. Интегралы по берегам разрезов определяют непрерывный спектр или пространственные волны, т.е. возмущения, распространяющиеся в среде со скоростью света (в этой среде). Волны дискретного спектра по отношению к пространственным могут быть как ускоренными, так и замедленными.

4.5. Метод перевала асимптотической оценки интегралов в комплексной плоскости.

Решения многих задач математической физики могут быть представлены в интегральной форме. Если подынтегральная функция имеет большой параметр, то такие интегралы могут быть оценены или вычислены приближенно с некоторой наперед заданной точностью. Один из наиболее используемых асимптотических методов оценки подобных интегралов – метод перевала. Применяется для оценки интегралов вида

$$J(r) = \int_C f(\lambda) e^{r\varphi(\lambda)} d\lambda, \quad r \gg 1. \quad (4.52)$$

Функции $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ – аналитические в некоторой области D , содержащей контур C ; λ – комплексная переменная. В задачах математической физики r часто является положительным вещественным параметром, имеющим смысл времени или расстояния, что и будем предполагать в дальнейшем.

Идея метода принадлежит Лапласу (французский математик, астроном, физик, 1749 – 1827 гг.), который применил его впервые к оценке интегралов от вещественных функций действительного переменного t вида

$$\int_a^b f(t)e^{r\varphi(t)} dt, \quad r \gg 1.$$

Идея проста. Предположим, что на отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(t)$ в точке $t = t_0$ имеет один резко выраженный максимум. Чем больше параметр r , тем сильнее проявляется этот максимум, если $f(t)$ медленноменяющаяся по сравнению с $\varphi(t)$ функция. Естественно, при таком поведении подынтегральной функции основной вклад в значение интеграла дает окрестность точки $t = t_0$, поэтому

$$\int_a^b f(t)e^{r\varphi(t)} dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)e^{r\varphi(t)} dt + O(1/r) = f(t_0) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{r\varphi(t)} dt + O(1/r), \quad (4.53)$$

где O означает, что остаточный член по абсолютной величине не превосходит $const/r$.

Вернемся к комплексной переменной λ . Для простоты сначала предположим, что $f(\lambda) = 1$ и рассмотрим интеграл

$$I_1(r) = \int_C e^{r\varphi(\lambda)} d\lambda, \quad r \gg 1. \quad (4.54)$$

Подынтегральную функцию можно представить в виде произведения

$$e^{r\varphi(\lambda)} = e^{r \operatorname{Re} \varphi(\lambda)} \cdot e^{ir \operatorname{Im} \varphi(\lambda)}.$$

Даже если мы предположим, что в одной из точек $\lambda = \lambda_0$ контура C функция $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$ имеет максимум, то ограничиться интегрированием в окрестности этой точки мы не можем, так как второй (фазовый) сомножитель при больших r является быстро осциллирующим, что может привести к частой перемене знака у подынтегральной функции даже в пределах небольшого интервала. Поэтому в целом вклад от точки $\lambda = \lambda_0$ в значение интеграла может оказаться малым. Таким образом, поведение вещественной части функции комплексного переменного еще не обеспе-

чивает нужную оценку. В этом существенное отличие от случая действительной переменной.

Однако, благодаря тому, что значение интеграла от аналитической функции не зависит от пути интегрирования, мы можем так деформировать контур C внутри области аналитичности, чтобы вдоль нового контура C_1 , также проходящего через точку $\lambda = \lambda_0$ выполнялось условие

$$\operatorname{Im}\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \text{const.} \quad (4.55)$$

Такой путь называется путем *стационарной фазы*. Вдоль этого пути в точке $\lambda=\lambda_0$ сохраняется максимум вещественной части функции, что соответствует условию

$$[\operatorname{Re}\varphi(\lambda)]'_{\lambda=\lambda_0} = 0. \quad (4.56)$$

Точка экстремума называется точкой перевала. При этом путь наибо́льшего убывания модуля функции по мере удаления от экстремума называется перевальным. Отсюда и название всего метода – *метод перевала*. Его также часто называют *методом стационарной фазы*. Точка перевала и перевальный путь определяются двумя уравнениями (4.55) и (4.56).

С целью вычисления интеграла (4.54) сделаем замену

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0) = -s^2, \quad (4.57)$$

где s – новая переменная интегрирования.

Перевальной точке $\lambda = \lambda_0$ теперь, как видно из (4.57), будет соответствовать точка $s = 0$. Подставив (4.57) в (4.54), получим

$$I_1(r) = e^{r\varphi(\lambda_0)} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-rs^2} \frac{d\lambda}{ds} ds. \quad (4.58)$$

Интегрирование ведется в σ - окрестности перевальной точки $s = 0$. Найдем $d\lambda/ds$, продифференцировав (4.57),

$$\varphi'(\lambda)d\lambda = -2sds, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{-2s}{\varphi'(\lambda)}.$$

В точке перевала имеем неопределенность типа 0/0. Раскроем ее по правилу Лопиталя:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\lambda}{ds} = -2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\varphi'[\lambda(s)]} = \frac{-2}{\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \varphi''[\lambda(s)] \frac{d\lambda}{ds} \right\}}.$$

Обычно в точке перевала $\varphi''(\lambda_0) \neq 0$, поэтому можно записать

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\lambda}{ds} = \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(\lambda_0)}}. \quad (4.59)$$

Подставив (4.59) в (4.58) и учтя значение интеграла Пуассона,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-rs^2} ds = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{-\sigma\sqrt{r}}^{\sigma\sqrt{r}} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{r}},$$

получим

$$I_1(r) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{-r\varphi''(\lambda_0)}} e^{r\varphi(\lambda_0)}, \quad r \gg 1. \quad (4.60)$$

Пусть теперь $f(\lambda) \neq 1$. Обозначим $f(s) = f(\lambda) \frac{d\lambda}{ds}$. Поскольку основной вклад в значение интеграла дает окрестность точки перевала $s = 0$, то разложим $f(s)$ в ряд по степеням s :

$$f(s) = f(0) + f'(0)s + f''(0)\frac{s^2}{2} + \dots \quad (4.61)$$

Подставляя (4.61) в (4.52), можно вычислить интеграл

$$f(0) = f(\lambda_0) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\lambda}{ds} = f(\lambda_0) \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(\lambda_0)}}.$$

Окончательно,

$$I(r) \cong f(\lambda_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-r\varphi''(\lambda_0)}} e^{r\varphi(\lambda_0)}, \quad r \gg 1. \quad (4.62)$$

Эта формула дает в аналитическом виде асимптотическое значение интегралов типа (4.52).

В качестве примера рассмотрим вывод асимптотической формулы для функции Ханкеля первого рода. Она имеет интегральное представление []

$$H_{\nu}^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_L e^{i\nu(\tau-\pi/2)} e^{ikr \cos \tau} d\tau.$$

Исходный контур интегрирования L и перевальный L_0 на плоскости τ показаны на рис. 4.3.

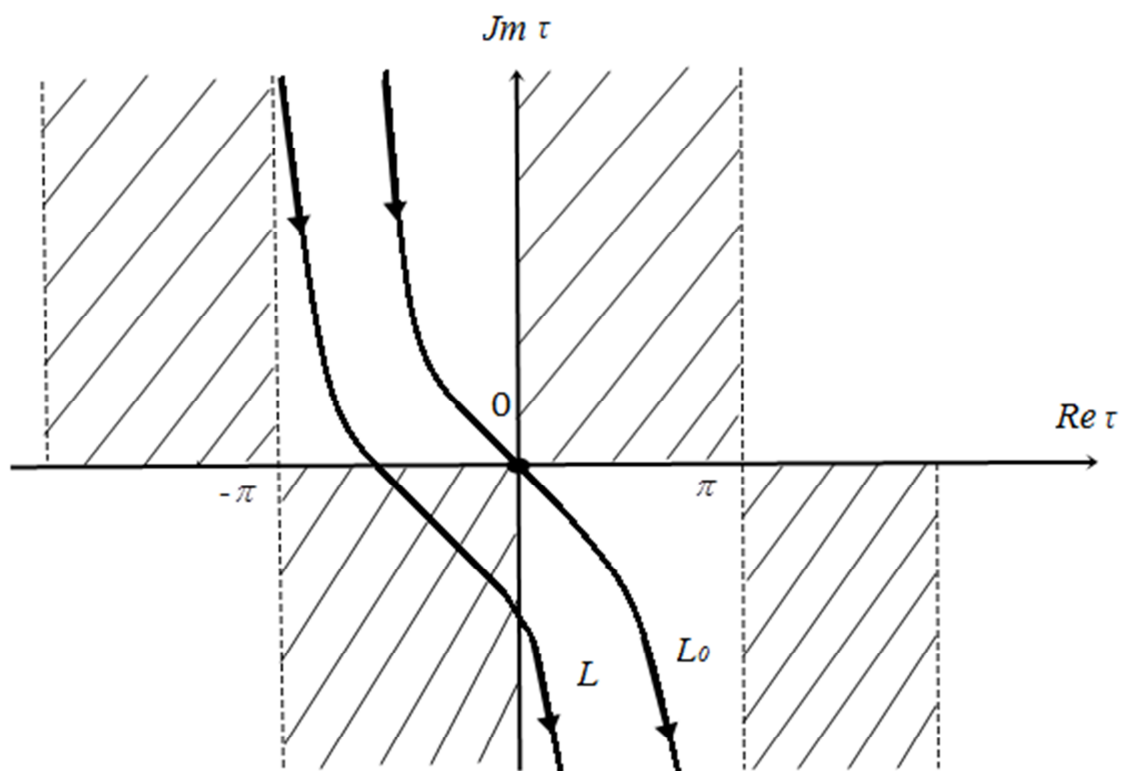


Рис. 4.3. Контур интегрирования.

Заштрихованы области неограниченного возрастания подынтегральной функции при $kr > 0$. Асимптотическую формулу выведем для случая $kr \gg \nu$. Тогда под знаком интеграла первую экспоненту можно считать медленно меняющейся по сравнению со второй. Обозначим $f(\tau) = e^{i\nu(\tau-\pi/2)}$, $\varphi(\tau) = ik \cos \tau$. Точка

перевала находится из (4.56), откуда следует $\sin \tau_0 = 0$, т.е. $\tau_0 = 0$ – точка перевала. С учетом того, что

$$\varphi(\tau) = ik \cos \tau = ik \cos(\operatorname{Re} \tau + i \operatorname{Im} \tau) = ik[\cos(\operatorname{Re} \tau) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} \tau) + i \sin(\operatorname{Re} \tau) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \tau)],$$

из (4.55) для уравнения пути стационарной фазы имеем:

$$k \cos(\operatorname{Re} \tau) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} \tau) = \text{const}.$$

Потребовав, чтобы этот путь проходил через перевальную точку $\tau_0 = 0$, получим, что $\text{const} = k$. Далее нам необходимо найти вторую производную

$$\varphi''(\tau)_{\tau=0} = (ik \cos \tau)''_{\tau=0} = -i(k \sin \tau)'_{\tau=0} = -ik \cos 0 = -ik.$$

Окончательно, используя (4.62), получаем известную асимптотическую формулу:

$$H_\nu^{(1)}(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i(kr - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}.$$

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. СОЛИТОНЫ.

Прежде чем рассматривать математическую модель процессов, описываемых нелинейными уравнениями, остановимся на физической стороне явлений. Явление нелинейности любой реальной среды связано с зависимостью ее свойств от амплитуды распространяющихся в ней волн, что приводит к изменению формы самой волны. Если среда или линия передачи к тому же имеет дисперсию, то фазовая скорость распространяющихся в ней волн зависит от частоты. Типичным примером такой среды является плазма, а линии передачи – волновод. Эффекты нелинейности и дисперсии, каждый по отдельности, искажают фронт волны или форму сигнала. Однако действия этих эффектов могут быть противоположны друг другу: нелинейность сжимает профиль волны, а дисперсия приводит к его расплыванию. При определенных условиях возможна взаимная компенсация этих двух тенденций, в результате которой появляется уединенная волна или *солитон*.

5.1. Солитоны. Основные понятия, история.

Солитон – это уединённая волна, распространяющаяся в нелинейной среде с дисперсией и характеризуемая постоянной скоростью распространения и неизменной формой. В отличие от обычных волн, распространяющихся в подобных средах, солитон может существовать сколь угодно долго, испытывая влияние со стороны потерь, если они присутствуют.

Хотя понятие солитона возникло в 60-х годах прошлого столетия, открытие этого явления принадлежит англичанину Джону Скотту Расселу (1808 – 1882гг.), изучавшему движение воды в каналах. Вот как он описывает свои наблюдения: «Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась. Но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна в состоя-

нии интенсивного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возмущения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом и, когда нашел его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или десять миль в час, сохраняя своей первоначальный профиль возвышения длиной около 30 футов и высотой от одного до полутора футов. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал уединенной волной трансляции... Это самое прекрасное и необычное явление: в первый же день я понял, что это счастливейший момент моей жизни...»

Для справки: фут (ступня) \cong 30,5 см; миля \cong 1.853 м. Таким образом, волна двигалась приблизительно со скоростью 15 ...18 км/ч, имея длину порядка 9 м, высоту около 40 см, пробежала расстояние не менее 2-х километров.

Уединенная волна, открытая Расселом, отличается от обычных волн на воде.

Обычные волны распространяются частично выше и частично ниже уровня поверхности спокойной воды. Уединенная волна целиком располагается выше уровня этой поверхности, а скорость ее больше скорости обычных волн. Как и всякая волна, уединенная волна существует только в движении. Образно говоря, это движущийся водяной холм, который может существовать независимо от других волн. В терминах радиотехники это – *однополярный* импульс. Кроме того, уединенная волна пробегает значительно большее расстояние. Обычная волна высотой 40 см вряд ли пробежит расстояние 2 км... Уменьшение высоты волны и ее исчезновение связаны с трением как в самой воде, так и о стенки канала.

Между прочим, повторить, казалось бы, такой простой опыт Рассела на самом деле не так-то просто. В этом убедились участники конференции «Солитон – 82», съехавшиеся из 24 стран в Эдинбург на конференцию, приуроченную к столетию со дня смерти Рассела. Они попытались получить уединенную волну на

том самом месте, где ее наблюдал Рассел. Канал сохранился и по-прежнему по нему плавают лодки и баржи, многие из которых имеют старинные формы. Все вроде бы благоприятствовало эксперименту. Но то ли из-за замены лошадиных сил человеческими (энтузиасты на время стали бурлаками), то ли из-за того, что на берегу за полтора года выросли деревья, то ли из-за плохой погоды, то ли по какой-то другой причине, а волна уединения не вышла. Не получился солитон.

5.2. Нелинейные линии передачи с дисперсией.

Уравнение Кортевега – де Вриза.

Давайте теперь перейдем к математической модели подобных явлений. С математической точки зрения солитон – решение нелинейного дифференциального уравнения. Оно дает функцию, которая в каждый момент времени локализована в некоторой области пространства, причем размеры области с течением времени остаются ограниченными и постоянными, а движение *центра области* можно интерпретировать как *движение частицы*.

Известен ряд уравнений, имеющих *солитонные решения*. Одно из них получили Кортевег и де Вриз в 1895 г. при исследовании волн в прямоугольном канале с водой изменяющейся глубины. Это уравнение носит их имена (сокращенно уравнение КдВ) и в его простейшей форме имеет вид

$$u_t + \beta u_{xxx} + \gamma uu_x = 0, \quad \beta, \gamma = const. \quad (5.1)$$

Решение, описывающее солитон, представляет собой функцию

$$u_s(x, t) = \frac{3\gamma a}{ch^2 \left[\sqrt{a}(x - x_0 - at)/2 \right]}. \quad (5.2)$$

В выражениях (5.1), (5.2):

x – координата вдоль направления распространения,

x_0 – координата образования солитона;

t – время;

$a = x/t$ – скорость движения солитона;

$u(x,t)$ – амплитуда или высота солитона.

Решение (5.2) однозначно определяет скорость движения солитона a и его положение в пространстве при $x = x_0$ в начальный момент времени $t = 0$. Видно, что высота или амплитуда солитона пропорциональна его скорости. Другими словами, солитоны с большей амплитудой распространяются быстрее.

Рассмотрим радиотехнические системы, в которых возможны солитонные режимы. Как известно, на СВЧ линии передачи (ЛП) – это линейные системы с распределенными параметрами; свойства запасать электромагнитную энергию при-сутствуют не только элементам цепи, но и любому отрезку линии. Однако реальные линии передачи часто являются нелинейными и имеют дисперсию.

Нелинейными элементами C_n и L_n служат либо диоды, емкость которых является нелинейной функцией запирающего напряжения смещения (варикапы), либо катушки индуктивности с ферромагнитными сердечниками в режиме насыщения, индуктивность которых является нелинейной функцией тока. Конденсатор C_0 добавлен для увеличения дисперсии сверх той, которая обусловлена дискретностью параметров линии и межвитковыми емкостями; благодаря ему уменьшается требуемое число звеньев []. Нелинейность обусловлена зависимостью индуктивности от тока и емкости от напряжения, начиная, конечно, с некоторых значений амплитуд тока или напряжения. Дисперсия в линии связана с зависимостью указанных параметров от частоты. Эквивалентные схемы одного звена таких линий передачи представлены на рис. 5.1.

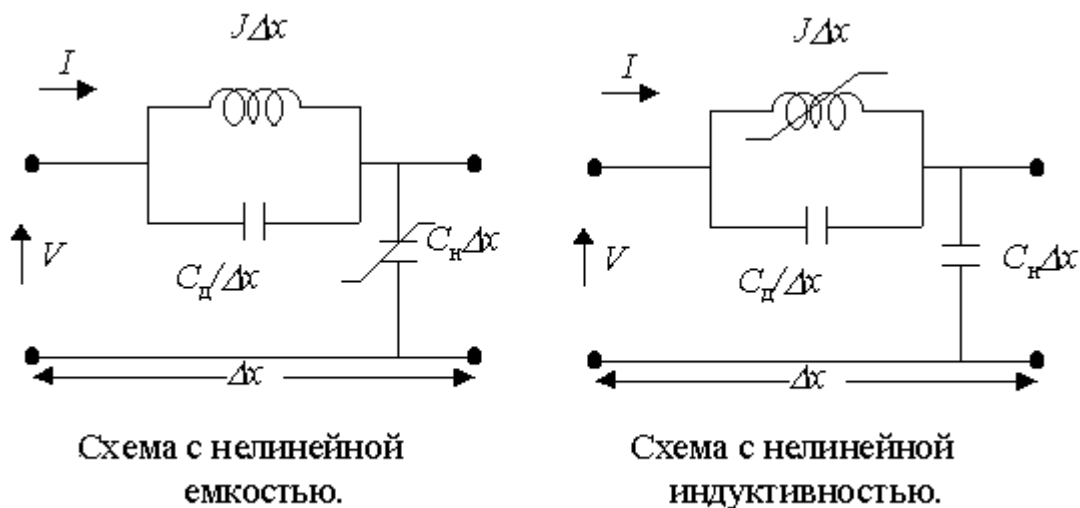


Рис. 5.1. Эквивалентные схемы звена нелинейной линии передачи с дисперсией.

На схемах через I , U обозначены переменные гармонические токи и напряжения на входе звена, через I' , U' – на выходе; через Δx обозначена длина звена. Рассмотренные схемы не содержат активных сопротивлений, т.е. потери не учитываются.

Рассмотрим схему с нелинейной ёмкостью. Если линия однородна, то можно ввести погонные параметры L и C . В *длинноволновом приближении*, когда размеры звена Δx много меньше длины волны, цепочка таких звеньев описывается системой уравнений в частных производных, выражающих *законы Кирхгофа*,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial Q(U)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + L \cdot \frac{\partial I'}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{C_0} \cdot (I - I') &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Первое уравнение описывает изменение тока I в ЛП (градиент вдоль линии), обусловленное изменением во времени заряда $Q(U)$ на нелинейном конденсаторе C_n . Если $Q_t = 0$, то $I = const$. Второе и третье описывают изменение напряжения U в ЛП, вызываемое изменением во времени тока I' в индуктив-

ности L_n и тока $(I - I)$ в линейном конденсаторе C_0 . Из системы (5.3) можно получить одно уравнение для напряжения U

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{L \cdot C_0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0} \cdot \frac{\partial^2 Q(U)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.4)$$

В случае малых амплитуд сигналов оно приводится к уравнению КдВ:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{C_n}{C_0} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{C_0}{2C_0} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (5.5)$$

в котором τ и ξ – некоторые новые обобщённые переменные, имеющие смысл времени и расстояния, соответственно.

Решение уравнения (5.5) в переменных x, t имеет вид

$$U(x, t) = \frac{U_0}{ch^2 \left\{ \sqrt{\frac{C_n U_0}{6C_d}} \left[x - \left(1 + \frac{C_n U_0}{3C_0} \right) \frac{t}{\sqrt{LC_0}} \right] \right\}}, \quad (5.6)$$

где U_0 – начальное значение амплитуды при $x = 0$ и $t = 0$. Скорость солитона – это коэффициент при t :

$$V = \left[1 + \frac{C_n U_0}{3C_0} \right] \frac{1}{\sqrt{LC_0}}. \quad (5.7)$$

Видно, что скорость солитона выше скорости в линейной ЛП, равной

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}. \quad (5.8)$$

Рассмотрим два разнесённых в пространстве солитона с разными амплитудами A_1 и A_2 . Согласно (5.2) солитон A_1 будет двигаться быстрее и догонит солитон A_2 . Произойдет их нелинейное взаимодействие (столкновение), из которого они выходят без изменения формы и амплитуды. Подобные свойства присущи частицам. На рис. 5.2 показаны положения солитонов для двух моментов времени (до взаимодействия и после взаимодействия).

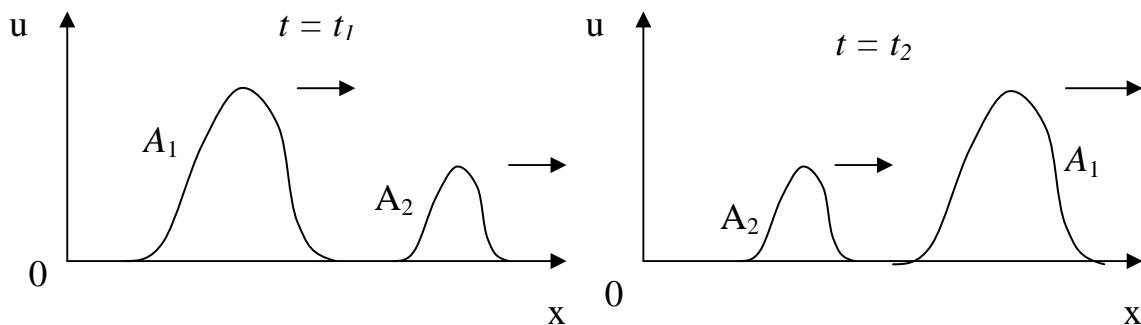


Рис. 5.2. Взаимодействие двух солитонов.

Американцем Лонгренем в начале 70-х годов с целью изучения солитонов был поставлен эксперимент на ЛП, представляющей собой цепочку звеньев. Их число варьировалось от 50 до 900. Типичные значения параметров:

$$L\Delta x = 0,2 \text{ мкГн}, \quad C_d/\Delta x = 220 \text{ пФ}, \quad C_0 = C_n\Delta x|_{U=0} = 500 \text{ пФ}, \quad \Delta x = 2 \text{ см}.$$

Эксперимент показал, что импульс напряжения прямоугольной формы, поступающий на вход ЛП, на выходе может представлять последовательность из нескольких солитонов.

5.3. Сверхкороткий лазерный импульс в волоконном световоде.

Нелинейное уравнение Шрёдингера.

Волоконный световод – нелинейная линия передачи, в которой можно наблюдать оптический солитон. В этой линии может распространяться сверхкороткий световой импульс длительностью $10^{-13} \dots 10^{-15}$ с. Возможность наблюдения оптических солитонов в волоконных световодах была предсказана теоретически в начале 70-х годов прошлого столетия. А в 80-х годах гипотеза (предположение) о существовании оптических солитонов была подтверждена экспериментально. Их существование открывает новые возможности в реализации *сверхбыстродействующих* оптических систем обработки и передачи информации, а так же элементов на оптических солитонах. Основная проблема создания таких элементов – технологическая. Несмотря на то, что нелинейность в волокнах является слабой,

большие длины волоконных световодах при низких потерях и малые поперечные размеры делают возможным существование солитонов.

В случае слабых сигналов световод можно рассматривать как линейную диспергирующую среду. Дисперсия приводит к уширению импульсов, которое описывается параметром

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{\text{вых}}^2 - \tau_{\text{вх}}^2}, \quad (5.9)$$

где $\tau_{\text{вых}}$ и $\tau_{\text{вх}}$ – длительности импульсов на выходе и входе в световод по уровню 0,5 от максимального значения. Уширение, в свою очередь, ограничивает полосу частот Δf и скорость передачи информации. Эти искажения принято относить к участку световода, длина которого равна 1 км. Для справки: одномодовые световоды, диаметр сердцевины которых $d = 5 \dots 10$ мкм, имеют полосу пропускания $\Delta f = 1 \dots 100$ ГГц; многомодовые с градиентным профилем и $d \approx 50$ мкм имеют $\Delta f = 100 \dots 1000$ МГц; многомодовые со ступенчатым профилем и $d \approx 80 \dots 400$ мкм имеют $\Delta f = 10 \dots 100$ МГц. Известна простая оценка

$$\Delta f \approx 1/\tau_y. \quad (5.10)$$

Например, $\tau_y = 20$ нс/км соответствует $\Delta f \approx 50$ МГц. Существенное ограничение полосы частот в многомодовых световодах по сравнению с одномодовыми обусловлено межмодовой дисперсией, связанной с взаимодействием мод. Меняя диаметр сердцевины световода, можно получать различные режимы – одномодовый и многомодовый с заданным числом мод. При этом каждая мода имеет свой эффективный показатель преломления и свою структуру поля.

В одномодовых световодах реализуется режим распространения сверхкоротких импульсов, аналогичный распространению плоских волн в неограниченной диспергирующей среде. Дисперсия обусловлена зависимостью групповой скорости V_{gp} распространения импульса от частоты ω , что, в свою очередь, связано с частотной зависимостью постоянной распространения $k(\omega)$ или частот-

ной зависимостью показателя преломления среды $n(\omega)$. Часто эта зависимость аппроксимируется полиномом вида

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + k_1 \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k_2 \cdot (\omega - \omega_0)^2, \quad (5.11)$$

где $k_1 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{V_{\text{гр}}} \Big|_{\omega_0}$, $V_{\text{гр}}$ – групповая скорость;

$$k_2 = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = - \frac{1}{V_{\text{гр}}^3} \left. \frac{\partial V_{\text{гр}}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \quad \text{– дисперсия групповой скорости;}$$

ω_0 – средняя несущая частота импульса.

При $k_2 > 0$ дисперсию называют *нормальной*, при $k_2 < 0$ – *аномальной*.

В случае нормальной дисперсии задняя часть импульса распространяется медленнее передней, в случае аномальной дисперсии передняя часть импульса распространяется быстрее. В обоих случаях происходит уширение импульса. Дисперсию характеризуют параметром

$$L_D = \tau_{\text{гр}}^2 / |k_2|, \quad (5.12)$$

где L_D – дисперсионная длина, при распространении на которую интенсивность импульса снижается в e раз за счет уширения или расплывания пакета.

В случае сильных сигналов световод является нелинейной диспергирующей средой, показатель преломления которой зависит от амплитуды волны $|U|$ или от ее интенсивности I , т.е. $n = n(\omega, I)$. Для *слабонелинейной* среды действительная часть показателя преломления может быть представлена в виде

$$n \cong n_0 + \frac{1}{2} n_2 |u^2| = n_0 + \tilde{n}_2 I, \quad (5.13)$$

где $\tilde{n}_2 = \frac{n_2 |u^2|}{2I}$ имеет размерность $\text{м}^2/\text{Вт}$,

n_0 – линейная составляющая показателя преломления;

$n_2 > 0$ – коэффициент, определяющий величину нелинейной добавки.

Нелинейность характеризуют параметром

$$L_n = \frac{\tau_{ex}}{\sqrt{k_0 |k_2 n_2 I_0|}}, \quad (5.14)$$

где L_n – нелинейная длина, определяемая по аналогии с дисперсионной длиной;

I_0 – пиковое значение интенсивности при ($\omega = \omega_0$); $k_0 = k(\omega_0)$.

Для спектрально-ограниченных импульсов используется также понятие *волнового пакета*, т.е. квазимонохроматический сигнал с центральной частотой ω_0 и узким частотным спектром $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Дисперсия и нелинейность изменяют огибающую волнового пакета или форму импульса. Причем эти изменения тем больше, чем меньше длительность импульса. В оптических волокнах аномальная дисперсия групповой скорости ($k_2 < 0$) наблюдается в спектральном диапазоне $\lambda \geq 1,3 \mu\text{м}$, в котором при определенном уровне входной мощности совместное проявление дисперсии и нелинейности приводит к стабилизации длительности импульса, т.е. к образованию солитона. Математически это выражается соотношением

$$L_{\partial} = L_n, \quad (5.15)$$

откуда следует выражение для мощности солитона

$$P_c = \frac{1}{2} I_0 S_{эф} = \frac{|k_2|}{k_0 n_2 \tau_{ex}^2} S_{эф}, \quad (5.16)$$

где $S_{эф}$ – эффективная площадь моды; для одномодового световода $S_{эф} \leq S$, S – площадь сердцевины.

Солитон образуется, если мощность сигнала на входе в световод P_{ex} равна мощности солитона P_c . При $P_{ex} > P_c$ будет развиваться процесс сжатия импульса, при $P_{ex} < P_c$ будет наблюдаться уширение импульса. Оценим мощность солито-

на, подставив в (6) типичные значения параметров: $\lambda_0 = 1,5 \text{ мкм}$, $\tau_{\text{ex}} = 3..4 \text{ пс}$, $S_{\text{эф}} = 100 \text{ мкм}^2$, $\tilde{n}_2 = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 / \text{Вт}$. В итоге получим $P_c = 1 \text{ Вт}$.

Процесс распространения сверхкоротких импульсов в световоде для случая, когда несущая частота ω_0 находится вдали от резонансных частот $\omega_{\text{рез}}$ среды (материала световода) и поглощение в среде несущественно, описывается нелинейным дифференциальным уравнением Шрёдингера

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - i \frac{k_2}{|k_2|} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + i \frac{k_0 n_2 \tau_{\text{ex}}^2}{2|k_2| n_0} |U|^2 U = 0, \quad (5.17)$$

где $U(\xi, \tau)$ – амплитуда импульса;

$$\tau = \frac{\left(t - \frac{x}{V_{\text{сп}}} \right)}{\tau_{\text{ex}}} \text{ – безразмерное время;}$$

$$\xi = \frac{x}{L_{\partial}} \text{ – безразмерное расстояние;}$$

t – время; x – координата вдоль оси световода.

Второе слагаемое характеризует кубическую нелинейность. Можно говорить о том, что волновой пакет изменяет свойства среды, что, в свою очередь, изменяет условия распространения импульса, т.е. оказывает влияние на сам импульс. Поэтому принято говорить о *самовоздействии* волнового пакета. Уравнение (5.17) описывает эволюцию (изменение) волнового пакета, т.е. баланс между линейной дисперсией, стремящейся «размазать» пакет, и фокусирующим действием кубической нелинейности, возникающей вследствие *самовоздействия волн*. Оно справедливо для малой амплитуды пакета и описывает начальную стадию процесса самофокусировки волн. Когда амплитуда пакета становится большой, требуется новое описание, новая математическая модель. В рассмотренной математической модели оптического солитона пренебрегают потерями на излучение, членами третьего и более высоких порядков малости в разложении волнового числа по степеням $(\omega - \omega_0)$, дисперсией нелинейности, инерционностью нелинейного отклика.

Кроме того, волоконный световод, в котором распространяется оптический солитон, предполагается одномодовым, что позволяет пренебречь межмодовой дисперсией.

В отличие от линейного нелинейное уравнение (5.17) содержит в себе солитонное решение. Для его существования необходимо, чтобы волновой пакет был *слабо нелинейным* и *сильно диспергирующим*.

Солитонное решение уравнения (5.17) имеет вид

$$U_c = \sqrt{\frac{2n_0}{k_0 n_2 |k_2|}} \chi \operatorname{sch}(\chi \tau) \cdot e^{(-i\chi^2 \xi/2)}. \quad (5.18)$$

Параметр χ есть отношение длительности $\tau_{\hat{a}\hat{o}}$ входного импульса к длительности солитона τ_c и называется *форм-фактором*. Из (5.18) следует, что параметр χ определяет не только длительность, но и амплитуду солитона. Видно, что амплитуда солитона зависит от его длительности, причем, чем короче импульс, тем больше его амплитуда. Подобная закономерность была и у солитона, описываемого уравнением КдВ.

6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЙ.

6.1. Основные понятия и определения.

Часто задачи математической физики могут формулироваться не в виде дифференциальных уравнений, а в виде интегральных уравнений. *Интегральными уравнениями* называют уравнения, в которые неизвестные функции входят под знаком интеграла. Интегральные уравнения, как и дифференциальные, могут быть разбиты на два больших класса *линейные* интегральные уравнения и *нелинейные* интегральные уравнения.

Линейные интегральные уравнения имеют вид

$$A(x)\varphi(x) + \int_D k(x,s)\varphi(s) ds = f(x), \quad x \in D. \quad (6.1)$$

В (6.1) $A(x)$, $k(x,s)$ и $f(x)$ – заданные функции. Их называют: $A(x)$ – коэффициент интегрального уравнения, $k(x,s)$ – ядро, $f(x)$ – свободный член или правая часть уравнения; $\varphi(x)$ – неизвестная функция, подлежащая определению; D – ограниченная или неограниченная область пространства одного или нескольких измерений; x, s – точки этого пространства, ds – элемент области. Если $f(x) = 0$, то уравнение называют *однородным*. Уравнение (6.1) является *неоднородным*.

В зависимости от вида $A(x)$ интегральные уравнения делятся на три типа. Если $A(x) = 0$ для всех $x \in D$, то (6.1) называется *уравнением 1-го рода*; если $A(x) \neq 0$ для всех $x \in D$, то (6.1) называется *уравнением 2-го рода*; если $A(x)$ обращается в ноль на некотором подмножестве или на некоторой части области D , то (6.1) называют *уравнением 3-го рода*.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением *одномерных* интегральных уравнений, когда D – отрезок $[a,b]$, имеющий конечную длину. В этом случае интегральные уравнения 1-го и 2-го родов могут быть записаны в виде:

$$\int_a^b k(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]; \quad (6.2)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (6.3)$$

$\lambda = const$ – параметр интегрального уравнения.

Большой вклад в развитие теории интегральных уравнений внесли Фредгольм (шведский математик, 1866 – 1927 гг.) и Вольтерра (итальянский математик, 1860 – 1940 гг.). Поэтому уравнения (6.2), (6.3) при определенных условиях, накладываемых на ядро и свободный член, называются *интегральными уравнениями Фредгольма*. А уравнения вида:

$$\int_a^x k(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad a \leq s \leq x \leq b, \quad (6.4)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad a \leq s \leq x \leq b \quad (6.5)$$

при тех же ограничениях называются *интегральными уравнениями Вольтерра 1-го и 2-го родов*, соответственно. Интегральные уравнения Вольтерра равны нулю при $x > s$. Они являются хотя и важным, но частным случаем интегральных уравнений Фредгольма.

6.2. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

6.2.1. Теоремы существования и единственности решения.

Теорема 1. Для разрешимости неоднородного уравнения (6.3) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна полной системе ψ_j линейно независимых решений соответствующего однородного *союзного уравнения*

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x, s) \psi(s) ds = 0, \quad x \in [a, b], \quad (6.6)$$

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к решению уравнения (6.3), если $|\lambda| \leq B^{-1}$.

Последовательные приближения $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ можно выразить посредством итерированных ядер $k_n(x, s)$, т.е. представить следующим образом

$$k_1(x, s) = k(x, s),$$

$$k_{n+1}(x, s) = \int_a^b k_n(x, z)k(z, s)dz.$$

Тогда при малых значениях параметра λ имеем

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b H(x, s, \lambda) f(s) ds, \quad (6.9)$$

где *резольвентное ядро* $H(x, s, \lambda)$ определяется формулой

$$-H(x, s, \lambda) = k_1(x, s) + \lambda k_2(x, s) + \dots + \lambda^n k_{n+1}(x, s) + \dots \quad (6.10)$$

Искомое решение интегрального уравнения имеет форму ряда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \psi_1(x) + \lambda^2 \psi_2(x) + \dots + \lambda^n \psi_n(x) + \dots, \quad (6.11)$$

который называется *рядом Неймана*.

В качестве примера найдем решение уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-s} \varphi(s) ds = f(x).$$

В этом уравнении все итерированные ядра совпадают с исходным ядром. В частности,

$$k_2(x, s) = \int_0^1 e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s}.$$

Резольвентное ядро имеет вид

$$-H(x, s, \lambda) = k(x, s) \cdot (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \dots) = \frac{e^{x-s}}{1-\lambda}.$$

Ряд для резольвентного ядра сходится при $|\lambda| < 1$ и, следовательно, для этих λ решение является единственным и записывается следующим образом

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} e^x \int_0^1 e^{-s} f(s) ds.$$

Если $\varphi(x)$ – точное решение уравнения (6.3), а $\varphi_n(x)$ есть n -е последовательное приближение, то имеет место оценка

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq D \sqrt{C_1} \frac{|\lambda|^{n+1} B^n}{1 - |\lambda| B}, \quad (6.12)$$

в предположении, что ядро кусочно-непрерывное и выполняются соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b k^2(x, s) ds &< C = const, \\ \int_a^b \int_a^b k^2(x, s) dx ds &= B^2, \\ \int_a^b f^2(x) dx &< D = const. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Последовательные приближения сходятся к решению равномерно при $|\lambda| \leq B^{-1}$.

Более грубая оценка может быть получена при следующих предположениях: ядро непрерывно, причем $|k(x, s)| \leq M$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $|f(x)| \leq N$, тогда

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{N(|\lambda| M (b - a))^{n+1}}{1 - |\lambda|(b - a)}. \quad (6.14)$$

6.2.3. Метод механических квадратур.

Если в уравнении (6.3) ядро непрерывно, то интеграл в нем можно заменить, используя ту или иную квадратурную формулу, например формулу Чебышева:

$$\int_a^b \psi(x) dx = A \sum_{k=1}^n \psi(x_k) dx + \sigma, \quad (6.15)$$

где

$$x_k = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} x_k^{(n)}, \quad A = \frac{b-a}{n}, \quad \sigma - \text{остаточный член};$$

$x_k^{(n)}$ – точки Чебышева, для которых составлены таблицы;

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Используя (6.15), заменим уравнение (6.3) системой уравнений

$$\varphi(x_i) - \lambda A \sum_{k=1}^n k(x_i, x_k) \varphi(x_k) = f(x_i) + \lambda \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \sigma_i = \sigma(x_i). \quad (6.16)$$

Отбрасывая в (6.16) малые величины $\lambda \sigma_i$, получим систему

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda A \sum_{k=1}^n K(x_i, x_k) \tilde{\varphi}(x_k) = f(x_i). \quad (6.17)$$

Определив из нее значения $\tilde{\varphi}(x_1), \tilde{\varphi}(x_2), \dots, \tilde{\varphi}(x_n)$ при помощи формул интерполирования, можно найти приближенное значение и самой функции $\varphi(x)$.

Интеграл в (6.3) можно заменить и по любым другим квадратурным формулам, выбор которых зависит от вида ядра интегрального уравнения. При этом необходимо помнить, что чем более точная квадратурная формула используется, тем большая гладкость ядра, правой части и решения должна требоваться. В случае, когда промежуток интегрирования является бесконечным, его заменяют конечным промежутком, если имеется информация о поведении решения при больших значениях $|x|$ и если подобную замену возможно сделать.

6.2.4. Метод наименьших квадратов и метод Галёркина.

Приближенное решение $\tilde{\varphi}(x)$ уравнения (6.3) ищется в виде разложения

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^n a_k \tilde{\varphi}_k(x) \quad (6.18)$$

по системе $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x), \dots, \tilde{\varphi}_n(x)$ линейно-независимых на $[a, b]$ функций. Коэффициенты a_k находят из условия минимизации функционала

$$\int_b^a \left[\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) \tilde{\varphi}(s) ds - f(x) \right]^2 dx = \min$$

ИЛИ

$$\int_b^a \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \left[\tilde{\varphi}_k(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) \tilde{\varphi}_k(s) ds \right] - f(x) \right\}^2 dx = \min. \quad (6.19)$$

Интеграл, стоящий в левой части (6.19), есть функция от a_1, a_2, \dots, a_n . Приравняв нулю частные производные этой функции по a_1, a_2, \dots, a_n , получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n . В этом заключается метод наименьших квадратов.

В методе Галёркина коэффициенты a_k находятся из условий ортогональности

$$\int_a^b \left[\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) \tilde{\varphi}(s) ds - f(x) \right] \tilde{\varphi}_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.20)$$

6.2.5. Метод аппроксимации ядра.

Рассмотрим схему метода, который заключается в замене ядра $k(x,s)$ аппроксимирующим его выражением вида

$$k(x,s) = \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(s), \quad (6.21)$$

в котором функции $P_i(x)$ линейно независимы. Получающее при этом уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (6.22)$$

имеет решение

$$\tilde{\varphi}(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i p_i(x) + f(x), \quad (6.23)$$

где $c_i = \int_a^b \tilde{\varphi}(s) q_i(s) ds$ подлежат определению.

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ при любом λ равномерно сходится к решению уравнения (6.5). Функции $\varphi_n(x)$ являются последовательными приближениями решения уравнения. Их целесообразно выразить посредством итерированных ядер $k_n(x, s)$:

$$k_1(x, s) = k(x, s),$$

.....

$$k_{n+1}(x, s) = \int_a^x k(x, z)k_n(z, s)dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

следующим образом

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^x \left[\sum_{m=1}^n \lambda^m k_m(x, s) f(s) \right] ds. \quad (6.26)$$

Тогда

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^x H(x, s, \lambda) f(s) ds, \quad (6.27)$$

где резольвентное ядро имеет вид

$$H(x, s, \lambda) = - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_{m+1}(x, s). \quad (6.28)$$

Ряд, определяющий резольвенту, сходится при всех значениях λ .

В качестве примера найдем решение уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds = f(x).$$

Согласно схеме метода записываем

$$k_1(x, s) = e^x e^{-s},$$

$$k_2(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} (x-s),$$

$$k_3(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s) dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^2}{2},$$

.....

$$k_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \frac{(x-s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H(x, s, \lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, s) = -e^{(x-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(x-s))^n}{n!} = -e^{(1+\lambda)(x-s)}.$$

Следовательно

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x e^{(1+\lambda)(x-s)} f(s) ds.$$

6.3.3. Связь уравнения Вольтерра с дифференциальными уравнениями.

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) u = F(x), \quad x > 0, \quad (6.29)$$

с граничными условиями при $x=0$

$$u(0) = c_0, u'(0) = c_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (6.30)$$

эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра

$$\varphi(x) + \int_0^x k(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (6.31)$$

где

$$k(x, s) = \sum_{k=1}^i a_k(x) \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$f(x) = F(x) - c_{n-1} a_1(x) - (c_{n-1} x + c_{n-2}) a_2(x) - \dots - (c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1(x) + c_0) a_n(x).$$

6.3.4. Уравнения Вольтерра первого рода.

Интегральное уравнение Вольтерра первого рода (6.4) в предположении, что $k(x, x) \neq 0$, $k'_x(x, s)$ и $f'(x)$ существуют и непрерывны дифференцированием приводится к уравнению Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{k'_x(x, s)}{k(x, x)} \varphi(s) ds = \frac{f'(x)}{k(x, x)}. \quad (6.32)$$

В том случае, когда $k(x, x) \equiv 0$, дифференцирование (6.4) приводит к уравнению

$$\int_a^x k'_x(x, s) \varphi(s) ds = f'(x), \quad (6.33)$$

и, в предположении, что $k'(x, x) \neq 0$, $k''_{xx}(x, s)$ и $f''(x)$ существуют и непрерывны, дифференцирование (6.33) дает

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{k''_{xx}(x, s)}{k'_x(x, x)} \varphi(s) ds = \frac{f''(x)}{k'_x(x, x)}. \quad (6.34)$$

6.4. Интегральные уравнения в граничных задачах электродинамики.

Мы уже говорили о том, что знание функции Грина или функции точечного источника позволяет записать решение задачи и для любого заданного распределения источников. Но у функции Грина есть и другое достоинство – знание ее позволяет задачи математической физики формулировать в виде интегральных уравнений. Решение этих уравнений часто оказывается более простым по сравнению с решением дифференциальных уравнений в частных производных, особенно, если иметь в виду использование вычислительной техники, для которой эта задача проще. Кроме того, интегральные уравнения могут иметь меньшую

размерность по сравнению с дифференциальными уравнениями. Ядрами интегральных уравнения как раз и являются функции Грина.

6.4.1. Единственность решения граничных задач.

Пусть имеем трехмерное дифференциальное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta U(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \varepsilon(\vec{r}) U(\vec{r}, \vec{r}') = f(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (6.35)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}')$ этого уравнения будет являться решением уравнения (6.35), но с δ – образной правой частью:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \varepsilon(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.36)$$

Правая часть представляет собой математическое описание (модель) точечного источника, расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r}'$, характеризуемой вектором \vec{r}' , который играет роль параметра, поскольку зависимость от координат описывается только вектором \vec{r} . Но уравнение (6.36) не определяет единственным образом функцию Грина, так как необходимо задать еще дополнительные условия на границе, если она имеется, и условия в бесконечно удаленных точках пространства. Если граница имеет особые точки, которыми могут являться изломы, ребра, заострения, то дополнительные условия должны быть заданы в этих точках, имеющих бесконечную кривизну. Примером особых точек границы будут: ребро клина, края полуплоскости или полосы, вершина конуса. В точках ребра, например, компоненты напряженностей электрического поля и тока, параллельные его краю, обращаются в бесконечность или, как говорят, имеют сингулярность (в отличие от регулярности). Но это обращение происходит медленнее, чем у самих источников и происходит таким образом, что в окрестности вершин и ребер плотность энергии остается величиной интегрируемой. Математической формулировкой этого факта являются следующие неравенства:

в векторных задачах

$$\int_V |E|^2 dV < \infty \quad \text{и} \quad \int_V |H|^2 dV < \infty, \quad (6.37)$$

в скалярных задачах

$$\int_V |U|^2 dV < \infty \quad \text{и} \quad \int_V |\Delta U|^2 dV < \infty, \quad (6.38)$$

где интегрирование проводится по объему V бесконечно малого радиуса, содержащему особые точки.

Условия в сингулярных (особых) точках границы называются также условиями Мейкснера. В качестве компонент в (6.37) достаточно взять решения статических задач, поскольку в малой окрестности любой точки поле локально является статическим.

В точках источника поле тоже обращается в бесконечность, т.е. для поля источник представляет сингулярность. Но в отличие от особых точек границы плотность энергии вблизи точек источников не является интегрируемой и интегралы типа (6.37) и (6.38) будут расходящимися. Можно показать, что при выполнении неравенств (6.37), (6.38) поток энергии из особых точек границы будет равен нулю, т.е. поле имеет реактивный характер, а от реальных источников поток энергии будет конечным.

Если область пространства, в котором ищется поле, велика, а влияние далеко расположенных тел мало, то удобной идеализацией является представление о бесконечно удаленной области пространства. Согласно этой идеализации все тела и источники (токи) расположены на конечном расстоянии от начала координат и заключены внутри некоторой сферы большого, но конечного радиуса. Вне этой сферы находится открытая бесконечно протяженная область пространства, в которой нет ни тел, ни источников. Их отсутствие математически может быть выражено асимптотическим равенством:

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} F(\theta, \varphi) [1 + O(R/r)], \quad r > R, \quad (6.39)$$

где $F(\theta, \varphi)$ – угловое распределение скалярного или векторного поля; R – радиус сферы большого, но конечного радиуса; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны; двойные знаки связаны с временной зависимостью $e^{\mp i\omega t}$.

Условие (6.39) может быть записано и так

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \pm ikU \right) = 0, \quad e^{\mp i\omega t}. \quad (6.40)$$

Условия (6.39) и (6.40) обычно называют условиями излучения Зоммерфельда, который впервые указал на необходимость их использования в задачах электродинамики (немецкий физик и математик, 1868–1951 гг.). Эти условия необходимы для единственности решения внешних, т.е. содержащих бесконечно удаленные точки пространства, задач для уравнений эллиптического типа, являющихся математической моделью установившихся колебаний различной физической природы. Физический смысл условий излучения заключается в выделении такого решения из двух возможных, которое описывает расходящиеся волны, источники которых находятся в ограниченной области, содержащей начало сферической системы координат. Таким образом, смысл условий излучения сводится к требованию отсутствия волн, отраженных от бесконечно удаленных точек пространства, где не должны находиться отражающие тела или источники поля.

Решения уравнения (6.35), описывающие волны, источники которых находятся на бесконечности (например, плоские волны) не удовлетворяют условиям излучения. Условия (6.39) – (6.40) записаны для сред, не имеющих потерь. В случае сред с потерями они формулируются по-другому.

6.4.2. Формулировка интегральных уравнений.

При любых граничных условиях задачи функция Грина обладает свойством симметрии:

$$G(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = G(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (6.41)$$

Формула является простейшей записью так называемой теоремы взаимности: для взаимной среды поле в точке r_2 , возбуждаемое источником, расположенным в точке r_1 , равно полю в точке r_1 , возбуждаемому источником, расположенным в точке r_2 .

Использование функции Грина для решения уравнения (6.35) основано на второй формуле Грина, преобразующей объемный интеграл в поверхностный. Умножим (6.36) на $U(\vec{r})$, а (6.35) на $G(\vec{r}, \vec{r}_1)$, вычтем и проинтегрируем по области, содержащей точку источника. Используя вторую формулу Грина, которая имеет вид

$$\int_V (U\Delta G - G\Delta U) dV = \int_S \left(U \frac{dG}{dN} - G \frac{dU}{dN} \right) dS$$

и значение интегралов, содержащих δ -функцию,

$$\int_V U(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) dV = U(\vec{r}_1),$$

получим

$$U(\vec{r}_1) = \int_V f(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}_1) dV + \int_S \left(U \frac{dG}{dN} - \frac{dU}{dN} \right) dS. \quad (6.42)$$

В этих формулах: V – объем, ограниченный поверхностью S , внутри которого содержится точка r_1 , а функции U и $\frac{\partial U}{\partial N}$ непрерывны; N – внешняя нормаль к поверхности S , т.е. направленная внутрь объема V . Дифференцирование и интегрирование проводится по \vec{r} , а \vec{r}_1 является параметром. Формула (6.42) показывает, что для того чтобы получить значение функции $U(\vec{r}_1)$, т.е. решение уравнения (6.35) в точке \vec{r}_1 , необходимо взять функцию Грина, порождаемую источником, расположенным именно в этой точке.

Наиболее простой вид решение (6.42) имеет в том случае, когда требуют, чтобы функция Грина удовлетворяла тем же граничным условиям, что и искомая функция U . Например, если на поверхности S , окружающей объем V и содержащей все источники поля, заданы граничные условия первого

$$U|_S = 0 \quad \text{и} \quad G|_S = 0 \quad (6.43)$$

или второго рода

$$\left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_S = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial G}{\partial N} \right|_S = 0, \quad (6.44)$$

то поверхностный интеграл в (6.42) обращается в ноль и тогда

$$U(\vec{r}) = \int_V f(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_1) dV. \quad (6.45)$$

Из этой формулы следует, что граничную задачу с любым заданным в объеме распределением источников можно считать решенной, если она решена для точечного источника, т.е. если найдена функция Грина данной задачи. Понятно, что если нет в пространстве тел, то решение задачи также представляется формулой (6.45), которая дает нам поле, порождаемое заданным распределением источников, находящихся в свободном пространстве

Если в (6.42) на функцию Грина не накладывать одинаковых с функцией U условий, то интеграл по поверхности останется, т.е. неизвестная функция будет входить под знак интеграла. И тогда будем иметь дело с интегральным уравнением. В этом случае функция Грина представляет собою функцию Грина свободного пространства.

Когда имеют дело с задачами дифракции, то обычно предполагают, что на тело падает плоская волна, приходящая из бесконечно удаленных точек пространства или создаваемая источниками, находящимися на бесконечности. Функция Грина, как и само решение задачи, в этом случае могут быть получены посредством предельного перехода при $r_1 \rightarrow \infty$.

Если в объеме V источники отсутствуют, т.е. $f(r) = 0$, то объемный интеграл в (6.42) будет равен нулю. Предположим, что при постановке граничной задачи нам известно поведение функции $U(\vec{r})$ на границе S , а $\left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_S$ неизвестно.

Чтобы получить решение такой задачи мы должны взять функцию Грина, удовлетворяющую условию $G|_S = 0$. Тогда имеем

$$u(\bar{r}_1) = \int_S U(\bar{r}) \frac{\partial G(\bar{r}, \bar{r}')}{\partial N} dS. \quad (6.46)$$

Если наоборот, нам известно поведение функции $\frac{\partial U}{\partial N}$ на S , то для решения задачи мы должны взять функцию Грина, удовлетворяющую условию

$$\left. \frac{\partial G}{\partial N} \right|_S = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$u(\bar{r}_1) = - \int_S \frac{\partial u(\bar{r})}{\partial N} G(\bar{r}, \bar{r}') dS. \quad (6.47)$$

Для простоты мы считали, что в (6.46) и (6.47) $f(\bar{r}) = 0$. Однако эти формулы нельзя рассматривать как решение граничных задач, поскольку они требуют знание функции Грина этих задач, т.е. знание их решений при возбуждении поверхности точечным источником. Поэтому поступают следующим образом. В качестве функции Грина берут хорошо известную функцию Грина для свободного пространства или однородной среды, в которой отсутствуют какие-либо тела или поверхности. Тогда объемный интеграл (6.45) дает поле заданного распределения источников в свободном пространстве. А наличие поверхностных интегралов типа (6.46), (6.47) приведет к интегральному или интегро-дифференциальному уравнениям, соответственно.

7. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ.

Это довольно мощные приближенные методы решения различных сложных задач математической физики. Основная идея вариационных методов заключается в том, что искомая (неизвестная) величина представляется в виде интеграла от какой-либо функции, который, во-первых, дает точное значение искомой величины, если в него подставить точное значение функции, и, во-вторых, при подстановке приближенного значения функции дает для искомой величины приближенное значение с существенной меньшей погрешностью, чем погрешность подставляемой функции. Такие интегралы называются *стационарными функционалами.* Зная стационарный функционал, задачу о приближенном вычислении искомой величины можно свести к вычислению интегралов или к решению алгебраических уравнений, коэффициентами которых являются интегралы от известных функций. Вот основная идея вариационных методов. Свое название вариационные методы получили в связи с тем, что для достижения результата приходится варьировать или изменять вид функции, подобрав такую, которая обеспечивает экстремальное значение искомой величины (функционала).

7.1. Постановка задачи вариационного исчисления.

Рассмотрим пример из оптики. Как известно, в однородной среде траектория луча является прямолинейной, а в неоднородной – криволинейной. Существует так называемый *принцип Ферма*, который утверждает, что в оптически неоднородной среде луч света между двумя точками распространяется по тому пути, по которому время прохождения будет наименьшим. Сформулируем задачу об определении траектории луча в оптически неоднородной среде. Скорость распространения света в такой среде будет $V(\vec{r}) = \frac{c}{n(\vec{r})}$, где $n(\vec{r})$ – показатель преломления, c – скорость света, \vec{r} – некоторый вектор в трехмерном пространстве. Пусть неоднородная среда является сферически-слоистой и представляет собой

набор concentрических слоев с уменьшающимися при удалении от центра показателями преломления $n_1 > n_2 > n_3$. Это так называемая сферическая линза Люнеберга. Тогда луч будет иметь примерно такую траекторию, как показано на рис.7.1.

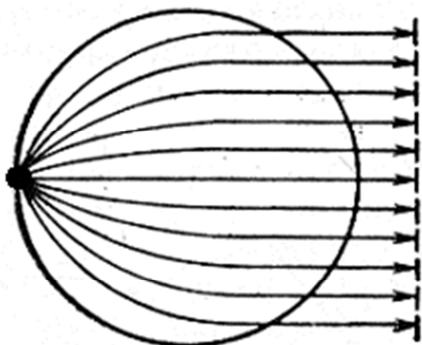


Рис. 7.1.Ход лучей в сферической линзе Люнеберга.

В параметрической форме траектория луча определяется уравнениями

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$$

где $x \in [x_1, x_2]$.

Отрезок траектории dl будет пройден за время $dt = \frac{dl}{V(x, y, z)}$, где

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2} dx.$$

Тогда
$$dt = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}}{V(x, y, z)} dx.$$

Полное время T , за которое свет пройдет от точки x_1 до точки x_2 , выразится интегралом

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}}{V[x, y(x), z(x)]} dx. \quad (7.1)$$

Теперь необходимо $y(x)$ и $z(x)$ выбрать такими, чтобы обеспечить согласно принципа Ферма минимум времени T . Время T – это функционал, определенный на множестве непрерывных и дифференцируемых функций $y(x)$ и $z(x)$. Эта величина (число) зависит от вида двух функций. Варьируя (изменяя) эти функции, мы стремимся обеспечить экстремум функционала. Те значения функций $y(x)$ и $z(x)$, при которых функционал достигает своего экстремального значения, называются *экстремальями*.

Итак, основной задачей вариационного исчисления является нахождение наибольших или наименьших значений функционалов, заданных определенными интегралами. Для простоты рассмотрим функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x), x] dx, \quad (7.2)$$

зависящий только от одной функции, которая дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам. Задача вариационного исчисления формулируется следующим образом:

найти функцию $y(x)$ на интервале $x \in [x_1, x_2]$ с заданными в концевых точках граничными значениями $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, которая обеспечивает экстремальное значение функционала

$$J[y(x)] = J_{\text{э}}. \quad (7.3)$$

7.2. Метод непосредственного интегрирования.

Для выполнения условия (7.3) необходимо выполнение следующих условий:

- все варьируемые функции должны принадлежать классу C_2 , т.е. должны быть непрерывными вместе со своими вторыми производными;

- при изменении функции необходимо сохранять ее заданные граничные значения;
- для достижения цели должно быть достаточно малых вариаций функции.

Предположим, что $y(x)$ – экстремаль функционала. Построим к экстремали функцию нулевого порядка близости, называемую *функцией сравнения*:

$$y_1(x) = y(x) + \alpha\eta(x), \alpha \ll 1, \quad (7.4)$$

где $\eta(x)$ – заданная на $[x_1, x_2]$ непрерывная и дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (7.5)$$

что автоматически обеспечивает выполнение (7.3).

Построим для функции сравнения функционал, который будет зависеть от α ,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x), x] dx. \quad (7.6)$$

Если $y(x)$ – экстремаль, то функционал $J(\alpha)$ достигает своего экстремального значения при $\alpha=0$.

Введем понятие вариации и вариационной производной функционала. Обозначим $\delta y(x) = y_1(x) - y(x) = \alpha\eta(x) \ll 1$, т.е. $y_1(x) = y(x) + \delta y(x)$. Функционал (7.6) переписывается следующим образом

$$J[y_1(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx. \quad (7.7)$$

Разность значений, принимаемых функционалом на функции сравнения и на экстремали, равна

$$[J(y_1) - J(y)] = \int_{x_1}^{x_2} \{F(y + \delta y, y' + \delta y', x) - F(y, y', x)\} dx. \quad (7.8)$$

Поскольку δy и $\delta y'$ по предположению малы, то при разложении первого слагаемого в (7.8) в ряд Тейлора удерживаем только первые степени малых параметров:

$$[J(y_1) - J(y)] \approx \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \{F(y, y', x) + F_y \delta y + F_{y'} \delta y' - F(y, y', x)\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \{F_y \delta y + F_{y'} \delta y'\} dx,$$

штрихом обозначена производная. Беря второй интеграл по частям и учитывая в соответствии с (7.5) нулевые значения δy в конечных точках интервала интегрирования, получим

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\} \delta y(x) dx. \quad (7.9)$$

Величина δJ называется *первой вариацией функционала* (7.2). Выражение, стоящее в фигурных скобках под знаком интеграла, называется *вариационной производной функционала* $J[y(x)]$ и обозначается

$$\frac{\delta J[y(x)]}{\delta y(x)} = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}. \quad (7.10)$$

Вернемся к (7.6). Условие экстремума функционала $J(\alpha)$ по параметру α при $\alpha = 0$ требует

$$J'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \{F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)\} dx = 0. \quad (7.11)$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в фигурных скобках:

$$\int_{x_1}^{x_2} \{F_{y'} \eta'(x)\} dx = F_{y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F_{y'} \eta(x) dx.$$

Проинтегрированный член согласно (7.5) обращается в ноль. Вот почему нам важно знать поведение функции в конечных точках интервала интегрирования, т.е. не только для нахождения постоянных интегрирования или неизвестных коэффициентов, но и при использовании техники интегрирования по частям. Тогда вместо (7.11) запишем

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right\} \eta(x) dx = 0. \quad (7.12)$$

Равенство должно выполняться при всех значениях функции $\eta(x)$. Поэтому необходимо потребовать

$$F_y(y, y', x) - \frac{d}{dx} F_{y'}(y, y', x) = 0. \quad (7.13)$$

Это условие экстремума функционала в дифференциальной форме называется дифференциальным *уравнением Эйлера*. (Леонард Эйлер, 1707– 1783 гг., всемирно известный математик, механик, физик, астроном. Родился в Швейцарии, автор более 800 работ в различных областях науки. По приглашению императрицы Екатерины Великой с 1726г. по 1740 г. работал в России). Уравнение (7.13) иногда также называют уравнением Эйлера – Лагранжа.

Продифференцируем неявно заданную функцию:

$$\frac{dF_{y'}(y, y', x)}{dx} = F_{y'y} y + F_{y'y'} y'' + F_{y'x},$$

где, например, $F_{y'y'} y'' = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial y'} F \frac{d^2 y}{dx^2}$ и т.д.

Окончательно уравнения Эйлера примет вид

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'y} y' + F_{y'x} + F_y = 0. \quad (7.14)$$

В (7.14) $F(x)$ – известная функция. Относительно неизвестной функции $y(x)$ (7.14) в общем случае является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, поскольку неизвестная функция входит в коэффициенты уравнения; в отдельных случаях может и не входить. Для нахождения неизвестных постоянных необходимо использовать условие (7.3).

Таким образом, вариационная задача свелась к нахождению решения дифференциального уравнения Эйлера (7.14).

Условие $\delta J = 0$ является лишь необходимым условием существования экстремума. Для определения характера экстремума необходимо найти вторую вариацию функционала

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \{ F_{yy} (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} (\delta y')^2 \} dx. \quad (7.15)$$

Учтем, что $2F_{yy'} \delta y \delta y' = F_{yy'} [(\delta y)^2]'$ и возьмем по частям интеграл, содержащий это слагаемое

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{yy'} [(\delta y)^2]' dx = F_{yy'} (\delta y)^2 \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F_{yy'} (\delta y)^2 dx.$$

В результате имеем

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} [F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}] (\delta y)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} F_{y'y'} (\delta y')^2 dx. \quad (7.16)$$

Если $y(x)$ есть экстремаль, то согласно (7.13)

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Продифференцируем это уравнение по y . Тогда

$$F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{y'y} \equiv 0.$$

В итоге получим

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} F_{y'y'} (\delta y')^2 dx. \quad (7.17)$$

Запишем достаточные условия существования экстремума:

- если $\delta^2 J > 0$ или $F_{y'y'} > 0$, то имеем $\min J$;
- если $\delta^2 J < 0$ или $F_{y'y'} < 0$, то имеем $\max J$.

Эти условия называют *условиями Лежандра*.

В качестве примера найдем экстремум функционала

$$J = \int_0^{\pi/2} \{[y'(x)]^2 - y^2(x)\} dx$$

с дополнительными условиями $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1$.

Имеем $F(y, y', x) = [y'(x)]^2 - y^2(x)$. Для подстановки в уравнение Эйлера (7.14) необходимы следующие величины:

$$F_y = -2y(x), F_{y'} = 2y'(x), \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''(x), \dots$$

В результате уравнение примет вид

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Его решением является функция $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Из дополнительных условий находим $y(0) = C_1 = 0, y(\pi/2) = C_2 = 1$.

Окончательно $y(x) = \sin x$. Это и есть экстремаль функционала.

Для установления характера экстремума имеем

$$F_{y'} \sim (\sin x)' = \cos x, F_{y'y'} \sim (\cos x)' = -\sin x \Big|_0^{\pi/2} < 0,$$

что свидетельствует о максимуме функционала.

Вариационная задача решена.

7.3. Метод Ритца.

Большим распространением при решении теоретических и прикладных задач пользуются прямые методы, суть которых в следующем.

Пусть требуется найти минимум некоторого функционала $J(y)$, о котором известно, что точная нижняя граница его значений $\inf J(y) = M > -\infty$. Пусть удалось найти последовательность допустимых функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ и такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n) = M$. Во многих случаях при этом оказывается, что минимизирующая

последовательность $\{y_k\}$ сходится к функции y , для которой $J(y) = M$. Тем самым вариационная задача решена.

К прямым методам относится и метод Ритца, схема которого приводится ниже. Пусть в некотором классе функций требуется найти минимум функционала с заданными условиями на концах интервала интегрирования

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (7.18)$$

$$y(x_1) = a_1, \quad y(x_2) = a_2.$$

Рассматривается семейство функций

$$y(n, x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (7.19)$$

где

$\varphi_0(x_1) = a_1, \varphi_0(x_2) = a_2; \varphi_i(x), \varphi_i(x_1) = \varphi_i(x_2) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ – последовательность линейно независимых функций, которые называются *координатными*.

На координатных функциях данный функционал превращается в функцию n переменных

$$J(y(n, x)) = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (7.20)$$

Выбираются те значения c_1, c_2, \dots, c_n , которые приводят функцию $\Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ к минимуму. При найденных $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ функцию (7.19) обозначают, как $y_n(x)$. Во многих практически важных случаях последовательность найденных таким образом функций $y_n(x), (n = 1, 2, \dots)$, является минимизирующей и дающей решение поставленной задачи.

Существование абсолютного минимума функционала (7.18) и достижение этого минимума посредством построения минимизирующей последовательности функций обеспечивается выполнением следующих условий:

- Функция $F(x, y, z)$ непрерывна по совокупности своих аргументов при $(x, y) \in G$ и любом конечном z , где через G обозначена замкнутая область плоскости xOy , в которой лежат линии $y_n(x)$.

- Существуют константы $\alpha < 0, \rho > 1, \beta$, при которых для любой точки $(x, y) \in G$ выполняется

$$F(x, y, z) \geq \alpha |z|^\rho + \beta$$

каково бы ни было z .

- Функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывную производную $F'_z(x, y, z)$ и для любой точки $(x, y) \in G$ эта производная является неубывающей функцией от z , $(-\infty < z < \infty)$. При этом функционал рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций.

Указанные условия выполняются в частности для функционалов вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \{p(x)y'^2 + q(x)y^2 - 2g(x)y\} dx,$$

$$y(x_1) = a_1, y(x_2) = a_2,$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ и $g(x)$ — известные непрерывные в конечном интервале $[x_1, x_2]$ функции.

Важное значение для применений имеют линейные вариационные задачи, т.е. задачи о минимизации функционалов, уравнения Эйлера которых линейны. Условием применимости метода Ритца к минимизации таких функционалов является их положительная определенность, т.е. существование положительной константы γ и такой, что неравенства

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \geq \gamma \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

и соответственно

$$\iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \geq \gamma \iint_D u^2 dx dy$$

выполняются в классе функций, непрерывно дифференцируемых достаточное число раз и удовлетворяющих краевым условиям задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Минимизировать функционал

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Пусть

$$\varphi_0(x) \equiv 0; \varphi_1(x) = x^2 - x; \varphi_2(x) = x^3 - x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^{n+1} - x^n, \dots$$

При $n=2$ имеем

$$y(2, x) = c_1(x^2 - x) + c_2(x^3 - x^2),$$

$$y'(2, x) = c_1(2x - 1) + c_2(3x^2 - 2x),$$

$$J(y(2, x)) = \Phi(c_1, c_2) = \frac{11}{30}c_1^2 + \frac{11}{30}c_1c_2 + \frac{1}{7}c_2^2 - \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{10}c_2.$$

Используя условия $\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0$, получим

$$\frac{11}{15}c_1 + \frac{11}{30}c_2 = \frac{1}{6}, \quad \frac{11}{30}c_1 + \frac{2}{7}c_2 = \frac{1}{10}.$$

Откуда

$$c_1 = \frac{69}{473}, c_2 = \frac{7}{43}, \quad y(2, x) = \frac{77x^3 - 8x^2 - 69x}{473}.$$

В данном случае известно точное решение, равное

$$y = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}) - x.$$

В приведённой ниже таблице дается сопоставление точного и приближенного решений:

x	$y(x)$	$y(2, x)$
0	0,0000	0,0000
0,2	-0,0287	-0,0285
0,4	-0,0505	-0,0506
0/5	-0,0566	-0,0568
0,6	-0,0583	-0,0585
0,8	-0,0444	-0,0442
1,0	0,0000	0,0000

2. Найти функцию $u=u(x,y)$, гармоническую в области $G: x>0, y>0, x+y<1$ и удовлетворяющую на её границе $\Gamma(x=0, y=0, x+y=1)$ условию

$$U_{\Gamma} = x^2 + y^2.$$

Гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа, являющемуся уравнением Эйлера —Остроградского для интеграла

$$\iint_D [u_x^2 + u_y^2] dx dy. \quad (7.21)$$

Выберем координатные функции как

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, y) &= x^2 + y^2, \\ u_1(x, y) &= xy(1-x-y), \\ u_2(x, y) &= x^2y(1-x-y), \\ \dots\dots\dots \\ u_n(x, y) &= x^n y(1-x-y). \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Функция

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + c_1 xy(1-x-y) + c_2 x^2 y(1-x-y) + c_3 x^3 y(1-x-y) \quad (7.23)$$

удовлетворяет краевому условию при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3 .

Подстановка (7.23) в (7.21) превращает интеграл в функцию $\Phi(c_1, c_2, c_3)$ трех пе-

ременных c_1, c_2, c_3 , которые надо выбрать так, чтобы эта функция получила минимальное значение. Приравняв нулю частные производные

$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial c_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial c_3}$, можно найти $c_1 \approx 3,0401, c_2 = c_3 = -0,0562$. Приближенное

решение задачи имеет вид

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[3,0401 - 0,0562(x + y)].$$

3. Рассмотрим одну модификация метода Рунге.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \ln 2.$$

Аналитическое решение этой задачи приводит к функции

$$y = 2 \ln(1 + x).$$

Для приближенного решения выбирается последовательность, составленная из многочленов третьей степени следующим образом.

1-е приближение: Многочлены третьей степени, для которых y и y' принимают при $x=0$ и $x=1$ заданные значения.

2-е приближение: Функции класса $C_1[0,1]$ с заданными значениями y и y' при $x=0, x=1/2, x=1$ и кубических в каждом из двух интервалов.

3-е приближение: Функции класса $C_1[0,1]$ с заданными значениями для y и y' при $x = j2^{1-k}, (j=0,1,\dots)$ и кубических в каждом из 2^{k-1} малых интервалов.

Для каждого k функционал $J(y)$ заменяется значением $J_k(y)$ которое вычисляется в каждом интервале по правилу Симпсона, причем необходимые для этого средние значения y и y' находятся по формулам

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - \frac{h}{4}(y'_2 - y'_1), \quad \bar{y}' = \frac{3}{4h}(y_2 + y_1) - \frac{1}{4}(y'_2 + y'_1),$$

выражающим их через значения y_1, y'_1 на левом и y_2, y'_2 на правом концах интервала длиной h .

Так как значения y заданы при $x=0$ и $x=1$, то функции из первого приближения полностью определяются их производными y' при $x=0$ и $x=1$. Эти значения, умноженные на постоянные множители, обозначены через η_0 и η_1 и приняты в качестве независимых переменных в первом приближении:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,5; \quad x_2 = 1,0; \quad h_1 = 0,5; \quad y_0 = 0; \quad y_2 = 2\ln 2; \quad \eta_i = h_i y'_i, \quad (i=0,1,2),$$

$$J_1(y) = \frac{h_1}{3} [(y_0'')^2 + 4e^{y_1} (y_1')^2] = \frac{1}{3h_1} [\eta_0^2 + 4e^{y_1} \eta_1^2 + 4\eta_2^2],$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + y_2) - \frac{1}{4}(\eta_2 - \eta_0) = 0,69315 + 0,25\eta_0 - 0,25\eta_2,$$

$$\eta_1 = \frac{3}{4}(y_2 - y_0) - \frac{1}{4}(\eta_2 + \eta_0) = 1,039725 - 0,25\eta_0 - 0,25\eta_2.$$

Берем η_0 и η_2 за независимые переменные и решаем уравнения

$$f_0 = 3h_1 \frac{\partial J_1}{\partial \eta_0} = 2\eta_0 + e^{y_1} \eta_1^2 - 2e^{y_1} \eta_1 = 2\eta_0 - (2 - \eta_1) \eta_1 e^{y_1} = 0,$$

$$f_2 = 3h_1 \frac{\partial J_1}{\partial \eta_2} = 8\eta_2 - e^{y_1} \eta_1^2 - 2e^{y_1} \eta_1 = 8\eta_2 - (2 + \eta_1) \eta_1 e^{y_1} = 0.$$

Решение последней системы методом Ньютона приводит к

$$\eta_0 = 1,006; \quad \eta_1 = 0,663; \quad \eta_2 = 0,501; \quad y_1 = 0,819.$$

Точное решение дает

$$\eta_0 = 1,000; \quad \eta_1 = 0,667; \quad \eta_2 = 0,500; \quad y_1 = 0,819.$$

7.4. Метод конечных разностей.

Этот метод, впервые примененный Эйлером, заключается в том, что функционал

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

рассматривается на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин. При этом функционал превращается в функцию ординат вершин указанных ломаных и дальнейшая процедура минимизации

проводится так же, как и в методе Рунге. Метод конечных разностей является частным случаем методом Рунге.

В качестве примера минимизируем функционал

$$\int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Принимаем $\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0,2$. Имеем последовательность

$$y(0) = 0; \quad y_1 = y(0,2); \quad y_2 = y(0,4); \quad y_3 = y(0,6); \quad y_4 = y(0,8); \quad y_5 = y(1) = 0.$$

В качестве приближенных значений производных берём

$$y'_0(0) = \frac{y_1 - 0}{0,2}; \quad y'_1(0,2) = \frac{y_2 - y_1}{0,2}; \quad y'_2(0,4) = \frac{y_3 - y_2}{0,2};$$

$$y'_3(0,6) = \frac{y_4 - y_3}{0,2}; \quad y'_4(0,8) = \frac{0 - y_4}{0,2}.$$

Функционал по формуле прямоугольников заменим суммой, тогда он превратится в функцию четырех переменных:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,2 \left[\left(\frac{y_1}{0,2} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0,2} \right)^2 + y_1^2 + 0,4y_1 + \left(\frac{y_3 - y_2}{0,2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + y_2^2 + 0,8y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0,2} \right)^2 + y_3^2 + 1,2y_3 + \left(\frac{y_4}{0,2} \right)^2 + y_4^2 + 1,6y_4 \right].$$

Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{2y_1}{0,04} - \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} + 2y_1 + 0,4 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} - \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} + 2y_2 + 0,8 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} - \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} + 2y_3 + 1,2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} - \frac{2y_4}{0,04} + 2y_4 + 1,6 = 0.$$

Отсюда находим

$$y_1 = -0,0286, \quad y_2 = -0,0503, \quad y_3 = -0,0580, \quad y_4 = -0,0442.$$

Точные до четвертого десятичного знака значения искомой функции равны

$$y_1 = -0,0287, \quad y_2 = -0,0505, \quad y_3 = -0,0583, \quad y_4 = -0,0444.$$

8. МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

Методы интегральных преобразований являются довольно мощным и универсальным средством нахождения в аналитическом виде решений различных типов дифференциальных и интегральных уравнений. Основаны они на использовании обширных таблиц значений интегралов определенных типов, соответствующих тем или иным интегральным преобразованиям.

8.1. Основные понятия и определения.

Интегральным преобразованием называется пара соотношений типа

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(\alpha) = \int_{C_1} f(\xi) \cdot \varphi_1(\xi, \alpha) d\xi, \end{array} \right. \quad (8.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\xi) = \int_{C_2} \bar{F}(\alpha) \cdot \varphi_2(\xi, \alpha) d\alpha, \end{array} \right. \quad (8.2)$$

где $f(\xi)$ – неизвестная функция, подлежащая определению;

$\varphi_1(\xi, \alpha), \varphi_2(\xi, \alpha)$ – известные функции, называемые ядром преобразования.

Соотношение (8.1) называется прямым преобразованием, а (8.2) – обратным преобразованием или формулой обращения. В (8.1) ξ – действительная переменная, обычно имеющая смысл времени или расстояния; α – комплексная переменная; C_1 и C_2 – контуры интегрирования. Функция $\bar{F}(\alpha)$ также называется трансформантой или изображением, а $f(\xi)$ – оригиналом.

Существуют различные преобразования, отличающиеся видом ядра и пределами интегрирования. Наиболее распространенными являются преобразования Фурье и Лапласа.

Преобразование Фурье (экспоненциальное) применяется к функциям,

определённым на неограниченном интервале:

$$\bar{F}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx, \quad -\infty < \alpha < \infty; \quad (8.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (8.4)$$

Синус- и косинус - преобразования Фурье применяется к функциям, определённым на полуограниченном интервале:

$$\bar{F}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \begin{cases} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases} dx, \quad 0 < \alpha < \infty; \quad (8.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{F}(\alpha) \begin{cases} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases} d\alpha, \quad 0 < x < \infty. \quad (8.6)$$

Преобразование Лапласа также применяется к функциям, определённым на полуограниченном интервале:

$$\bar{F}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0, \quad (8.7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{F}(p)e^{pt} dp, \quad \sigma > \sigma_0, \quad 0 < t < \infty, \quad (8.8)$$

σ_0 – показатель роста; $\sigma_0 = 0$, если функция ограничена.

Во всех интегральных преобразованиях поведение неизвестных функций на концах интервала интегрирования определяется из условия существования (сходимости) интегралов, с учетом известное поведение ядра преобразования.

Сводка некоторых формул для преобразование Лапласа приведена в Таблице 8.1.

Таблица.8.1.

Функция (оригинал)	Трансформанта (изображение)	Номер формулы
$f(t)e^{-\alpha t}$	$\overline{F}(p + \alpha)$	(8.9)
$f(t)t$	$-\frac{d}{dp}\overline{F}(p)$	(8.10)
$f(t)\frac{1}{t}$	$\int_p^{\infty}\overline{F}(p)dp$	(8.11)
$\frac{d}{dt}f(t)$	$p\overline{F}(p)$	(8.12)
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{p}\overline{F}(p)$	(8.13)
$\left. \begin{array}{l} 0, t < \alpha, \alpha > 0 \\ f(t - \alpha), t > \alpha \end{array} \right\}$	$e^{-\alpha p}\overline{F}(p)$	(8.14)
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{\beta^2 + p^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \beta $	(8.15)

Свёрткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ действительной переменной t называют функцию $f_3(t)$, определяемую интегралом

$$f_3(t) = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (8.16)$$

Теорема о свёртке:

Если интегралы $\overline{F}_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt}dt$ и $\overline{F}_2(p) = \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-pt}dt$

сходятся абсолютно, когда $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то функция

$$\overline{F}_3(p) = \overline{F}_1(p) \cdot \overline{F}_2(p) \quad (8.17)$$

является преобразованием Лапласа от свертки (8.16). Другими словами, свертке оригиналов (8.16) соответствует произведение трансформант (8.17).

Лемма Жордана: Если $F(p)$ аналитична в правой полуплоскости, исключая возможно конечное число полюсов, и стремится равномерно к нулю при $|p| \rightarrow \infty$, когда $\text{Re} p > 0$, то для любого действительного $m > 0$ имеет место

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{-mp} dp = 0, \quad (8.18)$$

где C_R – дуга радиуса R в правой полуплоскости (в случае преобразования Лапласа).

Эта лемма позволяет замкнуть контур интегрирования в определенной полуплоскости и перейти к интегрированию по замкнутому контуру. В ряде случаев это оказывается удобным и позволяет применить теорему Коши о вычетах.

Теорема Коши о вычетах:

Интеграл по замкнутому контуру C от аналитической в области A функции равен нулю, т.е.

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (8.19)$$

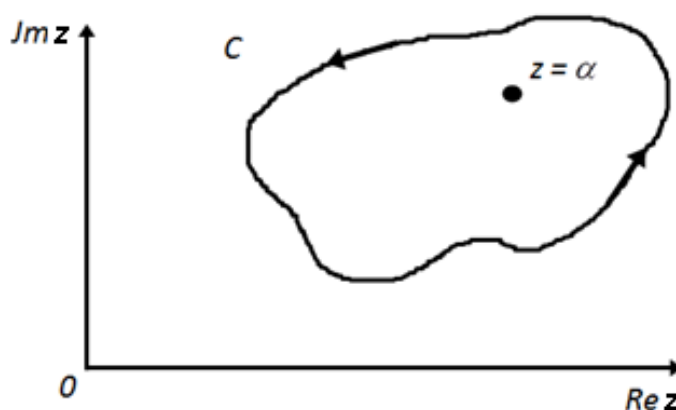


Рис. 8.1. Контур интегрирования.

Если же в области содержится особая точка (полнос) $z=\alpha$ функции и если эта функция может быть представлена в виде $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$, где $f_2(z)|_{z=\alpha} = 0$, то интеграл будет равен вычету подынтегральной функции относительно этой точки

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)|_{z=\alpha} = 2\pi i \frac{f_1(\alpha)}{f_2'(z)|_{z=\alpha}}. \quad (8.20)$$

8.2. Примеры решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Задача 1. Решить краевую задачу о колебаниях полуограниченной струны с заданным законом движения $\mu(t)$ ее конца и нулевыми начальными условиями. Математическая формулировка задачи для функции отклонения струны от равновесного состояния $u(x,t)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, \infty), t \in (0, \infty); \quad (8.21)$$

$$\begin{cases} u(x,t)|_{x=0} = \mu(t), & t \in (0, \infty) - \text{граничные условия,} \\ u(x,t)|_{t=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, & x \in (0, \infty) - \text{начальные условия.} \end{cases} \quad (8.22)$$

К этим условиям следует добавить граничные и начальные условия в бесконечно удаленных точках пространства и времени:

$$\begin{cases} u(x,t) \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty, \\ u(x,t) \text{ ограничена,} & t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8.23)$$

Последние условия вполне разумные, поскольку в реальных средах всегда есть потери и процессы в них будут затухающими. Ограниченность во времени соответствует устойчивости процесса. Для решения задачи применим метод интегральных преобразований.

Схему решения можно разбить на несколько этапов.

Этап 1. Используя подходящее интегральное преобразование, перейдем от исходной задачи к краевой задаче для трансформанты искомой функции. Обычно эта задача является более простой. Идя таким путем, к дифференциальному уравнению второго порядка технику применяют дважды интегрирования по частям. Проинтегрированные члены при этом должны удовлетворять соответствующим начальным или граничным условиям на концах пути интегрирования, т.е. этим условиям должна удовлетворять неизвестная функция и ее первая производная. Для решения задачи можно использовать преобразование Лапласа по переменной t . Преобразование Фурье по переменной x использовать нельзя, поскольку при нахождении $u_{xx}(x,t)$ нам потребуется значение $u_x(x,t)|_{x=0}$, а оно нам неизвестно. Для конкретных видов заданных функций $\mu(t)$ можно было бы найти первую производную $x=a$.

$$\text{Пусть } \bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \text{ – трансформанта Лапласа.}$$

Сформулируем для нее краевую задачу. Так как $u(x,t)$ ограничена при $t \rightarrow \infty$, то показатель ее роста $\sigma_0=0$. Поэтому функция $u(x,p)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного p , определена и аналитична в полуплоскости $Re p > 0$, для любого $x \geq 0$, так как в этой полуплоскости интеграл существует (сходится). Эта процедура применительно к уравнению включает интегрирование по частям. Дважды проинтегрируем по частям уравнение (8.21), считая x параметром:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) \div \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) e^{-pt} dt &= \frac{d}{dt} u \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} u \cdot e^{-pt} dt = \frac{d}{dt} u \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ pu \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p^2 \cdot \bar{u}(x, p). \end{aligned}$$

Проинтегрированные слагаемые при $t \rightarrow \infty$ обращаются в нуль за счет экспоненты с $Re p > 0$. Дифференцирование по x в силу равномерной сходимости интеграла Лапласа может быть вынесено за знак интеграла, поэтому

$$u_{xx} \div \int_0^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-pt} dt = \bar{u}_{xx}(x, p).$$

Введем также $u(0, p) = \mu(t) \div \int_0^{\infty} \mu(t) e^{-pt} dt = \bar{\mu}(p) = \bar{u}(0, p).$

Окончательно постановка задачи сводится к следующей:

$$\bar{u}_{xx}(x, p) - (p/a)^2 \bar{u}(x, p) = 0, \quad (8.24)$$

$$\bar{u}(0, p) = \bar{\mu}(p); \quad \bar{u}(x, p) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (8.25)$$

Таким образом, для трансформанты мы пришли к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с граничными условиями в нуле и на бесконечности. Начальные условия уже использованы при интегрировании по частям. Задача (8.24) – это так называемая задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Этап 2. Найдем решение задачи для трансформанты. Уравнение (8.24 - 8.25) является гармоническим и его решение ищется в виде $\bar{u}(x, p) = e^{kx}$. После подстановки этого выражения в уравнение получим $e^{kx} (k^2 - \frac{p^2}{a^2}) = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0$ имеет решения $k = \pm \frac{p}{a}$. Общее решение уравнения (8.25) тогда будет

$$\bar{u}(x, p) = A e^{\frac{p}{a}x} + B e^{-\frac{p}{a}x}. \quad (8.26)$$

Из условия при $x \rightarrow \infty$, если $Re p > 0$, следует $A = 0$, т.е. $\bar{u}(x, p) = B e^{-\frac{p}{a}x}$. Из условия в нуле следует $\bar{u}(x, p)|_{x=0} = B = \bar{\mu}(p)$. Окончательно

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\mu}(p) e^{-\frac{p}{a}x}. \quad (8.27)$$

Этап 3. Зная трансформанту, найдем искомую функцию (оригинал), выполнив обратное преобразование:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\mu}(p) e^{(t-\frac{x}{a})p} dp, \sigma > 0. \quad (8.28)$$

Функция $\mu(t) = u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$ ограничена по условию (8.23). Следовательно, в полуплоскости $Re p > 0$ она аналитична, т.е. не имеет там особенностей. Если $t - \frac{x}{a} < 0$, то подынтегральная функция в (8.28) удовлетворяет условиям леммы Жордана в правой полуплоскости $Re p > 0$ и контур интегрирования можно там замкнуть. По теореме Коши о вычетах получим $u(x, t) = 0, t < \frac{x}{a}$.

Когда $t > \frac{x}{a}$, то, как следует из (8.28), контур интегрирования можно замкнуть в полуплоскости $Re p \leq 0$. И если бы мы знали там особенности функции $\bar{\mu}(p)$, то могли бы вычислить интеграл по теореме Коши о вычетах. Но из условия задачи об этих особенностях ничего не известно. А как вы думаете, есть ли вообще там эти особенности? – Конечно, есть. В противном случае преобразование Лапласа было бы определено во всей комплексной плоскости, а оно определено лишь в полуплоскости $Re p > 0$.

С другой стороны, по определению

$$\bar{\mu}(p) = \int_0^{\infty} \mu(t) e^{-pt} dt. \quad (8.29)$$

Из (8.9) следует, что умножению оригинала на экспоненту соответствует сдвиг в аргументе у трансформанты. Поэтому по формуле (8.28) получаем

$$u(x, t) = \begin{cases} \mu(t - \frac{x}{a}), & t > \frac{x}{a}; \\ 0, & t < \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Физическая интерпретация решения: начиная с момента времени $t > x/a$ имеем колебательный процесс, определяемый изначально заданным законом движения конца струны и распространяющийся вдоль струны со скоростью a . В

момент времени $t=x/a$ возмущение еще не дошло до точек струны и они находятся в состоянии покоя.

Задача 2. Решить краевую задачу о колебаниях полугораниченной струны с закрепленным концом и ненулевыми начальными условиями:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, \infty), t \in (0, \infty); \quad (8.31)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 - \text{граничное условие,} \\ u(x, 0) = f(x) - \text{начальное условие,} \\ u_x(x, t)|_{t=0} = \psi(x) - \text{начальное условие,} \end{cases} \quad (8.32)$$

$$u(x, t) \text{ и } u_x(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ условия на бесконечности.} \quad (8.33)$$

Для решения задачи можно применить преобразование Лапласа по переменной t и синус-преобразование Фурье по переменной x . Остановимся на последнем:

$$\bar{u}(\alpha, t) = 2 \int_0^{\infty} u(x, t) \sin \alpha x dx.$$

Уравнение (8.31) дважды проинтегрируем по частям, считая t параметром:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) \div 2 \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) \sin \alpha x dx &= 2 \sin \alpha x \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}^{\infty} - 2\alpha \int_0^{\infty} \frac{du}{dx} \cos \alpha x dx = \\ &= 2 \sin \alpha x \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=0}^{\infty} - 2\alpha \cos \alpha x \cdot u \Big|_{x=0}^{\infty} - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t). \end{aligned}$$

Используя граничные условия, видим, что проинтегрированные члены обращаются в ноль. Очевидно также, что

$$u_{tt}(x, t) \div \bar{u}_{tt}(\alpha, t).$$

В результате постановка краевой задачи для трансформант запишется следующим образом:

$$\bar{u}_{tt}(\alpha, t) + a^2 \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t) = 0, \quad (8.34)$$

$$\begin{cases} \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha), \\ \bar{u}_t(\alpha, t)|_{t=0} = \bar{\psi}(\alpha). \end{cases} \quad (8.35)$$

Общее решение уравнения (8.34) имеет вид:

$$\bar{u}(\alpha, t) = Ae^{ia\alpha t} + Be^{-ia\alpha t} = A_1 \sin(a\alpha t) + B_1 \cos(a\alpha t).$$

Подставив его в (8.35), найдем при $t=0$

$$\begin{aligned} B_1 &= \bar{f}(\alpha), \quad A_1 \frac{1}{a\alpha} \bar{\psi}(\alpha), \\ \bar{u}(\alpha, t) &= \frac{1}{a\alpha} \bar{\psi}(\alpha) \sin(a\alpha t) + \bar{f}(\alpha) \cos(a\alpha t). \end{aligned}$$

После применения формулы обращения получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{u}(\alpha, t) \sin \alpha x d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha) \cos(a\alpha t) \sin \alpha x d\alpha + \\ &+ \frac{1}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \bar{\psi}(\alpha) \sin(a\alpha t) \sin(\alpha x) d\alpha. \end{aligned}$$

По известным формулам заменим произведения тригонометрических функций, стоящих под знаком интеграла, через их сумму или разность:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} &= \frac{1}{2} [\sin \beta_2 + \sin \beta_1], \\ \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} &= \frac{1}{2} [\cos \beta_2 - \sin \beta_1], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \alpha x, \quad \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \alpha at, \quad \beta_1 = \alpha[x + at], \quad \beta_2 = \alpha[x - at].$$

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau, \quad x > at. \quad (8.36)$$

Это и есть решение одномерного однородного волнового уравнения с неоднородными начальными условиями, полученное Д'Аламбером в 1747 г.

Задача 3. Рассмотрим неоднородное уравнение гиперболического типа, описывающее под действием внешней силы колебания полугораниченной струны с закрепленным концом:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad x \in (0, \infty), t \in (0, \infty). \quad (8.37)$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 - \text{граничное условие при } x = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 - \text{начальные условия} \end{cases} \quad (8.38)$$

$$\begin{cases} u(x,t) = u_x(x,t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \\ u(x,t) \text{ ограничена при } t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (8.39)$$

Воспользуемся синус-преобразованием Фурье по координате x . Применение его ко второй производной по x и дважды дифференцирование по частям дают

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) \div \int_0^{\infty} u_{xx}(x,t) \sin \alpha x dx &= u_x(x,t) \sin \alpha x \Big|_{x=0}^{\infty} - \alpha \int_0^{\infty} u_x(x,t) \cos \alpha x dx = \\ &= -\alpha u(x,t) \cos \alpha x \Big|_{x=0}^{\infty} - \alpha \bar{u}(\alpha, t). \end{aligned}$$

Проинтегрированные слагаемые обращаются в ноль в силу граничных условий, включая условия на бесконечности. Дифференцирование по t можно вынести за знак интеграла, тогда задача для трансформант сведется к следующей:

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(\alpha, t) + a^2 \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha, t), \\ \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{u}_t(\alpha, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.40)$$

Для ее решения применим преобразование Лапласа по t . Имеем

$$p^2 \bar{u}(\alpha, p) + a^2 \alpha^2 \bar{u}(\alpha, p) = \bar{f}(\alpha, p),$$

$$\bar{u}(\alpha, p) = \frac{1}{p^2 + a^2 \alpha^2} \bar{f}(\alpha, p).$$

На основании формулы (8.15) и теоремы о свертке получаем:

$$\bar{u}(\alpha, t) = \int_0^t \bar{f}(\alpha, \tau) \frac{\sin a\alpha(t-\tau)}{a\alpha} d\tau. \quad (8.41)$$

При этом было учтено, что $\beta = a\alpha$, $\bar{F}_1(p) = \frac{\beta}{\beta^2 + p^2}$, $\bar{F}_2(p) = \frac{1}{\beta} \bar{f}(\alpha, p)$,

$$f_1(t-\tau) = \frac{\sin a\alpha(t-\tau)}{a\alpha}, f_2(\tau) = \bar{f}(\alpha, \tau).$$

Применение формулы обращения (8.41) дает

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \left[\int_0^t \bar{f}(\alpha, \tau) \frac{\sin a\alpha(t-\tau)}{\alpha} d\tau \right] \sin \alpha x d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \bar{f}(\alpha, \tau) \left[\frac{\cos \alpha[x - a(t-\tau)] - \cos \alpha[x + a(t-\tau)]}{\alpha} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \bar{f}(\alpha, \tau) \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \sin \alpha z dz d\alpha. \end{aligned}$$

При проведении преобразований было учтено, что

$$\sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{1}{2} [\cos \beta_2 - \cos \beta_1],$$

где

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \alpha x,$$

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \alpha a(t - \tau),$$

$$\beta_1 = \alpha[x + a(t - \tau)],$$

$$\beta_2 = \alpha[x - a(t - \tau)]$$

Окончательно, формально учтя вид формулы обращения, найдем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz. \quad (8.42)$$

Таким образом, решение задачи получено. Его физическую интерпретацию можно дать, задавая конкретный вид функции $f(z, \tau)$.

Задача 4. Решить краевую задачу для уравнения параболического типа, описывающего распределение температуры вдоль теплоизолированного неограниченного стержня. Постановка задачи имеет вид

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), t \in (0, \infty); \quad (8.43)$$

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad (8.44)$$

$$u_x(x, t) \rightarrow 0, \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (8.45)$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая распределение температуры, $f(x)$ – её начальное распределение.

Задача в такой постановке возникает также при исследовании процесса распространения тепла вдоль некоторого направления в однородной изотропной среде.

Поскольку координата x меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а в бесконечно удаленных точках задана функция и ее производная по x , то возможно использование экспоненциального преобразования Фурье. Применение его ко второй производной в уравнении (8.43) после интегрирования по частям дает:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) \div \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{i\alpha x} dx &= u_x(x, t) e^{i\alpha x} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{i\alpha x} dx = \\ &= -i\alpha u(x, t) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t) = -\alpha^2 \bar{u}(\alpha, t). \end{aligned}$$

Проинтегрированные члены обращаются в ноль, если учесть (8.45). Проблем с первой производной по t нет как в уравнении, так и в начальном условии. В результате задача для трансформант приводится к виду:

$$\bar{u}_t(\alpha, t) + \alpha^2 a^2 \bar{u}(\alpha, t) = 0, \quad (8.46)$$

$$\bar{u}(\alpha, t) \Big|_{t=0} = \bar{f}(\alpha). \quad (8.47)$$

Она решается стандартным образом:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\alpha^2 a^2 \bar{u}, \quad \frac{d\bar{u}}{\bar{u}(\alpha, t)} = -\alpha^2 a^2 dt, \quad \frac{d}{dt} \ln \bar{u}(\alpha, t) dt = -\alpha^2 a^2 dt,$$

$$\ln \bar{u}(\alpha, t) dt = -\alpha^2 a^2 t + \ln C, \quad \bar{u}(\alpha, t) = C e^{-\alpha^2 a^2 t}.$$

Постоянная интегрирования находится из начального условия (8.47) и равна $C = \bar{f}(\alpha)$. Тогда

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha) e^{-\alpha^2 a^2 t}. \quad (8.47)$$

Восстановим оригинал:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha) e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Внутренний интеграл вычисляется и равен

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha + \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot \cos[\alpha(x-\xi)] d\alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим последний интеграл

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot \cos(\beta\alpha) d\alpha, \quad \text{где } \beta = (x-\xi). \quad (8.49)$$

Вычислим его методом дифференцирования по параметру с последующим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\beta)}{d\beta} &= - \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot \sin(\beta\alpha) \alpha d\alpha = \frac{e^{-\alpha^2 a^2 t}}{2a^2 t} \sin(\beta\alpha) \Big|_{\alpha=0}^{\infty} - \frac{\beta}{2a^2 t} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cdot \cos(\beta\alpha) d\alpha = \\ &= -\frac{\beta}{2a^2 t} J(\beta), \quad \ln J(\beta) = -\frac{\beta^2}{4a^2 t} + \ln C. \end{aligned}$$

Окончательно имеем $J(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4a^2 t}}$.

Постоянную интегрирования C найдём из условия (8.49) при $\beta=0$, которое приводит к табличному значению интеграла Пуассона:

$$C = J(0) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} d\alpha = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.$$

В результате получим

$$I(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \quad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (8.50)$$

Зная начальное распределение $f(\xi)$, можно найти пространственно-временное распределение температуры. При $f(\xi) = const$ интеграл сводится к пуассоновскому. Решение полностью совпадает с (3.15), полученным методом разделения переменных.

Задача 5. Решить краевую задачу для уравнения параболического типа в полупространстве, имеющем границу $x=0$. Постановка задачи:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) &= 0, \quad x \in (0, \infty), t \in (0, \infty), \\ u(0,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(x,t), u_x(x,t) &\rightarrow 0, \quad \dots \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Задачу можно решить двумя способами, используя синус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа.

1. Применив синус-преобразование Фурье, получим граничную задачу для трансформант в следующей постановке:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} + a^2 \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t) = 0, \\ \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha). \end{cases}$$

Постановка задачи аналогична предыдущей и схема её решения подобна. С учётом формул, приведённых в табл. 8.1, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \bar{u} &= -a^2 \alpha^2, \dots, & \bar{u}(\alpha, t) &= \bar{f}(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t}. \\ u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha \xi \sin \alpha x d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 t} [\cos \alpha(x - \xi) - \cos \alpha(x + \xi)] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Видно, что решение можно интерпретировать как прямой и обратный потоки тепла, идущие в противоположных направлениях от границы.

2. Применив к уравнению преобразование Лапласа по t , найдём

$$a^2 \bar{u}_{xx} = \int_0^\infty u_t e^{-pt} dt = u e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \bar{u} = -f(x) + p \bar{u}.$$

Постановка задачи для трансформанты будет иметь вид

$$\begin{cases} \bar{u}_{xx} - \frac{p}{a^2} \bar{u} = -\frac{f(x)}{a^2}, \\ \bar{u}(0, p) = 0. \end{cases}$$

Далее применив синус-преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \bar{u}(\alpha, p) - \frac{p}{a^2} \bar{u} &= -\frac{\bar{f}(\alpha)}{a^2}, \quad \bar{u}(\alpha, p) = \frac{\bar{f}(\alpha)}{p + a^2 \alpha^2}, \\ \bar{u}(x, p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\alpha)}{p + a^2 \alpha^2} \sin \alpha x d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \sin \alpha \xi}{p + a^2 \alpha^2} d\alpha. \end{aligned}$$

Выполним обратное преобразование Лапласа, т.е. применим формулу обращения, тогда получим

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty \sin \alpha x \sin \alpha \xi d\alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p + a^2 \alpha^2} dp.$$

По таблице интегральных преобразований Лапласа последний интеграл равен

$e^{-a^2\alpha^2 t}$. В этом можно убедиться, выполнив преобразование Лапласа и вычислив внутренний интеграл после замены произведения синусов по формулам тригонометрии:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} \cdot e^{-pt} dt = \frac{e^{-(p+a^2\alpha^2)t}}{-(p+a^2\alpha^2)} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{p+a^2\alpha^2}.$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} \sin \alpha x \sin \alpha \xi d\alpha = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi,$$

где было использовано

$$\begin{aligned} \sin \alpha \xi \sin \alpha x &= \frac{1}{2} [\cos(x-\xi)\alpha - \cos(x+\xi)\alpha], \\ \frac{a_1 + b_1}{2} &= \alpha x, \quad \frac{a_1 - b_1}{2} = \alpha \xi, \text{ т.е. } a_1 = \alpha(x+\xi), b_1 = \alpha(x-\xi). \end{aligned}$$

Видно, что результат полностью совпадает с полученным посредством синус-преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 224 с. – Режим доступа:
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=140.
2. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: Учебное пособие для вузов/ А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Жуков. – М.: Физматлит, 2005. – 254 с.
3. Методы решения задач математической физики: Учебное пособие/ В. И. Агошков, П. Б. Дубовский, В. П. Шутяев; ред. Г. И. Марчук. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
4. Князев П.Н. Интегральные преобразования: Учебное пособие для вузов. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 190 с.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 2003. – 688 с.
6. Гошин Г.Г., Заев Д.А. Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей. Методические указания к компьютерной лабораторной работе. Томск: ТУСУР, 2011.–13с.
7. Гошин Г.Г., Ларионова Е.Д. Исследование солитонов. Методические указания к компьютерной лабораторной работе. Томск: ТУСУР, 2011. – 20с.
8. Методические указания по практическим занятиям и самостоятельной работы студентов приведены в учебно-методическом пособии [1]: глава 8 – стр.123 – 133, 140 – 154.

Учебное издание

Гошин Геннадий Георгиевич

Методы математической физики

Учебно-методическое пособие

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 210700.62
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л.-----.

Тираж 30 экз. Заказ-----.

Отпечатано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.