

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники»**

Кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ Часть 1

**Методические указания
по проведению практических занятий и
организации самостоятельной работы студентов,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров 210700.62
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

2014

Цифровая обработка сигналов: Методические указания по проведению практических занятий и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2014. - 53 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов дневной формы обучения, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 210700.62. Цель пособия – оказать помощь преподавателям и студентам в вопросах проведения практических занятий и организации самостоятельной работы при изучении дисциплины «Цифровая обработка сигналов».

Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

КАФЕДРА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ОСНОВ РАДИОТЕХНИКИ
(ТОР)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ТОР

_____ А.Я. Демидов

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ Часть 1

Методические указания
по проведению практических занятий и
организации самостоятельной работы студентов,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров 210700.62
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

РАЗРАБОТЧИКИ:
_____ Р.Р. Абенов,
аспирант каф. ТОР

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	6
1.1 Иллюстрация дискретизации и взаимосвязи между уровнем искажения от наложения и частотой дискретизации.....	6
1.2 Иллюстрация взаимосвязи между разрешающей способностью АЦП и параметрами фильтра	10
1.3 Использование минимального уровня шума АЦП как эталона.....	14
1.4 Иллюстрация принципов полосовой дискретизации с недостаточной выборкой	17
1.5 Иллюстрация требований метода полосовой дискретизации с недостаточной выборкой без наложения.....	19
1.6 Иллюстрация расширения полосы частот во избежание наложения.	24
2 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	35
2.2 Дискретизация и контроль за наложением.....	35
2.2 Полосовая дискретизация с недостаточной выборкой	38
2.3 Шум квантования при аналого-цифровом преобразовании.....	42
2.4 Выборка с запасом по частоте при аналого-цифровом преобразовании — наложение спектров и контроль за уровнем шума квантования	43
2.5 Цифроаналоговые преобразования и эффект $\sin x/x$	46
2.6 Выборка с запасом по частоте в цифроаналоговом преобразовании: контроль за зеркальными частотами и шумом квантования	48
2.7 Задачи для решения с помощью Scilab.....	50
3 ЛИТЕРАТУРА	53
3.1 Основная литература	53
3.2 Дополнительная литература	53

ВВЕДЕНИЕ

Практические занятия по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» предназначены для закрепления лекционных материалов.

Целью дисциплины является:

- формирование четких представлений о фундаментальных положениях теории цифровой обработки сигналов;
- обучение основам аналитических и численных методов расчета и анализа цифровых преобразователей сигналов;
- развитие навыков проектирования цифровых измерительных преобразователей, обработки экспериментальных данных и их анализа.

Дисциплина относится к базовой части общенаучного цикла основной образовательной программы подготовки студентов по направлению 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»

Дисциплина входит в состав базовой части специального цикла. Данный курс предусматривает предварительное знакомство студента с базовыми и вариативными дисциплинами профессионального цикла программы.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать: основные методы цифровой обработки сигналов, а также основы аналого-цифрового преобразования сигналов;

уметь: формулировать и решать задачи аналого-цифрового преобразования и цифровой обработки сигнала;

владеть: математическим аппаратом для решения задач аналого-цифрового преобразования и обработки сигнала в цифровом виде.

Данное методическое пособие содержит задачи по аналого-цифровому преобразованию и цифровой обработке сигналов, необходимых для успешного освоения дисциплины. Первая часть методического пособия посвящена решению задач по аналогово-цифровому и цифро-аналоговому преобразованию. Имеются примеры решения типовых задач с иллюстрациями и пояснениями, а также задачи для самостоятельного выполнения.

Методическое пособие основано на примерах, представленных в учебнике Айфичера Э. «Цифровая обработка сигналов: практический подход».

В качестве основного источника изучения по данной дисциплине следует использовать учебные пособия [1, 2]. Кроме того, могут быть использованы разнообразные дополнительные материалы, в том числе и приведенные в списке рекомендуемой литературы [3-4]. Этот список литературы может быть рекомендован также и при подготовке к практическим занятиям, в том числе, и при изучении вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение.

Аналоговый интерфейс ввода-вывода для систем ЦОС реального времени.

1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1 Иллюстрация дискретизации и взаимосвязи между уровнем искажения от наложения и частотой дискретизации

Пример 1

На рисунке 1.1 изображено устройство предварительной обработки данных системы ЦОС реального времени. Предположим, что входной сигнал является широкополосным.

А. Изобразите спектр сигнала до дискретизации (точка А) и после нее (точка В) в пределах области $\pm F_s/2$.

Б. Найдите уровень сигнала и искажения от наложения при частоте 10 кГц и частоте Найквиста (т.е. 20 кГц).

В. Определите минимальную частоту дискретизации ($F_s(\min)$), которая дает отношение сигнала к уровню искажения от наложения 10:1 при частоте 10 кГц. Укажите все дополнительные предположения.

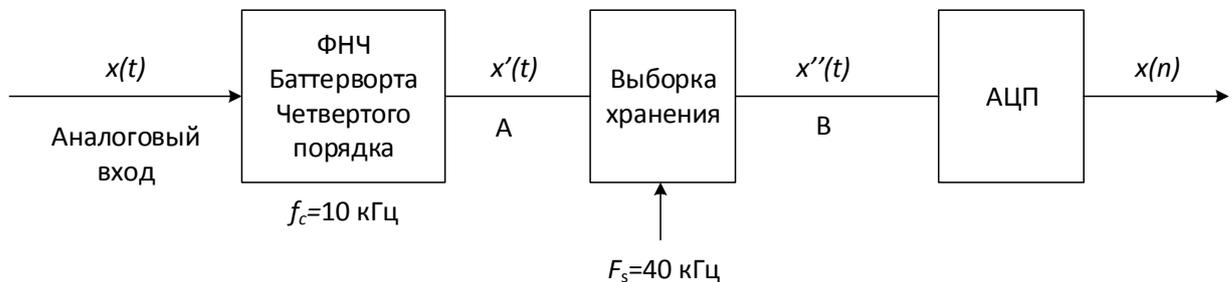


Рисунок 1.1 Устройство предварительной обработки данных системы ЦОС реального времени

Решение

А. Спектр сигнала до и после дискретизации изображен на рисунке 1.2. Заметим, что форма каждого спектрального компонента имеет ту же форму, что и характеристика фильтра Баттерворта, т.е.

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^8}}$$

Б. Спектр сигнала на выходе фильтра равен произведению спектра

сигнала и характеристики фильтра, т.е. $X(f)|H(f)|$. Для входного широкополосного сигнала спектр $X(f)$, по сути, плоский. Если предположить, что максимальное значение $X(f)$ и $H(f)$ равно единице (т.е. они нормированы), уровень сигнала до дискретизации (на выходе фильтра) и после нее (после схемы выборки-хранения) определяется характеристикой аналогового фильтра.

$$X_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{30}{10}\right)^8}} = 0,012$$

Итак, при частоте 10 кГц уровень нормированного сигнала (из приведенного выше уравнения) равен просто 0,707 (т.е. $1/\sqrt{2}$). Уровень искажения от наложения (согласно рисунок 1.2, б) задается как уровень наложения,

Частота Найквиста равна 20 кГц (т.е. половине частоты дискретизации). Это точка пересечения характеристик на рисунке 1.2, б, поэтому уровни сигнала и искажения от наложения одинаковы. И уровень сигнала, и уровень наложения при 20 кГц (исходя из выражения для характеристики Баттерворта, где $f = 20$ кГц, а $f_c = 10$ кГц) равны 0,062.

В. При 10 кГц уровень сигнала составляет 0,707. Отношение уровня сигнала к уровню наложения 10:1 предполагает уровень наложения в 0,0707. Зеркальный компонент, который вызывает наложение, определяется уравнением Баттерворта. Следовательно, из указанного уравнения находим:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{10}\right)^8}} = 0,0707$$

т.е. $f = 19,39$ кГц.

Это соответствует частоте наложения при 10 кГц, т.е. f_a на приведенном выше рисунок 1.2, б. Следовательно, частота дискретизации $F_s = f_a + 10 = 29,39$ кГц.

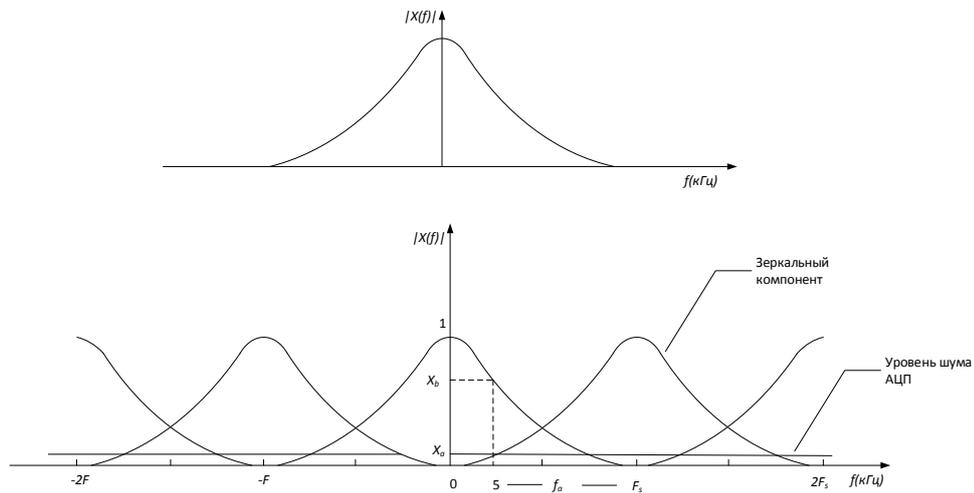


Рисунок 1.2. Спектр дискретного сигнала, на котором показано искажение, вызванное наложением и шумом квантования АЦП

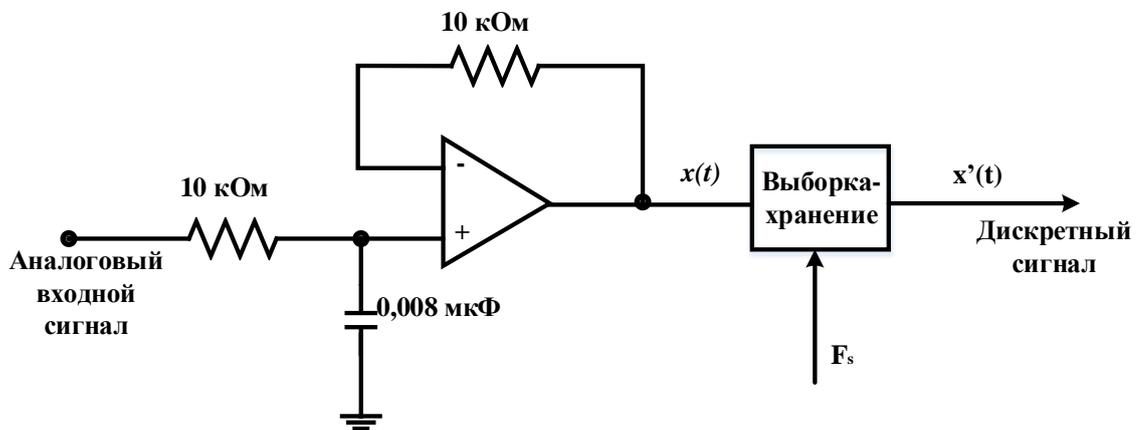


Рисунок 1.3. Устройство предварительной обработки в простой системе сбора данных. Простой активный фильтр ограничивает полосу частот сигнала перед дискретизацией с частотой F_s

Пример 2

На рисунке 1.3 изображено устройство предварительной обработки в простой системе сбора данных. Найдите минимальную частоту дискретизации F_s , при которой искажение от наложения будет составлять меньше 2 % от уровня сигнала в полосе пропускания.

Решение

Амплитудная характеристика активного фильтра задается следующим образом:

$$|H(f)| = \frac{1}{[1 + (f / f_c)^2]^{1/2}},$$

где $f_c = 1/2\pi RC = 2 \text{ кГц}$.

Спектр входного сигнала с ограниченной полосой частот и спектр дискретного сигнала показаны на рисунке 1.4, где предполагалось, что на вход подается аналоговый широкополосный сигнал.

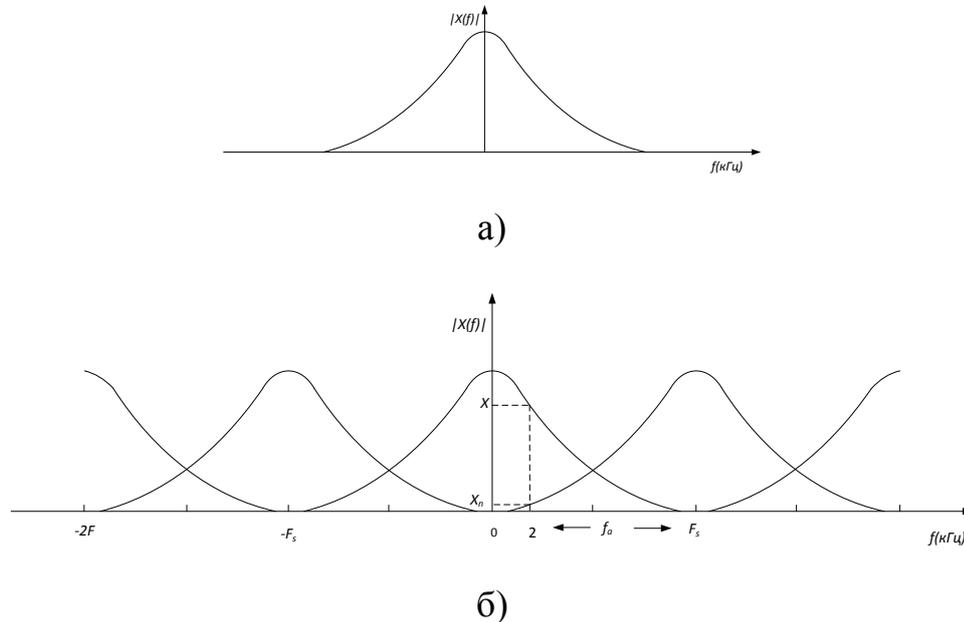


Рисунок 1.4. Спектр сигнала а) на выходе аналогового фильтра и б) после дискретизации (пример 2)

На рисунке видно, что спектр дискретного сигнала повторяется на частотах, кратных частоте дискретизации. Перекрытие зеркальных частот с интересующей нас полосой частот (от 0 до 2 кГц) — это наложение.

При частоте 2 кГц уровень сигнала $X_b = 0,7071$, так что искомый уровень наложения $< 0,7071 \times 2/100 = 0,01414$.

Следовательно,

$$0,01414 < \frac{1}{[1 + (f_a / 2)^2]^{1/2}}$$

где f_a — частота наложения. Решив это уравнение относительно f_a , получим: $f_a < 141,4 \text{ кГц}$. Следовательно,

$$F_s(\text{min}) > f_c + f_a = 2 \text{ кГц} + 141,4 \text{ кГц} = 143,4 \text{ кГц}.$$

Если учесть спецификации и появление зеркальных частот в точках $2F_s$, $3F_s$ и т.д. (что ранее не учитывалось), то $F_s(\text{min}) > 143,4 \text{ кГц}$. Положим $F_s(\text{min}) = 150 \text{ кГц}$.

1.2 Иллюстрация взаимосвязи между разрешающей способностью АЦП и параметрами фильтра

Пример 3

На рисунке 1.5 изображена система ЦОС реального времени. Предположив, что интересующая нас полоса частот занимает положение от 0 до 4 кГц, и что используется 12-битовый *биполярный* АЦП, оцените:

1) минимальное затухание в полосе подавления A_{\min} для фильтра защиты от наложения спектров;

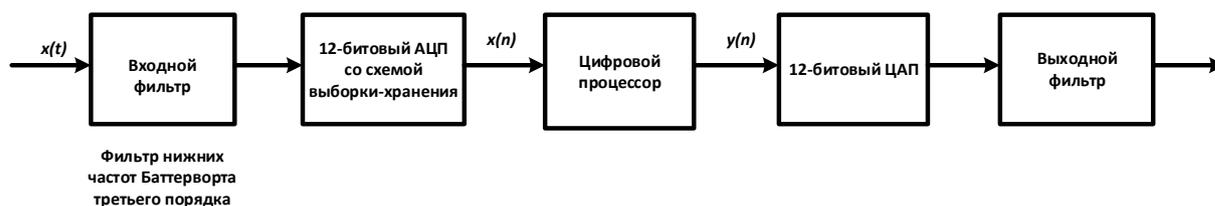


Рисунок 1.5. Система цифровой обработки сигналов реального времени

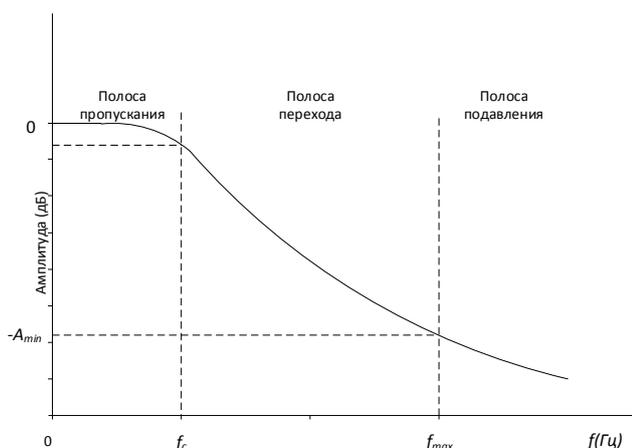


Рисунок 1.6. Типичная амплитудно-частотная характеристика реального фильтра защиты от наложения спектров

- 2) минимальную частоту дискретизации F_s ;
- 3) уровень искажения от наложения спектров относительно уровня сигнала в полосе пропускания для оцененных A_{\min} и F_s .

Изобразите спектр сигнала на выходе аналогового фильтра, предположив, что на вход подается широкополосный сигнал, а также спектр сигнала после дискретизации.

Решение

Согласно условиям теоремы о дискретном представлении фильтр защиты от наложения спектров должен ограничивать полосу частот спектра входного сигнала таким образом, чтобы во избежание наложения удалить частотные компоненты, превышающие частоту Найквиста.

На практике, поскольку идеального фильтра не существует, фильтр защиты от наложения обычно подавляет частотные компоненты, превышающие частоту Найквиста, до уровня, меньшего чем среднеквадратический уровень шума квантования АЦП, так что эти компоненты становятся неразличимы для АЦП.

Типичная амплитудно-частотная характеристика фильтра защиты от наложения спектров изображена на рисунке 1.6, где показаны полосы пропускания, подавления и перехода. Фильтр защиты от наложения спектров разработан для подавления уровня частотных компонентов в полосе подавления, т.е. частот $\geq f'_{max}$, до уровня, не превышающего среднеквадратический уровень шума квантования АЦП.

Итак, эффективная частота Найквиста равна $\geq f'_{max}$, а эффективную частоту дискретизации можно найти так:

$$F_s \geq 2f'_{max} \quad (2.3)$$

Теперь величина шага квантования задается как

$$q = \frac{V_{fs}}{2^B - 1} \approx \frac{V_{fs}}{2^B}$$

где B — количество битов АЦП, а V_{fs} — полный диапазон входного сигнала. Следовательно,

$$V_{fs} \approx q \times 2^B$$

Среднеквадратический уровень шума квантования задается как

$$\sqrt{\frac{q^2}{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

Если предположить для простоты, что входной сигнал имеет вид синусоиды с максимальной амплитудой A (такой сигнал точно вмещается в диапазон частот АЦП), то максимальный уровень сигнала полосы пропускания будет равен

$$V_{fs} = 2A = q \times 2^B$$

Следовательно,

$$A = \frac{q \times 2^B}{2}$$

Отношение максимального уровня сигнала в полосе пропускания к уровню сигнала в полосе подавления показывает меру максимального затухания сигнала в полосе подавления фильтра:

$$\frac{\text{Максимальный уровень сигнала в полосе пропускания}}{\text{уровень сигнала в полосе подавления}} = \frac{q \times 2^B / 2\sqrt{2}}{q / 2\sqrt{3}} = \sqrt{1,5} \times 2^B$$

1. Итак, в системе ЦОС минимальное затухание A_{\min} в полосе подавления (при синусоидальном входе) задается как

$$A_{\min} = 20 \lg(\sqrt{1,5} \times 2^B) \text{ дБ} = 74 \text{ дБ}$$

2. Спектр сигнала до и после дискретизации (без зеркальных частот более высоких порядков) показан на рисунке 1.7

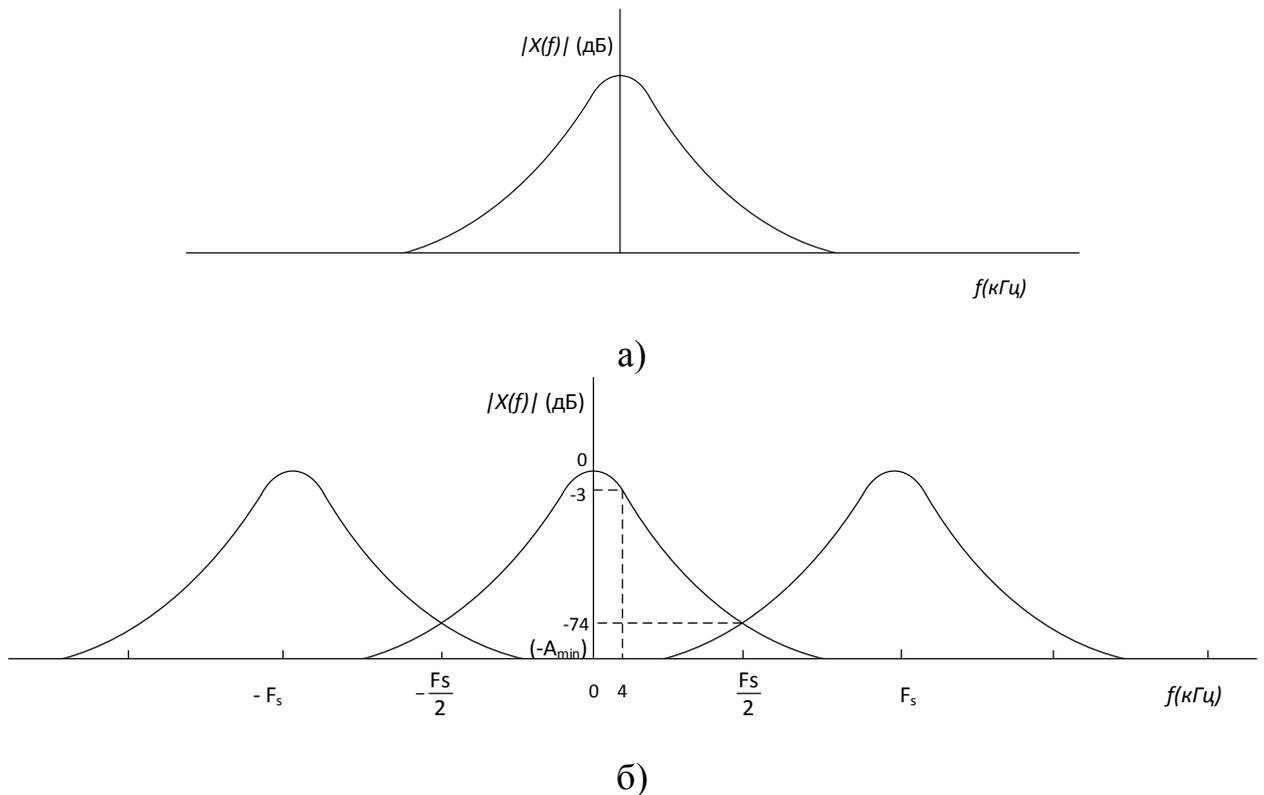


Рисунок 1.7. Спектр сигнала: а) на выходе аналогового фильтра; б) после дискретизации (Пример 3)

Из

$$A_{\min} = 74 = 20 \lg \left[1 + \left(\frac{f'_{\max}}{f_c} \right)^6 \right]^{1/2}$$

получаем

$$\left(\frac{f'_{\max}}{f_c} \right)^6 = (5011.87)^2 - 1$$

Откуда $f'_{\max} = 68,45$ кГц.

Из уравнения (2.3) $2f'_{\max}$ получаем: $F_s = 136,9$ кГц.

3. При частоте 4 кГц уровень наложения составляет

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{136,9 - 4}{4} \right)^6 \right]^{1/2}} = 2,73 \times 10^{-5}$$

Уровень наложения спектров относительно уровня сигнала при частоте 4 кГц равен

$$\frac{2,73 \times 10^{-5}}{0,7071}$$

Если нужно подавить граничную частоту полосы пропускания настолько, чтобы она точно была ниже уровня шума квантования, частоту дискретизации можно снизить до $68,4 + 4 = 72,4$ кГц.

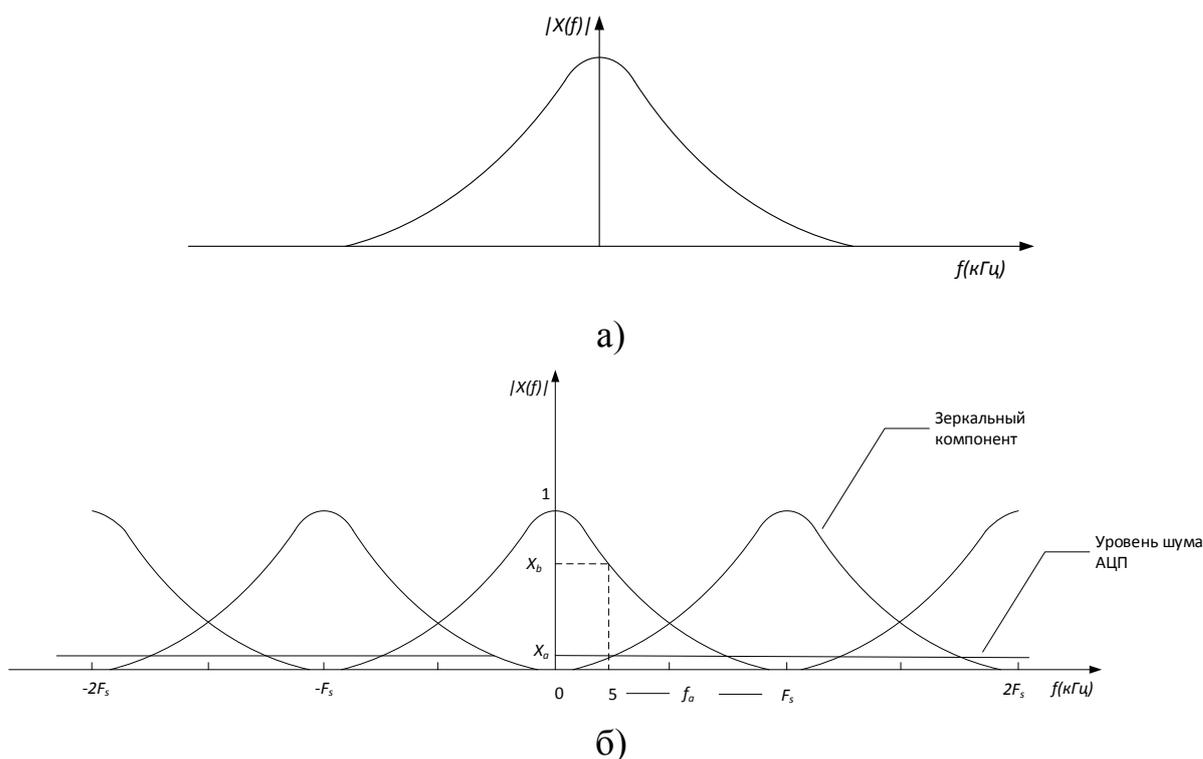


Рисунок 1.8. Спектр дискретного сигнала, на котором показано искажение, вызванное наложением и квантованием АЦП (пример 4)

1.3 Использование минимального уровня шума АЦП как эталона

Пример 4

Полоса частот аналогового сигнала с однородной спектральной плотностью мощности ограничена фильтром защиты от наложения спектров со следующей амплитудной характеристикой:

$$|H(f)| = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^8\right]^{1/2}}$$

где $f_c = 5$ кГц. Сигнал оцифрован с помощью линейного 12-разрядного биполярного АЦП. Найдите:

- 1) минимальную частоту дискретизации, при которой максимальное искажение от наложения не будет превышать уровень шума квантования;
- 2) максимальный уровень сигнала в полосе пропускания (в дБ) относительно минимального уровня шума квантования АЦП.

Решение

1. Частоту дискретизации следует выбирать так, чтобы фильтр защиты

от наложения спектров ослаблял искажение от наложения, попадающее в полосу пропускания, до уровня, меньшего, чем минимальный среднеквадратический шум АЦП, чтобы оно было неразличимо для АЦП (рисунок 1.15).

Предположим, что входной сигнал имеет вид синусоиды с максимальной амплитудой A (такой сигнал точно вмещается в диапазон АЦП), тогда среднеквадратическое

значение входного сигнала:

$$\frac{A}{\sqrt{2}}$$

шаг квантования:

$$q \approx \frac{2A}{2^B}$$

среднеквадратический шум квантования:

$$\frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{A}{\sqrt{3} \times 2^B}$$

При частоте 5 кГц максимальное искажение вследствие наложения равно

$$\frac{A}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{f_a}{5}\right)^6\right]^{1/2}} = \frac{A}{\sqrt{3} \times 2^B}$$

При $B = 12$ бит это уравнение можно решить относительно частоты наложения f_a и, следовательно, найти частоту дискретизации F_s :

$$f_a = 85,59 \text{ кГц,}$$

$$F_s = f_a + 5 = 90,59 \text{ кГц.}$$

2. Максимальный уровень сигнала относительно минимального уровня шума АЦП:

$$\frac{\text{максимальное среднеквадратическое значение уровня сигнала}}{\text{максимальное искажение в результате квантования}} = \frac{A/\sqrt{2}}{A/(\sqrt{3} \times 2^B)} = \sqrt{1,5} \times 2^B$$

$$\begin{aligned} \text{Минимальный уровень шума АЦП равен} & \quad (2.5) \\ = 20 \lg(\sqrt{1,5} \times 2^B) \end{aligned}$$

Заметим также, что отношение сигнал-минимальный уровень шума АЦП в данном случае можно найти из следующего выражения (см. уравнение (2.4)):

$$\text{Минимальный уровень шума} = 20 \lg \left[1 + \left(\frac{f_a}{5} \right)^6 \right]^{1/2} \text{ дБ.}$$

Пример 5

В системе ЦОС реального времени используется 12-битовый АЦП со временем преобразования 35 мкс и без схемы выборки-хранения. Какова наибольшая частота, поддающаяся оцифровке в пределах точности $\frac{1}{2}$ МЗБ, если предположить, что система бинарна с однородным квантованием? Результат прокомментируйте.

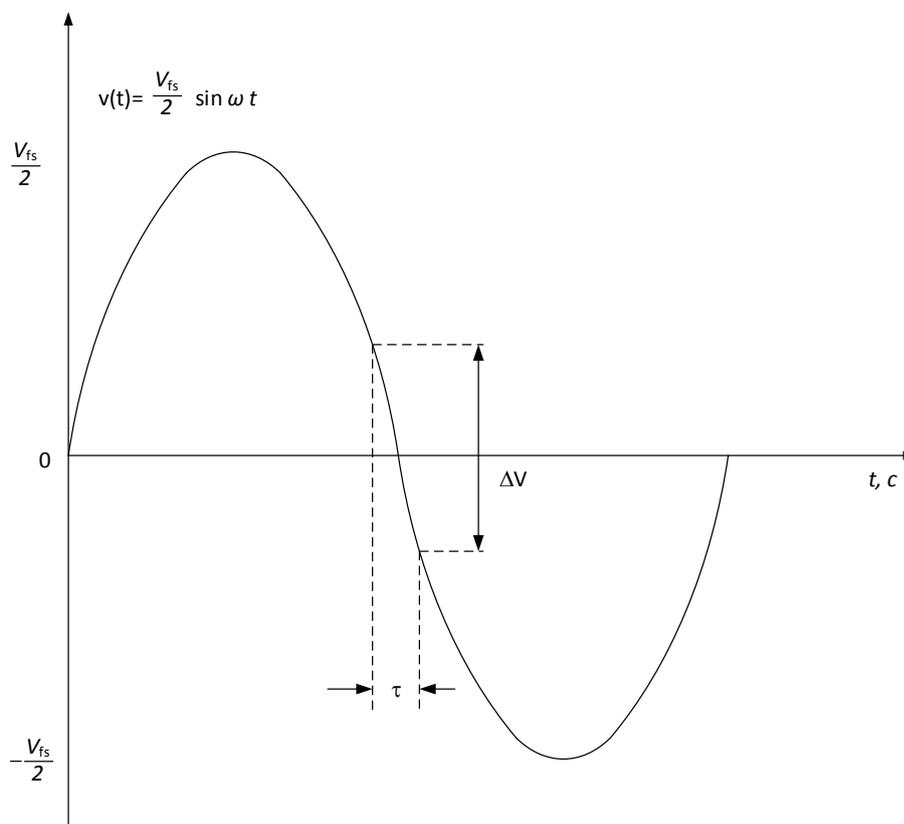


Рисунок 1.9. Синусоидальный сигнал (пример 5)

Решение

Рассмотрим синусоидальный сигнал с максимальной амплитудой, равной половине полного диапазона АЦП, $V_{fs}/2$ (рисунок 1.9). На рисунке τ — это апертурное время, а Δv — изменение $v(t)$ за время τ . Самое большое

изменение происходит в точке $t=0$, и, чтобы АЦП выдавал сигнал с желаемой точностью, это нужно учесть. В этой точке

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = (V_{fs} / 2) \omega \cos \omega t = \pi f V_{fs} (Bc^{-1}) = \frac{\Delta v}{\tau}$$

Для точности $\frac{1}{2}$ МЗБ $\Delta v = \alpha/2$, где $\alpha = (V_{fs}/2^B)$. Следовательно, $\Delta v/\tau = \pi f V_{fs}$. Подставив значения V_{fs} и Δv и упростив выражение, получим

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi 2^{B+1} \tau}$$

Для рассматриваемой системы ЦОС $B=12$ бит и $\tau = 35$ мкс. Следовательно, $f_{\max} = 1,11$ Гц.

Ясно, что от АЦП, который может преобразовывать только максимальную частоту 1,11 Гц, мало пользы. На практике перед АЦП обычно стоит устройство выборки-хранения, которое замораживает элемент сигнала во время преобразования и дает возможность точно оцифровывать сигналы в килогерцовом диапазоне. Например, если перед АЦП, рассмотренным выше, расположить схему выборки-хранения с апертурным временем 25 нс и временем захвата сигнала 2 мкс, то максимальная частота, которую можно преобразовать, будет равна

$$2f_{\max} \leq F_s = 1 / (35 + 2 + 0,025) \times 10^{-6} \text{ кГц}, \text{ т.е. } f_{\max} = 13,5 \text{ кГц}.$$

Следовательно, сигнал с максимальной частотой 13,5 кГц будет дискретизоваться с частотой 27 кГц, или с интервалом $(35 + 2 + 0,025) \text{ мкс} = 37,025 \text{ мкс}$.

1.4 Иллюстрация принципов полосовой дискретизации с недостаточной выборкой

Пример 6

На рисунке 1.10, а показано устройство предварительной обработки данных приемника многоканальной системы связи. Спектр принимаемого сигнала показан на рисунке 1.10, б с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале перед оцифровкой сигнала с наименьшей возможной частотой служит полосовой фильтр.

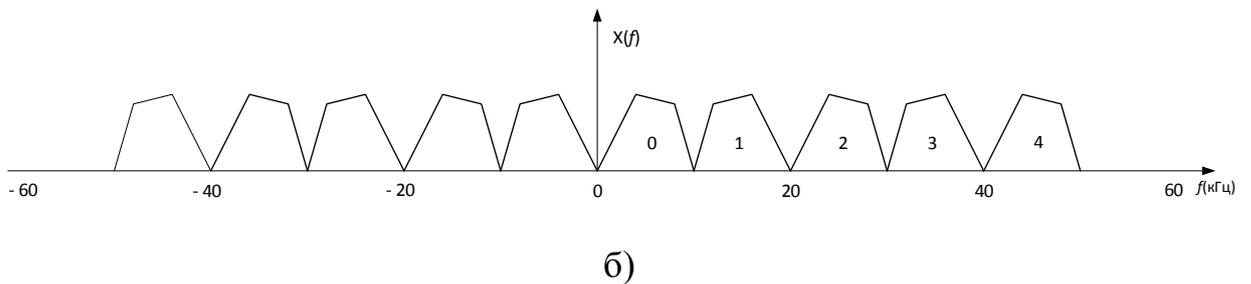
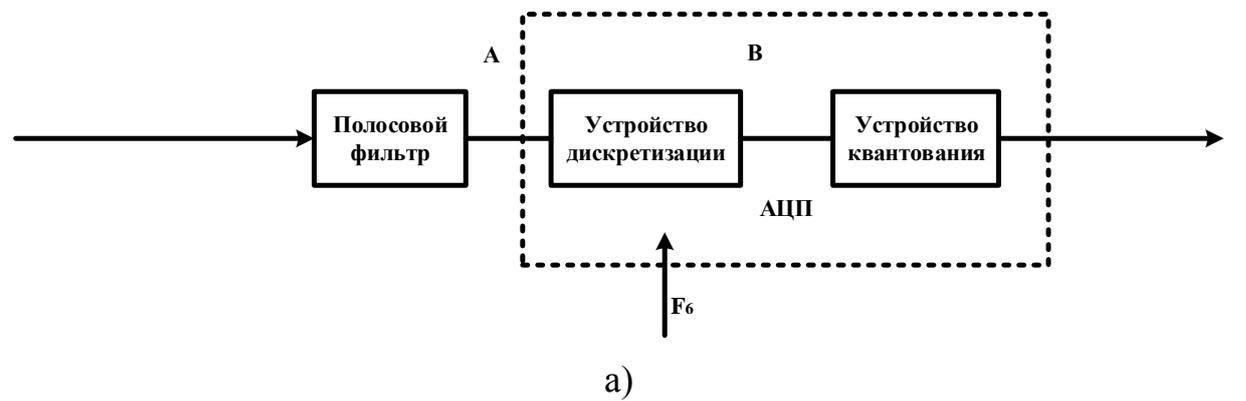


Рисунок 1.10. Устройство для предварительной обработки данных системы (панель а); спектр принятого сигнала (панель б) (пример б)

Предположим, что полосовой фильтр — идеальный и имеет следующие характеристики:

$$H(f) = 140 \text{ кГц} \leq f \leq 50 \text{ кГц}$$

0 — в других случаях

1. А. Найдите минимальную теоретическую частоту дискретизации.

Б. Изобразите спектр сигнала до дискретизации (точка А) и после дискретизации (точка В).

2. Повторите пункты А и Б для полосового фильтра, который пропускает сигнал канала 3

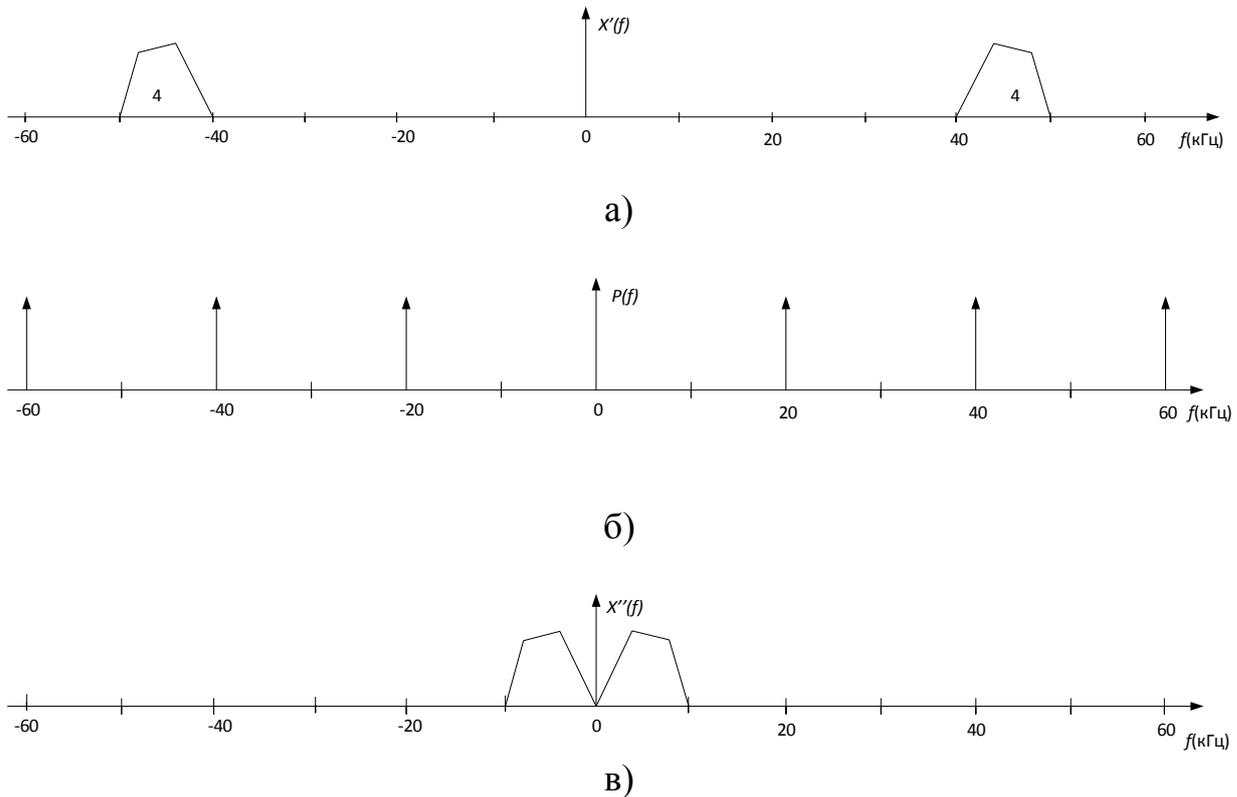


Рисунок 1.11. Выход полосового фильтра (панель *a*); функция дискретизации (панель *б*); выход устройства дискретизации (панель *в*) (пример б)

Решение

1. А. Минимальная теоретическая частота дискретизации равна 2×10 кГц, т.е. 20 кГц.

Б. Спектр в точке А (выход полосового фильтра) — это просто спектр сигнала для канала 4 (рисунок 1.11, *a*).

Спектр в точке В (т.е. после дискретизации) можно найти, выполнив свертку спектра сигнала на выходе полосового фильтра (рисунок 1.11, *a*) со спектром функции дискретизации (рисунок 1.11, *б*). Результат данного процесса изображен на рисунке 1.11, *в*.

2. А. Частота дискретизации остается 20 кГц.

Б. Производя те же действия, что и в п. 2.6.1, получаем изображенные на рисунке 1.12, *a* и *в* соответственно спектры в точках А и В.

1.5 Иллюстрация требований метода полосовой дискретизации с недостаточной выборкой без наложения

Пример 7

На рисунке 1.13 изображен спектр узкополосного сигнала. Найдите и

изобразите спектр дискретного сигнала в диапазоне $\pm F_s/2$ при следующих условиях:

- 1) $\frac{f_H}{B} = 4,$
- 2) $\frac{f_H}{B} = 5,$
- 3) $\frac{f_H}{B} = 6,5.$

Считайте в каждом случае, что ширина полосы сигнала $B = 4$ кГц, а сигнал дискретизируется с частотой $2B$.

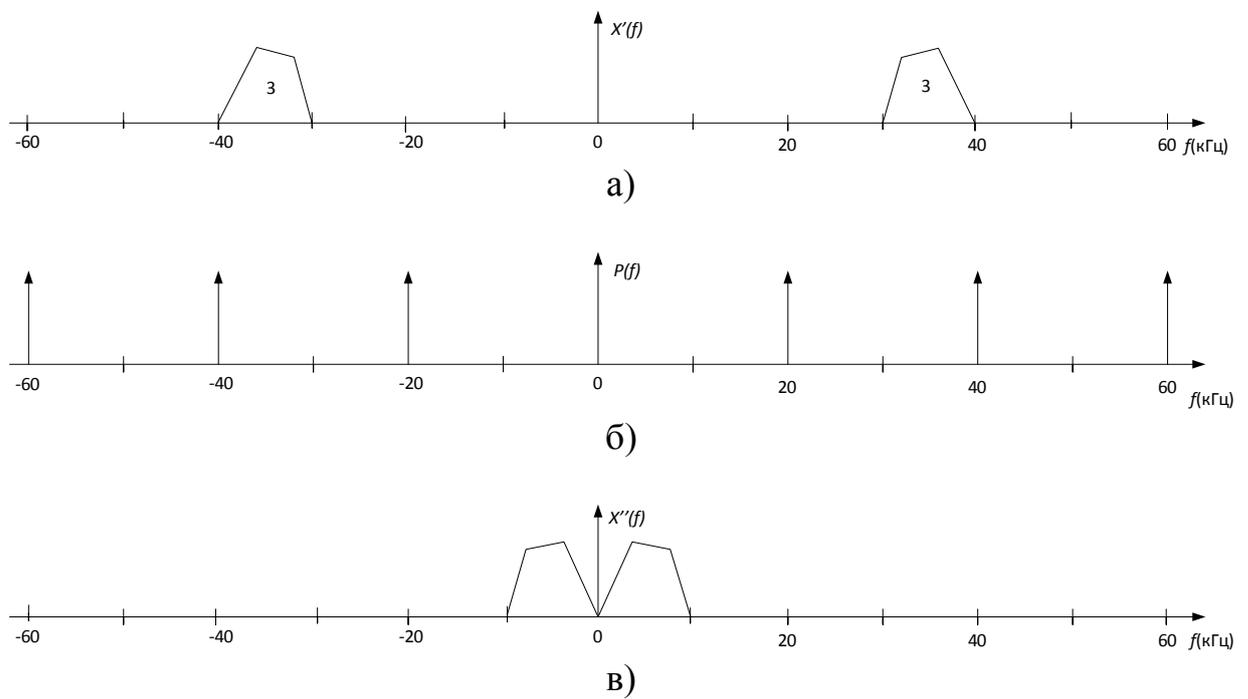


Рисунок 1.12. Выход полосового фильтра (панель а); функция дискретизации (панель б); выход устройства дискретизации для канала 3 (панель в) (пример б)

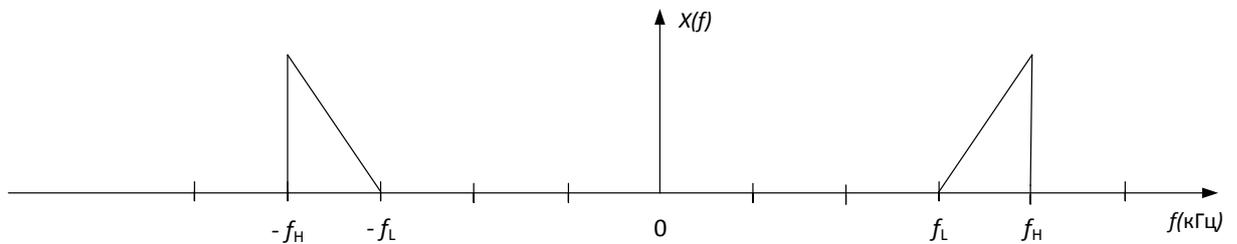


Рисунок 1.13. Спектр узкополосного сигнала (пример 7)

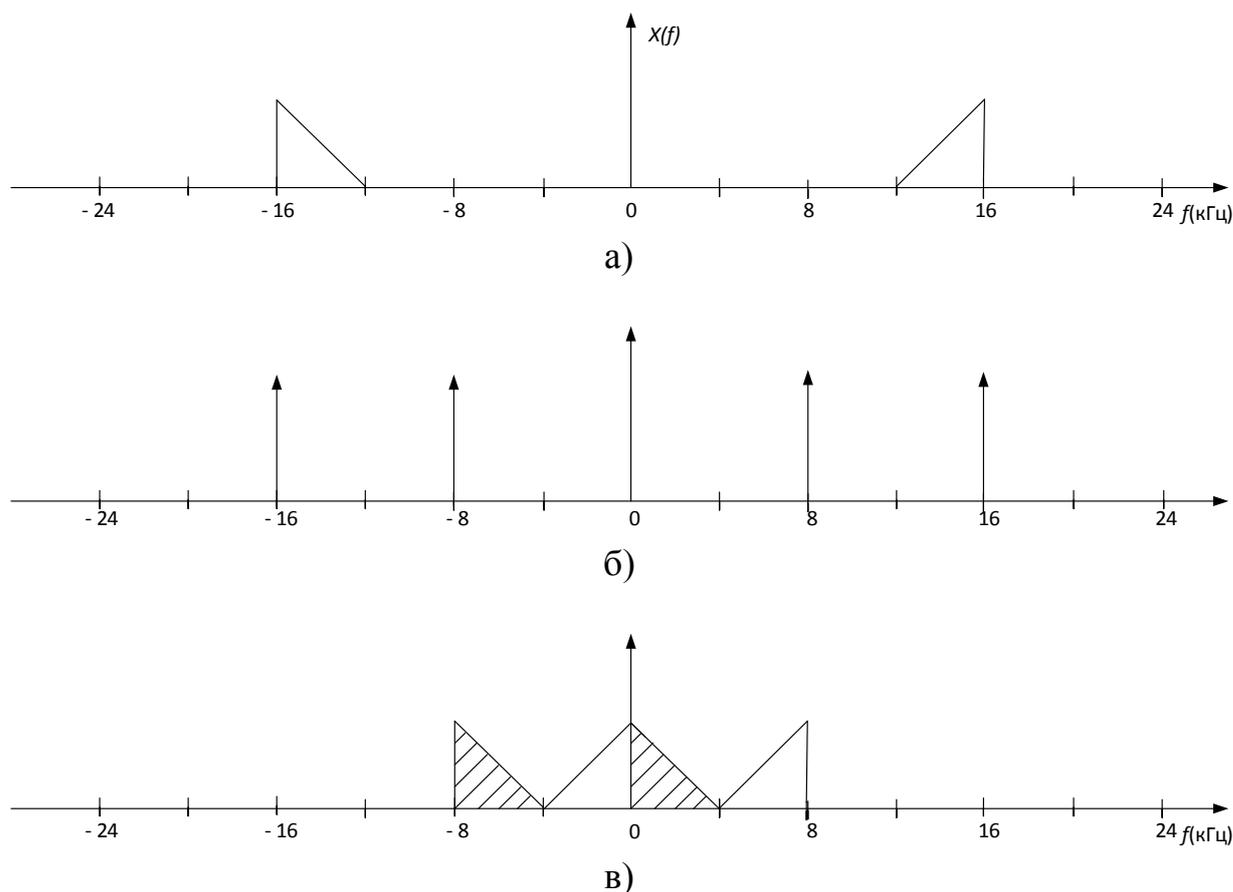


Рисунок 1.14. Спектр дискретного сигнала для четных целых n ($n = f_H/B = 4$) (пример 7, вариант 1)

Решение

1. Соответствующий спектр сигнала показан на рисунке 1.14, а. Дискретизируя сигнал с частотой $2B$, получаем частоту дискретизации 8 кГц. Спектр дискретного сигнала можно найти с помощью графической свертки спектра сигнала (рисунок 1.14, а) и выборочной функции (рисунок 1.14, б). Чтобы выполнить свертку, зафиксируем спектр сигнала и сместим спектр выборочной функции. Для выполнения графической свертки перед началом смещения перевернем сигнал, чтобы его положение изменилось относительно вертикальной оси. Впрочем, поскольку функция отсчетов симметрична относительно оси частот, этот шаг необязателен, так как в конце концов мы получим сигнал точно такой же формы.

Видно, что точка, соответствующая частоте -16 кГц на рисунке 1.14, б, точно совпадает с отрицательной частью спектра сигнала. Следовательно, если сместить спектр выборочной функции вправо, то произойдет свертка точки, соответствующей частоте -16 кГц, с частью спектра сигнала с отрицательной частотой. Это даст спектр в диапазоне от 0 до 4 кГц на рисунке 1.14, в. Затем сворачивается точка спектра, соответствующая частоте 8 кГц на рисунке 1.14, б, с частью полосы сигнала между 12 и 16 кГц, что

дает спектр между 4 и 8 кГц на рисунке 1.14, в.

Зеркальное изображение спектра дискретного сигнала можно получить, смещая спектр выборочной функции влево. Части спектра дискретного сигнала, полученные с помощью отрицательных частотных компонентов, заштрихованы.

Комментарий. Часть спектра дискретного сигнала между 0 и 4 кГц перевернута по сравнению с исходным спектром между 12 и 16 кГц. Кроме того, в полосе сигнала нет наложения, поэтому он может быть восстановлен с помощью соответствующего обратного спектрального алгоритма.

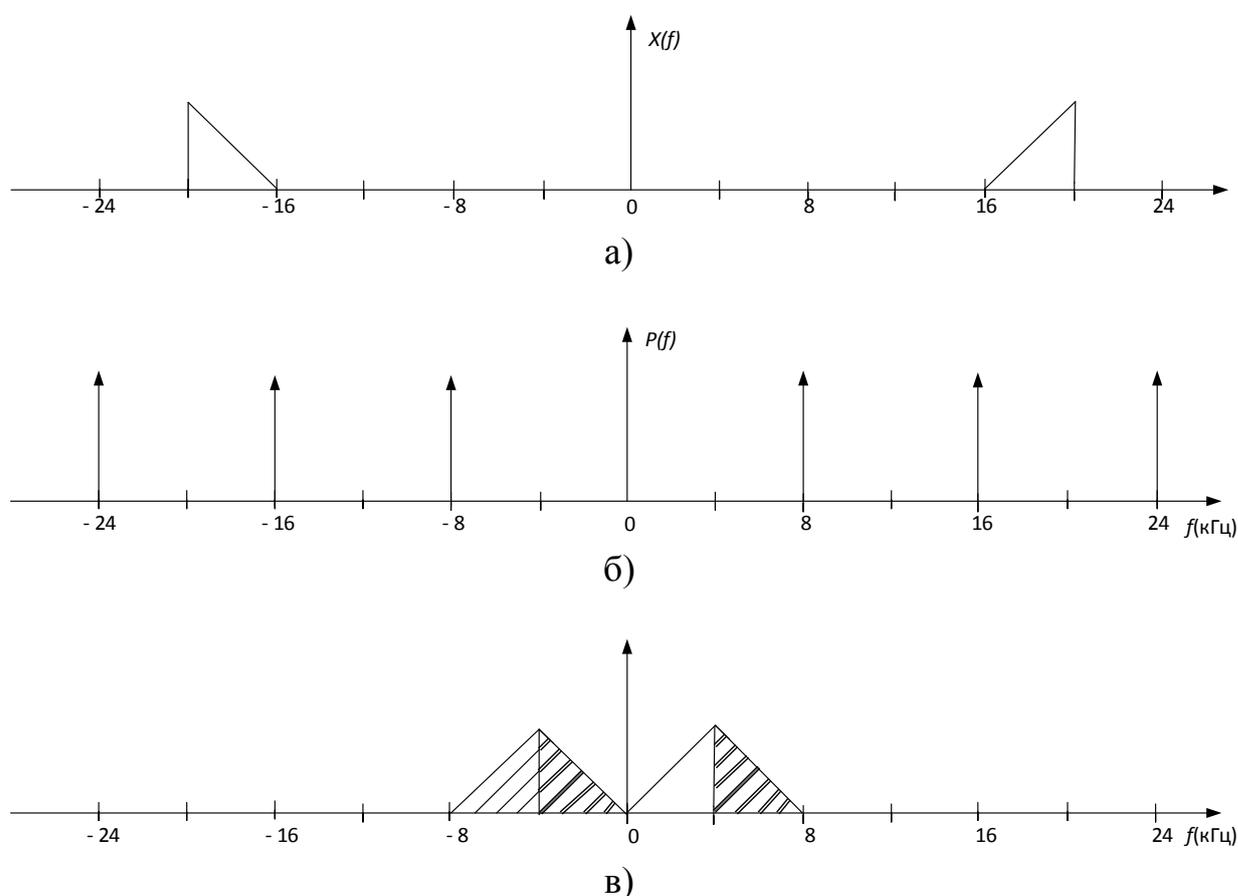


Рисунок 1.15. Спектр дискретного сигнала для нечетных целых n ($n = f_H/B = 5$) (пример 7, вариант 2)

2. Частота дискретизации также равна 8 кГц, а спектры сигнала и выборочной функции показаны на рисунке 1.15, а и б.

Как и прежде, зафиксировав спектр сигнала и сместив спектр выборочной функции сначала вправо, а затем влево, получаем спектр дискретного сигнала, изображенный на рисунке 1.15, в.

Части спектра дискретного сигнала, полученные с помощью отрицательных частотных компонентов, на рисунке заштрихованы.

Комментарий. *Часть спектра дискретного сигнала между 0 и 4 кГц не перевернута по сравнению с исходным спектром между 12 и 16 кГц, а в полосе сигнала нет наложения, так что его можно восстановить.*

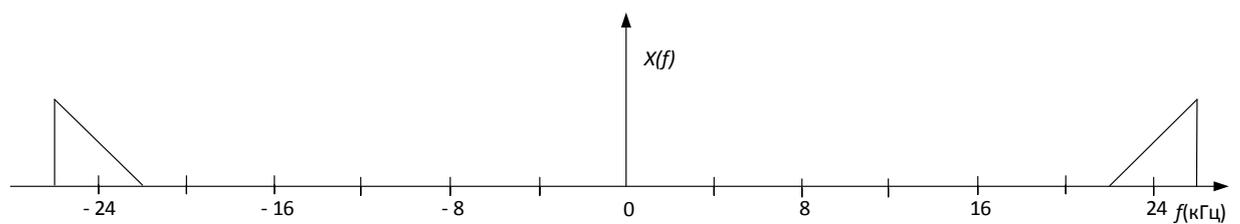
3. Как и в предыдущем случае, частота дискретизации равна 8 кГц, а спектры сигнала и функции дискретизации показаны на рисунке 1.16, а и б.

Как и прежде, зафиксируем спектр сигнала и сместим спектр выборочной функции сначала вправо, а затем влево. В результате получим спектр дискретного сигнала, изображенный на рисунке 1.16, в.

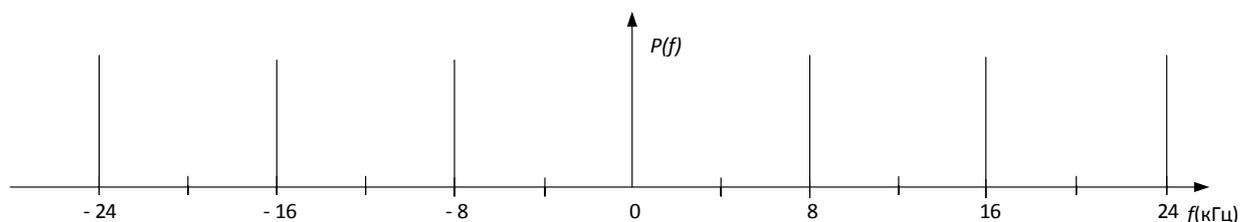
Видно, что точка, соответствующая частоте —24 кГц, на рисунке 1.16, б находится в середине отрицательной части спектра сигнала, а точка, соответствующая частоте 24 кГц, — в середине части спектра 22-26 кГц. Следовательно, если сместить спектр выборочной функции вправо, выполнится свертка точки, соответствующей частоте —24 кГц, с частью спектра, имеющей отрицательные частоты, а точки, соответствующей частоте 24 кГц, — с положительной частью спектра сигнала. В результате получим спектр в диапазоне 0-2 кГц на рисунке 1.16, в. Часть спектра дискретного сигнала, полученная с помощью отрицательных частотных компонентов, показана пунктиром, а полученная с помощью положительных частотных компонентов — сплошной линией.

После дальнейшего смещения на 4 кГц выполняется свертка точки спектра, соответствующей 16 кГц на рисунке 1.16, б, с положительной полосой сигнала, что дает спектр с центром в 8 кГц на рисунке 1.16, в, показанный сплошной линией. Пунктирная линия получена с помощью точки спектра, соответствующей —16 кГц. Зеркальное изображение спектра дискретного сигнала получается в результате смещения выборочной функции влево.

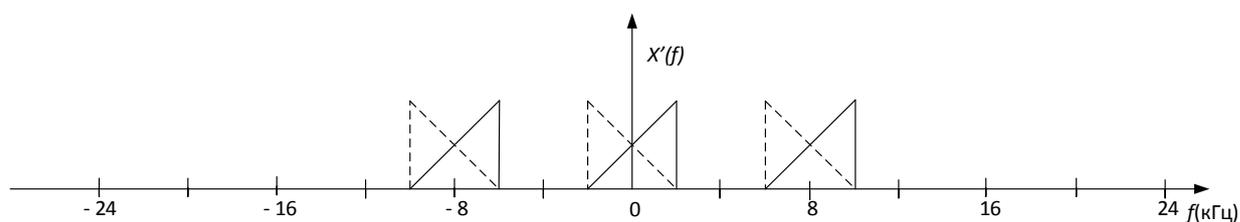
Комментарий. *Перекрывание спектров, полученных с помощью положительных и отрицательных спектральных точек, свидетельствует о наложении, следовательно, в этом случае при дискретизации с частотой 8 кГц компоненты сигнала восстановить нельзя.*



а)



б)



в)

Рисунок 1.16. Спектр дискретного сигнала для нечетных целых n ($n = f_H/B = 6,5$) (пример 7, вариант 3)

1.6 Иллюстрация расширения полосы частот во избежание наложения.

Пример 8

Найдите минимальную частоту дискретизации, позволяющую избежать наложения в примере 7 (вариант 3) путем соответствующего смещения нижней граничной частоты полосы.

Изобразите спектр измененного сигнала до и после дискретизации с новой частотой.

Решение

Отношение верхней граничной частоты к ширине полосы равно

$$\frac{f_n}{B} = \frac{26}{4} = 6,5$$

Если n равно 6 (ближайшему меньшему целому числу), то нижнюю граничную частоту можно снизить до нового значения:

$$f'_L = \left(\frac{n-1}{n}\right) f_H = 21,66 \text{ кГц}.$$

Теперь новая ширина полосы B' и частота дискретизации F'_s приобретают значения

$$B' = f_H - f'_L = 4,34 \text{ кГц}$$

$$F'_s = 2B' = 8,68 \text{ кГц}.$$

В качестве упражнения читателям предлагается самостоятельно изобразить спектр сигнала до и после дискретизации и таким образом показать, что наложение отсутствует.

В некоторых приложениях можно достичь условий целочисленной дискретизации без наложения, изменяя не ширину полосы, а центральную частоту. Это возможно в цифровой радиосвязи, где разработчик выбирает локальную промежуточную частоту по своему усмотрению

Пример 9

Объясните значение динамического диапазона и апертурного времени в контексте процесса аналого-цифрового преобразования.

Если в примере 2 динамический диапазон АЦП больше, чем 70 дБ, а выборки нужно оцифровать с точностью МЗБ, найдите

- 1) минимальное разрешение АЦП в битах и
- 2) максимальное допустимое апертурное время, предположив, что максимальная важная частота, которую нужно оцифровать, равна 20 кГц.

Решение

Динамический диапазон — это отношение максимального уровня сигнала к минимальному, с которыми может работать система аналого-цифрового преобразователя. Динамический диапазон чаще всего выражается в децибелах через количество битов преобразователя:

$$D = 20 \lg 2^B. \tag{2.19}$$

В некоторых приложениях динамический диапазон определяется через мощность сигнала. Например, в цифровых системах записи и воспроизведения звука он может определяться как отношение максимальной мощности сигнала к минимальной, которую можно отличить от мощности

шума. Если используется только АЦП, апертурное время — это, по сути, время преобразования АЦП, т.е. период времени, на протяжении которого аналоговый вход должен оставаться постоянным, чтобы можно было осуществить точное преобразование. Относительно схемы выборки-хранения это время, необходимое для записи после того, как отдана команда о сохранении.

1) Из выражения для D получим

$$70 = 20 \lg 2^B,$$

откуда $B = 11,62$. Пусть $B = 12$ бит (ближайшее целое число).

2) Максимально допустимое апертурное время τ задается как

$$\tau = 1/2^{B+1} \pi f_{\max} = 1/(2^{13} \times \pi \times 20 \times 10^3) \text{с} = 1,94 \text{нс}.$$

Данное небольшое апертурное время требуется для использования схемы выборки-хранения на входе АЦП.

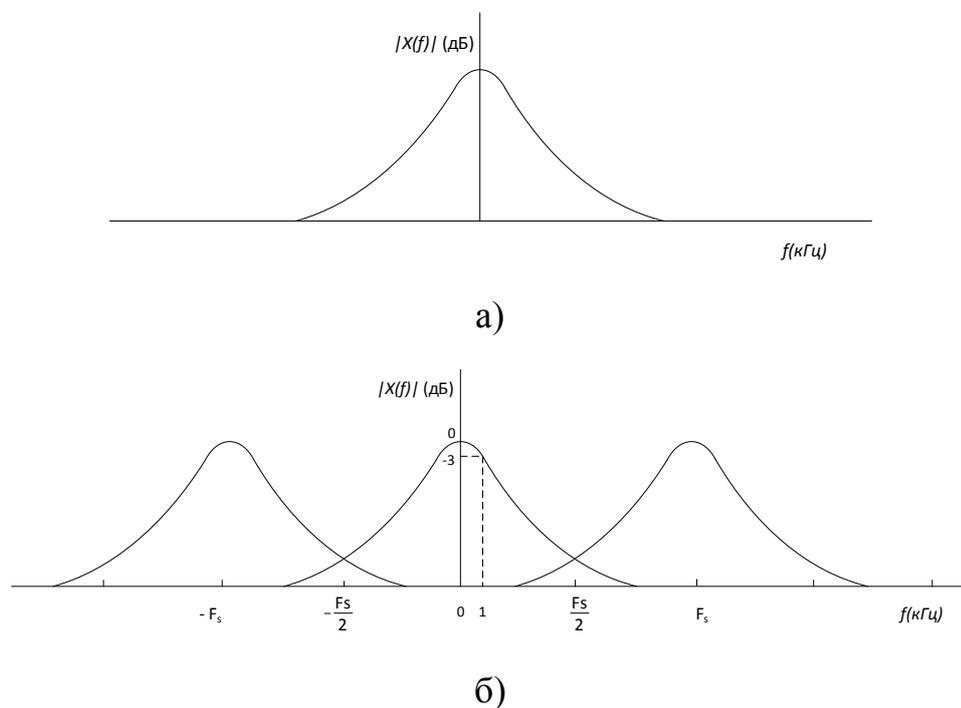


Рисунок 1.17. Спектр входного сигнала: а) до дискретизации б) после дискретизации

Пример 10

1. К универсальной многоканальной (до 64 каналов) системе, собирающей нейрофизиологические данные, существует одно требование. Каждый аналоговый канал должен быть индивидуально задан пользователем так, чтобы граничная частота его полосы пропускания была в пределах от 0,5 кГц до 500 Гц, а выбираемая частота дискретизации — от 1 Гц до 5 кГц. Максимально допустимая неравномерность в полосе пропускания равна 0,5 дБ, а зеркальные компоненты должны быть по крайней мере на 40 дБ ниже компонента сигнала.

Объясните подход, использованный для удовлетворения вышеизложенного требования. Ответ должен включать следующие пункты:

- а) рассуждения о вопросах, специфичных для данного приложения;
- б) указания, как в этом приложении для наиболее эффективного и экономного удовлетворения указанного требования (используйте расчет цены/числа компонентов) можно использовать методы дискретизации с запасом по частоте.

2. Пусть для всех каналов системы из п. 1 используются идентичные фильтры защиты от наложения спектров, каждый из которых имеет следующую характеристику типа Баттерворта:

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^6}}$$

где $f_c = 3$ дБ — частота среза фильтра.

3. Изобразите спектры данных до и после дискретизации и определите:

- а) частоту среза f_c ;
- б) подходящую общую частоту дискретизации F_s .

Ответ прокомментируйте.

Решение

1. АЦП и ЦАП с высоким разрешением ограничивают максимально достижимую частоту дискретизации — данное ограничение является основным для ряда приложений реального времени. Для его преодоления может потребоваться использовать несколько устройств АЦП/ЦАП и/или методов ЦОС с обработкой при нескольких скоростях.

Изменение характеристики на выходе по закону $\sin x/x$, постепенно снижающее высокочастотные компоненты сигнала, можно компенсировать, используя после обработки цифровой фильтр с характеристикой $x/\sin x$. (В своем ответе вы можете использовать и другие технические решения.)

2, а. Чтобы сохранить информацию сигнала, представляющую клинический интерес, и амплитудные, и фазовые искажения должны быть как можно ниже. Кроме того, должна сохраняться временная связь между характеристиками всех каналов. Желательно использовать идентичные фильтры защиты от наложения спектров с достаточно хорошими амплитудно-фазовыми характеристиками.

2, б. Чтобы уменьшить число/цену компонентов и размер устройства управления системой, всем 64 каналам должны соответствовать идентичные простые фильтры защиты от наложения спектров. Затем должна выполняться дискретизация каналов с запасом по частоте с общей фиксированной скоростью. Высокую общую скорость дискретизации можно снизить до желаемого значения с помощью методов обработки при нескольких скоростях. Во избежание чрезмерно высокой скорости общей дискретизации следует использовать фильтр Баттерворта как минимум второго порядка.

3. Рассмотрев спецификации и спектр данных до и после дискретизации, находим следующее.

3. а. Чтобы не нарушать спецификации, ошибка по амплитуде в пределах от 0 до 500 кГц должна удовлетворять следующему критерию:

$$20\log\left[1+\left(\frac{500}{f_c}\right)^6\right]^{1/2} \leq 0,5\text{дБ}$$

учитывая, что используется фильтр Баттерворта третьего порядка с частотой среза f_c .

Решив это уравнение относительно f_c , находим, что

$$f_c = \frac{500^6}{0,122} \approx 710\text{Гц}.$$

Сделав поправку на дополнительные искажения на последующих этапах (и для удобства), положим $f_c = 1000$ Гц (это эквивалентно максимальной неравномерности 0,26 дБ).

3, б. После ограничения полосы частот каждого канала спектр дискретного сигнала будет иметь вид, показанный на рисунке 1.17.

Теперь F_s выбирается так, чтобы уровень искажения вследствие наложения при частоте 500 Гц по крайней мере был больше 40 дБ, т.е.

$$20\log\left[1+\left(\frac{F_s-500}{1000}\right)^6\right]^{1/2} \geq 40\text{дБ}.$$

Решив это уравнение относительно F_s , получим $F_s = 5141,5$ Гц.

К выбору общей частоты дискретизации F_s следует отнестись внимательно и учесть эффективное снижение скорости дискретизации. Возможное решение — 8192 Гц, что допускает снижение общей скорости в n раз (n — простое целое число).

Пример 11

1. Система записи и воспроизведения звука работает с сигналами, основная полоса частот которых лежит в диапазоне 0-20 кГц. Найдите коэффициент перевыборки и минимальную частоту дискретизации, которая необходима для достижения такого же качества при использовании 12-битового преобразователя, которое можно было бы получить с помощью 16-битового АЦП.

2. В цифровой системе звукозаписи для оцифровки аналогового входного сигнала с частотными компонентами в диапазоне 0-4 кГц используется метод выборки с запасом по частоте и 8-битовый биполярный преобразователь, работающий с частотой Найквиста. Оцените эффективное разрешение преобразователя (в битах), если частота дискретизации равна 40 МГц. Прокомментируйте практические проблемы, связанные с этим методом.

Решение

1. При частоте Найквиста (т.е. $F_s = 2/f_{\text{тах}}$) нормированная мощность шума квантования в полосе для 12- и 16-битового преобразователей соответственно равна

$$\sigma_1^2 = 2^{-\frac{2(B_1-1)}{12}} \quad (\text{где } B_1 = 12),$$

$$\sigma_2^2 = 2^{-\frac{2(B_2-1)}{12}} \quad (\text{где } B_2 = 16).$$

Для достижения 16-битового качества с 12-битовым АЦП вход 12-разрядного преобразователя нужно дискретизовать с запасом по частоте, чтобы снизить мощность шума квантования в полосе на величину, равную коэффициенту перевыборки

$$(\sigma_1')^2 = \frac{2f_{\text{max}}}{F_s} \sigma_1^2$$

Приравнявая новый шум квантования в полосе к шуму 16-битового АЦП, получим

$$\frac{2f_{\max}}{F_s} \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Таким образом,

$$\frac{2f_{\max}}{F_s} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{2^{-2(B_2-1)}}{2^{-2(B_1-1)}} = 2^{-2(B_2-B_1)} = \frac{1}{256}.$$

Следовательно, коэффициент перевыборки задается как

$$F_s / (2f_{\max}) = 256,$$

т.е. $F_s = 10,24$ МГц.

2. Шум квантования в полосе снижается в число раз, равное коэффициенту перевыборки, т.е. на

$$\frac{40000}{2 \times 4} = 5000$$

Учитывая, что

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{2^{-2(B_1-1)}}{2^{-2(B_2-1)}} = 5000$$

и $B_1 = 8$ бит, находим, что разрешение АЦП B_2 приблизительно равно 14 бит.

Как следует из предыдущих примеров, метод выборки с запасом по частоте сам по себе невыгоден с точки зрения достижения желаемого разрешения при использовании АЦП с небольшим разрешением, поскольку повышение разрешающей способности часто требует очень высокой частоты дискретизации, которую данный метод может не поддерживать.

На практике выборка с запасом по частоте сочетается с ограничением шума, что позволяет сместить шум квантования в область более высоких частот за пределы полосы частот сигнала, где его можно устранить с помощью фильтра. В следующем разделе описан принцип действия АЦП для дискретизации с запасом по частоте.

Пример 12

В системе цифровой обработки сигнала с аналоговым звуковым входом в интервале частот 0-20 кГц для преобразования сигнала в цифровой поток битов с частотой 3,072 МГц используется метод выборки с запасом по частоте и сигма-дельта-модулятор второго порядка. Модель сигма-дельта-модулятора на z-плоскости изображена на рисунке 1.18.

1. Объясните, каким образом цифровой поток битов можно преобразовать в цифровой многобитовый поток с частотой 48 кГц.

2. Определите общее улучшение отношения сигнал-шум, возможное благодаря дискретизации с запасом по частоте и формированию спектра шума, а затем оцените (в битах) эффективную разрешающую способность устройства для оцифровки.

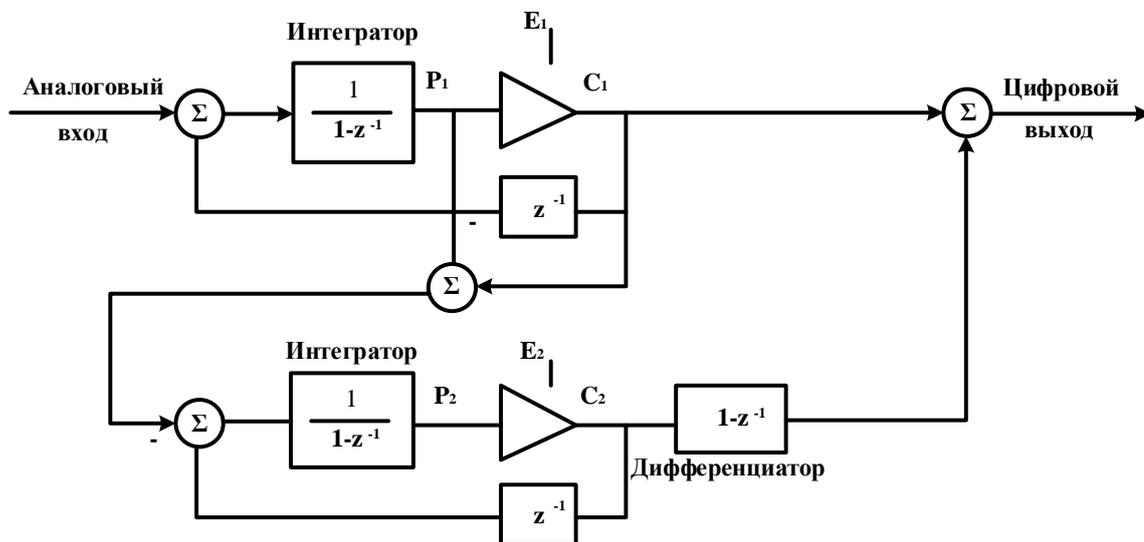


Рисунок 1.18. Модель сигма-дельта-модулятора второго порядка на г-плоскости (пример 12)

Решение

1. Однобитовый поток преобразуется в многобитовые слова с помощью децимации (процесса понижения частоты дискретизации). Полоса частот выхода сигма-дельта-модулятора содержит очень мало шума квантования, но за пределами полосы этот шум очень велик. Для устранения шума за пределами полосы используется цифровой фильтр нижних частот. Из-за высокой частоты дискретизации непосредственно использовать цифровой фильтр непрактично. Вместо этого фильтрация осуществляется с помощью децимации, которая служит также для снижения частоты до желаемого значения. Как правило, используется двухкаскадный дециматор (с коэффициентами децимации 16 и 4). После фильтрации полученный сигнал приобретает вид B -битовых квантованных данных. Фильтрация служит для усреднения высокого шума квантования. Как правило, коэффициенты КИХ фильтра децимации описываются 16-24 бит.

2. Эффективное разрешение можно оценить с помощью следующего упрощенного анализа.

Мощность шума снижается путем дискретизации с запасом по частоте и ограничения шума. Снижение мощности шума, обусловленное выборкой с запасом по частоте, задается коэффициентом перевыборки.

Коэффициент перевыборки равен

$$\frac{F_s}{2f_{\max}} = \frac{3,072 \times 10^6}{2 \times 24 \times 10^3} = 64.$$

Это эквивалентно снижению мощности шума квантования на 18 дБ.

Из модели сигма-дельта-модулятора на z -плоскости находим, что передаточная функция шума квантования задается как

$$N(z) = (1 - z^{-1})^2.$$

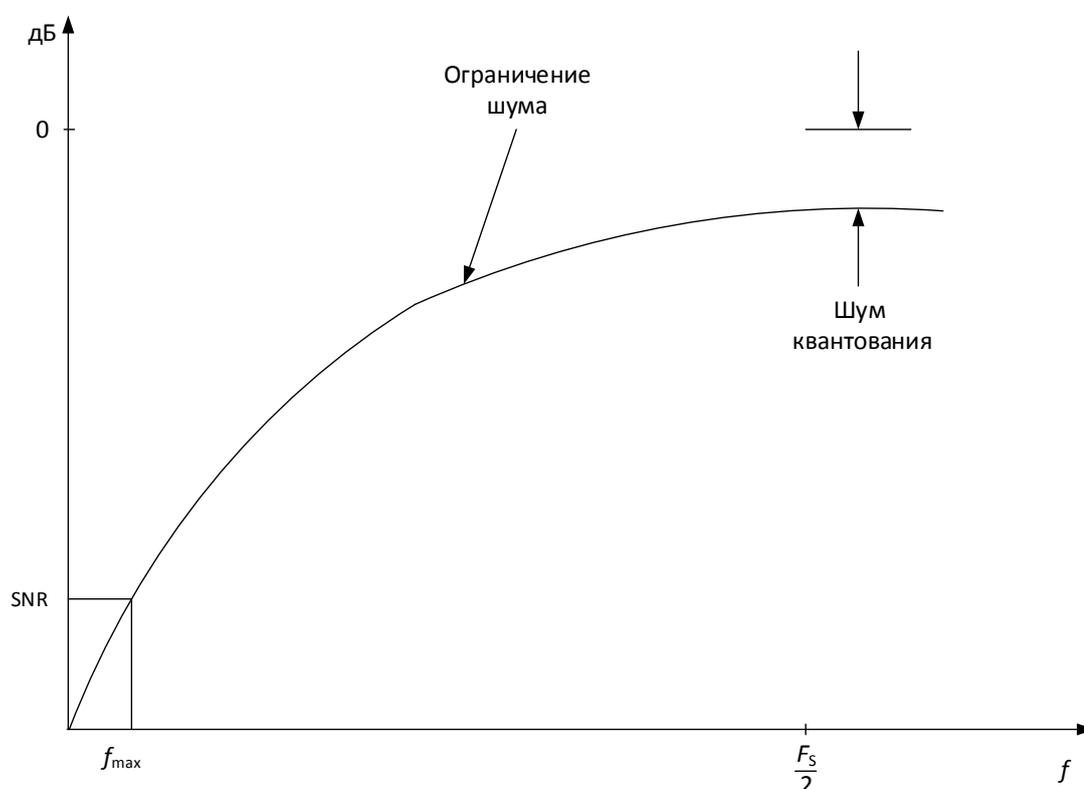


Рисунок 1.19. Влияние схемы формирования спектра шума на шум квантования

Эта функция, по сути, описывает фильтр верхних частот с двойным нулем на нулевой частоте, который ослабляет компоненты шума в низкочастотной области (см. рисунок 1.19). Характеристика этого фильтра задается следующим образом:

$$|N(z)|_{z=e^{i\omega T}}^2 = |(1 - e^{-i\omega T})^2|^2$$

При $f = 24$ кГц (край полосы) и $F_s = 3,072$ МГц, $\omega T = 2,8125^\circ$ и

$$|N(e^{i\omega T})|^2 = 2,412 \times 10^{-3}.$$

Это позволяет снизить отношение сигнал-шум квантования на 52,35 дБ. Эффективная длина слова АЦП определяется, главным образом, по отношению сигнал-шум, которое достигается путем дискретизации с запасом по частоте и ограничения шума. Общее снижение отношения сигнал-шум квантования составляет 70,41 дБ. Это соответствует эффективному разрешению АЦП в 11,4 бит (поскольку отношение сигнал-шум квантования равно $6,02B + 1,77$ дБ).

Пример 13

На рисунке 1.20, а изображено устройство, которое применяется для восстановления аналогового сигнала после его цифровой обработки в определенной цифровой системе записи и воспроизведения звука реального времени. Основная полоса частот аналогового сигнала расположена между 0 и 20 кГц, а цифроаналоговый преобразователь обновляется с частотой 176,4 кГц. Зеркальные частоты следует подавить как минимум на 50 дБ, а важные компоненты сигнала должны измениться не больше, чем на 0,5 дБ. Найдите минимальный порядок и частоту среза фильтра защиты от зеркальных частот, предполагая, что он имеет баттервортовскую характеристику. Укажите все сделанные предположения.

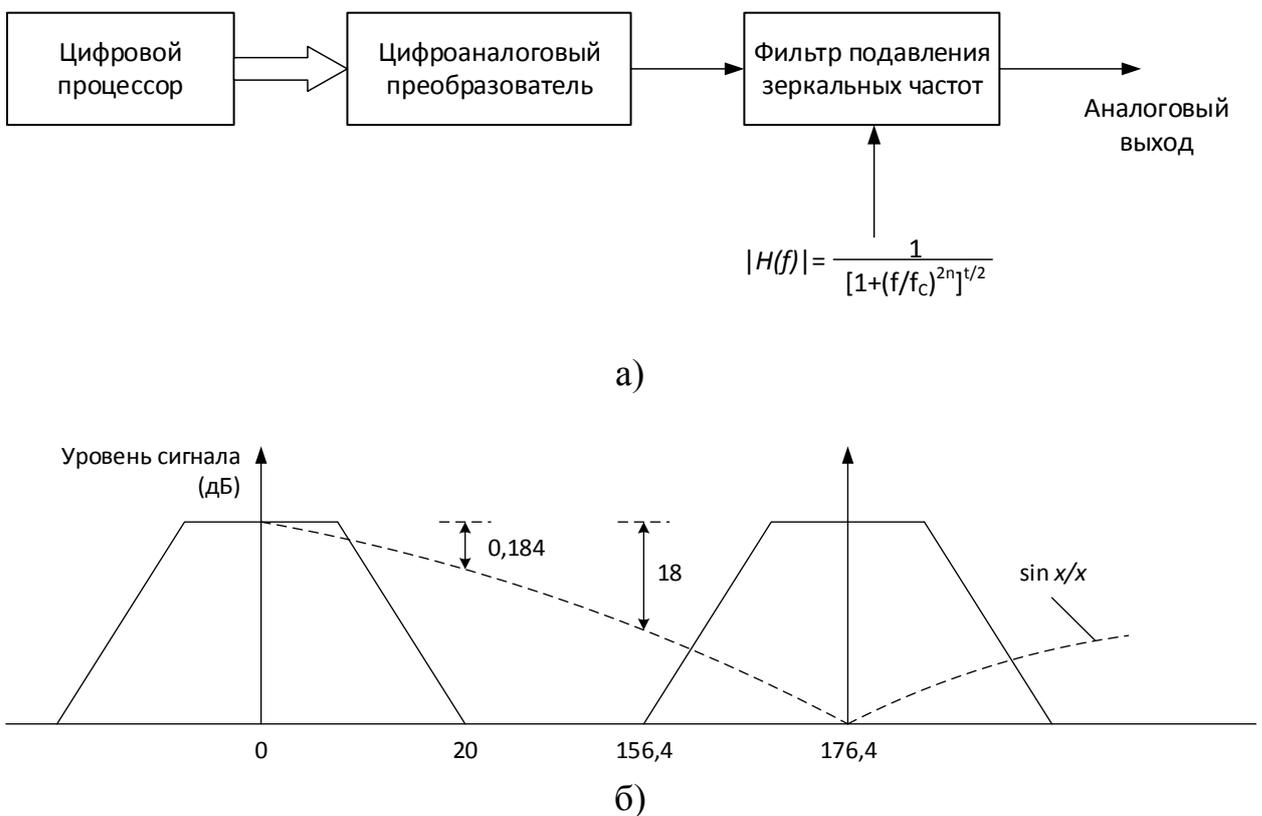


Рисунок 1.20. Устройство предварительной обработки данных системы ЦОС реального времени (панель а). Спектр на выходе ЦАП (панель б)

Решение

Если предположить задержку нулевого порядка, то спектр на выходе ЦАП представляет собой произведение спектра сигнала и характеристики $\sin x/x$ (см. рисунок 1.20, б). Ослабление сигнала, обусловленное спектром $\sin x/x$, на двух критических частотах 20 и 156,4 кГц (ближайшие к основной полосе частот зеркальные частоты) равно:

$$\text{при } 20\text{кГц: } \frac{\sin x}{x} = 0,9789 \quad (\text{при } x = \omega T/2) \rightarrow -0,184\text{дБ},$$

$$\text{при } 156,4\text{кГц: } \frac{\sin x}{x} = 0,125 \quad \rightarrow -18\text{дБ}.$$

Следовательно, неравномерность в полосе пропускания выходного фильтра не должна превышать $0,5 - 0,184 = 0,316$ дБ. В полосе подавления необходимо дополнительное ослабление не меньше, чем на $50 - 18 = 32$ дБ. Следовательно,

$$20\log[1+(20/f_c)^{2n}]^{1/2} \leq 0,316 \text{ дБ},$$

$$20\log[1+(156,4/f_c)^{2n}]^{1/2} \geq 32 \text{ дБ}.$$

Решая эту систему уравнений относительно n , получаем $n = 2,4 \sim 3$ (целое), а $f_c = 30,76$ кГц

2 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.2 Дискретизация и контроль за наложением

1. Что вы понимаете под следующими выражениями?

А. Частота Найквиста (Котельникова).

Б. Скорость Найквиста.

В. Частота дискретизации.

Г. Скорость дискретизации.

2. На рисунке 1.21 изображен спектр сигнала. Найдите минимальную частоту дискретизации, позволяющую избежать наложения. Предположите, что сигнал дискретизируется с частотой 16 кГц, и изобразите спектр дискретного сигнала в диапазоне ± 16 кГц. Укажите на своем рисунке частоты, представляющие практический интерес, в том числе и частоту наложения.

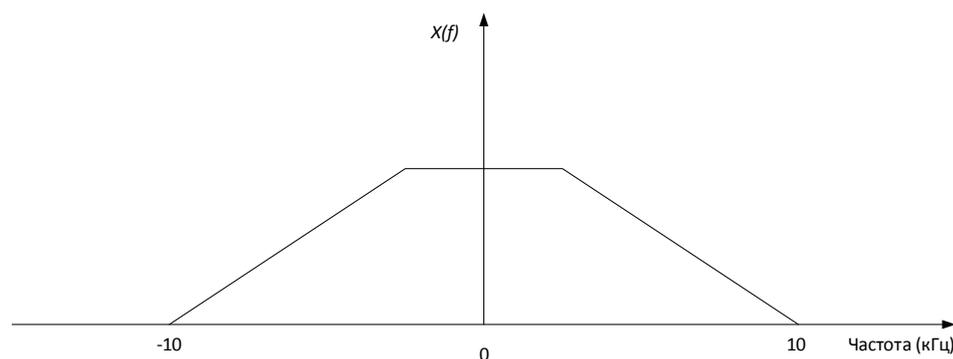


Рисунок 1.21.

3. Объясните, почему одной только теоремы о дискретном представлении недостаточно для определения настоящей частоты дискретизации, которая используется в практической системе ЦОС.

4. Объясните роль фильтров защиты от наложения спектров и фильтров подавления зеркальных частот в системе ЦОС реального времени. Почему в системах ЦОС требования к этим двум фильтрам часто бывают одинаковыми?

5. К аналоговому входному блоку определенной работающей в реальном времени системы ЦОС выдвигаются такие требования:

полоса частот, представляющая практический интерес,
0-4 кГц,

максимально допустимая неравномерность в полосе пропускания
 $\leq 0,5$ дБ,

затухание в полосе подавления ≥ 50 дБ.

Найдите минимальный порядок фильтра защиты от наложения спектров с характеристикой типа Баттерворта и подходящую частоту дискретизации для удовлетворения этим требованиям.

6. Аналоговый вход системы ЦОС реального времени оцифровывается с помощью 16-битового АЦП в биполярном режиме. Удвоенная амплитуда входного сигнала лежит в диапазоне ± 10 В, полоса частот сигнала — от 0 до 10 кГц. Оцените

а) минимальное затухание A_{\min} в полосе подавления фильтра защиты от наложения спектров;

б) минимальную частоту дискретизации F_s , поддерживающую искажение от наложения в полосе пропускания как раз ниже уровня шума квантования (предположите, что для защиты от наложения спектров используется фильтр Баттерворта шестого порядка).

7. Полоса частот аналогового сигнала с однородной спектральной плотностью мощности ограничена фильтром с такой амплитудной характеристикой

$$|H(f)| = \frac{1}{[1 + (f/f_c)^6]^{1/2}}$$

где $f_c = 3,4$ кГц. Сигнал оцифровывается с помощью линейного 8-битового АЦП. Найдите такую минимальную частоту дискретизации, чтобы максимальное искажение от наложения не превышало уровень ошибки квантования в полосе пропускания.

8. Полоса частот аналогового входного сигнала системы ЦОС реального времени перед оцифровкой была ограничена до 30 Гц с помощью аналогового фильтра Баттерворта третьего порядка. При условии, что обусловленное дискретизацией искажение от наложения составляет меньше 1% от уровня сигнала в полосе пропускания, найдите минимальную частоту дискретизации F_s , необходимую для этой системы.

Какова будет средняя ошибка, обусловленная апертурными эффектами при частоте 30 Гц, если сигналу после оцифровки и обработки был возвращен аналоговый вид? Предположите, что входной сигнал оцифрован с помощью идеального устройства дискретизации и АЦП, но восстановлен с помощью ЦАП с задержкой нулевого порядка. Общей частотой

дискретизации на входе и на выходе можно считать частоту 256 Гц.

9. На рисунке 1.22 изображено устройство предварительной обработки данных системы ЦОС. Предположим, что на вход подается широкополосный сигнал.

9.1 Изобразите спектр сигнала до (точка А) и после дискретизации (точка В) в диапазоне $\pm F_s/2$.

9.2 Найдите уровень сигнала и искажения от наложения при 15 кГц и частоте Найквиста (т.е. 30 кГц).

9.3 Найдите минимальную частоту дискретизации F_s (min), которая при частоте 15 кГц даст отношение сигнала к уровню искажения от наложения 10:1. Укажите все сделанные предположения.

10. На рисунке 1.23 изображена система ЦОС реального времени. Предположив, что полоса частот, представляющая практический интерес, находится в диапазоне 0-100 Гц, и что используется 16-битовый *биполярный* АЦП, оцените:

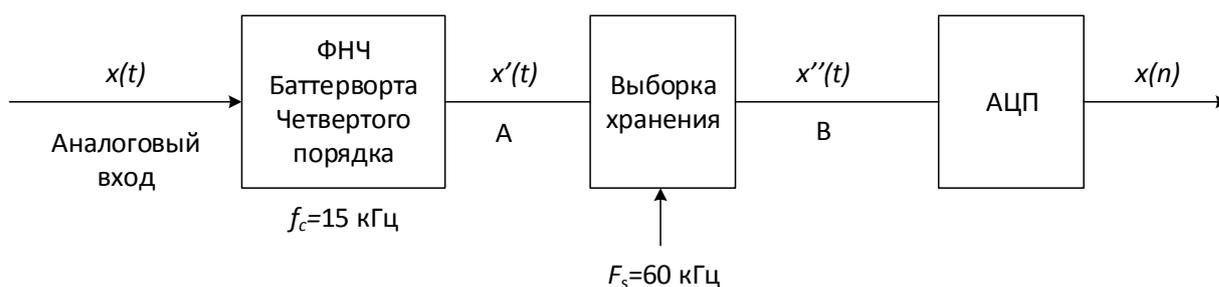


Рисунок 1.22.

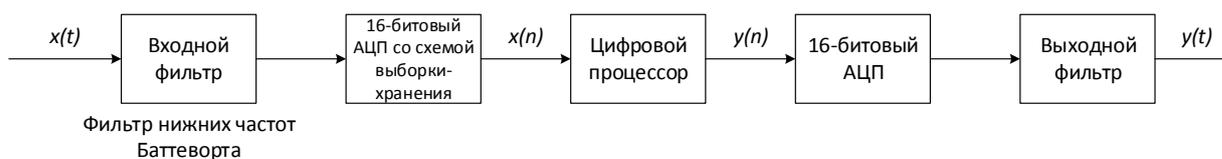


Рисунок 1.23. Система цифровой обработки сигналов реального времени

а) минимальное затухание A_{\min} в полосе подавления фильтра защиты от наложения спектров;

б) минимальную частоту дискретизации F_s ;

в) уровень искажения от наложения относительно уровня сигнала в полосе пропускания для оцененных A_{\min} и F_s .

Изобразите спектр сигнала на выходе аналогового фильтра (снабдив рисунок необходимыми пометками), предположив, что на вход подается

широкополосный сигнал, и спектр сигнала после дискретизации.

11.1 Коротко расскажите о трех основных факторах, определяющих уровень искажения от наложения в реальных системах ЦОС. Укажите значения каждого из них для контроля за наложением спектров.

11.2 Полоса частот аналогового сигнала с однородной спектральной плотностью мощности ограничена с помощью фильтра защиты от наложения спектров со следующей амплитудно-частотной характеристикой:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^8}}$$

где $f_c = 40$ Гц. Сигнал оцифрован с помощью линейного 12-битового биполярного АЦП. Найдите:

а) минимальную частоту дискретизации, при которой максимальное искажение от наложения в полосе пропускания не превышает уровень шума квантования;

б) максимальный уровень сигнала в полосе пропускания (в дБ) относительно минимального уровня шума квантования АЦП.

Укажите все сделанные предположения.

11.3 Запишите уравнение, выражающее теорему о полосовой дискретизации. Объясните, почему эта теорема представляет интерес с точки зрения цифровых систем связи.

11.4 Из уравнения, записанного в п. 3, выведите выражение для теоретической минимальной частоты дискретизации полосового сигнала. Предположите, что отношение верхнего края полосы частот к ширине полосы сигнала равно целому числу. Прокомментируйте, почему теоретическую минимальную частоту дискретизации нельзя использовать на практике.

2.2 Полосовая дискретизация с недостаточной выборкой

12. На рисунке 1.24, *а* изображено устройство предварительной обработки данных приемника многоканальной системы связи. Спектр принимаемого сигнала изображен на рисунке 1.24, *б* с указанием номеров каналов. Перед оцифровкой сигнала на минимальной возможной частоте для изоляции сигнала в нужном канале применяется полосовой фильтр.

Предположим, что используется идеальный полосовой фильтр со следующей характеристикой:

$H(f) = 1$, если $10 \text{ кГц} \leq f \leq 20 \text{ кГц}$,

0 — в иных случаях.

а. Найдите минимальную теоретическую частоту дискретизации.

б. Изобразите спектр сигнала до дискретизации (точка А) и после дискретизации (точка В).

в. Повторите пункты а и б для полосового фильтра, пропускающего канал 2.

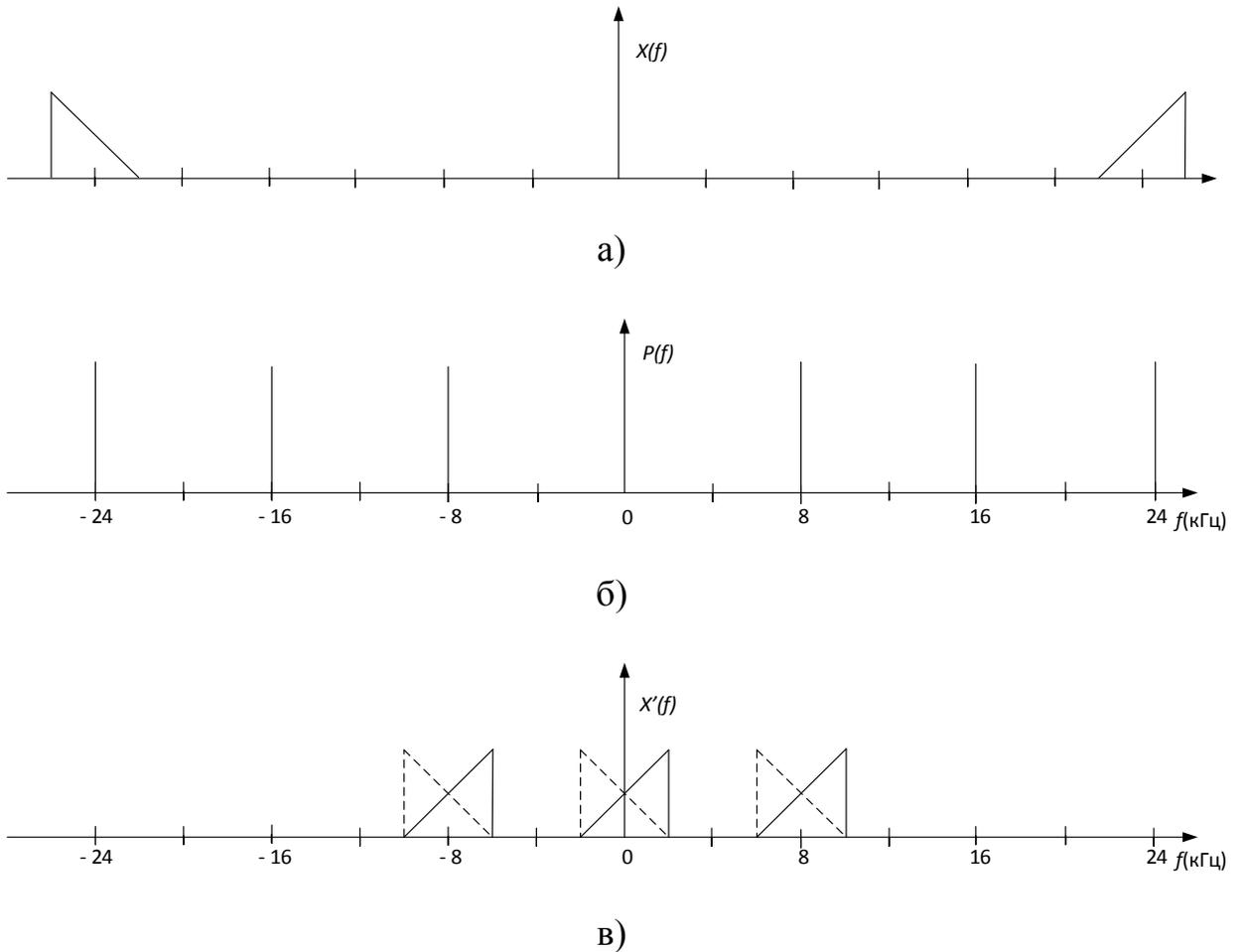


Рисунок 1.24. Устройство предварительной обработки данных системы (панель а); спектр принимаемого сигнала(панель б)

13. На рисунке 1.25 изображен спектр узкополосного сигнала. Получите и изобразите спектр дискретного сигнала в диапазоне $\pm F_d/2$ для каждого из следующих трех случаев:

$$1) \frac{f_H}{B} = 3,$$

$$2) \frac{f_H}{B} = 4,$$

$$3) \frac{f_H}{B} = 4,5.$$

Пусть ширина полосы сигнала $B = 5$ кГц, и в каждом случае сигнал дискретизируется с частотой $2B$.

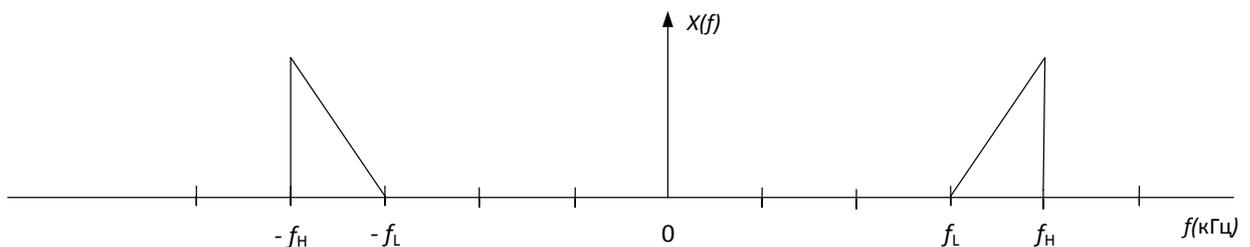


Рисунок 1.25

14.1 Найдите минимальную теоретическую частоту дискретизации F_s , позволяющую избежать наложения, для полосового сигнала с частотными компонентами в диапазоне $20 \text{ МГц} < f < 30 \text{ МГц}$. Обоснуйте свой ответ и объясните, почему минимальной теоретической частотой дискретизации нельзя воспользоваться на практике.

14.2 Пусть полосовой сигнал из п. 1 имеет спектр, изображенный на рисунке 1.26. Найдите граничные частоты всех частотных полос сигнала (включая зеркальные компоненты) после дискретизации в интервале $\pm 2F_s$. Изобразите спектр дискретного сигнала в этом интервале, отметив на рисунке необходимые элементы.

14.3 Рассчитайте допустимый диапазон частот дискретизации, позволяющих избежать наложения спектров, если аналоговый полосовой сигнал усиливается защитной полосой в 5 кГц на каждом краю полосы.

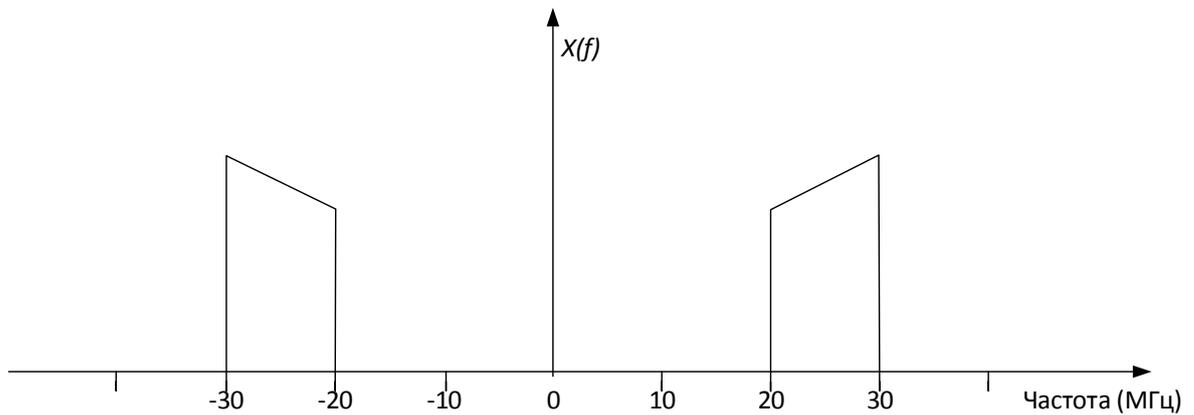


Рисунок 1.26

15.1 Кратко объясните принцип полосовой дискретизации с недостаточной выборкой. Прокомментируйте преимущества применения этого метода на практике.

1. Цифровой радиоприемник на втором этапе работает на промежуточной частоте 50 кГц.

А. Найдите минимальную частоту дискретизации F_s , позволяющую избежать наложения спектров в этой системе, если ширина полосы промежуточной частоты сигнала равна 6 кГц.

Б. Изобразите спектр дискретного сигнала в интервале $\pm F_s$. Объясните, как вы получили спектр дискретного сигнала и прокомментируйте его вид.

Пусть используется метод целочисленной дискретизации и спектр сигнала на втором этапе промежуточной частоты выглядит так, как показано на рисунке 1.27.

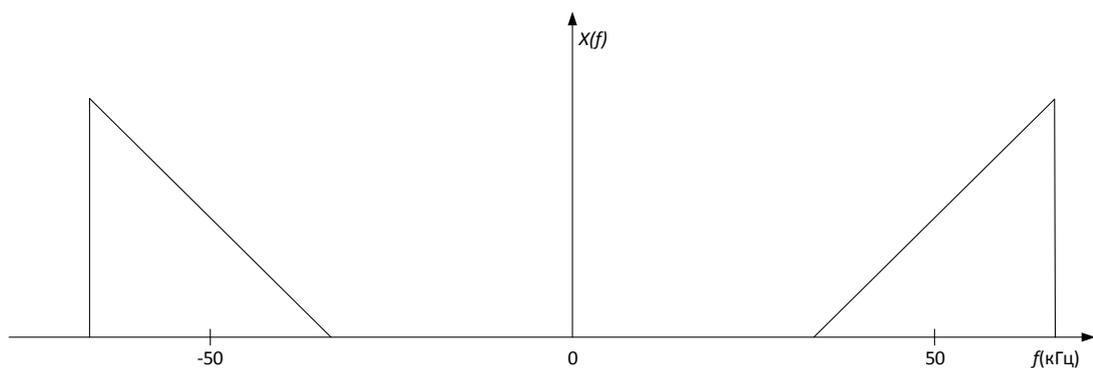


Рисунок 1.27

16. На рисунке 1.28, а изображен спектр сигнала на втором этапе обработки в цифровом приемнике (преобразование на промежуточную частоту), где промежуточная частота равна 2,976 МГц. С помощью соответствующих схем покажите, что сигнал промежуточной частоты можно

дискретизировать без наложения с частотой 128 кГц.

С помощью соответствующих схем покажите, что если промежуточная частота сигнала будет равна 3 МГц, то появится наложение, если сигнал на промежуточной частоте дискретизирован с частотой 128 МГц.

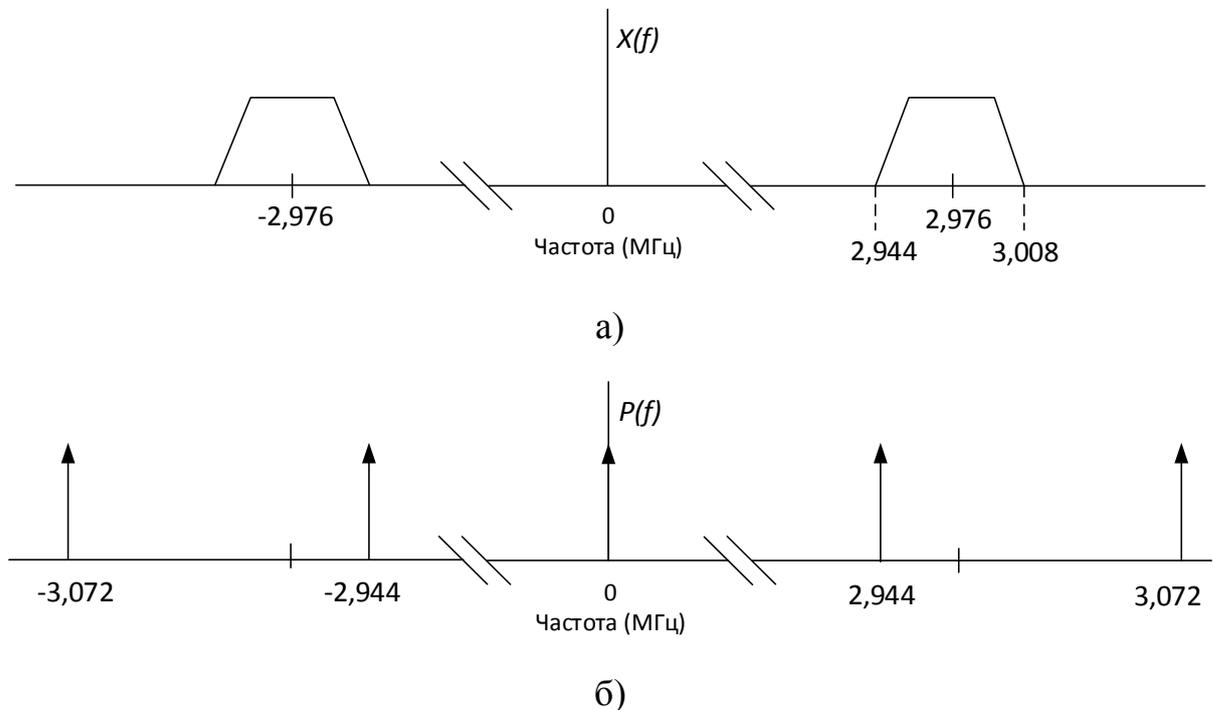


Рисунок 1.28. Спектр сигнала на втором промежуточном этапе (панель а); спектр выборочной функции (панель б)

17. Запишите уравнение, выражающее теорему о полосовой дискретизации. Объясните, почему теорема о полосовой дискретизации представляет интерес для цифровой связи.

Из записанного уравнения выведите выражение для теоретической минимальной частоты дискретизации полосового сигнала. Предположите, что отношение верхнего края полосы частот к ширине полосы сигнала равно целому числу. Объясните, почему теоретическая минимальная частота дискретизации может оказаться непригодной на практике.

2.3 Шум квантования при аналого-цифровом преобразовании

18. В системе ЦОС реального времени используется 16-битовый АЦП в биполярном режиме с входным диапазоном ± 5 В. Какова максимальная ошибка квантования? Рассчитайте теоретическое максимальное отношение сигнал-шум квантования (в децибелах) для этой системы.

19. Синусоидальный сигнал с удвоенной амплитудой 5 В оцифровывается с помощью 16-битового АЦП. Предположив, что квантование линейно, найдите:

- а) величину шага квантования;
- б) среднеквадратическое отношение сигнал-шум квантования.

Укажите все сделанные предположения.

20. Аналоговый вход системы ЦОС оцифровывается с частотой 100 кГц при однородном квантовании. Предполагая, что на вход подается синусоидальный сигнал с удвоенной амплитудой ± 5 В, найдите минимальное число битов АЦП, позволяющее достигать отношения сигнал-шум квантования не менее 90 дБ. Перечислите все сделанные предположения.

21. Покажите, что отношение сигнал-шум квантования линейного АЦП задается как

$$SNR(q) = 6,02B + 4,77 - 20\log(A/\sigma_x)(\text{дБ}),$$

где B — количество битов АЦП, $\pm A$ — входной диапазон АЦП, а σ_x — среднеквадратическое значение входного сигнала. Найдите отношение сигнал-шум квантования, если разрешение АЦП равно 16 бит, а вход имеет вид:

- а) синусоидального сигнала;
- б) сигнала со среднеквадратическим значением $A/4$.

Укажите все сделанные предположения.

22. Среднеквадратическое значение аналогового входного сигнала B -битового АЦП равно σ_x (В). Входной диапазон АЦП подходит для значений в пределах $\pm 3\sigma_x$ (В). Найдите выражение для отношения сигнал-шум квантования (в децибелах) преобразователя. Укажите все сделанные предположения.

2.4 Выборка с запасом по частоте при аналого-цифровом преобразовании — наложение спектров и контроль за уровнем шума квантования

23. С помощью подходящих схем объясните принцип метода выборки с запасом по частоте и его использование для увеличения эффективной разрешающей способности аналого-цифрового преобразователя, работающего на частоте Найквиста.

В цифровой системе записи и воспроизведения звука для оцифровки аналогового входного сигнала с частотными компонентами в диапазоне 0-4

кГц используется метод выборки с запасом по частоте и 8-битовый биполярный преобразователь, работающий на частоте Найквиста. Оцените эффективную разрешающую способность (в битах) преобразователя, если частота дискретизации равна 40 МГц. Покажите, как вы получили этот ответ. Прокомментируйте практические проблемы, возникающие в связи с этим методом.

24. 1. Универсальная многоканальная (до 64 каналов) система сбора данных должна собирать медицинские данные. Каждый аналоговый канал должен задаваться пользователем отдельно, чтобы граничная частота его полосы пропускания была между 0,5 и 200 Гц, а выбираемая частота дискретизации — в диапазоне от 1 Гц до 2 кГц. Максимально допустимая неравномерность в полосе пропускания равна 0,5 дБ, а зеркальные компоненты должны быть как минимум на 40 дБ ниже, чем компонент сигнала.

Объясните стратегию, выбранную для удовлетворения вышеизложенным требованиям. Ответ должен включать следующие пункты:

а) рассуждения о вопросах, специфичных для данного приложения;

б) указания, как использовать в этом приложении методы дискретизации с запасом по частоте, чтобы наиболее эффективно и экономно удовлетворить данные условия (применяйте расчет цены/числа компонентов).

2. Пусть для всех каналов системы из п.1 используются идентичные фильтры защиты от наложения спектров, каждый из которых имеет следующую характеристику типа Баттерворта:

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^6}}$$

где $f_c = 3$ дБ — частота среза фильтра.

3. Изобразите спектры данных до и после дискретизации и определите:

а) частоту среза f_c ;

б) подходящую общую частоту дискретизации F_s .

Ответ прокомментируйте.

25. Система записи и воспроизведения звука работает с сигналами, основная полоса частот которых занимает диапазон 0-20 кГц. Найдите коэффициент перевыборки и минимальную частоту дискретизации, которая

необходима для достижения с 8-битовым преобразователем того качества, которого можно было бы достичь с 16-битовым преобразователем.

26. 1. Напишите краткое резюме по каждому из перечисленных ниже методов для однобитового АЦП:

- а) выборка с запасом по частоте;
- б) ограничение спектра шума.

2. Почему в высококачественных системах ЦОС предпочтительнее однобитовые АЦП, а не обычные АЦП с достаточной аппроксимацией?

3. Для оцифровки аналогового сигнала в системе цифровой обработки сигналов с аналоговым звуковым входом в диапазоне 0-20 кГц применяется метод дискретизации с запасом по частоте и сигма-дельта-модулятор первого порядка, изображенный на рисунке 1.29. Предположив, что частота дискретизации равна 3,072 МГц, найдите характеристику фильтра ограничения шума при 20 кГц. Оцените эффективную разрешающую способность (в битах) устройства оцифровки.



Рисунок 1.29. Сигма-дельта-модулятор первого порядка

27. В системе цифровой обработки сигналов с аналоговым звуковым входом в диапазоне 0-20 кГц для преобразования аналогового сигнала в цифровой поток битов с частотой 6,144 МГц применяется метод выборки с запасом по частоте и сигма-дельта-модулятор второго порядка. На рисунке 1.30 изображена модель сигма-дельта-модулятора на z-плоскости.

Определите общее улучшение отношения сигнал-шум квантования, которое становится возможным благодаря дискретизации с запасом по частоте и ограничению шума, и оцените эффективную разрешающую способность (в битах) устройства оцифровки.

28. В системе цифровой обработки сигналов с аналоговым звуковым входом в диапазоне 0-20 кГц для преобразования аналогового сигнала в цифровой поток битов с частотой 6,144 МГц применяется метод выборки с

запасом по частоте и сигма-дельта-модулятор первого порядка. На рисунке 1.31 изображена модель сигма-дельта-модулятора на z-плоскости.

1. Объясните, как цифровой поток битов можно преобразовать в цифровой многобитовый поток с частотой 92 кГц.

2. Найдите общее улучшение отношения сигнал-шум квантования, которое становится возможным благодаря дискретизации с запасом по частоте и ограничению шума, и оцените эффективную разрешающую способность (в битах) устройства оцифровки.

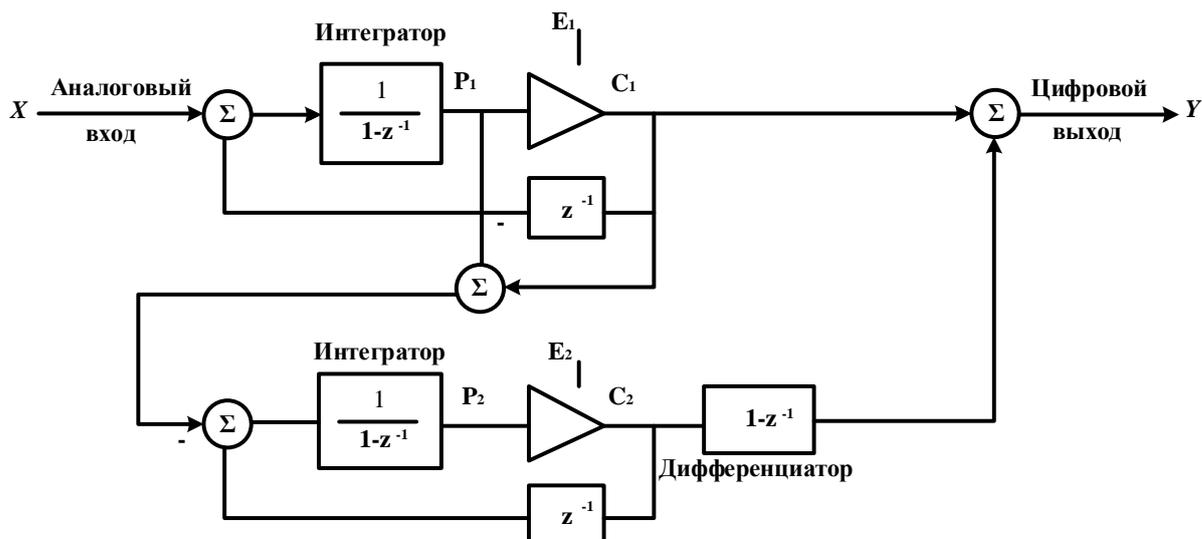


Рисунок 1.30. Результат преобразования $Y(z)$ на выходе сигма-дельта-модулятора второго порядка задается как $Y(z) = X(z) + E_2(z)(1 - z^{-1})^2$

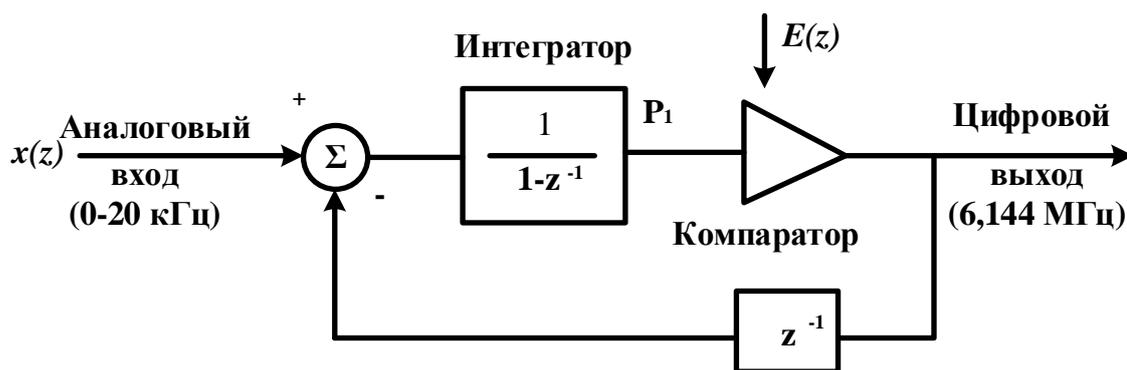


Рисунок 1.31. Модель сигма-дельта-модулятора на z-плоскости

2.5 Цифроаналоговые преобразования и эффект $\sin x/x$

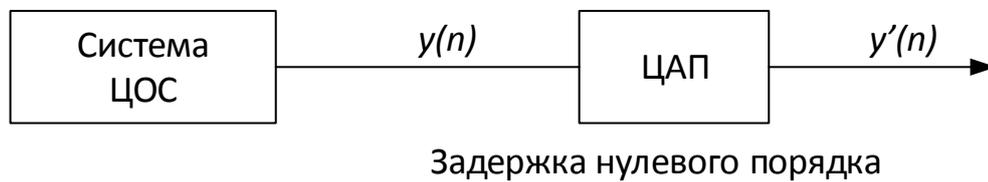
29. На рисунке 1.32, а показана блок-схема системы ЦОС реального времени со аналоговым выходом, а на рисунке 1.32, б изображена основная полоса частот спектра сигнала, который подается на ЦАП. Изобразите спектр

сигнала на выходе ЦАП в интервале от 0 до $2F_s$, где F_s — частота дискретизации. Найдите амплитуды компонентов сигнала, учитывая, что частота дискретизации равна 15 кГц.

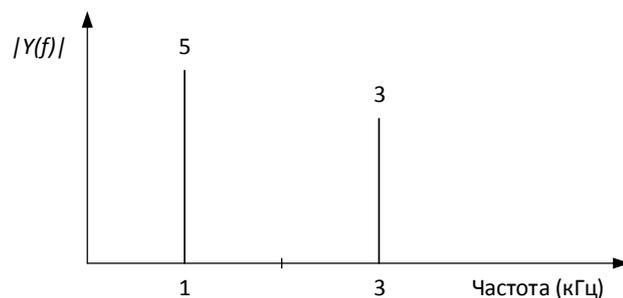
30. В системе ЦОС реального времени используется 16-битовый процессор, 12-битовый АЦП с временем преобразования 15 мкс и 12-битовый ЦАП со временем установки сигнала 500 нс. Необходимая операция ЦОС — это сверточное суммирование, которое задается как

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k),$$

где переменные имеют обычные значения, а вычисления должны выполняться между элементами выборки. Оцените пропускную способность системы в реальном времени, указав все сделанные предположения.



а)



б)

Рисунок 1.32. Система ЦОС реального времени с аналоговым выходом (панель а); спектр сигнала, который подается на ЦАП (панель б)

31. Выход цифроаналогового преобразователя задается как реакция на цифровую последовательность:

$$y(t) = \sum_n y(n)h(t-nT),$$

где $h(t)$ — это импульсная характеристика ЦАП, а $1/T$ — скорость подачи данных на ЦАП. Пусть ЦАП имеет задержку нулевого порядка, а $h(t)$ — квадрат импульса длительностью $T(s)$.

Изобразите выход ЦАП как реакцию на входную последовательность $y(n)$, показанную на рисунке 1.33. Покажите, что действие спектрального ограничения ЦАП на спектр сигнала можно компенсировать с помощью цифрового фильтра, спектр которого имеет вид

$$|H(\omega)| = \frac{\omega T}{2 \sin(\omega T / 2)}.$$

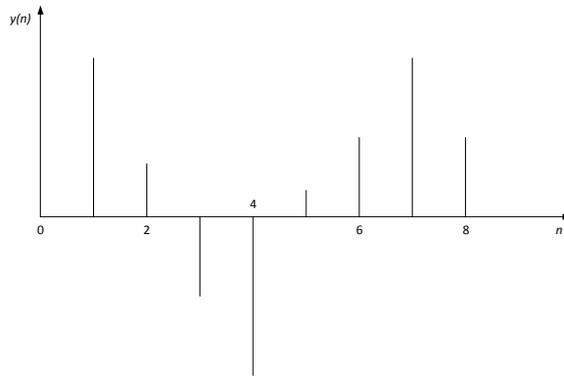


Рисунок 1.33.

32. Критически оцените основные ограничения и ошибки, возникающие в процессе аналогового/цифрового преобразования в системах цифровой обработки сигналов реального времени, и подумайте о том, как можно уменьшить каждую из этих ошибок и снизить влияние ограничивающих факторов.

2.6 Выборка с запасом по частоте в цифроаналоговом преобразовании: контроль за зеркальными частотами и шумом квантования

33. На рисунке 1.34 изображено устройство, которое используется для восстановления аналогового сигнала после того, как он был обработан определенной цифровой системой записи и воспроизведения звука, работающей в реальном времени. Основная полоса частот аналогового сигнала простирается от 0 до 24 кГц, а частота дискретизации равна 192 кГц.

Зеркальные частоты следует приглушать как минимум на 50 дБ, чтобы при этом компоненты звукового сигнала не подавлялись больше, чем на 0,5 дБ. Воспользовавшись соответствующими изображениями спектра сигнала, найдите минимальные значения порядка и частоты среза фильтра подавления зеркальных частот, предположив, что он имеет характеристику типа Баттерворта. Перечислите все сделанные предположения.

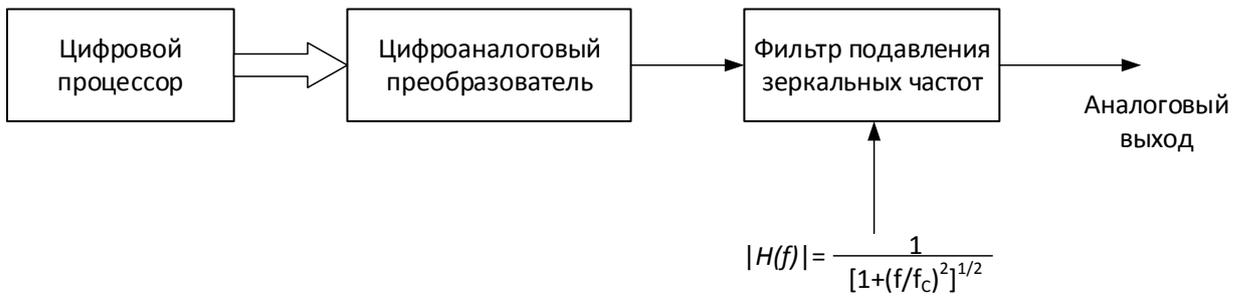


Рисунок 1.34. Выходной каскад системы ЦОС реального времени

34. На рисунке 1.35 изображено устройство, которое используется для восстановления аналогового сигнала после обработки цифровой системой записи и воспроизведения звука, работающей в реальном времени. Основная полоса частот аналогового сигнала простирается от 0 до 20 кГц, а частота дискретизации равна 176,4 кГц.

Ограничитель шума описывается следующими уравнениями:

$$y'(n) = x(n) - e(n-1), \quad e(n) = y(n) - y'(n).$$

1. Выведите выражение для передаточной функции, которая действует на шум квантования, а затем изобразите спектр шума квантования после ограничения шума.

2. Найдите улучшение отношения сигнал-шум квантования, возможность которого дает выборка с запасом по частоте и ограничение шума, а затем оцените эффективную разрешающую способность ЦАП (в битах). Предположите, что осуществляется четырехкратная выборка с запасом по частоте.

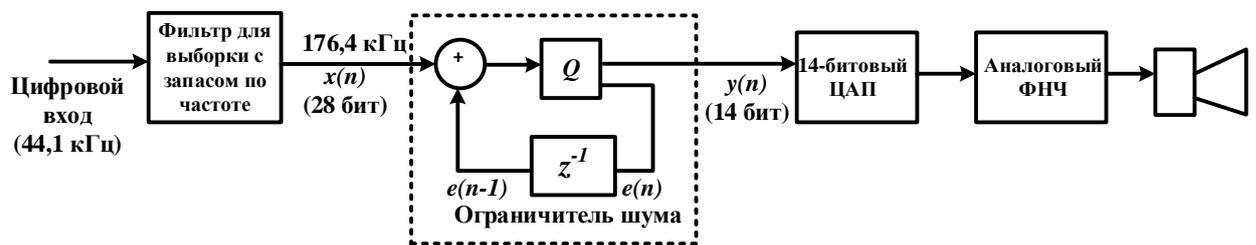


Рисунок 1.35. Упрощенная блок-схема воспроизведения звукового сигнала проигрывателем компакт- дисков с четырехкратной выборкой с запасом по частоте и ограничением формы шума

35. Системе ЦОС предшествует устройство дискретизации с задержкой с апертурным временем 10 нс и временем детектирования 1 мкс, за которым

идет 8-битовый АЦП. Найдите максимальное время преобразования АЦП, которое поддерживает частоту дискретизации 100 кГц.

2.7 Задачи для решения с помощью Scilab

36. На рисунке 1.35 изображено устройство, которое используется для восстановления аналогового сигнала после обработки цифровой системой записи и воспроизведения звука реального времени. Основная полоса частот аналогового сигнала расположена от 0 до 20 кГц, а частота дискретизации равна 176,4 кГц.

1. С помощью Scilab рассчитайте и постройте график спектра удобного фильтра четырехкратной выборки с запасом по частоте с КИХ. Укажите коэффициенты этого фильтра.

2. Представьте коэффициенты фильтра в виде 12-битовых чисел с фиксированной запятой.

3. Сгенерируйте звуковой сигнал (16-битовый при частоте 44,1 кГц).

4. Создайте в Scilab модель цифроаналогового процесса, пользуясь арифметикой с фиксированной запятой, и постройте график сигнала на выходе каждого блока в частотных и временных координатах.

37. На рисунке 1.36, *a* изображен спектр сигнала в системе связи с шириной полосы B и несущей частотой f_c . Аналоговый сигнал проходит через фильтр защиты от наложения спектров и дискретизируется с частотой F_s . Искомый спектр дискретного сигнала изображен на рисунке 1.36, *б*.

1. Предоставьте спецификацию подходящего фильтра защиты от наложения спектров и обоснуйте свое решение.

2. Назовите подходящие частоты дискретизации, которые позволят восстановить спектр на рисунке 1.36, *б* без наложения. Изобразите спектр, полученный в каждом случае.

3. Чтобы частота дискретизации была как можно ниже, выберите наименьшую частоту дискретизации из п. 2 и проверьте спектр повторно дискретизированного сигнала с помощью пакета Scilab. Приведите в ответе код Scilab.

Подсказка. Дискретизация — это умножение во временных координатах, что математически равнозначно свертке в частотных координатах. Возьмите частотный спектр выборочной функции и выполните его свертку со спектром на рисунке 1.36, *a*.

4. Предоставьте спецификацию цифрового фильтра для восстановления сигнала и укажите, как добавление защитных полос упрощает этот фильтр.

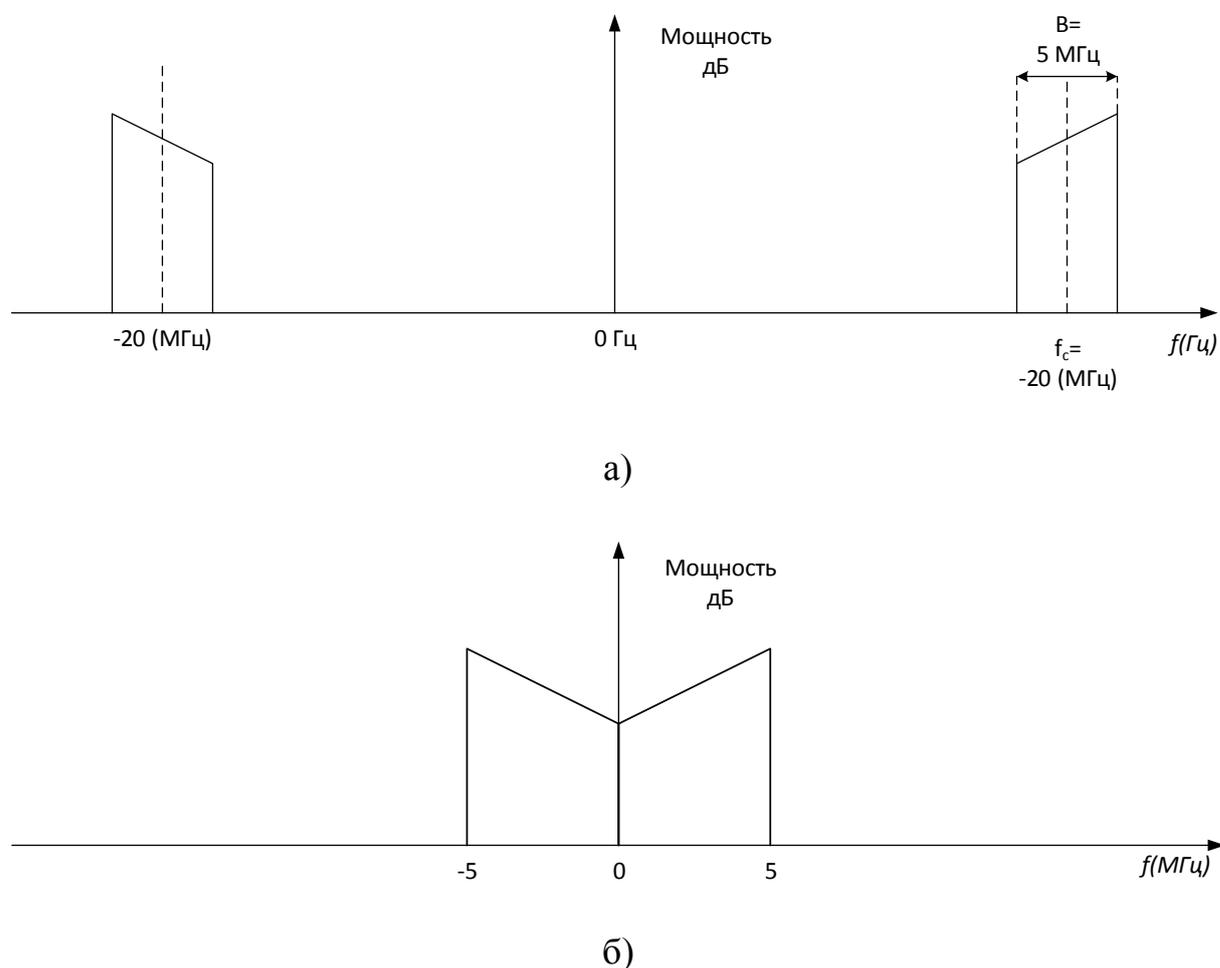


Рисунок 1.36

38. 1. Спроектируйте (на уровне блок-схемы) простой цифровой АМ-приемник, в котором используется метод полосовой дискретизации с недостаточной частотой и квадратурное смешивание для демодуляции принятого сигнала. Пусть промежуточная частота имеет ширину полосы 6 кГц. Ответ должен включать следующие составляющие:

- спецификацию (с обоснованием) подходящей центральной промежуточной частоты в диапазоне 40-60 кГц, оптимальной частоты дискретизации во избежание наложения спектров, соответствующей частоты квадратурного осциллятора и подходящих цифровых фильтров;
- изображение спектра сигнала на промежуточной частоте до и после дискретизации;
- точное описание того, как работает цифровой приемник;

- указание всех сделанных предположений.

2. Постройте и проверьте (в пакете Scilab) упрощенную модель цифрового АМ-приемника.

3 ЛИТЕРАТУРА

3.1 Основная литература

1. Айфичер, Э. С. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. 2-е изд. / Эммануил С. Айфичер, Барии У. Джервис. – М. : Вильямс, 2004. – 992 с.

2. Цифровая обработка сигналов : Пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер ; пер. : С. А. Кулешов ; ред. пер. : А. С. Ненашев. - М. : Техносфера, 2006. - 855[1] с.

3.2 Дополнительная литература

3. Цифровая обработка сигналов : Учебное пособие для вузов / А. Б. Сергиенко. - 2-е изд. - СПб. : Питер, 2007. - 750[2] с.

4. Кестер У. Аналого-цифровое преобразование. М.: Техносфера, 2007. С.1016.