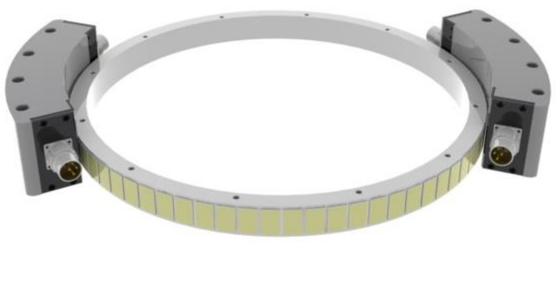
Министерство образования и науки российской федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Утверждаю
Зав. отделением каф. ЮНЕСКО
________________ Ю.М. Осипов
"_____"_____________________ 2012 г.

МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «**Методы и теория оптимизации**» для магистрантов 6 курса, обучающихся по направлению 221000.68 "Мехатроника и робототехника" по магистерским программам "Проектирование и исследование мультикоординатных электромехатронных систем движения" и "Компьютерное моделирование электромехатронных систем движения"



Томск 2012

УДК 621.396.6.671.7

Методы и теория оптимизации: Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Методы и теория оптимизации» для магистрантов 6 курса, обучающихся по направлению 221000.68 "Мехатроника и робототехника" по магистерской программе "Проектирование и исследование мультикоординатных электромехатронных систем движения". – Томск: Изд-во ТУСУР, 2012. – 36 с.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром отделения кафедры ЮНЕСКО

«27» марта 2012 г.

Составитель к.т.н., доц. ______________С.В. Щербинин

Зав. кафедрой ОКЮ
доктор техн. наук,
доктор экон. наук
профессор ______________*Ю.М. Осипов*

Рецензент
Кандидат технических наук,
доцент кафедры МИГ ЮТИ ТПУ
И.Ф. Боровиков

СТРУКТУРА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Виды самостоятельной работы (детализация)	Трудоемкость (час)	Контроль выполнения работы (Опрос, тест, дом. задание и т.д.)
1.	Проработка лекционного материала (~0,5 часа на 2 часа лекции).	4	Опрос, тесты
2.	Подготовка к практическим занятиям (~0,5-1 час на 2 часа занятий).	8	Проверка на практ. занятиях
3.	Изучение тем (вопросов) теоретической части курса, отводимых на самостоятельную проработку.	24	
3.1.	Критерии оптимальности в задачах с ограничениями	4	Проверка конспектов самостоятельного изучения
3.2.	Методы оптимизации на основе преобразования задачи	5	Проверка конспектов самостоятельного изучения
3.3.	Методы линеаризации для задач условной оптимизации	5	Проверка конспектов самостоятельного изучения
3.4.	Задачи специальной структуры и методы их решения	5	Проверка конспектов самостоятельного изучения
3.5.	Стратегии оптимального исследования	5	Проверка конспектов самостоятельного изучения
ИТОГО		36	

Умение слушать лекцию и правильно её конспектировать, систематически, добросовестно и осознанно работать над конспектом с привлечением дополнительных источников - залог успешного усвоения учебного материала.

При подготовке к практическим занятиям необходимо ознакомиться с имеющейся дополнительной литературой по теме занятия, провести поиск по базам данных кафедры и в Internet.

Методика работы по изучения теоретической части курса, отводимой на самостоятельную работу, приведена ниже.

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ КУРСА, ОТВОДИМЫХ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ

2.1. Критерии оптимальности в задачах с ограничениями

2.1.1. Содержание темы

В курсе лекций были рассмотрены необходимые и достаточные условия оптимальности решений оптимизационных задач без ограничений. Однако ряд инженерных задач связан с оптимизацией при наличии некоторого количества ограничений на управляемые переменные. Такие ограничения существенно уменьшают размеры области, в которой проводится поиск оптимума. На первый взгляд может показаться, что уменьшение размеров допустимой области должно упростить процедуру поиска оптимума. Между тем, напротив, процесс оптимизации становится более сложным, поскольку установленные выше критерии оптимальности нельзя использовать при наличии ограничений. При этом может нарушаться даже основное условие, в соответствии с которым оптимум должен достигаться в стационарной точке, характеризующейся нулевым градиентом. Например, безусловный минимум функции $f(x)=(x-2)^2$ имеет место в стационарной точке x=2. Но если задача минимизации решается с учетом ограничения $x \geq 4$, то будет найден условный минимум, которому соответствует точка x=4. Эта точка не является стационарной точкой функции, так как $f'(4)=4$. Необходимо в ходе самостоятельной работы исследовать необходимые и достаточные условия оптимальности решений задач с ограничениями. Изложение начинается с рассмотрения задач оптимизации, которые содержат только ограничения в виде равенств.

2.1.2. Контрольные вопросы

1. Поясните трудности, которые возникают при использовании метода множителей Лагранжа для решения задач с неотрицательными переменными.
2. В чем состоит значение условия регулярности допустимой области?
3. Что такое седловая точка? Какую роль играет решение задачи о седловой точке в условной оптимизации?
4. Укажите основные направления использования необходимых и достаточных условий оптимальности второго порядка.
5. В каких случаях применяют метод исключения переменных?
6. Что устанавливают с помощью множителей Лангранжа?
7. Какую функцию называют функцией Лангранжа?
8. В чем суть экономической интерпретации множителей Лангранжа?
9. Что называют условиями Куна — Таккера?
10. В чем суть интерпретации условий Куна — Таккера?
11. Сформулируйте теорему Куна — Таккера?
12. Сформулируйте достаточность условий Куна — Таккера?

2.1.3. Отчетность

Составить конспект самостоятельного изучения тем теоретической части курса отводимых на самостоятельное изучение.

2.2. Методы оптимизации на основе преобразования задачи

2.2.1. Содержание темы

В этой теме необходимо рассмотреть методы решения задач нелинейного программирования следующего вида:

$$\text{минимизировать } f(x),\ x \in R^N, \qquad (1)$$

$$\text{при ограничениях } g_j(x) \ge 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots, j, \qquad (2)$$

$$h_k(x) = 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots, K, \qquad (3)$$

$$x_i^{(l)} \le x_i \le x_i^{(u)},\ i = 1, 2, 3, \ldots, N. \qquad (4)$$

Предполагается что для вектора x^*, являющегося решением этой задачи, известно некоторое начальное приближение $x^{(0)}$ возможно недопустимое, т. е. не удовлетворяющее соотношениям (1) — (2).

С помощью рассматриваемых далее алгоритмов в пространстве R^N строится конечная последовательность точек $x^{(t)},\ t = 0, 1, \ldots, T$, которая начинается с заданной точки $x^{(0)}$ и заканчивается точкой x^T, дающей наилучшее приближение к x^* среди всех точек построенной последовательности. В качестве $x^{(t)},\ t = 0, 1, \ldots, T$ берутся стационарные точки, так называемой штрафной функции — целевой функции вспомогательной задачи безусловной минимизации. С помощью штрафной функции исходная задача условной минимизации преобразуется в последовательность задач безусловной минимизации. Конкретные методы, основанные на указанной общей схеме, определяются видом штрафной функции, а также правилами, по которым производится пересчет штрафных параметров по окончании очередного цикла безусловной минимизации. Штрафная функция, позволяющая ограничиться решением лишь одной задачи безусловной минимизации, называется точной.

Условия оптимальности, установленные в предыдущей главе, составляют основу рассматриваемых методов и дают аппарат для их исследования. В том, что вспомогательные функции, учитывающие ограничения, бывают, полезны, можно убедиться хотя бы на примере функции Лагранжа. Эта функция, во-первых, позволяет дать удобную формулировку условий оптимальности. Во-вторых, функция Лагранжа используется в ряде методов, например в известном методе, Эверетта, в котором безусловная минимизация чередуется с последовательным оцениванием множителей Лагранжа. Известно, что это оценивание сопряжено с определенными трудностями вычислительного характера. Тем не менее, указанные факты наталкивают на мысль использовать безусловную минимизацию вспомогательных функций с учетом ограничений для итеративного отыскания точки условного минимума. Идея преобразования задачи с ограничениями надлежащим образом построенную последовательность задач без ограничений представляется заманчивой главным образом в связи с наличием эффективных и надежных методов безусловной минимизации. При этом, конечно, мы надеемся отыскать условный минимум с приемлемой точностью путем решения относительно небольшого числа не слишком сложных подзадач.

Методы штрафных функций классифицируются в соответствии со способами учета ограничений-неравенств, поскольку ограничения-равенства учитываются во всех методах более или менее одинаково. В зависимости от того, являются ли элементы последовательности x^t допустимыми или недопустимыми точками, говорят о методах внутренней или внешней точки соответственно. Если x^t содержит точки обоих типов, метод называют смешанным.

2.2.2. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные отличия метода множителей от других методов, основанных на преобразовании задачи, например метода штрафных функций.
2. При каких условиях кривизна поверхностей уровня вспомогательной целевой функции в методе множителей не меняется от итерации к итерации?
3. Имеется ли необходимость в разработке модификации метода множителей, которая является методом внутренней точки? Почему?

Предположим, что задача

минимизировать $f(x)$
при ограничениях $g_j(x) \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, J$,

решается путем последовательной безусловной минимизации одной из следующих двух штрафных функций:

$$P_1(x, R) = f(x) + R \sum_{j=1}^{J} \langle g_j(x) \rangle^2,$$

где R пробегает положительную возрастающую последовательность значений, и

$$P_2(x, R, \sigma) = f(x) + R \sum_{j=1}^{J} \langle g_j(x) + \sigma_j \rangle^2 - R \sum_{j=1}^{J} \sigma_j^2,$$

где R фиксировано, а сходимость достигается путем пересчета σ_j после решения каждой подзадачи безусловной минимизации. Перечислите относительные достоинства и недостатки соответствующих методов, а также различия в их вычислительных схемах.

4. Предположим что задача минимизации $f(x)$ при ограничениях $g_j(x) \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, J,$ решается путем последовательной безусловной минимизации одной из следующих двух штрафных функций:

2.3. Методы линеаризации для задач условной оптимизации

2.3.1. Содержание темы

В курсе лекций были подробно рассмотрены два наиболее изученных в теории оптимизации класса задач: задачи без ограничений и задачи с линейными ограничениями. Для этих классов задач разработаны весьма эффективные, надежные и теоретически обоснованные алгоритмы. Поэтому представляется естественным, что в большинстве случаев для решения задач с нелинейными ограничениями используются методы, разработанные для упомянутых классов оптимизационных задач. Задача условной оптимизации решается при этом при помощи методов безусловной оптимизации как последовательность задач без ограничений. В данной главе и последующих главах рассматривается основанный на линеаризации подход, который позволяет свести общую задачу к задаче с линейными ограничениями. Использование линеаризации дает возможность применять методы линейного программирования либо для решения последовательности задач ЛП, либо для итеративного выполнения тех или иных операций симплекс-метода.

Все методы рассматриваемые по данной теме, основываются на разложении нелинейной функции *f(x)* общего вида в ряд Тейлора до членов первого порядка в окрестности некоторой точки x^0:

$$f(x) = f(x^0 + \nabla f(x^0)(x - x^0) + O(\|x - x^0\|)^2.$$

Член второго порядка малости $O(\|x - x^0\|)^2$ почти всегда отбрасывается, и функция *f(x)* аппроксимируется в точке x^0 линейной функцией, обозначаемой следующим образом:

$$\overline{f}(x; x^0) = f(x^0) + \nabla f(x^0)(x - x^0).$$

Точка x^0 называется тонкой линеаризации. Следует иметь в виду, что линеаризацию следует использовать с большой осторожностью, поскольку в большинстве случаев она дает весьма грубое приближение. Тем не менее, такое приближение часто применяется как при оптимизации, так и для других целей. Методы оптимизации, которые необходимо рассмотреть, различаются в основном по способам обращения к процедуре линеаризации и оценивания ошибок, возникающих при использовании линеаризации.

2.4. Задачи специальной структуры и методы их решения

2.4.1. Содержание темы

Данная тема посвящена оптимизационным задачам, обладающим специальной структурой. Некоторые методы решения общих задач нелинейного программирования (НЛП) были рассмотрены выше. В ряде специальных случаев, например, когда задача имеет квадратичную целевую функцию, линейные ограничения или целочисленные переменные, удается разработать алгоритмы, использующие специфику указанных задач. Такие алгоритмы могут быть существенно эффективнее, чем общие алгоритмы НЛП, и позволяют решать задачи большей размерности.

По данной теме рассматриваются следующие специальные классы задач и алгоритмы их решения.

1. Целочисленное программирование. Задачи, в которых все переменные или некоторая их часть должны принимать целые значения.

2. Квадратичное программирование. Задачи с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

3. Геометрическое программирование. Оптимизационные задачи, в которых целевая функция и левые части ограничений представляют собой обобщенные многочлены, а переменные должны быть положительными.

2.5. Стратегии оптимального исследования

2.5.1. Содержание темы

В курсе лекций основное внимание было уделено анализу современных оптимизационных алгоритмов. Такой анализ позволяет понять внутреннюю логику алгоритмов, а также точно оценить их возможности и недостатки. Изучив этот материал, можно подобрать наиболее подходящий алгоритм для данной технической задачи и проверить, является ли оптимальным решение, полученное выбранным алгоритмом. Но одно лишь знание алгоритмов является только необходимым, но отнюдь не достаточным условием успешного проведения оптимизационного исследования. При решении задачи такого рода приходится привлекать дополнительные соображения и проводить дополнительные исследования. Прежде всего, необходимо сформулировать оптимизационную задачу и подготовить ее к решению. Выбрать подходящий алгоритм, выбрать или написать эффективную программную реализацию этого алгоритма, провести ряд оптимизационных расчетов, включающих различные корректировки задачи и алгоритма, и, наконец, получив надежное решение, проинтерпретировать его в терминах реальной системы и использовать на практике.

Учитывая, что почти во всех технических приложениях оптимизационные алгоритмы используются в виде уже готовой программы, имеющейся в библиотеке программ фирмы, или такая программа закупается (арендуется), при проведении оптимизационного исследования больше всего времени занимает правильная постановка задачи, подготовка ее к решению и предварительные расчеты для выявления ошибок и отладки программ. К сожалению, для решения таких задач нужна профессиональная подготовка, которая трудно поддается анализу и классификации. Получить такие знания весьма непросто. Они приобретаются не в результате формального обучения, а в процессе практической работы и тщательного анализа наблюдавшихся успехов и неудач.

По данной теме описываются некоторые принципы проведения оптимизационного исследования и на примерах, рассматривается несколько альтернативных подходов к постановке задачи, подготовке ее к решению и устранению возникающих ошибок. Этот обзор не претендует на исчерпывающий охват указанных вопросов. Он является обобщением опыта, накопленного авторами и другими специалистами, занимавшимися решением практических задач оптимизации в технике. Подобный опыт приобретается в ходе неофициальных обсуждений или по разбросанным в прикладных публикациях сведениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реклейтис Г. Оптимизация в технике / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. — М.: Мир, 1986. — 650 с.

2. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М.Галеев, В.М. Тихомиров. — М.: Элиторнал УРСС, 2000. — 320 с.

3. Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: Физматлит, 2008. – 320 с.