Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)
Кафедра экономической математики, информатики и статистики

Математические методы исследования систем

Методические указания к практическим, лабораторным и самостоятельным занятиям
для студентов специальностей 230100 - Информатика и вычислительная техника

Зав.кафедрой ЭМИС,
д.ф.-м.н., профессор И.Г.Боровской

Составил: доц. каф. ЭМИС Д.Д. Даммер

2012

Содержание

1. Построение регрессионных моделей

1.1 Практическое занятие №1 (2часа). Парная линейная регрессия

Цель занятия:
По эмпирическим данным научиться строить модели парной регрессии, находить оценки коэффициентов.

Методические указания.

Если функция регрессии линейна, то говорят о линейной регрессии. Теоретическое линейное уравнение регрессии представляет собой линейную функцию вида

$$M(Y|X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

тогда наблюдаемое значение результативного признака определяется выражением

$$y_i = M(Y|X = x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \ i = \overline{1,n}$$

где x_i – значение независимой переменной, β_0 и β_1 – теоретические коэффициенты регрессии, ε_i — случайное отклонение.

По выборке ограниченного объема мы сможем построить эмпирическое уравнение регрессии

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i,$$

где $\hat{y}_i$ – оценка условного математического ожидания $M(Y|X = x_i)$; b_0 и b_1 – оценки неизвестных параметров β_0 и β_1, тогда

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i,$$

где *отклонение* e_i — оценка теоретического случайного отклонения ε_i.

Используя МНК можно получить формулы для определения b_0 и b_1:

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{cases}, \text{ где } \quad \begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum x_i, \ \overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2 \\ \bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum y_i \end{array}$$

Пример.

Изучается зависимость себестоимости единицы продукции (y, тыс. руб.), от величины выпуска продукции (x, тыс. шт.). Экономист обследовал n=5 предприятий и получил следующие результаты:

Номер	x	y
1	2	1,9
2	3	1,7
3	4	1,8
4	5	1,6
5	6	1,4
Сумма	20	8,4

Полагая, что между переменными имеет место линейная зависимость, определить эмпирическое уравнение регрессии.

Решение:

Воспользуемся формулой для определения оценок коэффициентов уравнения регрессии

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \\ b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \end{cases}$$

Имеем

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4,$$

$$\bar{y} = \frac{1{,}9+1{,}7+1{,}8+1{,}6+1{,}4}{5} = 1{,}68,$$

$$\overline{xy} = \frac{2\cdot 1{,}9+3\cdot 1{,}7+4\cdot 1{,}8+5\cdot 1{,}6+6\cdot 1{,}4}{5} = \frac{32{,}5}{5} = 6{,}5,$$

$$\overline{x^2} = \frac{4+9+16+25+36}{5} = 18.$$

Тогда

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{6{,}5-4\cdot 1{,}68}{18-4^2} = -0{,}11 \\ b_0 = 1{,}68+0{,}11\cdot 4 = 2{,}12, \end{cases}$$

и эмпирическое уравнение регрессии будет иметь вид:

$$\hat{y} = 2{,}12 - 0{,}11x.$$

Задачи

1. Фирма провела рекламную компанию. Через 10 недель фирма решила проанализировать эффективность этого вида рекламы, сопоставив недельные объемы продаж (y, тыс. руб) с расходами на рекламу (x, тыс. руб):

x	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10
y	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90

Полагая, что между переменными имеет место линейная зависимость, определить эмпирическое уравнение линейной регрессии.

2. Постройте уравнение регрессии между данными о темпах прироста численности занятых и производительности труда сначала по всей совокупности данных. Дайте экономическую интерпретацию.

Страна	Занятость (прирост, %)	Производительность (прирост, %)
Австрия	2	4,2
Бельгия	1,5	3,9
Канада	2,3	1,3
Дания	2,5	3,2
Франция	1,9	3,8
Италия	4,4	4,2
Япония	5,8	7,8
Нидерланды	1,9	4,1
Норвегия	0,5	4,4
ФРГ	2,7	4,5
Великобритания	0,6	2,8
США	0,8	2,6

3. Для 13 клиентов спортивного магазина зафиксирована сумма покупки x_t (в у.е.) и время разговора с продавцом y_t (в мин.):

x_t	40	50	60	80	100	110	120	130	150	160	180	200	310
y_t	14	14	17	19	17	20	24	22	25	24	18	20	26

Требуется: оценить с помощью МНК параметры линейного регрессионного уравнения, предположив, что переменная «длительность разговора с продавцом» объясняется переменной «величина покупки»; оценить с помощью методов МНК параметры линейного регрессионного уравнения, предположив, что переменная «величина покупки» объясняется переменной «длительность разговора с продавцом»; нарисовать диаграмму рассеяния величин (x_t , y_t), обе линии регрессии и объяснить, почему получаются различные уравнения регрессии.

4. Исследуется зависимость затрат на рекламу y от годового оборота x в некоторой отрасли. Для этого собрана информация по 20 случайно выбранным предприятиям этой отрасли о годовом обороте x_i и соответствующих расходах на рекламу y_i. Из выборки получены следующие данные: $\bar{x}=17{,}3; \bar{y}=1{,}2; \sum x_i y_i=944{,}3; \sum x_i^2=9250; \sum y_i^2=127{,}2$. Предполагается, что зависимость y_i от x_i описывается уравнением: $y_i=a+bx_i+u_i (i=1,\ldots 20)$. Требуется оценить параметры a и b с помощью МНК.

5. Исследователь считает, что $y=\beta x+u$. Выведите формулу МНК для расчета определения оценки b регрессионного параметра β.

6. Исследователь имеет ежегодные данные о временных рядах для совокупной заработной платы (*W*), совокупной прибыли (*П*) и совокупного дохода (*Y*) для страны за период в *n* лет. По определению $Y=W+П$. Используя МНК, получены уравнения регрессии: $\hat{W}=a_0+a_1Y$ и $\hat{П}=b_0+b_1Y$. Покажите, что коэффициенты регрессии будут автоматически удовлетворять следующим уравнениям: $a_1+b_1=1$ и $a_0+b_0=0$.

1.2. Практическое занятие №2 (2 часа). Проверка качества эмпирического уравнения парной линейной регрессии.

Цель занятия: научиться проверять качество уравнения регрессии оцениванием значения коэффициента детерминации, проверять гипотезы относительно коэффициентов уравнения регрессии, строить интервальные оценки коэффициентов и доверительные интервалы для зависимой переменной.

Методические указания.

После определения оценок теоретических коэффициентов регрессии нужно решить еще некоторые важные задачи: насколько точно эмпирическое уравнение регрессии соответствует уравнению для всей генеральной совокупности, насколько близки оценки b_0 и b_1 коэффициентов к своим теоретическим прототипам β_0 и β_1, как близко оцененное значение $\hat{y}_i$ к условному математическому ожиданию $M(Y|X=x_i)$.

Доказано, что для получения по МНК наилучших результатов необходимо, чтобы выполнялся ряд предпосылок относительно случайного отклонения (предпосылки Гаусса-Маркова):

1. Математическое ожидание случайного отклонения ε_i равно нулю: $M(\varepsilon_i)=0$ для всех наблюдений. Данное условие означает, что случайное отклонение в среднем не оказывает влияния на зависимую переменную. В каждом конкретном наблюдении может быть ибо положительным, либо отрицательным, но он не должен иметь систематического смещения. Выполнимость $M(\varepsilon_i)=0$ влечет выполнимость $M(Y|X=x_i)=\beta_0+\beta_1 x_i$
2. Дисперсия случайных отклонений ε_i постоянна: $D(\varepsilon_i)=D(\varepsilon_j)=\sigma^2$ для любых наблюдений *i* и *j*. Данное условие подразумевает, что несмотря на то, что при каждом конкретном наблюдении случайное отклонение может быть либо большим, либо меньшим, не должно быть некой причины, вызывающей большую ошибку (отклонение).

3. Случайные отклонения ε_i и ε_j являются независимыми друг от друга для $i \neq j$. Выполнимость данной предпосылки предполагает, что отсутствует систематическая связь между любыми случайными отклонениями.
4. Случайное отклонение должно быть независимо от объясняющих переменных.
5. Модель является линейной относительно параметров.

Теорема Гаусса-Маркова. Если предпосылки 1-5 выполнены, то оценки, полученные по МНК, обладают следующими свойствами:

1. Оценки являются несмещенными, т.е. $M(b_0) = \beta_0$, $M(b_1) = \beta_1$. Это вытекает из того, что $M(\varepsilon_i) = 0$, и говорит об отсутствии систематической ошибки в определении положения линии регрессии.
2. Оценки состоятельны, так как дисперсия оценок параметров при возрастании числа наблюдений n стремится к нулю: $D(b_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $D(b_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Другими словами, при увеличении объема выборки надежность оценок увеличивается (b_0 близко к β_0, а b_1 близко к β_1.
3. Оценки эффективны, т.е. они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками данных параметров, линейными относительно величин y_i.

Если предпосылки 2 и 3 нарушены, то свойства несмещенности и состоятельности сохраняются, но свойство эффективности – нет.

Анализ точности определения оценок коэффициентов регрессии

В силу случайного отбора элементов в выборку случайными являются также оценки b_0 и b_1. При выполнении предпосылок об отклонениях ε_i имеем $M(b_0) = \beta_0$, $M(b_1) = \beta_1$. При этом оценки тем надежнее, чем меньше их разброс вокруг β_0 и β_1, т.е. чем меньше дисперсии $D(b_0)$ и $D(b_1)$ оценок, рассчитываемые по формулам:

$$D(b_0) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2}, \quad D(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}.$$

Так как ε_i неизвестны, они заменяются величинами $e_i = y_i - b_0 - b_1 x_i$. Дисперсия случайных отклонений $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ заменяется ее несмещенной оценкой

$$S^2 = \frac{1}{n-2}\sum(y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}.$$

Тогда:

$$D(b_0) \approx S_{b0}^2 = \frac{S^2 \sum x_i^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} = \overline{x^2} S_{b1}^2,$$

$$D(b_1) \approx S_{b1}^2 = \frac{S^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2},$$

где $S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$ – необъясненная дисперсия (мера разброса зависимой переменной вокруг линии регрессии), тогда $S = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$ – стандартная ошибка оценки (стандартная ошибка регрессии), $S_{b0} = \sqrt{S_{b0}^2}$ и $S_{b1} = \sqrt{S_{b1}^2}$ – стандартные отклонения случайных величин b_0 и b_1, называемые стандартными ошибками коэффициентов регрессии.

Проверка гипотез относительно коэффициентов линейного уравнения регрессии

При проведении статистического анализа возникает необходимость сравнения эмпирических коэффициентов регрессии b_0 и b_1 с ожидаемыми значениями β_0 и β_1 этих коэффициентов. Данный анализ осуществляется при помощи статистической проверкой гипотез.

Для проверки гипотезы H$_0$: $b_1 = \beta_1$ используется статистика:

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b1}},$$

которая при справедливости $b_1 = \beta_1$ имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $v = n - 2$, где n – объем выборки. Следовательно, гипотеза $b_1 = \beta_1$ отклоняется на основании данного критерия, если:

$$|T_{набл}| = \left|\frac{b_1 - \beta_1}{S_{b1}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2},n-2},$$

где α - требуемый уровень значимости. При невыполнении этого условия считается, что нет оснований для отклонения H$_0$: $b_1 = \beta_1$.

Задача установления значимости коэффициентов решается при помощи отношений, называемых t-статистикой:

$$t = \frac{b_1}{S_{b1}} \qquad \text{и} \qquad t = \frac{b_0}{S_{b0}}.$$

В случае, если $|t| > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, то статистическая значимость соответствующего коэффициента регрессии подтверждается. Значения $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы v ($v = n - 2$) приведены в приложении 1.

Интервальные оценки коэффициентов линейного уравнения регрессии

Доверительные интервалы коэффициентов b_0 и b_1, которые с надежностью $(1-\alpha)$ накрывают определяемые параметры β_0 и β_1, определяются по формулам:

$$\left(b_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}S(b_0);\ b_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}S(b_0)\right) \quad \text{и} \quad \left(b_1 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}S(b_1);\ b_1 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}S(b_1)\right).$$

Доверительные интервалы для зависимой переменной

Интервал, определяющий границы, за пределами которых могут оказаться не более $100\alpha\%$ точек наблюдений при $X = x_p$, рассчитывается следующим образом:

$$\left(b_0 + b_1 x_p \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_p)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}\right).$$

Проверка общего качества уравнения регрессии.

Общее качество уравнения регрессии оценивается по тому, как хорошо эмпирическое уравнение регрессии согласуется со статистическими данными. Мерой общего качества уравнения регрессии является *коэффициент детерминации* R^2. В случае парной регрессии коэффициент детерминации будет совпадать с квадратом коэффициента корреляции. В общем случае коэффициент детерминации рассчитывается по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

Справедливо соотношение $0 \le R^2 \le 1$. Чем теснее линейная связь между X и Y, тем ближе коэффициент детерминации R^2 к единице.

Пример.

Для анализа зависимости объема потребления Y (у.е.) домохозяйства от располагаемого дохода X (у.е.) отобрана выборка n=12 (помесячно в течение года) необходимо провести регрессионный анализ.

Данные и расчеты представлены в таблице:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2
1	107	102	11449	10914	10104	103,63	-1,63	2,66
2	109	105	11881	11445	11025	105,49	-0,49	0,24
3	110	108	12100	11880	11664	106,43	1,57	2,46
4	113	110	12769	12430	12100	109,23	0,77	0,59
5	120	115	14400	13800	13225	115,77	-0,77	0,59
6	122	117	14884	14274	13689	117,63	-0,63	0,40
7	123	119	15129	14637	14161	118,57	0,43	0,18
8	128	125	16384	16000	15625	123,24	1,76	3,10
9	136	132	18496	17952	17424	130,71	1,29	1,66
10	140	130	19600	18200	16900	134,45	-4,45	19,8
11	145	141	21025	20445	19881	139,11	1,89	3,57
12	150	144	22500	21600	20736	143,78	0,22	0,05
Сумма	1503	1448	190617	183577	176834	-	0	35,3
Среднее	125,25	120,67	15884,75	15298,08	14736,17	-	-	-

Решение:

Найдем сначала оценки коэффициентов:

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \dfrac{15298{,}08 - 125{,}25\cdot 120{,}67}{15884{,}75 - (125{,}25)^2} = 0{,}9339, \\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 120{,}67 - 0{,}9339\cdot 125{,}25 = 3{,}699. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение парной регрессии имеет вид: $\hat{Y} = 3{,}699 + 0{,}9339X$. По этому уравнению рассчитаем $\hat{y}_i$, а также $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

В нашем примере коэффициент b_1 может трактоваться как предельная склонность к потреблению. Фактически он показывает, на какую величину изменится объем потребления, если располагаемый доход возрастает на одну единицу. Свободный член b_0 определяет прогнозируемое значение Y при величине располагаемого дохода X, равной нулю (т.е. автономное потребление).

Рассчитаем другие показатели.

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{35{,}3}{12-2} = 3{,}53; \qquad S = \sqrt{S^2} = 1{,}88,$$

$$S_{b1}^2 = \frac{S^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{3{,}53}{2366{,}25} = 0{,}0015; \quad S_{b1} = \sqrt{S_{b1}^2} = 0{,}039,$$

$$S_{b0}^2 = \overline{x^2} S_{b1}^2 = 15884{,}75\cdot 0{,}0015 = 23{,}83; \qquad S_{b0} = \sqrt{S_{b0}^2} = 4{,}88,$$

Проверим статистическую значимость коэффициентов b_0 и b_1:

$$t_1 = \frac{b_1}{S_{b1}} = \frac{0{,}9339}{0{,}039} = 23{,}946 \quad \text{и} \quad t_0 = \frac{b_0}{S_{b0}} = \frac{3{,}699}{4{,}88} = 0{,}76\,.$$

Критическое значение при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ равно (см. приложение 1) $t_{крит} = t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{0{,}025;10} = 2{,}228$. Так как $|t_1| = 23{,}946 > 2{,}228$, то это подтверждает статистическую значимость коэффициента регрессии b_1. Аналогично для другого коэффициента: так как $|t_0| = 0{,}76 < 2{,}228$, то гипотеза о статистической значимости коэффициента b_0 отклоняется. Это означает, что в данном случае свободным членом уравнения регрессии можно пренебречь, рассматривая регрессию как $Y = b_1 X$.

Определим доверительные интервалы коэффициентов регрессии (по формуле 2.20), которые с надежность 95% $(\alpha = 0.05)$ будут следующими:

для b_0 $(3{,}699 - 2{,}228 \cdot 4{,}88;\ 3{,}699 + 2{,}228 \cdot 4{,}88) = (-7{,}173;\ 14{,}572)$,

для b_1 $(0{,}9339 - 2{,}228 \cdot 0{,}039;\ 0{,}9339 + 2{,}228 \cdot 0{,}039) = (0{,}8470;\ 1{,}021)$.

Рассчитаем границы интервала, в котором будет сосредоточено 95% возможных объемов потребления при неограниченно большом числе наблюдений и уровне дохода $X = 160$:

$$3{,}699 + 0{,}9339 \cdot 160 \pm 2{,}228 \cdot 1{,}88 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(125{,}25 - 160)^2}{2102{,}1875}}\,.$$

Таким образом, этот интервал имеет вид: (147,4898; 158,7082).

Рассчитаем коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{35{,}3}{2108{,}6668} = 0{,}983\,.$$

Столь высокое значение коэффициента детерминации свидетельствует о высоком общем качестве построенного уравнения регрессии.

Задачи

1. В условиях задачи № 3 из предыдущего раздела для модели, в которой переменная «величина покупки» объясняется переменной «длительность разговора с продавцом»:

1) проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии с уровнем значимости 5%;

2) определить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с уровнем значимости 1%;

3) определить доверительные интервалы для зависимой переменной при $y^* = 22$ для уровня значимости 10%;

4) проверить качество уравнения регрессии и статистическую значимость коэффициента детерминации (уровень значимости 10%).

2. Исследователь изучает зависимость между совокупным спросом на услуги (y) и совокупным располагаемым личным доходом (x) по данным для американской экономики (обе величины измеряются в млрд.дол.), используя ежегодные данные временных рядов и модель: $y = \alpha + \beta x + u$. Исследователь получает уравнение, проводя регрессионный анализ при помощи МНК. Предполагая, что обе величины x и y могут быть существенно занижены в системе национальных счетов из-за стремления людей уклониться от уплаты налогов, исследователь принимает два альтернативных метода уточнения заниженных оценок: 1) он добавляет к каждому году 90 млрд.дол. к показателю y и 200 млрд.дол. к показателю x; 2) он увеличивает значения как для x, так и для y на 10% за каждый год. Оцените влияние этих корректировок на результаты оценивания регрессии.

3. Регрессионная зависимость расходов на питание y от времени t задана уравнением: $\hat{y} = 95{,}3 + 2{,}53t$. Стандартная ошибка коэффициента при t составила 0,08. Проверьте нулевую гипотезу о том, что истинное значение коэффициента равно нулю при 5%-ном и 1%-ном уровнях значимости. Сделайте выводы.

1.3 Практическое занятие №3. (2 часа) Множественная линейная регрессия

Цель занятия: научиться строить модели множественной линейной регрессии, находить оценки коэффициентов уравнения.

Методические указания.

На любой экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. В этом случае вместо парной регрессии $M(Y|X) = f(x)$ рассматривается *множественная регрессия*

$$M(Y|x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Уравнение множественной регрессии может быть представлено в виде:

$$Y = f(\beta, X) + \varepsilon,$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ – вектор независимых переменных; β - вектор параметров (подлежащих определению); ε - случайная ошибка (отклонение); Y - зависимая переменная.

Теоретическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m + \varepsilon,$$

или для индивидуальных наблюдений $i = 1,2,\ldots,n$:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i.$$

Здесь $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ – вектор размерности $(m+1)$ неизвестных параметров. β_j, $j = 1,2,\ldots,m$ называется j-тым теоретическим коэффициентом регрессии, β_0 - свободный член, определяющий Y в случае, когда все объясняющие переменные X_j равны нулю.

Пусть имеется n наблюдений вектора объясняющих переменных $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ и зависимой переменной Y:

$$(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, y_i), i = 1,2,\ldots,n.$$

Для того, чтобы однозначно можно было бы решить задачу отыскания параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ (т.е. найти некоторый наилучший вектор β), должно выполняться неравенство $n \geq m+1$.

Как и в случае парной регрессии, истинные значения параметров β_j по выборке получить невозможно. В этом случае вместо теоретического уравнения регрессии оценивается эмпирическое уравнение регрессии:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_m X_m + e.$$

Здесь $b_0, b_1, \ldots, b_m$ - оценки теоретических значений $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ коэффициентов регрессии; e - оценка отклонения ε.

При выполнении предпосылок МНК относительно ошибок ε_i оценки $b_0, b_1, \ldots, b_m$ являются несмещенными, эффективными и состоятельными.

Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Тогда МНК-оценки параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ будут определяться следующей формулой:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Полученные общие соотношения справедливы для уравнений регрессии с произвольным количеством m объясняющих переменных. Например, для $m = 2$ получим:

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2,$$

$$b_1 = \frac{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - \sum(x_{i2}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)}{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - (\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2))^2},$$

$$b_2 = \frac{\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2 - \sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})\cdot\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)}{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 - (\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2))^2}.$$

Пример.

Анализируется объем s сбережений домохозяйства за 10 лет. Предполагается, что его размер s_t в текущем году t зависит от величины y_t располагаемого дохода y и от величины z_t реальной процентной ставки z. Статистические данные представлены в таблице:

Год	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
y, тыс.у.е.	100	110	140	150	160	160	180	200	230	250	260
z, %	2	2	3	2	3	4	4	3	4	5	5
s, тыс.у.е.	20	25	30	30	35	38	40	38	44	50	55

Необходимо рассчитать оценки коэффициентов уравнения регрессии.

Решение:

Средние значения исходных данных равны: $\bar{y} = 176{,}3636$, $\bar{z} = 3{,}3636$, $\bar{s} = 36{,}8182$.

Представим требующиеся для построения модели множественной регрессии и проведения дальнейшего анализа промежуточные вычисления в таблице:

Год	$(y_i-\bar{y})^2$	$(z_i-\bar{z})^2$	$(s_i-\bar{s})^2$	$(y_i-\bar{y})\cdot(z_i-\bar{z})$	$(y_i-\bar{y})\cdot(s_i-\bar{s})$	$(z_i-\bar{z})\cdot(s_i-\bar{s})$
80	5831,4050	1,8595	282,8512	104,1322	1284,2975	22,9339
81	4404,1322	1,8595	139,6694	90,4959	784,2975	16,1157
82	1322,3140	0,1322	46,4876	13,2231	247,9339	2,4793
83	695,0413	1,8595	46,4876	35,9504	179,7521	9,2975
84	267,7686	0,1322	3,3058	5,9504	29,7521	0,6612
85	267,7686	0,4050	1,3967	-10,4132	-19,3388	0,7521
86	13,2231	0,4050	10,1240	2,3140	11,5702	2,0248
87	558,6777	0,1322	1,3967	-8,5950	27,9339	-0,4298
88	2876,8595	0,4050	51,5785	34,1322	385,2066	4,5702
89	5422,3140	2,6777	173,7603	120,4959	970,6612	21,5702
90	6995,0413	2,6777	330,5785	136,8595	1520,6612	29,7521
$\sum$	28654,5455	12,5455	1087,6364	524,5455	5422,7273	109,7273

Теперь рассчитаем коэффициенты уравнения регрессии:

$$b_0 = 36{,}8182 - 0{,}124189\cdot 176{,}3636 - 3{,}553796\cdot 3{,}3636 = 2{,}962233,$$

$$b_1 = \frac{5422{,}7273\cdot 12{,}5455 - 109{,}7273\cdot 524{,}5455}{28654{,}5455\cdot 12{,}5455 - (524{,}5455)^2} = \frac{10473{,}8639}{84337{,}619} = 0{,}124189,$$

$$b_2 = \frac{109{,}7273\cdot 28654{,}5455 - 5422{,}7273\cdot 524{,}5455}{28654{,}5455\cdot 12{,}5455 - (524{,}5455)^2} = \frac{299718{,}7075}{84337{,}619} = 3{,}553796.$$

Таким образом, эмпирическое уравнение регрессии имеет вид:

$$s_t = 2{,}962233 + 0{,}124189 y_t + 3{,}553796 z_t.$$

Задачи

1. Предполагается, что объем предложения товара y линейно зависит от цены товара x_1 и зарплаты сотрудников x_2 : $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Статистические данные собраны за десять месяцев. Оценить по МНК коэффициенты уравнения регрессии для двух вариантов:

1)

y, руб	20	35	30	45	60	70	75	90	105	110
x_1, руб	10	15	20	25	40	37	43	35	40	55
x_2, руб	12	10	9	9	8	8	6	4	4	5

2)

y, руб	75	90	105	110	120	130	130	130	135	140
x_1, руб	43	35	38	55	50	35	40	55	45	65
x_2, руб	6	4	4	5	3	1	2	3	1	2

2. Торговое предприятие имеет несколько филиалов. Найти коэффициенты эмпирического уравнения множественной регрессии, если предполагается, что зависимая переменная y – это годовой товарооборот филиала, а независимые переменные x_1, x_2 – размер торговой площади и среднедневная интенсивность потока соответственно. Зависимость y от x_1, x_2 предполагается линейная. Данные приведены в следующей таблице:

y, млн руб	2,93	5,27	6,85	7,01	7,02	8,35	4,33	5,77	7,68	3,16	1,52	3,15
x_1, тыс м^2	0,31	0,98	1,21	1,29	1,12	1,49	0,78	0,94	1,29	0,48	0,24	0,55
x_2, тыс чел в день	10,24	7,51	10,81	9,89	13,72	13,92	8,54	12,36	12,27	11,01	8,25	9,31

1.4 Практическое занятие №4 (2 часа). Нелинейная регрессия.

Цель занятия: по эмпирическим данным научиться строить нелинейные регрессионные модели, оценивать коэффициенты таких моделей.

Методические указания.

Построение и анализ нелинейных моделей имеют свою специфику. Рассмотрим нелинейные модели, допускающими сведение их к линейным. Такие модели называют *линейные относительно параметров модели*. Будем рассматривать модели парной нелинейной регрессии:

1) Логарифмические модели: $Y = AX^{\beta}$, где A, β – параметры модели (константы, подлежащие определению). Для анализа такой функции используется логарифмирование всего выражения:

$$\ln Y = \ln A + \beta \ln X .$$

С целью статистической оценки коэффициентов добавим в модель случайную погрешность ε и заменим: $\ln A = \beta_0$, $Y^* = \ln Y$ и $X^* = \ln X$, получаем линейную модель:

$$Y^* = \beta_0 + \beta X^* + \varepsilon ,$$

и при большем числе переменных:

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \ldots + \beta_m \ln X_m + \varepsilon .$$

2) Полулогарифмические модели: $\ln Y = \beta_0 + \beta X + \varepsilon$, $Y = \beta_0 + \beta \ln X + \varepsilon$. После замены $Y^* = \ln Y$ и $X^* = \ln X$, получаем линейную модель.

3) Обратная модель: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$. Сводится к линейной путем замены $X^* = \frac{1}{X}$.

4) Показательная модель $Y = \beta_0 e^{\beta x}$. Сначала сводится к лог-линейной $\ln Y = \ln \beta_0 + \beta X$, а потом к линейной модели.

Пример.

Анализируется индекс потребительских цен Y по объему денежной массы X на основании приведенных в таблице данных. Необходимо построить логарифмическую модель**.**

Год	Y	X	Год	Y	X
81	65	110	89	95	235
82	68	125	90	100	240
83	72,5	132	91	106,5	245
84	77,5	137	92	112	250
85	82	160	93	115,5	275
86	85,5	177	94	118,5	285
87	88,5	192	95	120	295
88	91	215	96	120,5	320
			97	121	344

Решение:

Логарифмическая модель имеет вид: $Y = AX^{\beta}$. Данная модель сводится к линейной следующим образом: $\ln Y = b_0 + b \ln X$. Для определения коэффициентов в этой модели определим логарифмы переменных Y и X, $(\ln X)^2$, $(\ln X) \cdot (\ln Y)$ и представим их в таблице.

Год	Y	X	$\ln Y$	$\ln X$	$(\ln X)^2$	$(\ln X) \cdot (\ln Y)$
81	65	110	4,1744	4,7005	22,0947	19,6218
82	68	125	4,2195	4,8283	23,3125	20,3730
83	72,5	132	4,2836	4,8828	23,8417	20,9160
84	77,5	137	4,3503	4,9200	24,2064	21,4035
85	82	160	4,4067	5,0752	25,7577	22,3649
86	85,5	177	4,4485	5,1761	26,7920	23,0259
87	88,5	192	4,4830	5,2575	27,6413	23,5694
88	91	215	4,5109	5,3706	28,8433	24,2262
89	95	235	4,5539	5,4596	29,8072	24,8625
90	100	240	4,6052	5,4806	30,0370	25,2393
91	106,5	245	4,6681	5,5013	30,2643	25,6806
92	112	250	4,7185	5,5215	30,4870	26,0532
93	115,5	275	4,7493	5,6168	31,5484	26,6759
94	118,5	285	4,7749	5,6525	31,9508	26,9901
95	120	295	4,7875	5,6870	32,3420	27,2265
96	120,5	320	4,7916	5,7683	33,2733	27,6394
97	121	344	4,7958	5,8406	34,1126	28,0103
Сумма	1639	3737	77,3217	90,7392	486,3122	413,8784

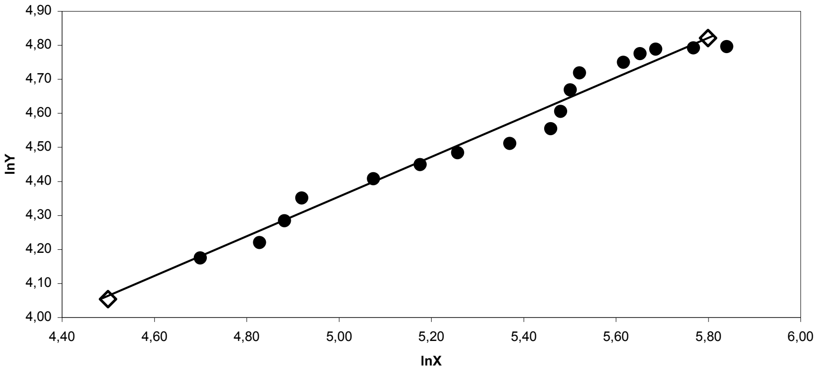
Среднее	96,4118	219,8235	4,5483	5,3376	28,6066	24,3458

Затем, по аналогии с примером, приведенным в разделе 1, рассчитываются коэффициенты для этой модели следующим образом:

$$\begin{cases} b = \dfrac{\overline{(\ln X)\cdot \ln(Y)} - \overline{\ln X}\cdot\overline{\ln Y}}{\overline{(\ln X)^2} - (\overline{\ln X})^2} = \dfrac{24{,}3458 - 5{,}3376\cdot 4{,}5483}{28{,}6066 - (5{,}3376)^2} = \dfrac{0{,}0688}{0{,}1166} = 0{,}5901, \\ b_0 = \overline{\ln Y} - b\cdot\overline{\ln X} = 4{,}5483 - 0{,}5901\cdot 5{,}3376 = 1{,}3986. \end{cases}$$

Следовательно, модель имеет вид: $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901\cdot\ln X$. Если свести данную модель к виду $Y = AX^{\beta}$, то получим: $Y = 4{,}0495\cdot X^{0{,}5901}$ (т.к. $\ln A = b_0 = 1{,}3986$, следовательно, $A = e^{b_0} = 4{,}0495$).

Представим графически корреляционное поле для переменных $\ln Y$ и $\ln X$, а также график рассчитанной модели $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901\cdot\ln X$.



Задачи.

1. В условиях задачи из примера проверить значимость коэффициентов уравнения регрессии, определить их интервальные оценки и рассчитать коэффициент детерминации. Расчет проводится аналогично примеру в разделе 1 для модели вида $\ln Y = 1{,}3986 + 0{,}5901\cdot\ln X$.

2. Определить экспоненциальную функцию вида $y = \alpha\cdot e^{\beta x}$, где y – совокупные личные расходы, x – располагаемый личный доход (по данным из таблицы индивидуальных заданий). Проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии и доверительные интервалы коэффициентов с уровнем значимости 5%, проверить качество уравнения регрессии. Определить для этих же данных линейную регрессию вида $y = \alpha + \beta x$.

2. Основы линейного программирования (ЛП)

2.1 Лабораторная работа №1. Представление экономико-математической модели в виде задачи линейного программирования (ЗЛП)

Цель занятия: научиться представлять экономико-математические модели в виде задач линейного программирования, подбирать оптимизационный критерий.

Методические указания.

Экономико-математическая постановка и модель общей задачи линейного программирования записывается в виде

$$Z(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max(\min)\ , \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leq = \geq b_i, \; i = \overline{1, m}, \qquad (2)$$

$$x_k \geq 0, \; k = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Рассмотрим пример составления математической модели.

Пример.

1. *Задача об использовании сырья*. Пусть предприятие выпускает два вида продукции P_1 и P_2 для продажи. Для производства продукции используется три вида сырья S_1 S_2 S_3. Расход сырья на каждый вид продукции, стоимость продукции и запасы сырья представлены в таблице

Виды сырья	Расходы сырья на единицу продукции P_1	P_2	Запасы сырья
S_1	3	4	70
S_2	5	7	80
S_3	8	6	90
Стоимость ед. продукции	20	30	

Какое количество каждого вида продукции необходимо предприятию, чтобы прибыль была максимальной? Составить ЗЛП.

Решение:

Обозначим x_1, x_2 – объемы выпуска соответственно 1-го и 2-го видов. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = 20x_1 + 30x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 70, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 80, \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. *Задача о диете*. Пусть диетолог составляет диету, согласно которой пациент должен получит не менее 18 единиц питательного вещества S_1, не менее 25 единиц вещества S_2 и не менее 32 единиц вещества S_3. Диета состоит и з двух составляющих D_1, D_2. Содержание количества единиц питательных веществ в единице веса каждой составляющей диеты и стоимость продуктов приведены в таблице

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в ед.объема продуктов D_1	D_2
S_1	3	4
S_2	5	7
S_3	6	8
Стоимость диеты	20	25

Требуется составить дневной рацион необходимой питательности, чтобы затраты были минимальными. Составить ЗЛП.

Решение:

Обозначим x_1, x_2 – количество питательных веществ в продуктах 1-го и 2-го видов соответственно. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = 20x_1 + 25x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 25, \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 32, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задачи

1. Торговое предприятие реализует четыре группы товаров 1,2,3,4. Нормы расходов ресурсов на каждую группу товаров, запасы ресурсов, а также прибыль от единицы каждого вида продукции заданы в таблице

Виды ресурсов	Норма расходов ресурсов на ед. товаров				Запасы ресурсов
	1	2	3	4	
Рабочее время торговых работников, чел.-час	2	3	4	5	1500
Площадь торговых залов, м^2	10	11	14	12	400
Площадь складских помещений, м^2	6	7	8	9	600
Издержки обращения, руб	3	5	7	6	500
Прибыль от реализации ед. продукции, тыс.руб	15	16	19	17	

Определить объем продаж товаров, чтобы прибыль торгового предприятия была максимальной.

2.Диетолог разработал диету, состоящую из сливочного масла, мяса, хлеба и фруктов. Содержание калорий, белков, жиров, углеводов и холестерина (в 100 г. продукта), нормы потребления (в сутки) и цена 100 г. соответствующего продукта указаны в таблице

Питательные вещества	Содержание в 100 г.продукта				Норма потребления
	Масло	Мясо	Хлеб	Фрукты	
Калории	700	300	250	30	2200
Белок	2	10	5	0	50
Жир	20	6	0	0	0
Углеводы	0	0	6	7	10
Холестерин	0,2	0,07	0	0	0
Цена	6	15	1	3	

Составить математическую модель задачи.

3. Ресторан обслуживает сотрудников обедами из трех блюд. Затраты на производство, доставку, накладные расходы, товарооборот для каждого блюда, прибыль от реализации каждой партии блюд указаны в таблице

Ресурсы	Количество единиц питательных веществ в ед. объема продуктов		
	1-е блюдо	2-е блюдо	3-е блюдо
Затраты на производство, чел.час	10	15	20
Затраты на доставку, чел-час	6	7	4
Накладные расходы, руб	22	23	24

Товарооборот, руб	30	34	35

Плановый фонд ресурсов имеет следующие значения: затраты на приготовление блюд не должно превышать 900 чел-час., на доставку потребителям – 500 чел.-час., накладные расходы могут быть не более 3000 руб. и план товарооборота равен 8000 руб. Требуется определить, какое количество каждого вида блюд необходимо выпускать, чтобы обеспечить максимальную прибыль ресторана. Составить ЗЛП.

2.2 Лабораторная работа №2. Графический метод решения ЗЛП.

Цель занятия: научиться решать задачи линейного программирования с двумя независимыми переменными графическим способом.

Методические указания.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется при решении задач с двумя независимыми переменными x_1, x_2 и когда ограничениями являются неравенства.

Порядок решения задачи линейного программирования:

1. На плоскости в координатных осях x_1, x_2 строятся прямые соответствующие исходным ограничениям – неравенствам.

2. Указываются полуплоскости, удовлетворяющие каждому из ограничений.

3. Определяется многоугольник решений, указывая координаты вершин на нем, который называется областью допустимых решений (ОДР). Вычисляются значений целевой функции во всех вершинах многоугольника решений. Выбирая наибольшее и наименьшее значение из этих вычисленных величин, определяются экстремальные значения целевой функции.

4. Экстремальные значения можно определить, построив линию уровня, полагая F =0 или принимая значение целевой функции F = const.

5. Определяется $\operatorname{grad} F$: градиент целевой функции $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$, направление которого показывает возрастание целевой функции и является перпендикуляром к линиям уровня. Перемещая линию уровня в направлении $\operatorname{grad} F$ до вершины ОДР (точки касания), можно найти максимальное значение целевой функции. Перемещая линию уровня в направлении противоположном $\operatorname{grad} F$ до вершины ОДР (точки касания), можно найти минимальное значение целевой функции.

Пример

Решить геометрически задачу линейного программирования

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ 3x_1 \le 21, \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Изобразим многоугольник решений (рис.1) При $F = 0$ линия уровня $2x_1 + 3x_2$=0 проходит через начало координат. Зададим, например, $F = 6$ и построим линию уровня $2x_1 + 3x_2$=6. Её расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор $\overline{q}$ = (2,3)). Так как задача на отыскание максимума, то оптимальное решение – в угловой точке *C*, находящейся на пересечении прямых I и II, т.е. координаты точки *C* определяются решением системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. И максимум линейной функции равен $F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$.

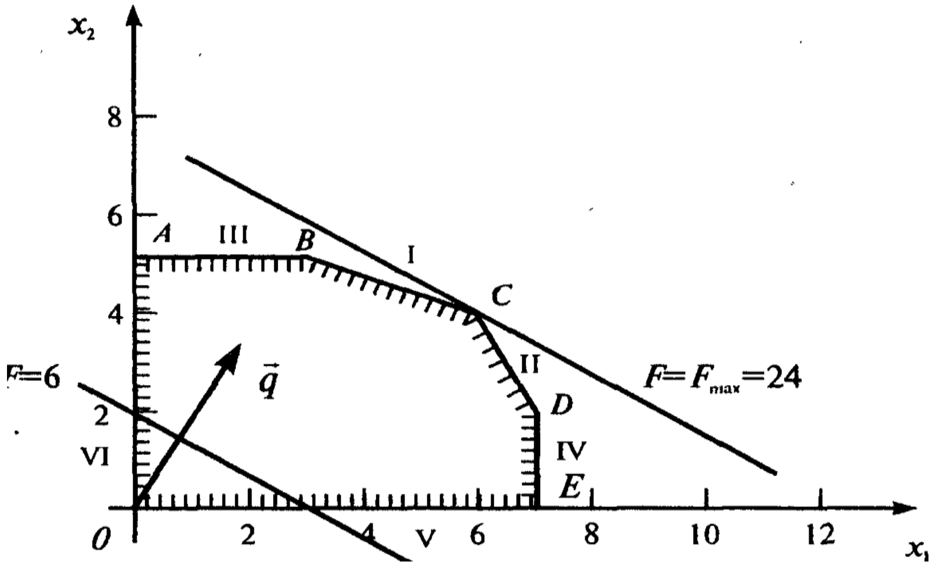


Рис. 1

Задачи

Решить геометрически задачи линейного программирования:

1. $F = 4x_1 + 6x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.3. Лабораторная работа №3. Симплексный метод (аналитический метод) решения ЗЛП

Цель занятия: понять идею симплексного метода, научить использовать его при решении задач линейного программирования.

Методические указания.

В основу симплексного метода легла идея последовательного улучшения решения ЗЛП. Для его реализации необходимо освоить три основные элемента:

- способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;

- правило перехода к лучшему, или не к худшему, решению;

- критерий проверки оптимальности найденного решения.

Для использования симплексного метода ЗЛП должна быть приведена к каноническому виду.

Критерий оптимальности решения при определении максимума (минимума) линейной функции: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные (отрицательные) коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально**.**

Основы этого метода рассмотрим на примере из предыдущего параграфа.

Пример.

Решить симплексным методом задачу:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ 3x_1 \le 21, \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, чтобы записать ЗЛП в каноническом виде:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ 3x_1 + x_5 = 21, \\ x_2 + x_6 = 5. \end{cases}$$

Определим *основные переменные* (оп) по следующему правилу: в качестве основных переменных на 1-ом шаге можно взять такие *m* переменных, каждая из которых входит только в одно из *m* уравнений системы ограничений, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных. Если выбранные по этому правилу переменные имеют те же знаки, что и соответствующие им свободные члены в правых частях уравнений, то полученное таким образом базисное решение будет допустимым. Если по этому правилу невозможно определить основные переменные, то нужно действовать стандартно (метод Жордана-Гаусса)

Шаг 1.

Оп: x_3, x_4, x_5, x_6.

Неосновные переменные (нп): x_1, x_2.

Выражаем оп через нп:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 5 - x_2, \\ x_6 = 21 - 3x_1. \end{cases}$$

При x_1=0 и x_2=0 получаем базисное решение $X_1 = (0,0,18,16,5,21)$, которое является допустимым и соответствует вершине O(0,0) многоугольника (рис.1). Так как оно допустимо, то нельзя отбросить возможность того, что оно оптимально. Выразим линейную функцию через нп: $F = 2x_1 + 3x_2$. При решении X_1 значение функции будет равно $F(X_1)$=0. Функцию можно увеличить за счет одной из нп, входящих в выражение функции с *положительным* *коэффициентом*. В нашем примере будем брать нп, с наибольшим коэффициентом. Таким образом, в оп переведем x_2, а разрешающим будет третье уравнение последней системы. Переменная x_5 переходит в нп.

Шаг 2.

Оп: x_2, x_3, x_4, x_6.

Нп: x_1, x_5.

Выразим новые оп через нп, начиная с разрешающего уравнения:

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_5, \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5), \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_5), \\ x_6 = 21 - 3x_1. \end{cases}$$

И после преобразований

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_5, \\ x_3 = 3 - x_1 + 3x_5, \\ x_4 = 11 - 2x_1 + x_5, \\ x_6 = 21 - 3x_1. \end{cases}$$

Второе базисное решение $X_2 = (0,5,3,11,0,21)$ является допустимым и соответствует вершине A(0,5) многоугольника.

Выражаем линейную функцию через нп на этом шаге: $F = 2x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 3(5 - x_5) =$ $= 15 + 2x_1 - 3x_5$. И $F(X_2) = 15$. Очевидно, можно увеличить значение функции за счет переменной x_1. И на этом шаге второе уравнение является разрешающим, переменная x_3 переходит в нп.

Шаг 3.

Оп: x_1, x_2, x_4, x_6.

Нп: x_3, x_5.

Выразим новые оп через нп, начиная с разрешающего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \\ x_2 = 5 - x_5, \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_5, \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9x_5. \end{cases}$$

Третье базисное решение $X_3 = (3,5,0,5,0,12)$ является допустимым и соответствует вершине B(3,5) многоугольника.

Выражаем линейную функцию через нп на этом шаге: $F = 2x_1 + 3x_2 = 2(3 - x_3 + 3x_5) + 3(5 - x_5) = 21 - 2x_3 + 3x_5$, $F(X_3) = 21$. Это решение не является оптимальным, так можно увеличить значение функции за счет переменной x_5. Третье уравнение является разрешающим, переменная x_4 переходит в нп.

Шаг 4

Оп: x_1, x_2, x_5, x_6.

Нп: x_3, x_4.

После преобразований получим:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\ x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4, \\ x_6 = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4. \end{cases}$$

Четвертое базисное решение $X_4 = (6,4,0,0,1,3)$ является допустимым и соответствует вершине С(6,4) многоугольника. Линейная функция, выраженная через нп, имеет вид $F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$. Это выражение не содержит положительных коэффициентов при нп, поэтому значение $F(X_4) = 24$ является *максимальным*.

Задачи

1.Решить задачи 1-4 из предыдущего параграфа симплексным методом.

2. Решить задачи симплексным методом:

1) $F = -10 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ -x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

2) $F = -10 + 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

3) $F = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

3. Двойственные задачи

3.1 Лабораторная работа №4. Двойственные задачи

Цель занятия: научиться составлять для каждой задачи линейного программирования двойственную задачу, использовать теоремы двойственности для нахождения решения взаимодвойственных задач.

Методические указания.

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая двойственной по отношению к исходной. Обе задачи обладают следующими свойствами:

1) В одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой – минимум.

2) Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3) Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида «$\le$», а в задаче минимизации все неравенства вида «$\ge$».

4) Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг другу:

для задачи исходной: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

для задачи двойственной: $A^{/} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T$

5) Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6) Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Алгоритм составления двойственной задачи:

1) привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу:

если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду «$\le$», а если минимум – к виду «$\ge$».

2) составить расширенную матрицу исходной системы A_1, состоящую из матрицы A, столбца свободных членов системы ограничений, строки коэффициентов при переменных в линейной функции.

3) Найти матрицу $A_1^{/}$, транспонированную к матрице A_1.

4) Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы $A_1^{/}$ и условия неотрицательности перменных.

Первая теорема двойственности.

Для взаимодвойственных ЗЛП имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1) В исходной и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают: $\max F(\overline{X}) = \min Z(\overline{Y})$.

2) В исходной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3) В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве неограниченна снизу. При этом у исходной задачи будет пустое допустимое множество.

4) Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Пример. Составить задачу, двойственную к исходной.

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5. \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

1) Так как исходная задача на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду «$\le$», для чего обе части первого и четвертого неравенства умножим на -1. Получим

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le -1, \\ -x_1 + 4x_2 &\le 24, \\ x_1 - x_2 &\le 3, \\ -x_1 - x_2 &\le -5. \end{aligned}$$

2) Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ \hline -1 & 2 & F \end{array}\right]$$

3) Найдем матрицу $A_1^{/}$:

$$A_1^{/} = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ \hline -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{array}\right]$$

4) Сформулируем двойственную задачу:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0. \end{cases}$$

Задачи

1. Для задач из параграфа 2.3 составить двойственные, решить симплексным методом. Убедиться в том, что оптимальные значения линейных функций исходной и двойственной задач совпадают.

2. Даны две взаимодвойственные задачи:

а)

$$\begin{cases} Z = -8y_1 + 2y_2 \to \min \\ -y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ -2y_1 + y_2 \ge -1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} F = x_1 - x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Предлагается самостоятельно убедиться (симплексным методом или геометрически) в том, что в исходной задаче а)линейная функция не ограничена, а в двойственной задаче допустимое множество пусто.

3. Даны две взаимодвойственные задачи:

а) $\begin{cases} F = 3x_1 + 5x_2 \to \max \\ 3x_1 - 4x_2 \le 5 \\ -2x_1 \ge -7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} Z = 5y_1 - 7y_2 \to \min \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ -4y_1 \ge 5 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$

Предлагается самостоятельно убедиться (симплексным методом или геометрически) в том, что в каждой из задач отсутствуют допустимые решения.

4. Транспортная задача

4.1 Лабораторная работа №5. Транспортная задача.

Цель занятия: освоить метод потенциалов решения транспортных задач, научиться подбирать первоначальное базисное решение методом «северо-западного угла», методом «наименьших стоимостей».

Методические указания.

Важным частным случаем ЗЛП является транспортная задача. Рассмотрим на примере решение таких задач.

Пример.

В пунктах $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ выпускается однородная продукция в количестве $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, единиц. Себестоимость единицы продукции в пункте $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ равна $C_i\left(i=\overline{1,n}\right)$. Готовая продукция поставляется в пункты $B_j\left(j=\overline{1,m}\right)$, потребности которых составляют $b_j\left(j=\overline{1,m}\right)$единиц. Стоимость C_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j известна.

Требуется:

1) Найти оптимальный план перевозок, который обеспечивает минимальные суммарные затраты на производство и доставку продукции;
2) Составить экономико-математическую модель задачи;
3) Найти величину $Z_{\min}$ минимальных затрат.

Пусть $n=3, \quad m=4$. Все необходимые данные даны в таблице:

a_1	a_2	a_3	C_1	C_2	C_3	b_1	b_2	b_3	b_4	C_{11}
140	180	240	3	3	2	80	160	120	180	3
C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
2	6	6	5	1	4	8	7	10	6	3

Решение:

Задача является открытой, так как запасы суммарный спрос меньше суммарного предложения: 140+180+240 = 560 > 540 = 80+160+120+180 единиц, т.е. суммарные мощности поставщиков и потребителей не совпадают. Для того, чтобы привести задачу к закрытому типу, необходимо ввести фиктивного потребителя b_5 с потребностью в 560-540=20 единиц продукции. Стоимость перевозки в пункт потребления b_5 из всех пунктов производства считаем равным 0.

Пусть x_{ij} – количество единиц продукции, перевозимой из пункта A_i в пункт B_j. Задача заключается в минимизации общих транспортных расходов:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(C_{ij}+C_i\right)x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$$

и естественном условии неотрицательности количества поставляемой продукции

$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}\right)$

Математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$Z(X) = 6x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} + 9x_{14} + 3x_{15} + 8x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 11x_{24} + 3x_{25} +$$
$$+ 9x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} + 2x_{35} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 140 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 180 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 180 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 20 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}\right)$

1) Составим опорный план *методом северо-западного угла* (первоначальное базисное распределение поставок).

Рассмотрим "северо-западный угол" незаполненной таблицы, то есть клетку, соответствующую первому поставщику и первому потребителю. Поставим туда наименьшее из значений 140 и 80, т.е 80. Тогда спрос первого потребителя будет удовлетворён, вычеркнем из дальнейшего рассмотрения первый столбец, а у первого поставщика осталось 140-80=60 единиц нераспределённой продукции. Далее рассматриваем "северо-западный угол" оставшейся таблицы, то есть клетку, соответствующую первому поставщику и второму потребителю, ставим туда наименьшее из значений 160 и 60, т.е. 60. Вся продукция первого поставщика распределена, значит вычёркиваем первый столбец, у второго потребителя потребность уменьшилась до 160-60=100. Аналогично продолжаем заполнять таблицу. После *n*+*m*-1 шагов получаем опорный план:

	80	160	120	180	20
140	80	60	-	-	-
180	-	100	80	-	-
240	-	-	40	180	20

2) Составим начальный опорный план методом наименьших стоимостей. В правом верхнем углу каждой ячейки записываем $C'_{ij} = C_{ij} + C_i$

a_i / b_j	80	160	120	180	20
140	6 80 3	5	9 40 6	9	3 20 7
180	8	4 160 1	7 20 4	11	3

240	9	12	8 60 5	5 180 2	2

Введем некоторые обозначения: *Ai** - излишек нераспределенного груза от поставщика *Ai*, *Bj** - недостача в поставке груза потребителю *Bj*.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом (рассматриваем нефиктивных потребителей): (2,2). Помещаем туда меньшее из чисел *A2**=180 и *B2**=160. Спрос потребителя *B*2 удовлетворён (*B*2*=0), *A*2* стало равным 180-160=20.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,4). Помещаем туда меньшее из чисел *A*3*=240 и *B*4*=180. Спрос потребителя B4 удовлетворён (B4*=0), *A*3* стало равным 240-180=60.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,1). Помещаем туда меньшее из чисел *A*1*=140 и *B*1*=80. Спрос потребителя *B*1 удовлетворён (*B*1*=0), *A*1* стало равным 140-80=60.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел *A*2*=20 и *B*3*=120. Продукция пункта *A*2 распределена (*A*2*=0), *B*3* стало равным 120-20=100.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,3). Помещаем туда меньшее из чисел *A*3*=60 и *B*3*=100. Продукция пункта *A*3 распределена (*A*3*=0), *B*3* стало равным 100-60=40.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,3). Помещаем туда меньшее из чисел *A*1*=60 и *B*3*=40. Спрос потребителя B3 удовлетворён (*B*3*=0), *A*1* стало равным 60-40=20.

Осталось распределить 20 единиц груза из пункта A1. Неудовлетворённым остался только спрос фиктивного потребителя – пункта B5. Помещаем туда 20, после чего вся продукция становится распределённой и спрос всех потребителей удовлетворён.

Таким образом, начальным опорным планом является

$$X_0 = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 40 & 0 & 20 \\ 0 & 160 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 180 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z(X_0) = 80\cdot 6 + 40\cdot 9 + 20\cdot 3 + 160\cdot 4 + 20\cdot 7 + 60\cdot 8 + 180\cdot 5 = 3060\,.$$

Проверим, является ли план, полученный методом наименьшего элемента, оптимальным, используя ***метод потенциалов***. Так как $m+n$-1=5+3-1=7 и имеем 7 загруженных клеток, план является ацикличным.

Пусть U_i *и* V_j - потенциалы *i*-го склада и *j*-го магазина соответственно.

Полагая потенциал U_1=0, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C'_{i,j}$, просматривая все занятые клетки. Получим:

$U_1 = 0$

$V_1 = C'_{1,1} – U_1 = 6 - 0 = 6$

$V_3 = C'_{1,3} - U_1 = 9 – 0 = 9$

$V_5 = C'_{1,5} – U_1 = 3 – 0 = 3$

$U_2 = C'_{2,3} - V_3 = 7 – 9 = -2$

$U_3 = C'_{3,3} – V_3 = 8 – 9 = -1$

$V_2 = C'_{2,2} – U_2 = 5 – (-1) = 6$

$V_4 = C'_{3,4} – U_3 = 5 – (-1) = 6$

Для свободных клеток определим значения оценок (разностей между прямыми и косвенными тарифами).

$S_{1,2} = C'_{1,2} - (U_1 + V_2) = -1$

$S_{1,4} = C'_{1,4} - (U_1 + V_4) = 3$

$S_{2,1} = C'_{2,1} - (U_2 + V_1) = 4$

$S_{2,4} = C'_{2,4} - (U_2 + V_4) = 7$

$S_{2,5} = C'_{2,5} - (U_2 + V_5) = 2$

$S_{3,1} = C'_{3,1} - (U_3 + V_1) = 4$

$S_{3,2} = C'_{3,2} - (U_3 + V_2) = 7$
$S_{3,5} = C'_{3,5} - (U_3 + V_5) = 0$
Имеем одну клетку с отрицательной оценкой – клетка (1,2). Строим для нее цикл так, чтобы он начинался и заканчивался в этой клетке, а остальными узлами были бы загруженные клетки таблицы.

a_i / b_j	80	160	120	180	20
140	6 80	+ 5	- 9 40	9	3 20
180	8	- 4 160	+ 7 20	11	3
240	9	12	8 60	5 180	2

Перемещаем по циклу груз величиной в 40 единиц (выбирается минимальное количество груза из значений, указанных в заполненных клетках цикла, помеченных знаком "минус", так как мы не можем отнять больше единиц продукции, чем есть), прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".
В результате перемещения по циклу получим новый план:

a_i / b_j	80	160	120	180	20
140	6 80	5 40	9	9	3 20
180	8	4 120	7 60	11	3
240	9	12	8 60	5 180	2

Целевая функция (суммарные транспортные расходы и расходы на производство по полученному плану)
$Z(X_1) = 80\cdot 1 + 40\cdot 5 + 20\cdot 3 + 120\cdot 4 + 60\cdot 7 + 60\cdot 8 + 180\cdot 5 = 3020$. Значение целевой функции уменьшилось на 40 единиц по сравнению с предыдущим этапом.
Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.
$U_1 = 0$
$V_1 = C'_{1,1} – U_1 = 6 - 0 = 6$
$V_2 = C'_{1,2} - U_1 = 5 – 0 = 5$
$V_5 = C'_{1,5} – U_1 = 3 – 0 = 3$
$U_2 = C'_{2,2} – V_2 = 4 – 5 = -1$
$V_3 = C'_{2,3} – U_2 = 7 – (-1) = 8$
$U_3 = C'_{3,3} – V_3 = 8 – 8 = 0$
$V_4 = C'_{3,4} – U_3 = 5 – 0 = 5$
Для свободных клеток определим значения оценок
$S_{1,3} = C'_{1,1} - (U_1 + V_1) = 3$
$S_{1,4} = C'_{1,4} - (U_1 + V_4) = 3$
$S_{2,1} = C'_{2,1} - (U_2 + V_1) = 3$
$S_{2,4} = C'_{2,4} - (U_2 + V_4) = 7$
$S_{2,5} = C'_{2,5} - (U_2 + V_5) = 1$
$S_{3,1} = C'_{3,1} - (U_3 + V_1) = 3$

$S_{3,2} = C'_{3,2} - (U_3 + V_2) = 7$
$S_{3,5} = C'_{3,5} - (U_3 + V_5) = -1$
План не оптимален, так как имеется клетка с отрицательной оценкой – (3,5). Строим для нее цикл.

b_j \ a_i	80	160	120	180	20
140	6 80	+ 5 40	9	9	- 3 20
180	8	- 4 120	+ 7 60	11	3
240	9	12	- 8 60	5 180	+ 2

Перемещаем по циклу груз величиной в 20 единиц.
В результате перемещения по циклу следующий план:

b_j \ a_i	80	160	120	180	20
140	6 80	5 60	9	9	3
180	8	4 100	7 80	11	3
240	9	12	8 40	5 180	2 20

Целевая функция (транспортные расходы)
$Z(X_2) = 80 \cdot 6 + 60 \cdot 5 + 100 \cdot 4 + 80 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 180 \cdot 5 + 20 \cdot 2 = 3000$. Значение целевой функции уменьшилось на 20 единиц по сравнению с предыдущим этапом.
Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.
$U_1 = 0$
$V_1 = C'_{1,1} – U_1 = 6 - 0 = 6$
$V_2 = C'_{1,2} - U_1 = 5 – 0 = 5$
$U_2 = C'_{2,2} – V_2 = 4 – 5 = -1$
$V_3 = C'_{2,3} – U_2 = 7 – (-1) = 8$
$U_3 = C'_{3,3} – V_3 = 8 – 8 = 0$
$V_4 = C'_{3,4} – U_3 = 5 – 0 = 5$
$V_5 = C'_{3,5} – U_3 = 2 – 0 = 2$
Для свободных клеток определим значения оценок
$S_{1,3} = C'_{1,1} - (U_1 + V_1) = 1$
$S_{1,4} = C'_{1,4} - (U_1 + V_4) = 4$
$S_{1,5} = C'_{1,5} - (U_1 + V_5) = 1$
$S_{2,1} = C'_{2,1} - (U_2 + V_1) = 3$
$S_{2,4} = C'_{2,4} - (U_2 + V_4) = 7$
$S_{2,5} = C'_{2,5} - (U_2 + V_5) = 2$
$S_{3,1} = C'_{3,1} - (U_3 + V_1) = 3$
$S_{3,2} = C'_{3,2} - (U_3 + V_2) = 7$
Так как все оценки $S_{i,j}$>=0, то полученный план является оптимальным, минимальные транспортные расходы равны 3000.

Как видим, опорный план, полученный методом северо-западного угла, оказался оптимальным.

Ответ: Оптимальный план перевозок представлен в таблице

b_j \ a_i	80	160	120	180	20
140	6 80	5 60	9	9	3
180	8	4 100	7 80	11	3
240	9	12	8 40	5 180	2 20

Замечание. Для закрытых транспортных задач, т.е. когда не нужно вводить фиктивного потребителя (поставщика) и суммарные мощности поставщиков и потребителей совпадают, с помощью алгоритмов поиска первоначального базисного распределения поставок и метода потенциалов можно найти оптимальное решение. Также, закрытые транспортные задачи, являясь ЗЛП, могут быть решены симплексным методом. Также себестоимость продукции не обязательно указывается в условиях задачи.

Задачи

1. Для следующих транспортных задач а) составить экономико-математическую модель; б) найти оптимальное распределение поставок и минимальные затраты, выполнив первоначальное распределение поставок методом наименьших стоимостей. Себестоимость продукции не учитывать.

1)

Мощность поставщика	Мощности покупателей			
	30	100	40	110
60	4	5	2	3
100	1	3	6	2
120	6	2	7	4

2)

Мощность поставщика	Мощности покупателей			
	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

2. Для следующей транспортной задачи а) составить экономико-математическую модель; б) найти оптимальное распределение поставок и минимальные затраты, выполнив первоначальное распределение поставок методом северо-западного угла. Себестоимость продукции не учитывать.

Мощность поставщика	Мощности покупателей			
	15	25	8	12
25	2	4	3	6
18	3	5	7	5
12	1	8	4	5
15	4	3	2	8

3. Закончить решение транспортной задачи, начиная с заданного распределения поставок (в правом углу каждой клетки).

Мощность поставщика	Мощности покупателей			
	15	25	8	12
95	5 45	4 50	13	9
35	2	7	9 35	8
55	9	7 35	11	7 20
75	1	6	1	1 35

5. Модели целочисленного линейного программирования

5.1 Практическое занятие № 10 (4 часа). Решение задач линейного целочисленного программирования

Цель занятия: научиться находить решение задач линейного целочисленного программирования методом Гомори.

Методические указания.

Задача линейного целочисленного программирования (ЦЗЛП) формулируются следующим образом: найти такое решение (план) $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, при котором линейная функция

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0,\ i = \overline{1,n},$$

x_j – целые числа

Рассмотрим решение таких задач с использованием *метода Гомори* (метода отсечения).

Алгоритм метода:

1) Симплексным методом решаем ЗЛП без условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для ЦЗЛП.

2) Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то выбираем компоненту с наибольшей целой частью. По соответствующему уравнению системы, например с номером *j*, полученной на последнем шаге симплексного метода, выражающим основные m переменные через неосновные $n-m$: $x_j = \beta_j - \alpha_{jm+1}x_{m+1} - \alpha_{jm+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{jn}x_n$, составляем правильное отсечение:

$\{\beta_j\} - \{\alpha_{jm+1}\}x_{m+1} - \{\alpha_{jm+2}\}x_{m+2} - \ldots - \{\alpha_{jn}\}x_n \leq 0$, где символ $\{\ \}$ - дробная часть числа.

3) последнее неравенство введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной преобразовываем в равносильное уравнение:

$$\{\beta_j\} - \{\alpha_{jm+1}\}x_{m+1} - \{\alpha_{jm+2}\}x_{m+2} - \ldots - \{\alpha_{jn}\}x_n + x_{n+1} = 0$$

и включаем его в ограничение исходной задачи.

4) Полученную расширенную задачу решаем симплексным методом. Если оптимальный план будет целочисленным, то ЦЗЛП решена. Иначе возвращаемся к пункту 2 алгоритма.

Пример.

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 ден ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 м^2. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден. ед., требющие производственную площадь 3м^2 (с учетом проходов) и производительностью 2 т. зерна, и более мощные машина типа В с характеристиками – 4 ден. ед., 5м^2, 3 т. зерна.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа В.

Решение:

Обозначим через x_1, x_2 количество машин соответственно типа А и В, чрез Z – общую производительность. Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$Z = 2x_1 + 3_2 \to \max$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 60,$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 34,$$
$$x_2 \le 8,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 \text{ – целые числа.}$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5 и получим систему уравнений. Далее решаем задачу симплексным методом без условия целочисленности. На последнем шаге получаем систему уравнений:

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5,$$
$$x_2 = 8 - x_5,$$
$$x_3 = 18 + x_4 + x_5,$$
$$Z^* = 25\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5.$$

Получаем оптимальное решение $X^* = \left(\frac{2}{3}, 8, 18, 0, 0\right)$ и $Z^* = 25\frac{1}{3}$. Но это оптимальное решение не удовлетворяет условию целочисленности. По первому уравнению с переменной x_1 составляем дополнительное ограничение:

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 - \left\{-\frac{4}{3}\right\}x_5 \le 0 \text{ или}$$
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le 0.$$

Введем дополнительную целочисленную переменную $x_6 \ge 0$, получим дополнительное ограничение в виде уравнения.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 0.$$

Это уравнение включаем в систему ограничений исходной канонической задачи. Получаем расширенную задачу, решаем её симплексным методом. Для сокращения числа шагов рекомендуется полученное дополнительное ограничение включать в систему ограничений, полученную на последнем шаге симплексного метода. Таким образом, запишем полученную систему:

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5,$$
$$x_2 = 8 - x_5,$$
$$x_3 = 18 + x_4 + x_5,$$
$$x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5.$$

Базисное решение $X = \left(\frac{2}{3}, 8, 18, 0, 0, -\frac{2}{3}\right)$ - недопустимое (так будет получаться всегда). Для получения допустимого базисного решения переводим в основные переменную, входящую с положительным коэффициентом в уравнение, в котором свободный член отрицательный. Переведем в основные переменную x_5. Тогда на очередном шаге имеем:

Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4.

Неосновные переменные: x_4, x_6.

Выразим основные переменные через неосновные:

$$x_1 = 2 - x_4 + 2x_6,$$

$$x_2 = 7 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_6,$$

$$x_3 = 19 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_6,$$

$$x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_6.$$

$$Z = 25 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6.$$

Так как в выражении линейной функции нет неосновных переменных с положительными коэффициентами, то базисное решение, полученное на этом шаге оптимально. Таким образом, оптимальное решение ЦЗЛП: X^*=(2, 7, 19, 0, 1, 0), $Z^* = 25$.

Задачи

1. Решить ЦЗЛП:

а) $Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

$4x_1 + 3x_2 \le 18,$

$x_1 + 2x_2 \le 6,$

$0 \le x_1 \le 5,$

$0 \le x_2 \le 4,$

x_1, x_2 – целые числа

б) $Z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

$-3x_1 + 14x_2 \le 78,$

$5x_1 - 6x_2 \le 26,$

$x_1 + 4x_2 \ge 25,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые числа

в) $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 13,$

$x_1 - x_2 \le 6,$

$-3x_1 + x_2 \le 0,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

x_1, x_2 – целые числа

г) $Z = 6x_1 + x_2 \to \min$

$3x_1 - x_2 \ge 9,$

$2x_1 + 3x_2 \le 50,$

$-x_1 + 4x_2 \ge 18,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$

x_1, x_2 – целые числа

6. Задачи многокритериальной оптимизации

6.1 Практическое занятие №11 (4 часа). Решение задач многокритериальной оптимизации.

Цель занятия: научиться находить решение задачи многокритериальной оптимизации методом последовательных уступок.

Методическое указание.

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием. Рассмотрим решение таких задач *методом последовательных уступок.*

Пусть частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение Z_1^* первого по важности критерия в области Q допустимых решений путем решения однокритериальной задачи:

$$Z_1(X) \to \max$$
$$X \in Q$$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения $\delta_1 > 0$ критерия Z_1 и находим максимальное значение второго по важности критерия Z_2^* при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимума более чем на величину допустимой уступки, т.е. решается задача:

$$Z_2(X) \to \max$$
$$Z_1(X) \geq Z_1^* - \delta_1,$$
$$X \in Q.$$

Снова назначается величина уступки $\delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия:

$$Z_3(X) \to \max$$
$$Z_1(X) \geq Z_1^* - \delta_1,$$
$$Z_2(X) \geq Z_2^* - \delta_2,$$
$$X \in Q.$$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия. Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным.

Пример.

Пусть задача трехкритериальной оптимизации имеет вид:

$$Z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$Z_3 = x_1 - 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$1 \leq x_1 \leq 3,$$
$$1 \leq x_2 \leq 4,$$
$$\delta_1 = 3,\ \delta_2 = \frac{5}{3}.$$

Решение:

Максимум первой функции Z_1 можно найти, например, графическим методом или симплексным методом. И в данном случае оптимальное решение на первом этапе: $X_1^* = (1,\ 4)$ и $Z_1^* = 7$. Теперь решаем задачу максимизации Z_2:

$$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$1 \le x_1 \le 3,$$
$$1 \le x_2 \le 4,$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 4.$$

Решаем задачу, получаем: $X_2^* = \left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $Z_2^* = \frac{26}{3}$.

Далее уступаем по критерию Z_2 на величину соответствующей уступки, и решаем еще одну ЗЛП:

$$Z_3 = x_1 - 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$1 \le x_1 \le 3,$$
$$1 \le x_2 \le 4,$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 4,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 7.$$

И оптимальное решение получаем в виде: $X_3^* = (2, 3)$, $Z_3^* = -7$.

Таким образом, оптимальные значения частных критериев при оптимальных значениях переменных задачи равны: $Z_1^* = 4$, $Z_2^* = 7$, $Z_3^* = -7$.

Задачи

Решить задачи многокритериальной оптимизации:

1.

$$Z_1(x) = x_1 + x_2 \to \max, \delta_1 = 2$$
$$Z_2(x) = -3x_1 + 5x_2 \to \max, \delta_2 = 1.5$$
$$Z_3(x) = x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, x_2 \le 6. \end{cases}$$

2.

$$Z_1(x) = x_1 - 3x_2 \to \max, \delta_1 = 0{,}6$$
$$Z_2(x) = -2x_1 - x_2 \to \min, \delta_2 = 50\%$$
$$Z_3(x) = -x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, x_2 \le 6. \end{cases}$$

3.

$$Z_1(x) = 5x_1 + x_2 \to \max, \delta_1 = 17{,}4$$
$$Z_2(x) = -3x_1 + 3x_2 \to \min, \delta_2 = 20\%$$
$$Z_3(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 0 \le x_1, x_2 \ge -2. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Целью самостоятельной работы в дисциплине «Математические методы исследования экономических систем» является систематизация, расширение и закрепление теоретических знаний студентов и их применение при решении практических задач; развитие навыков применения разобранных на лекционных и практических занятиях методов решения оптимизационных задач.

Форма отчета: домашние и контрольные работы

Форма контроля: проверка домашних заданий, контрольных работ, опрос на практических занятиях.

Тема 1. Регрессионные модели экономических процессов

Рекомендуемые источники для выполнения заданий: 1, 2, 3 из списка литературы

Задание 1.

Изучается зависимость доходности акций предприятия y (%) от темпа роста валового внутреннего продукта x (%). Полученные результаты отражены в таблице:

год	x	y
2000	5,5	14,1
2001	6,2	18,7
2002	7,7	23,1
2003	7,2	18,1
2004	4,8	8,7

Определить, есть ли между переменными линейная зависимость.

Задание 2.

По данным n=12 угольных шахт провести регрессионный анализ зависимости полной себестоимости добычи 1т.угля y (тыс. руб.) от средней суточный добычи угля на шахте x_1 и удельного веса комбайновой проходки выработки x_2 (%).

№ п/п	y	x_1	x_2
1	12,2	4795	69
2	7,6	6062	82
3	10,0	6571	87
4	49,9	4249	92
5	15,7	9540	23
6	14,0	3488	31
7	12,7	4888	55
8	10,5	6237	81
9	15,1	2997	65
10	10,6	2990	98
11	15,2	1748	100
12	17,2	2128	69

1) проверить статистическую значимость коэффициентов регрессии с уровнем значимости 5%;

2) определить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с уровнем значимости 1%;

4) проверить качество уравнения регрессии (уровень значимости 5%, 10%).

Задание 3.

Данные о прибыли предприятия y (млн долл.) и расходах на рекламу x за 9 лет представлены в таблице.

y	5	7	12	16	23	21	19	18	16
x	0,8	1,1	1,8	2,5	4,1	5,5	7,3	8,1	8,9

Требуется:

1) построить корреляционное поле и выдвинуть гипотезу о форме зависимости между рассматриваемыми показателями;

2) оценить по МНК коэффициенты линейного уравнения регрессии $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$ и сделать вывод о качестве уравнения регрессии;

3) оценить по МНК коэффициенты параболического уравнения регрессии $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ и сделать вывод о качестве уравнения регрессии;

Задание 4.

По данным за 15 лет построены два уравнения регрессии:

$$\hat{y} = 3{,}45 - 0{,}55x, \quad R^2 = 0{,}68$$
$$t = (20{,}5)\ (-4{,}3)$$
$$\ln \hat{y} = 0{,}85 - 0{,}25x, \quad R^2 = 0{,}78$$
$$t = (44{,}9)\ (-5{,}3)$$

где y - ежедневное среднедушевое потребление кофе (в чашках по 100г); x – среднегодовая цена кофе (в руб./кг).

Требуется:

1) проинтерпретировать коэффициенты каждой из модели;

2) обосновать выбор лучшей модели;

3) ответить на вопрос, можно ли о качестве модели судить по коэффициенту детерминации.

Тема 2. Решение ЗЛП

Рекомендуемые источники для выполнения заданий: 4, 5, 6, 7 из списка литературы.

Задание 1. ***Решить задачу линейного программирования симплексным методом***

Вариант 1.

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ -x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -10 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -10 + 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = -20 + x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 12x_5 = 6 \\ 6x_2 + 2x_3 - 4x_5 = 12 \\ 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 20 + x_1 + x_2 - x_4 + x_5 \to \max$$

Задание 2. ***Решить задачу линейного программирования при помощи симплекс-таблицы:***

Вариант 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 \to \max$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = -10x_1 + 15x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 - x_2 + 8x_3 - 5x_4 - x_5 \to \max$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_2 + x_4 - 4x_5 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -10x_1 + 20x_2 - 3x_3 - x_4 \to \max$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 8 \\ 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 \to \max$$

Задание 3. ***Решить задачу при помощи М-метода (симплекс-таблицы с искусственным базисом):***

Вариант 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 15 + x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 12 - x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 5 + x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 10 - x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 15 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 5 + x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$$

Задание 4. ***Решив графически двойственную задачу, найти решение исходной задачи:***

Вариант 1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = -x_2 + 2x_4 \to \max$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \le 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le 8 \end{cases}$$

$$f = -2x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 \le 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = -14x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 7x_4 \to \max$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \le 10 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \le -1 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 19x_4 - 10x_5 \to \max$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 \le -2 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$$f = -x_2 + 2x_4 \to \max$$

Задание 5. ***Решить транспортную задачу, начиная двумя методами. Определить на каждом этапе, единственно ли полученное на нем решение и почему?***

Вариант 1.

	18	26	40	24	32
25	2	7	2	7	2
70	4	3	6	6	4
45	8	6	5	1	3

Вариант 2.

	15	10	8	18	20
20	6	2	7	2	6
30	3	7	1	2	3
21	1	2	7	3	2

Вариант 3.

	8	18	20	16	30
50	3	1	2	3	2
20	2	6	7	6	1
22	1	7	2	1	3

Вариант 4.

На трех складах А, В, С находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 тонн, которое надо доставить в четыре пункта: в пункт №1 – 5 тонн, №2 – 10 тонн, №3 – 20 тонн, №4 – 15 тонн. Стоимость перевозки одной тонны со склада А в указанные пункты равна 8, 3, 5, 2 тыс.руб., со склада В – 4, 1, 6, 7тыс.руб., со склада С – 1, 9, 4, 3 тыс.руб. составить оптимальный план перевозки зерна.

Вариант 5.

	8	10	20	16	28
40	5	1	2	3	7
20	2	6	4	6	1
22	1	7	2	1	3

Задание 6. ***Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори и методом ветвей и границ***

Вариант 1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 - 4x_2 \to \max$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1{,}5 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x_1 + 10x_2 \to \max$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 - 4x_2 \to \max$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 18x_2 \leq 54 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$$

Задание 7. ***Решить задачу многокритериальной оптимизации***

Вариант 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1, -10 \leq x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$Z_1(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \max, \delta_1 = 32$$

$$Z_2(x) = -3x_1 + 4x_2 \to \min, \delta_2 = 50\%$$

$$Z_3(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 4x_1 - 6x_2 \le 12 \\ 0 \le x_1 \le 4, x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$Z_1(x) = x_1 - 3x_2 \to \max, \delta_1 = 0,6$$

$$Z_2(x) = -2x_1 - x_2 \to \min, \delta_2 = 50\%$$

$$Z_3(x) = -x_1 - x_2 \to \max$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12 \\ 5x_1 - x_2 \le 15 \\ 0 \le x_1, -10 \le x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$Z_1(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \max, \delta_1 = 32$$

$$Z_2(x) = -3x_1 + 4x_2 \to \min, \delta_2 = 50\%$$

$$Z_3(x) = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

Приложение

Значение t -критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01

Число степеней свободы k	P			Число степеней свободы k	P		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Литература

1. Эконометрика: учебное пособие / С.А. Бородич. – 3-е изд. – Мн.: Новое знание, 2006. – 408с.
2. Эконометрика: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие. 5-е изд., доп. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 192с.
3. Эконометрика: учебное пособие / Л.И. Лузина; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра автоматизированных систем управления. – Томск: ТМЦДО, 2009.-93 с.
4. Математические методы и модели исследования операций: Учебник для ВУЗов / А.С. Шапкин, Н.П. Мазаева. – 4-е изд. – М.: Дашков и К^0, 2007.- 395с.
5. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / Н. Ш. Кремер, И.М. Тришин, Б.А. Путко, М.Н. Фридман; под. Ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: Юрайт, 2010. – 430с
6. Экономико-математические методы и модели: пособие к решению задач/ А.И. Стрикалов, И.А. Печенежская. – Ростов на Дону: Феникс, 2008. – 348с.
7. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие для вузов / под редакцией проф. Н.А. Орехова. – М.: Юнити-Дана, 2004. – 302с.