

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР) СИСТЕМ**

Кафедра промышленной электроники

Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Учебное пособие

Томск 2014

Легостаев Н.С.

Методы анализа и расчета электронных схем: Учеб. пособие / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2014. – 237 с.

Рассмотрены общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем, вопросы формирования математических моделей аналоговых схем с активными электронными компонентами в операторной и временной форме, матричные и топологические методы анализа электронных схем. Приведены модели основных типов активных электронных компонентов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 210100 “Электроника и нанoeлектроника”.

© Легостаев Н. С., Четвергов К. В., 2014

© Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....
1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ, АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ.....
1.1 Задачи проектирования электронных схем.....
1.2 Общие вопросы математического моделирования.....
1.3 Классификация математических моделей.....
1.4 Этапы математического моделирования.....
1.5 Методы реализации математических моделей.....
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....
2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ.....
2.1 Классификация электронных схем по математическому описанию.....
2.2 Топологические модели электронных схем.....
2.3 Математические модели компонентов электронных схем.....
2.4 Полные уравнения электронных схем и их преобразования.....
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....
3 СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ АНАЛИЗ.....
3.1 Понятие и виды схемных функций электронных схем.....
3.2 Формы представления схемных функций.....
3.3 Частотные и временные характеристики и их параметры.....
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....
4 АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ.....
4.1 Определение схемных функций по матрично-векторным параметрам электронных схем.....
4.2 Определение схемных функций электронных схем методом сигнальных графов.....
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....
5 АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.....
5.1 Математическое описание электронных схем в базисе переменных состояния.....
5.2 Реализация математических моделей в базисе переменных состояния.....
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....
СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....
ГЛОССАРИЙ.....

ВВЕДЕНИЕ

Анализ и расчет схемотехнических решений относятся к числу важнейших задач, решаемых при проектировании электронных устройств различного функционального назначения, включая устройства промышленной электроники. Постоянное усложнение функций, возлагаемых на электронные устройства, и повышение предъявляемых к ним требований диктует необходимость автоматизации проектно-расчетных работ. В настоящее время разработано большое количество универсальных и специализированных программных комплексов, существенно расширяющих возможности моделирования, анализа и расчета электронных цепей, эффективное применение которых в значительной мере зависит от степени подготовки в области автоматизации схемотехнического проектирования и не сводится лишь к привитию навыков пользования этими программными комплексами. Наряду с задачами, при решении которых можно использовать универсальные программы, постоянно появляются задачи, на которые возможности существующих универсальных и специализированных программ не распространяются. В этих случаях приходится выполнять весь комплекс исследовательских работ от формирования математических моделей до разработки алгоритмов и программ их реализации, опираясь на знание математического аппарата теории электронных схем.

Методология моделирования, анализа и расчета электронных схем развивается по двум основным направлениям. Первое направление основано на использовании линейных математических моделей и операторных методов их реализации. Поскольку математический аппарат анализа и расчета линейных электронных схем обеспечивает решение широкого класса задач исследования электронных схем, данное направление остается актуальным до настоящего времени. Второе направление методологии исследования электронных схем связано с

развитием и использованием наиболее универсальных методов анализа и расчета, направленных на реализацию нелинейных математических моделей.

Материал учебного пособия отражает оба направления методологии анализа электронных схем, связанных с применением и операторных, и временных математических моделей. При этом основное внимание уделяется матричным методам формирования и реализации математических моделей, наиболее пригодных к автоматизации.

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ, АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

1.1 Задачи проектирования электронных схем

Основу проектно-конструкторской деятельности бакалавра по направлению подготовки 210100.62 “Электроника и нанoeлектроника” составляет расчет и проектирование электронных приборов, схем и устройств различного функционального назначения в соответствии с техническим заданием с использованием средств автоматизации проектирования [4].

[Определение] Проектирование — это создание описания, необходимого для построения в заданных условиях еще не существующего технического объекта, на основе первичного описания этого объекта (технического задания). [.]

В технике проектирования все величины, характеризующие технический объект, называют *параметрами*. Различают внутренние, внешние и выходные параметры.

[Внимание] Внутренние параметры W характеризуют отдельные компоненты проектируемого устройства. [.]

Их разделяют на *первичные внутренние (физико-технические) параметры*, которые отражают конструктивно-технологические и электрофизические свойства компонентов, и *вторичные внутренние (электрические) параметры*, которые характеризуют соотношения между токами и напряжениями на полюсах компонентов схемы. К первичным относятся геометрические размеры отдельных полупроводниковых областей, электрические характеристики полупроводниковых материалов и т.д. К вторичным внутренним параметрам – сопротивления резисторов, емкости конденсаторов и т.п.

[Внимание] Внешние параметры Q характеризуют условия, в которых работает устройство (температура и влажность окружающей среды, началь-

ное состояние устройства, параметры входного воздействия, конкретные значения времени или частоты, параметры нагрузки, уровень помех, радиации и т.п.) [.]

[Внимание] Выходные параметры характеризуют количественные значения технико-экономических показателей, определяемых функциональным назначением технического объекта как целостной системы. [.]

Выходные параметры разделяют на первичные и вторичные.

Первичные выходные параметры (фазовые переменные) X характеризуют состояние электронного устройства: токи и напряжения на полюсах компонентов схемы, узловые напряжения, контурные токи, выходные напряжения и токи.

Вторичные выходные (схемные параметры, схемные функции) определяются отношениями фазовых переменных друг к другу. Вторичные выходные параметры зависят от структуры электронной схемы и внутренних параметров. Вторичные выходные параметры позволяют определить реакцию электронной схемы на внешние воздействия различных видов. Во временной области схемные параметры представляются в виде переходной и импульсной переходной характеристик, а в частотной – в виде частотных характеристик (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ и др.). К выходным схемным параметрам относят также параметры названных характеристик: длительности задержек и фронтов выходных сигналов; входное и выходное сопротивления схемы в диапазоне частот или на фиксированной частоте; граничные частоты полосы пропускания; максимально допустимая величина помехи по входному воздействию; мощность рассеяния в элементах; амплитуда выходного сигнала или его среднее значение и др.

Все задачи, решаемые при проектировании, могут быть сведены к следующим основным видам: синтез структуры и параметров электронной схемы, расчет, анализ, параметрическая и структурная оптимизация.

[*Определение*] *Синтез* — создание описания еще не существующего технического объекта на основе требований к выходным параметрам при заданных внешних параметрах. [.]

При этом определение состава элементов электронной схемы и порядка их связей между собой носит название *структурного синтеза*, а определение значений внутренних параметров электронной схемы — *параметрического синтеза*.

[*Определение*] *Расчет* электронной схемы представляет собой определение выходных параметров при известной постоянной структуре и значениях внутренних и внешних параметров. [.]

Основными видами расчета электронных схем являются расчет статического режима (режима покоя), расчет частотных характеристик и расчет переходных процессов.

[*Определение*] *Анализ* — определение изменений выходных параметров в зависимости от изменения внутренних или внешних параметров при известной постоянной структуре. [.]

Анализ электронной схемы сводится к многократному решению задач расчета. К типовым видам анализа относится анализ чувствительности выходных параметров к изменениям внутренних или внешних параметров, а также статистический анализ, направленный на получение вероятностных оценок надежности схемы.

[*Определение*] *Оптимизация* — поиск структуры и значений внутренних параметров электронной схемы, обеспечивающих наилучшие в заданном смысле значения выходных параметров при заданных внешних параметрах. [.]

Выбор оптимальной структуры представляет собой *структурную оптимизацию*, а поиск оптимальных значений внутренних параметров при известной постоянной структуре — *параметрическую оптимизацию*.

1.2 Общие вопросы математического моделирования

[Определение] *Моделирование* — это способ исследования, основанный на замене реального объекта физическим или абстрактным объектом-аналогом (моделью), изучении свойств этого аналога и переносе полученных результатов на исходный объект. [.]

В зависимости от характера модели различают *физическое (материальное) моделирование* и *математическое моделирование* [2].

Физическое моделирование предполагает, что в качестве модели используется материальный объект, поведение которого с достаточной точностью соответствует поведению исследуемого объекта.

При математическом моделировании модель представляет собой абстрактный образ реального объекта, выраженный в виде математических соотношений и условий.

В общем случае под математической моделью обычно понимается любое математическое описание, отражающее с требуемой точностью поведение реального объекта в заданных условиях и позволяющее определить все интересующие свойства этого объекта.

Основными требованиями, предъявляемыми к математическим моделям, являются требования адекватности, универсальности (полноты), достаточной простоты (экономичности), продуктивности, робастности и наглядности.

[Определение] *Адекватность* — способность модели отражать заданные свойства моделируемого объекта с требуемой точностью. [.]

[Определение] *Универсальность* модели определяется числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров реального объекта. [.]

[Определение] *Требование достаточной простоты (экономичности)*

означает возможность экономной реализации модели с приемлемой точностью современными средствами исследования. [.]

Количественно экономичность математических моделей характеризуется затратами вычислительных ресурсов на их реализацию.

[*Определение*] Требование *продуктивности* математической модели состоит в возможности определить в реальных условиях численные значения всех исходных данных, необходимых для реализации модели. [.]

[*Определение*] *Робастность* математической модели означает ее устойчивость относительно погрешностей в исходных данных. [.]

Исходные данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью, и такая неопределенность не должна существенно влиять на результаты исследования.

[*Определение*] Под *наглядностью* математической модели обычно понимают ее непосредственный, ясный содержательный смысл, который дает возможность не только проконтролировать модель, но порой наметить план и предвидеть результат реализации. [.]

1.3 Классификация математических моделей

По характеру отображаемых свойств математические модели делят на *топологические (структурные)* и *функциональные*.

Топологические модели отражают только структурные свойства объекта, то есть состав элементов и связи между ними. Топологические модели имеют форму схем, графов, таблиц соответствия, матриц инцидентий, матриц смежности и т.д.

Функциональные модели отражают процессы функционирования объекта и чаще всего представляют собой системы уравнений. Функциональные модели более сложные, чем топологические, поскольку в них отражаются как структурные свойства, так и свойства отдельных компонентов.

По способам получения функциональные модели делят на *теоретические* и *формальные (эмпирические)*.

Теоретические модели формируют на основе физических законов. При этом системы уравнений и их коэффициенты имеют вполне определенное физическое толкование.

Формальные модели получают, рассматривая проявление поведения моделируемого объекта, представленного как «черный ящик», во внешней среде.

По уровню абстрагирования (степени детализации описываемых свойств) выделяют *полные модели* и *макромодели*.

Полная модель отражает как состояние объекта в целом, так и состояние каждого из его элементов и формируется из моделей отдельных элементов с учетом межэлементных связей.

Макромодель не описывает процессы внутри объекта, а характеризует процессы взаимодействия исследуемого объекта с окружающей средой.

По характеру используемого математического аппарата различают *модели на микроуровне (микромодели)*, *модели на макроуровне* и *модели на метауровне (метамодели)*.

Модели на микроуровне описывают физические состояния и процессы в сплошных средах (физические поля) и основаны на аппарате уравнений математической физики. Примерами таких моделей служат дифференциальные уравнения в частных производных — уравнения электродинамики, теплопроводности, газовой динамики и т.д.

Модели на макроуровне описывают процессы в дискретизированных средах, содержащих элементы с сосредоточенными параметрами: отдельные детали, дискретные электрорадиоэлементы, участки полупроводниковых кристаллов и т.д. Модели на макроуровне представляют собой системы алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, дополненных

начальными условиями.

Модели на метауровне описывают информационные процессы в моделируемых объектах. Для моделирования аналоговой электронной аппаратуры применяют аппарат теории автоматического управления, а для моделирования цифровых систем — математическую логику, теорию конечных автоматов, теорию массового обслуживания. Математические модели на метауровне представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы логических уравнений, имитационные модели систем массового обслуживания.

По форме представления различают *инвариантные, алгоритмические, аналитические и графические (схемные) модели.*

Инвариантные модели записываются на традиционном математическом языке безотносительно к методу реализации модели.

Алгоритмическая модель предполагает запись соотношений модели с учетом выбранного численного метода решения в форме алгоритма. Среди алгоритмических моделей важный класс составляют *имитационные модели*, предназначенные для имитации физических или информационных процессов в объекте при задании различных зависимостей внешних воздействий от времени.

Аналитическая модель является результатом аналитического решения исходных уравнений модели и записывается в форме явных выражений выходных параметров через внутренние и внешние параметры.

Графическая модель представляется на некотором графическом языке, например, на языке графов, эквивалентных схем, диаграмм и т.п.

По характеру уравнений (по типу коэффициентов) модели делят на *линейные, нелинейные, параметрические.*

Линейные модели представляют собой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Нелинейные модели — системы нелинейных уравнений, то есть уравнений, коэффициенты которых являются функциями искомых фазовых переменных.

Параметрические модели представляют собой системы линейных и (или) нелинейных уравнений, коэффициенты которых зависят от времени.

По мощности множеств значений переменных выделяют непрерывные и дискретные модели. Фазовые переменные непрерывных моделей являются непрерывными функциями, а фазовые переменные дискретных моделей — решетчатыми функциями.

По учету инерционности процессов различают статические и динамические модели.

1.4 Этапы математического моделирования

Проведение исследований на основе математического моделирования включает три основных этапа: *формирование математической модели, реализация математической модели, проверка адекватности и точности модели.*

Процесс формирования математической модели отражает рис. 1.1.

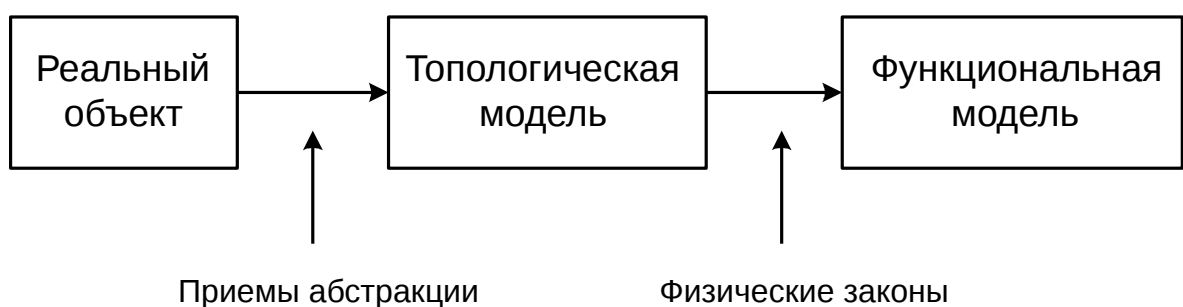


Рис. 1.1. Этапы формирования математической модели

На первом этапе формирования математической модели применяют

элементы абстракции (допущения), направленные на выделение существенных свойств объекта. Использование тех или иных допущений определяется целью исследования, рассматриваемыми условиями функционирования и требуемой точностью. В зависимости от перечисленных факторов для одного и того же реального объекта могут быть сформированы различные модели. На основе принятых допущений в составе реального объекта выделяют отдельные компоненты и определяют связи между ними, то есть формируют топологическую модель реального объекта.

На втором этапе получения модели, применяя физические законы, формируют функциональную математическую модель, которая отражает поведение реального объекта в заданных условиях.

[Внимание] Используемые физические законы выражаются уравнениями двух типов: *компонентными уравнениями* и *топологическими уравнениями*. [.]

Компонентные уравнения характеризуют свойства отдельных компонентов топологической модели реального объекта. Для электронных схем компонентные уравнения выражают связь между токами и напряжениями на полюсах электронных компонентов. Топологические уравнения характеризуют только связи между компонентами безотносительно к свойствам самих компонентов. Для электронных цепей к топологическим уравнениям относятся уравнения равновесия для токов (уравнения первого закона Кирхгофа) и уравнения непрерывности для напряжений (уравнения второго закона Кирхгофа).

Под реализацией математической модели понимается совокупность действий, направленных на получение необходимой информации о свойствах математической модели. Основными этапами реализации математических моделей являются выбор цели реализации, выбор метода расчета и численной схемы, разработка алгоритма и программы расчета, обработка полученных

результатов.

[*Определение*] Многократная реализация математической модели, направленная на получение полной информации об объекте, носит название *анализ математической модели*. [.]

На последнем этапе математического моделирования выполняют проверку адекватности и точности математической модели. Для этого используют различные подходы. Чаще всего результаты, полученные при помощи модели, сравнивают с данными наблюдения реальной системы или выборочно проведенных экспериментов.

1.5 Методы реализации математических моделей

Все разнообразие методов реализации математических моделей можно свести к четырем основным видам: *аналитическим, численным, численно-аналитическим и графическим*.

Аналитические методы реализации математических моделей подразумевают получение зависимостей выходных параметров моделируемого объекта от внутренних и внешних параметров в явной форме. Это позволяет проводить исследования в общем виде, независимо от численных значений параметров. Аналитические методы применимы только при использовании относительно простых, как правило, линейных, математических моделей.

Численные методы являются наиболее общими. Схема вычислений задается формулой или алгоритмом, выполнение которых приводит к требуемому результату [3]. В зависимости от характера вычислительного процесса численные методы подразделяются на *прямые* и *итерационные*. При использовании прямых методов результат получается путем последовательных операций над числами, и его точность зависит исключительно от точности промежуточных вычислений. В итерационных методах результат получается путем последовательных приближений, начиная от некоторых начальных зна-

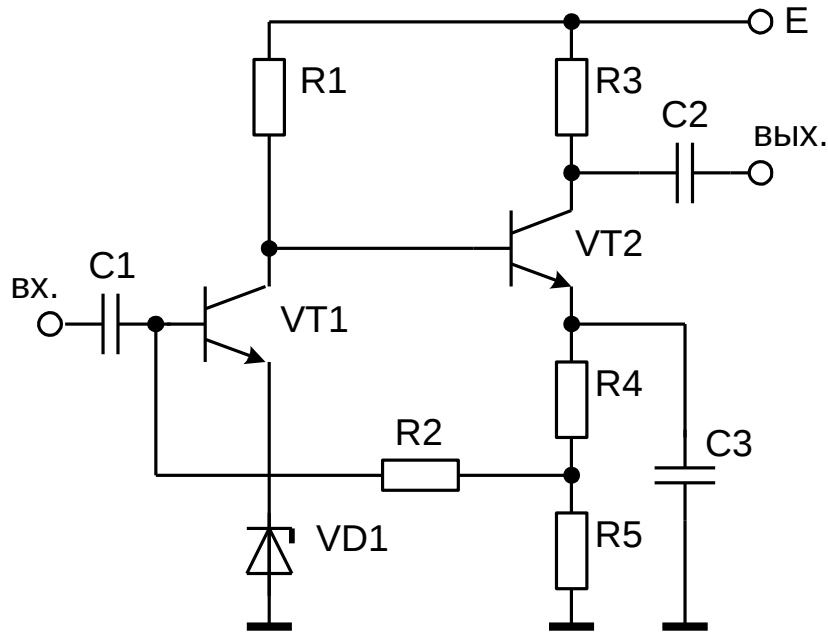
чений. Каждое последующее значение (итерация) вычисляется по одной и той же численной схеме, представляющей собой цикл вычислительного процесса. Необходимым условием работоспособности итерационного метода является сходимость последовательности итераций к искомой величине или совокупности величин, то есть возможность получения результата с требуемой точностью. Практически от итерационных методов требуется также достаточная скорость сходимости, то есть достижение требуемой точности таким количеством итераций, которое является приемлемым в данных конкретных условиях.

Численно-аналитические методы основаны на совмещении элементов аналитических и численных методов реализации математических моделей. При этом получение искомых результатов носит численный характер, а используемая численная схема задана соотношениями в аналитической форме.

Графические методы направлены на реализацию математических моделей, представленных в форме графических образов. Эти методы обладают наглядностью и особенно удобны, если не требуется высокая точность или если интерес представляет качественная картина протекающих процессов. В практике инженерных расчетов графические методы часто используются совместно с аналитическими методами. В таких случаях их называют графо-аналитическими.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие параметры представленной схемы относятся к внутренним, выходным и внешним параметрам



Ответ: к *внутренним параметрам* относятся сопротивления резисторов, электрические емкости конденсаторов, физические параметры транзисторов и стабилитрона и т.д.; к *выходным параметрам* относятся коэффициенты усиления по напряжению, по току, по мощности и др., токи ветвей схемы, входное и выходное напряжения, нестабильности коэффициентов усиления, входное и выходное сопротивления и т.д.; к *внешним параметрам* относятся напряжение питания, температура окружающей среды, сопротивление нагрузки и т.д.

2. Сформулируйте постановку задачи синтеза.

Ответ: синтез – создание описания еще не существующего технического объекта на основе требований к выходным параметрам при заданных внешних параметрах.

3. Перечислите основные виды расчета электронных схем.

Ответ: расчет статического режима (режима покоя), расчет частотных характеристик, расчет переходных процессов.

4. Что понимают под математической моделью электронной схемы.

Ответ: под математической моделью электронной схемы обычно понимается любое математическое описание, отражающее с требуемой точностью поведение электронной цепи в заданных условиях и позволяющее определить все интересующие свойства данной цепи.

5. Укажите основные требования, предъявляемые к математическим моделям.

Ответ: адекватность, универсальность, экономичность, продуктивность, робастность, наглядность.

6. Укажите основные этапы математического моделирования.

Ответ: формирование математической модели, реализация и анализ математической модели, проверка адекватности и точности модели.

7. Укажите основное отличие функциональных математических моделей от топологических моделей.

Ответ: топологические модели отражают только структурные свойства электронной цепи, а функциональные – как структурные свойства, так и свойства ее компонентов.

8. Назовите основные формы представления топологических моделей.

Ответ: схемы замещения, полюсные графы, топологические матрицы, топологические уравнения.

9. Получите аналитическую математическую модель электронной цепи, инвариантная модель которой имеет вид

$$\tau^2 \frac{d^2 u_{\hat{a}\hat{o}}(t)}{dt^2} + \tau \frac{du_{\hat{a}\hat{o}}(t)}{dt} + u_{\hat{a}\hat{o}}(t) = U_{\hat{a}\hat{o}},$$

$$U_{\hat{a}\hat{o}} = \text{const}, \quad u_{\hat{a}\hat{o}}(0) = 0, \quad \left. \frac{du_{\hat{a}\hat{o}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Ответ:
$$u(t) = U_{\hat{a}\hat{o}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2\tau} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2\tau} t \right) \right].$$

10. Укажите основные этапы реализации математических моделей.

Ответ: выбор цели реализации, выбор метода расчета и численной схемы, разработка алгоритма и программы расчета, обработка полученных результатов.

1.1 Задачи проектирования электронных схем.....	7
1.2 Общие вопросы математического моделирования.....	10
1.3 Классификация математических моделей.....	11
1.4 Этапы математического моделирования.....	14
1.5 Методы реализации математических моделей.....	16
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	17

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

2.1 Классификация электронных схем по математическому описанию

Реальные зависимости между токами и напряжениями электронных схем в общем случае нелинейные, достаточно сложные и носят в определенной степени вероятностный характер. В то же время режим работы устройства и требуемая точность анализа зачастую позволяет пренебречь нелинейностью характеристик и статистическим характером параметров входящих в него компонентов и проводить исследования по упрощенным математическим моделям. Это вызвало появление классификации электронных схем по типу математических моделей, используемых при анализе.

Линейные схемы

Математические модели линейных электронных схем представляют собой линейные алгебраические и дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами [1].

[Внимание] В соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений линейные схемы обладают двумя очень важными с практической точки зрения свойствами: *свойством наложения (суперпозиции)* и инвариантности отношений реакции к воздействию к операциям интегрирования и дифференцирования. [.]

Согласно свойству суперпозиции реакция линейной схемы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности

$$X(t) = FQ(t) = F \sum_{i=1}^n q_i(t) = \sum_{i=1}^n Fq_i(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

где $q_i(t)$ – отдельное воздействие; $Q(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)$ – суммарное воздействие; $x_i(t) = Fq_i(t)$ – реакция на отдельное воздействие.

Согласно свойству инвариантности, если воздействию $q(t)$ соответствует реакция $x(t) = Fq(t)$, то воздействию $\frac{dq(t)}{dt}$ будет соответствовать реакция

$$\frac{dx(t)}{dt} = F \frac{dq(t)}{dt}, \text{ а воздействию } \int q(t) dt \text{ – реакция } \int x(t) dt = F \int q(t) dt .$$

[Выводы] Из свойств суперпозиции и инвариантности следует, что реакции линейных электронных схем не содержат новых спектральных составляющих по отношению к спектрам воздействующих на схему сигналов. [.]

К линейным схемам относят схемы, содержащие пассивные линейные компоненты с постоянными параметрами, а также схемы, содержащие активные многополюсные компоненты, работающие в линейной области вольт-амперных характеристик в режиме малого сигнала (квазилинейные схемы). Кроме того, существует целый ряд нелинейных электронных схем, которые на отдельных интервалах работы могут рассматриваться как линейные (кусочно-линейные схемы).

Линейные параметрические схемы

Математическими моделями линейных параметрических схем являются линейные алгебраические и дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от времени [1]. Будучи линейными, параметрические схемы обладают свойством суперпозиции

$$X(t) = F(t)Q(t) = F(t) \sum_{i=1}^n q_i(t) = \sum_{i=1}^n F(t)q_i(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t).$$

В то же время свойство инвариантности отношения реакции к воздействию к операциям интегрирования и дифференцирования для линейных параметрических схем не выполняется:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(F(t)q(t))}{dt} = \frac{dF(t)}{dt}q(t) + F(t)\frac{dq(t)}{dt} \neq F(t)\frac{dq(t)}{dt},$$

$$\int x(t)dt = \int F(t)q(t)dt = F(t)\int q(t)dt - \int q(t)dF(t) \neq F(t)\int q(t)dt$$

[Выводы] Из-за нарушения принципа инвариантности при гармонических воздействиях и изменениях параметров в реакциях линейных параметрических схем возникают новые спектральные составляющие. [.]

К линейным параметрическим схемам относятся схемы, содержащие компоненты, параметры которых изменяются во времени под действием дополнительных управляющих сигналов: преобразователи частоты, малощумящие параметрические усилители, магнито-транзисторные параметроны и т.п.

Нелинейные схемы

Математические модели нелинейных электронных схем представляют собой нелинейные алгебраические и дифференциальные уравнения, параметры (коэффициенты) которых зависят от фазовых переменных. Принципиальным отличием нелинейных схем от линейных является неприменимость к ним принципов наложения и инвариантности, вследствие чего в реакциях схем появляются новые спектральные составляющие относительно спектрального состава воздействий.

К нелинейным схемам относятся схемы, содержащие хотя бы один

компонент, токи и напряжения на полюсах которого связаны нелинейной зависимостью: усилители в режиме большого сигнала, генераторы гармонических колебаний, умножители частоты и т.д.

Нелинейные параметрические схемы

Математическими моделями нелинейных параметрических схем являются нелинейные алгебраические и дифференциальные уравнения, параметры (коэффициенты) которых зависят и от фазовых переменных, и от времени.

К ним относятся схемы, содержащие нелинейные компоненты и компоненты с переменными во времени параметрами: устройства частотной модуляции, параметрические генераторы и др.

2.2 Топологические модели электронных схем

По форме представления различают следующие виды топологических моделей электронных цепей: электрические схемы (схемы замещения), полюсные графы электронных схем, топологические матрицы и уравнения.

Схемы замещения электронных цепей

[**Определение**] Схема замещения электронной цепи – это геометрическая абстракция цепи, отражающая ее структуру и характер входящих в нее компонентов с учетом режима работы, постановки задачи исследования и требуемой точности. [.]

Для обеспечения требования достаточной простоты математической модели широко распространен подход, связанный с формированием для одной и той же электронной цепи нескольких схем замещения, каждая из кото-

рых соответствует определенному режиму работы (состоянию) электронной цепи.

Для электронных цепей непрерывного действия принято задачу анализа разделять на две независимые задачи: анализ цепи по постоянному току и анализ цепи по переменному току, для решения каждой из которых применяют соответствующие схемы замещения.

Схему замещения электронной цепи по постоянному току получают из схемы электрической принципиальной, используя следующие правила:

- ветви с емкостными элементами размыкают;
- идеальные индуктивности закорачивают;
- ветви идеальных источников переменного тока размыкают;
- идеальные источники переменных ЭДС закорачивают;
- активные электронные компоненты представляют соответствующими условными графическими обозначениями либо замещают нелинейными эквивалентными схемами для постоянного тока;
- источники питания постоянного тока принято представлять источниками постоянных ЭДС или постоянных токов с внутренними сопротивлениями;

При анализе измерительных цепей иногда учитывают паразитные омические сопротивления реактивных компонентов с целью исследования погрешностей, вносимых реактивными компонентами.

Для удобства дальнейшего использования схемы замещения по постоянному току рекомендуется по возможности изображать без пересечений ветвей.

В качестве примера рассмотрим формирование схемы замещения по постоянному току однокаскадного усилителя низкой частоты на биполярном транзисторе с цепью низкочастотной коррекции (рис. 2.1).

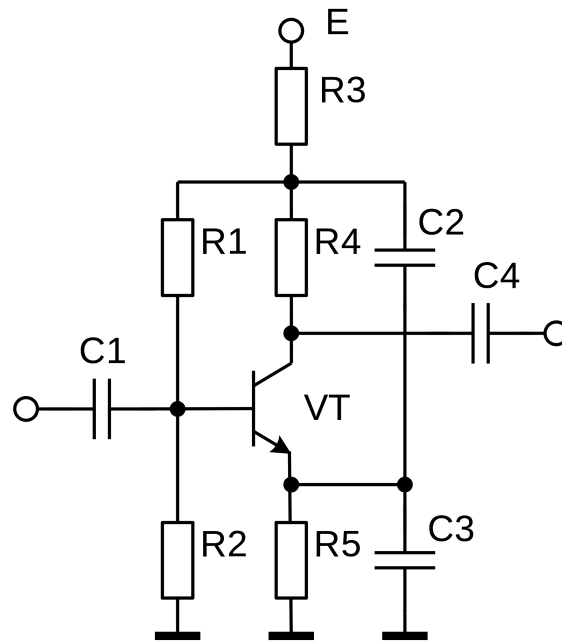


Рис. 2.1. Схема однокаскадного усилителя низкой частоты на биполярном транзисторе с цепью низкочастотной коррекции

В соответствии с правилами построения схем замещения по постоянному току в схеме рис. 2.1 размыкаем ветви, содержащие конденсаторы $C1$, $C2$, $C3$, $C4$. Источник питания E представляем идеальным источником ЭДС E с последовательно включенным внутренним сопротивлением r . Активный электронный компонент (транзистор VT) представляем соответствующим условным графическим обозначением. Полученная схема замещения усилителя по постоянному току представлена на рис. 2.2.

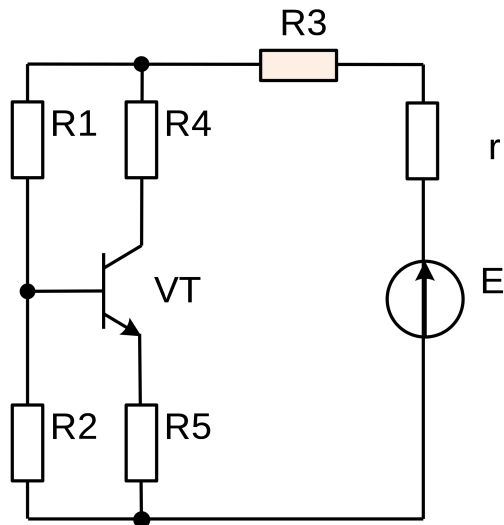


Рис. 2.2. Схема замещения однокаскадного усилителя
низкой частоты по постоянному току

Схему замещения электронной цепи по переменному току получают из схемы электрической принципиальной, используя следующие правила:

- ветви источников постоянного тока размыкают;
- источники постоянных напряжений закорачивают;
- активные электронные компоненты представляют соответствующими условными графическими обозначениями либо замещают линеаризованными эквивалентными схемами для переменных сигналов;
- реактивные элементы закорачивают, если в рассматриваемом диапазоне частот их сопротивление переменному току сравнительно малы, и размыкают, если их сопротивление переменному току велики.

[Внимание] Для упрощения анализа иногда целесообразно составлять отдельные схемы замещения по переменному току для областей нижних, рабочих и верхних частот. [.]

При формировании схем замещения по переменному току для областей рабочих и верхних частот, как правило, закорачивают блокировочные, разде-

лительные (входные, выходные, межкаскадные) конденсаторы, конденсаторы сглаживающих фильтров и другие, из назначения которых следует, что их сопротивление переменному току в рассматриваемом диапазоне частот должно быть мало.

При составлении схемы замещения по переменному току необходимо стремиться к максимально возможному упрощению и наглядности. Это имеет существенное значение для ускорения анализа и расчета электронных схем.

Рассмотрим формирование схем замещения по переменному току для однокаскадного усилителя низкой частоты с цепью низкочастотной коррекции, приведенного на рис. 2.1.

При составлении схемы замещения по переменному току исключаем из принципиальной схемы источник питания E (так как это источник **постоянного** напряжения) путем закорачивания. Источник входного сигнала в схеме замещения по переменному току представлен идеальным источником переменной ЭДС e_c с последовательным внутренним сопротивлением r_c , а нагрузка – ветвью с сопротивлением Z_1 . В схеме замещения усилителя по переменному току для полного диапазона частот (рис. 2.3) учтены все реактивные элементы. Активный электронный компонент (транзистор VT) представлен соответствующим условным графическим обозначением.

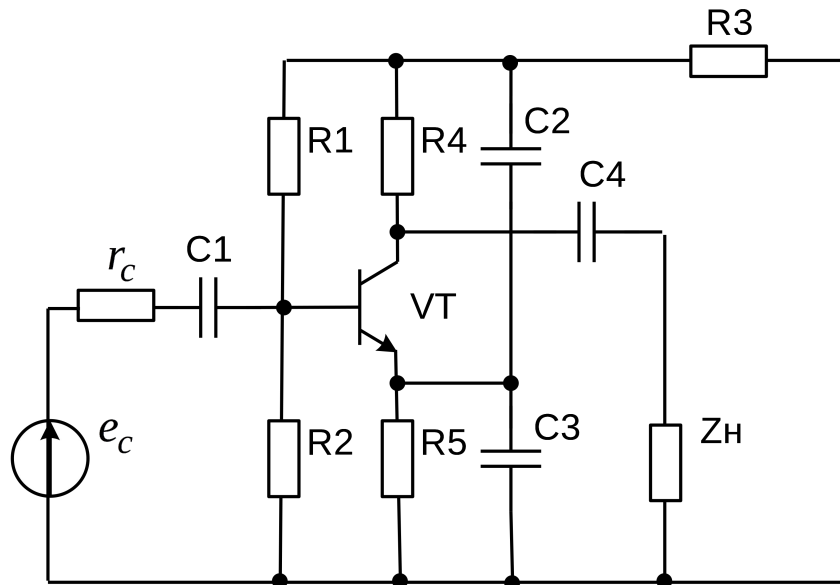


Рис. 2.3. Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току для полного диапазона частот

Из назначения конденсаторов $C1$, $C2$, $C3$ и $C4$ следует, что они должны иметь малое сопротивление переменному току в области рабочих частот. В связи с этим, в схеме замещения по переменному току для рабочего диапазона частот (рис. 2.4) ветви, содержащие эти конденсаторы, можно закортить. При закорачивании конденсаторов $C2$ и $C3$ ветви с сопротивлениями $R1$, $R2$ образуют одну эквивалентную ветвь с сопротивлением

$$R_{\dot{y}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

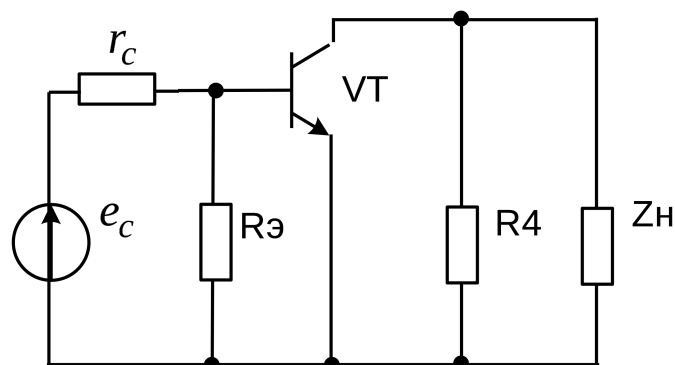


Рис. 2.4. Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току для рабочего диапазона частот

Полюсные графы

Наиболее компактно структура электронной цепи отображается с помощью полюсных графов электронных схем.

[Определение] Граф $G(X, A, \Gamma)$ представляет собой совокупность непустого множества вершин X ($X \neq \emptyset$), не пересекающегося с ним множества ребер A ($A \cap X = \emptyset$) и закона Γ , устанавливающего взаимосвязь между элементами множества вершин с помощью элементов множества ребер. [.]

Геометрически граф принято изображать совокупностью точек, взаимно однозначно соответствующих вершинам, и связывающих их линий произвольной кривизны, взаимно однозначно соответствующих ребрам графа [2].

При необходимости учета направлений связей между вершинами графа соответствующим ребрам приписываются направления, отмечаемые стрелками, а сами ребра называют дугами. Графы, содержащие только ненаправленные ребра, называют *ненаправленными* графами. Графы, включающие только направленные ребра (дуги), называют *направленными* или *ориентированными* графами, а также *орграфами*. Графы, содержащие как направленные, так и ненаправленные ребра, носят название *смешанных*.

Полюсный граф электронной схемы представляет собой граф, вершины которого соответствуют узлам схемы, ребра – ветвям схемы, а в качестве закона Γ выступает порядок связей ветвей схемы между собой. Ребрам полюсного графа приписывают направления, совпадающие с положительными направлениями токов соответствующих ветвей. При этом в ветви, содержащей источник ЭДС положительное направление тока следует выбирать **про-**

тнвоположным направлению ЭДС. Последовательно и параллельно включенные ветви схемы в полюсном графе могут быть объединены в эквивалентные дуги.

На рис. 2.5 приведен пример построения полюсного графа для схемы, содержащей двухполюсные компоненты.

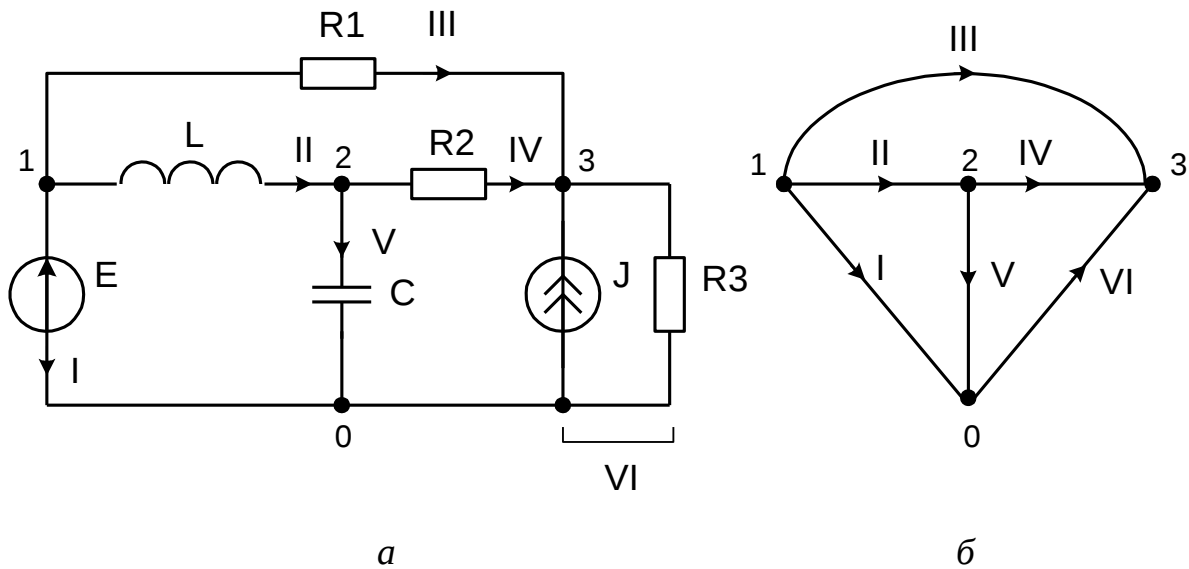


Рис. 2.5. Формирование полюсного графа электронной схемы:

а – электронная схема; *б* – полюсный граф

В полюсном графе на рис. 2.5,б источник тока J и резистор $R3$ представлены одной эквивалентной дугой, направление которой совпадает с направлением задающего тока J .

Ребро, граничные вершины которого совпадают, называется *петлей*. В общем случае граф может содержать *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны с другими вершинами.

Ребро графа и его граничная вершина называются *инцидентными* друг другу: вершина инцидентна ребру, ребро инцидентно вершине. Число ребер, инцидентных i -ой вершине, называют *степенью вершины* t_{ji} , при этом петля

учитывается дважды.

Граничные вершины какого-либо ребра называют *смежными*. Количество ребер, соединяющих смежные вершины i и j , называют *взаимной степенью* t_{ij} этих вершин.

Например, в полюсном графе на рис. 2.5,б инцидентными вершине 1 являются дуги I, II, III; вершине 2 – дуги II, IV, V и т.д.. Смежными вершинами являются 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 и т.д.. Степени всех вершин графа на рис. 2.5,б равны 3, а взаимные степени – равны 1.

Маршрут длины m определяется как последовательность m ребер графа (не обязательно различных) и инцидентных им вершин таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. *Замкнутый маршрут* начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью*. Примером простых цепей в полюсном графе на рис. 2.5,б являются последовательности ребер I, II (длина цепи равна 2); I, V, IV (длина цепи равна 3); II, IV, VI (длина цепи равна 3) и т.д.

Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая замкнутая цепь – *простым циклом*. Понятия цепи и циклов применимы и к орграфам, при этом направления дуг не учитываются (вместо орграфа рассматривается неориентированный соотнесенный ему граф). Простыми циклами полюсного графа на рис. 2.5,б являются последовательности ребер I, V, II (длина цикла равна 3); I, V, IV, III (длина цикла равна 4) и т.д.

Применительно к орграфам дополнительно рассматриваются *ориентированные маршруты*, когда начальная вершина каждой последующей дуги маршрута совпадает с конечной вершиной предыдущей дуги. Ориентированный маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин – *простым путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь – *простым контуром*. Граф на-

зывается *циклическим*, если он содержит хотя бы один цикл, в противном случае он называется *ациклическим*. Применительно к орграфу используют понятия – *контурный* и *бесконтурный* соответственно.

Примером простых путей в полюсном графе на рис. 2.5,б являются последовательности дуг I, VI (длина пути равна 2); II,V (длина пути равна 2); III (длина пути равна 1) и т.д. Полюсный граф на рис. 2.5,б не содержит контуров, то есть является бесконтурным. В то же время граф на рис. 2.5,б является циклическим, так как содержит простые циклы.

Ребрам и дугам графов могут быть приписаны количественные значения, качественные признаки или характерные свойства, характеризующие связи между вершинами. Вес может быть приписан и вершинам графа, означая некоторую характеристику соответствующего ей объекта.

Часть графа – это граф, вершины и ребра которого являются подмножествами вершин и ребер исходного графа. Часть графа, содержащая некоторое подмножество ребер исходного графа и все инцидентные им вершины, называется *подграфом*. Совокупность всех ребер и вершин исходного графа, не принадлежащих его подграфу, образуют *дополнение подграфа*.

Пример подграфа и его дополнения для графа на рис. 2.5,б представлены на рис. 2.6.

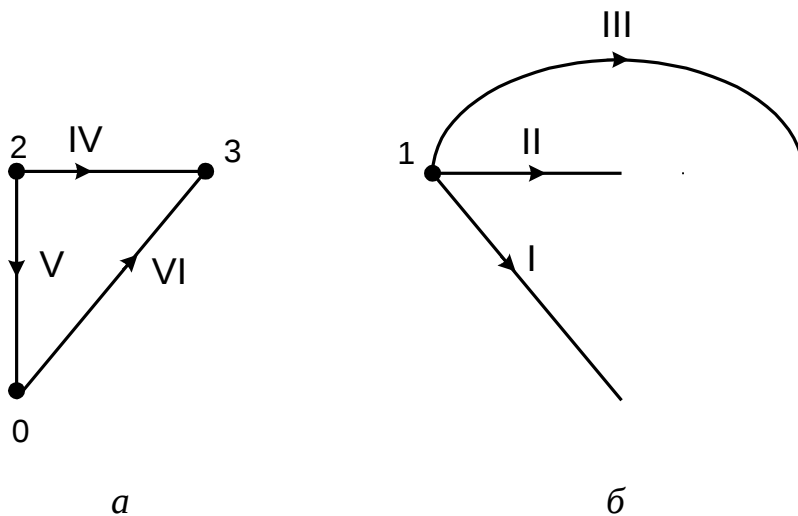


Рис. 2.6. Подграф (а) и дополнение подграфа (б)

Часть графа, содержащая некоторое подмножество ребер и все вершины исходного графа, называется *суграфом*.

Пример суграфа для графа на рис. 2.5,б приведен на рис. 2.7.

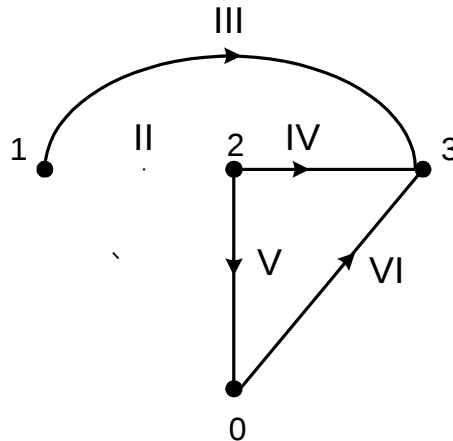


Рис. 2.7. Суграф полюсного графа

Две вершины графа называются *связанными*, если между ними существует маршрут. Граф, любая пара вершин которого связана, называют *связным графом* (рис. 2.5,б). В противном случае граф называется *несвязным*. Несвязный граф представляет собой совокупность отдельных частей (подграфов), называемых *компонентами*.

Связный ациклический граф называют *деревом*. Очевидно, количество ребер дерева на единицу меньше количества его вершин. Несвязный граф, компоненты которого являются деревьями, называется *лесом*. Примеры дерева и леса представлены на рис. 2.8.

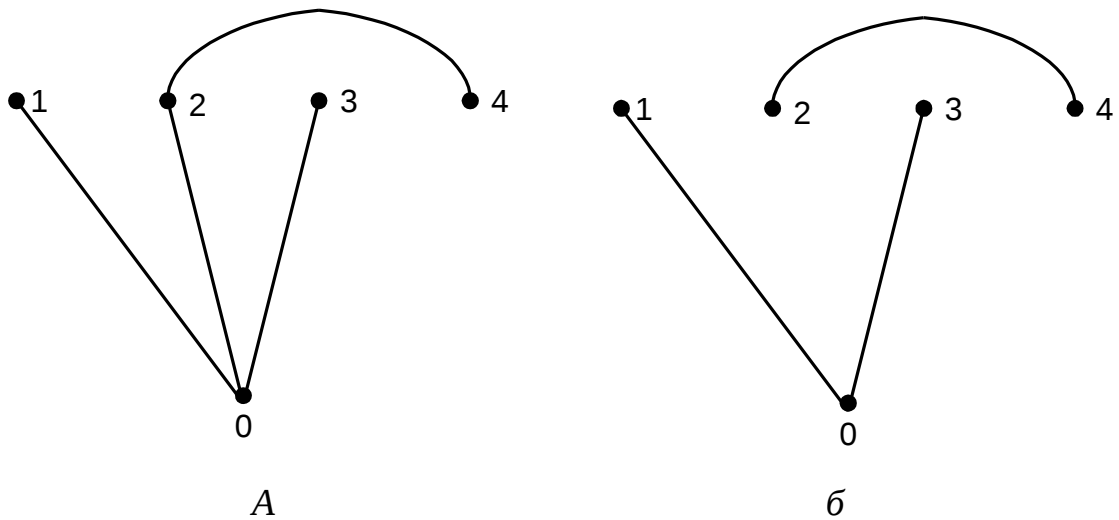


Рис. 2.8. Дерево (а) и лес (б)

Любая связная совокупность ребер графа, не содержащая контуров, вместе с инцидентными им вершинами образует *дерево графа*. Если такое дерево является суграфом, то оно называется *покрывающим деревом* или *остовом*. Ребра дерева называют *ветвями*. Ребра графа, не входящие в покрывающее дерево (остов), образуют *дополнение дерева* и называются *хордами*. Дерево, содержащее все вершины исходного графа, называют *фундаментальным деревом* этого графа. При этом ребра фундаментального дерева в общем случае не совпадают с ребрами исходного графа. Частным случаем фундаментального дерева является покрывающее дерево графа.

На рис. 2.9 приведены дерево, покрывающее дерево и дополнение дерева графа, представленного на рис. 2.5.

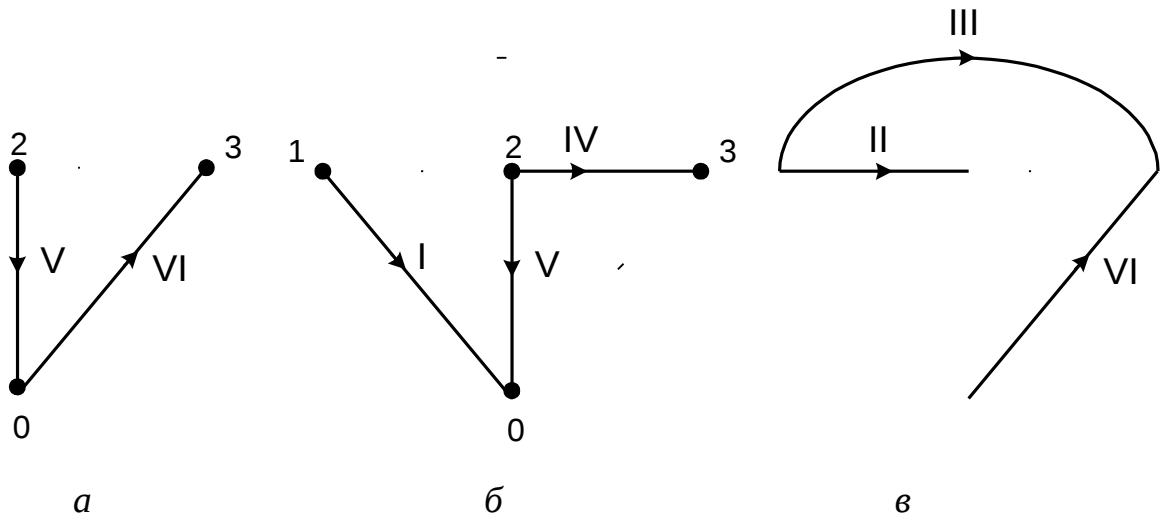


Рис. 2.9. Дерево (а), покрывающее дерево (б) и дополнение дерева (в)

Граф называют *плоским (планарным)*, если он может быть представлен на плоскости без пересечения ребер (рис. 2.5,б).

Топологические матрицы и уравнения

Пронумеровав вершины и ребра графа, его структурные свойства можно отобразить с помощью топологических матриц *инциденций (структурной матрицы), сечений, циклов*.

Матрица инциденций (структурная матрица) представляет собой матрицу, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам графа. Для орграфов элемент (ij) равен $+1$ (-1), если i -ая вершина является начальной (конечной) для j -ой дуги и равен 0 , если i -ая вершина и j -ая дуга не инцидентны. Каждый столбец матрицы инцидентностей обязательно содержит два ненулевых элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки), следовательно, сумма всех строк по $\text{mod } 2$ равна нулю, а это значит, что без потери информации одна из строк (чаще всего последняя) может быть удалена, что приводит к получению сокращенной матрицы инцидентностей.

Структурная матрица полюсного графа на рис. 2.5 имеет вид

$$A = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Удаляя строку, соответствующую вершине 0, получим один из возможных вариантов сокращенной структурной матрицы

$$A_0 = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.1)$$

[Определение] Сечением связного графа называется совокупность ребер, удаление которых делает граф несвязным. [.]

Ребра, образующие сечение, называют инцидентными этому сечению. Графически сечение обычно выделяют замкнутой линией, которая пересекает инцидентные сечению ребра. При выделении сечения замкнутой линией необходимо иметь в виду, что данному сечению принадлежат только те ребра, которые пересекаются этой линией нечетное число раз (ребра, имеющие с выделяющей линией четное число пересечений, сечению не принадлежат). Для упрощения выделяющую сечение линию часто обрывают, условно считая, что она замыкается во внешней области графа.

[Определение] Совокупность ребер, инцидентных некоторой вершине графа, является сечением с центром в этой вершине и называется *центральной сечением*. [.]

В графе с \mathcal{V} вершинами имеется \mathcal{V} центральных сечений, причем каж-

дому из них соответствует строка матрицы инциденций.

На рис. 2.10 показаны примеры сечений связного графа, причем сечение $C1$ является центральным.

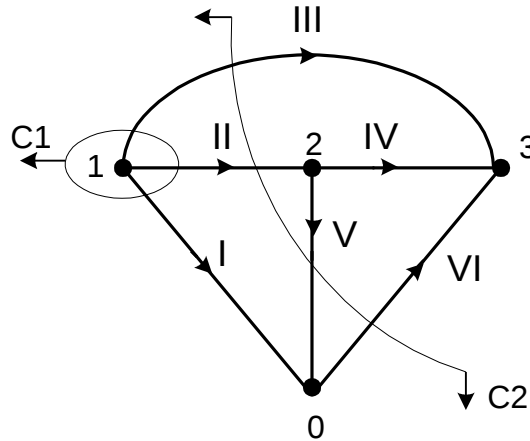


Рис. 2.10. Сечения связного графа

В общем случае первый закон Кирхгофа справедлив не только для узлов схемы, но и для любой замкнутой области, ограниченной некоторым сечением.

[*Определение*] Совокупность сечений графа, обеспечивающая линейную независимость системы уравнений по первому закону Кирхгофа, представляет собой *систему независимых сечений*. [.]

Число независимых сечений графа определяется выражением

$$v = \nu - n, \quad (2.2)$$

где ν — количество вершин графа; n — количество компонентов (частей) графа (для связного графа $n=1$).

В самом общем случае систему независимых сечений выбирают так, чтобы каждому сечению было инцидентно только одно ребро фундаментального дерева.

[*Определение*] Система независимых центральных сечений носит на-

звание *канонической*. [.]

[Внимание] В канонической системе сечений все сечения направляют изнутри. [.]

[Определение] Сечение, которому инцидентно только одно ребро покрывающего дерева графа, называют *главным сечением*. [.]

Между ребрами покрывающего дерева и главными сечениями имеет место взаимно-однозначное соответствие, поэтому каждому главному сечению принято присваивать номер и направление соответствующего ребра дерева. Система главных сечений является независимой.

На рис. 2.11 представлены примеры канонической системы сечений и системы главных сечений графа.

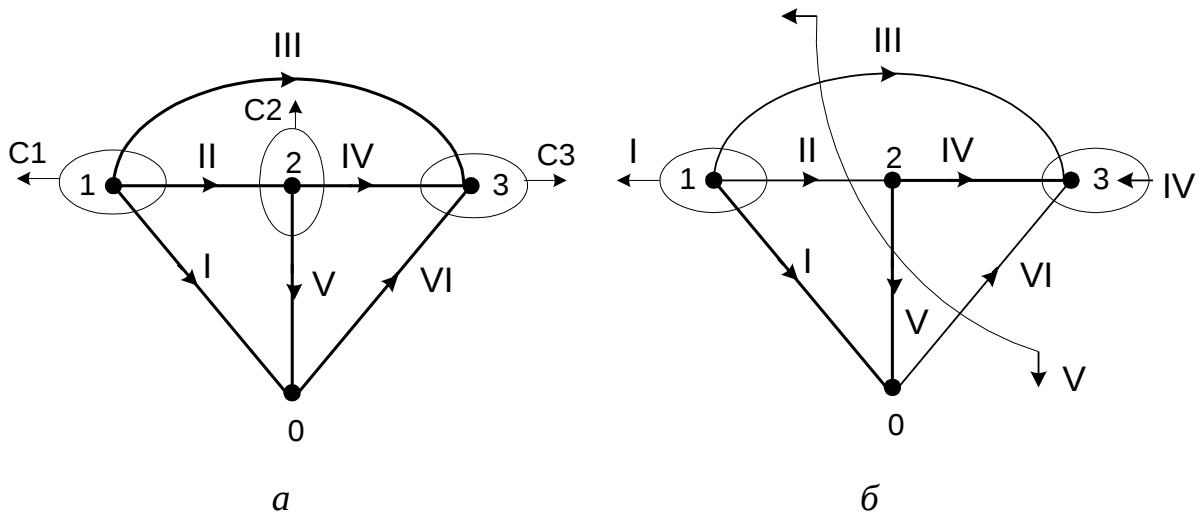


Рис. 2.11. Системы независимых сечений:

а – каноническая система; *б* – система главных сечений

Матричной формой представления системы независимых сечений является матрица независимых сечений Π . Строки матрицы соответствуют сечениям, а столбцы ребрам графа. Элемент π_{ij} матрицы Π равен $+1$ (-1), если j -ое ребро инцидентно i -ому сечению и направлена с ним согласно (противопо-

ложно), и 0, если j -ая ветвь не инцидентна i -ому сечению. В канонической системе сечений матрица независимых сечений соответствует сокращенной структурной матрице.

Например, для канонической системы сечений, представленной на рис. 2.11,а, матрица независимых сечений совпадает с сокращенной структурной матрицей (2.1). Матрица главных сечений, соответствующая выбранной на рис. 2.11,б системе главных сечений, имеет вид

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{IV} \quad \text{V} \quad \text{VI} \\ \text{I} \quad \text{IV} \quad \text{V} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Располагая в матрице главных сечений сначала столбцы, соответствующие всем ребрам дерева, а затем столбцы, соответствующие хордам, матрицу Π можно привести к канонической форме:

$$\Pi = [\bar{1}, \pi], \quad (2.4)$$

где $\bar{1}$ — единичная матрица V -го порядка; π — матрица главных сечений для хорд.

Матрица π полностью определяет матрицу Π главных сечений, причем ее размерность $[v \times (\ell - v)]$.

Каноническая форма матрицы (2.3) главных сечений имеет вид

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{IV} \quad \text{V} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{VI} \\ \text{I} \quad \text{IV} \quad \text{V} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

где матрица π главных сечений для хорд

$$\pi = \begin{matrix} & \text{II} & \text{III} & \text{VI} \\ \text{I} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{IV} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{V} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Известно, что второй закон Кирхгофа справедлив для простых циклов графа.

[Определение] Совокупность простых циклов графа, обеспечивающая линейную независимость системы уравнений по второму закону Кирхгофа, называют *системой независимых циклов*. [.]

Каждому простому циклу системы независимых контуров приписывают направление (по часовой либо против часовой стрелки). Число независимых простых циклов графа определяется цикломатическим числом σ графа

$$\sigma = \ell - \nu + n, \quad (2.5)$$

где ℓ – число ребер графа; ν – количество вершин графа; n – количество компонентов (частей) графа (для связного графа $n = 1$).

[Определение] Система независимых простых циклов, каждый из которых охватывает только одну ячейку графа, носит название *канонической*. [.]

[Внимание] В канонической системе контуров все независимые циклы направляют одинаково. [.]

[Определение] Простой цикл, которому инцидентна только одна хорда, называют *главным контуром*. [.]

Между хордами графа и главными контурами имеет место взаимно-однозначное соответствие, поэтому каждому главному контуру принято при-

связывать номер и направление соответствующей хорды. Система главных контуров является независимой.

На рис. 2.12 представлены примеры канонической системы циклов и системы главных циклов графа.

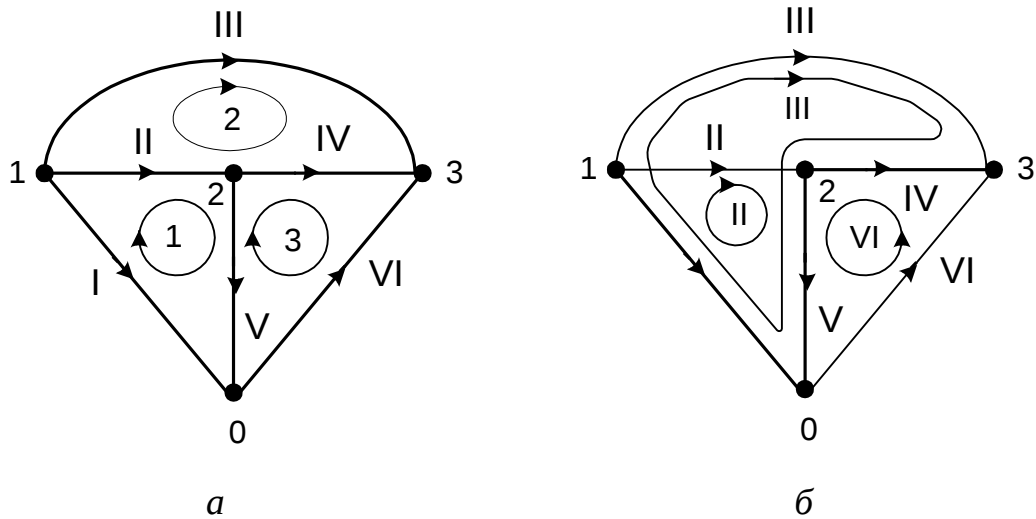


Рис. 2.12. Системы независимых контуров:

a – каноническая система; *б* – система главных контуров

Матричной формой представления системы независимых контуров является матрица \mathbf{P} независимых контуров. Строки матрицы соответствуют циклам, а столбцы ребрам графа. Элемент P_{ij} матрицы \mathbf{P} равен $+1$ (-1), если j -ое ребро инцидентно i -ому циклу и направлена с ним согласно (противоположно), и 0 , если j -ое ребро не инцидентно i -ому циклу.

Для канонической системы контуров, представленной на рис. 2.12,*a*, матрица независимых контуров имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица главных контуров, соответствующая выбранной на рис. 2.12,б системе главных контуров, имеет вид

$$P = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.6)$$

Располагая в матрице главных контуров сначала столбцы, соответствующие всем ребрам дерева, а затем всем хордам, можно привести матрицу P к канонической форме:

$$P = [\rho, \bar{1}], \quad (2.7)$$

где $\bar{1}$ – единичная матрица σ -го порядка; ρ – матрица главных контуров для ребер покрывающего дерева графа.

Матрица ρ полностью определяет матрицу P главных контуров, причем ее размерность $[\sigma \times (\ell - \nu)]$.

Каноническая форма матрицы (2.6) главных контуров имеет вид

$$P = \begin{matrix} & \text{I} & \text{IV} & \text{V} & \text{II} & \text{III} & \text{VI} \\ \begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{VI} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где матрица ρ главных контуров для ребер дерева

$$\rho = \begin{matrix} & \text{II} & \text{III} & \text{VI} \\ \begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{VI} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

[Определение] Циклы, образованные только ребрами задающих источ-

ников напряжения и ребрами емкостей, называют особыми циклами (рис. 2.13,а). [.]

[Определение] Сечения, образованные только ребрами задающих источников тока и ребрами индуктивностей, называют особыми сечениями (рис. 2.13,б). [.]

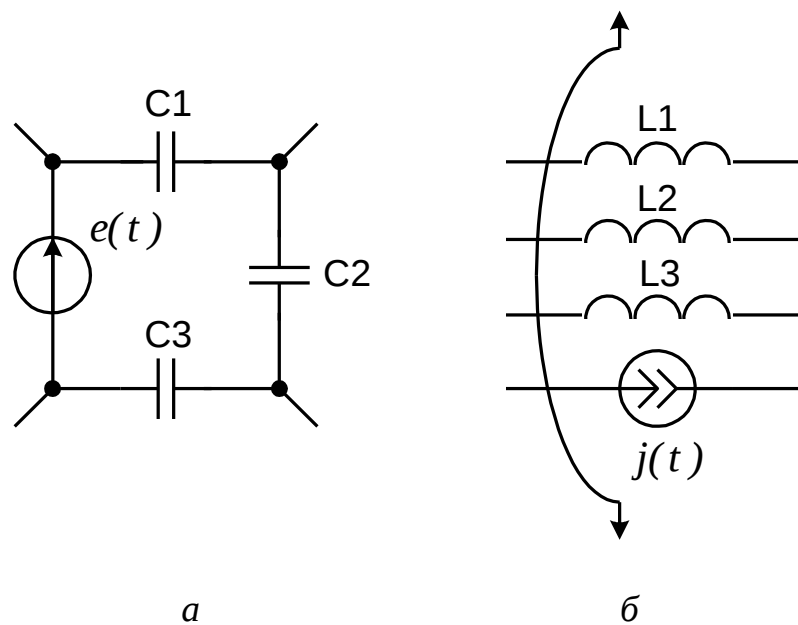


Рис. 2.13. Особый цикл (а) и особое сечение (б)

Число особых циклов и сечений можно установить из рассмотрения графа схемы. Для определения числа особых циклов формируется C -граф путем закорачивания всех независимых источников напряжения и короткозамкнутых дуг и удаления всех остальных ветвей, кроме емкостных ветвей. Число особых циклов совпадает с числом независимых циклов C -графа:

$$\sigma_c = \ell_c - v_c + n_c,$$

где ℓ_c , v_c , n_c – число дуг, вершин и частей C -графа соответственно.

Для определения числа особых сечений формируется L -граф путем удаления всех независимых источников тока и разомкнутых дуг и закорачива-

ния всех остальных ветвей, кроме индуктивных ветвей. Число особых сечений совпадает с числом независимых сечений L -графа:

$$v_L = v_L - n_L,$$

где v_L , n_L – число вершин и частей L -графа соответственно.

Структура полюсного графа электронной схемы может быть описана алгебраически с использованием топологических уравнений. Топологические уравнения полюсных графов электронных схем выражаются законами Кирхгофа. Топологические уравнения в матричной форме записываются с использованием топологических матриц полюсных графов электронных схем.

Матричная форма системы $v = v - n$ независимых уравнений, соответствующих первому закону Кирхгофа, имеет вид

$$A_0 \bar{I}_{\hat{a}} = \bar{0}, \quad (2.8)$$

где A_0 – сокращенная структурная матрица графа; $\bar{I}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} I_{\hat{a}1} \\ I_{\hat{a}2} \\ \dots \\ I_{\hat{a}l} \end{bmatrix}$ – вектор токов

всех l ветвей схемы (дуг графа).

Так как первый закон Кирхгофа справедлив не только для узлов схемы, но и для произвольной замкнутой области, которая включает некоторое число узлов, то система $v = v - n$ уравнений, соответствующих первому закону Кирхгофа, может быть записана с использованием матрицы независимых сечений Π графа схемы:

$$\Pi \bar{I}_{\hat{a}} = \bar{0}. \quad (2.9)$$

Система $\sigma = \ell - v + n$ независимых уравнений, соответствующих второму закону Кирхгофа, представляется матричным уравнением, записанным на основе матрицы P независимых контуров графа схемы:

$$P \bar{U}_{\hat{a}} = \bar{0}, \quad (2.10)$$

где $\bar{U}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} U_{\hat{a}1} \\ U_{\hat{a}2} \\ \dots \\ U_{\hat{a}\ell} \end{bmatrix}$ – вектор напряжений всех ℓ ветвей схемы (дуг графа).

Поскольку топологические уравнения записываются относительно системы независимых сечений и циклов, то сечения и циклы можно рассматривать как некоторую систему координат. Каждому независимому сечению можно привести в соответствие напряжение ребра фундаментального дерева (узловое напряжение), а каждому независимому циклу – контурный ток. Упорядоченная совокупность узловых напряжений образует V -мерный вектор

узловых напряжений $\bar{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_v \end{bmatrix}$, а упорядоченная совокупность контурных то-

ков образует σ -мерный вектор контурных токов $\bar{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{\sigma} \end{bmatrix}$.

Для главных сечений и контуров \bar{U} – это вектор напряжений ребер дерева графа, а \bar{I} – вектор токов хорд.

Токи и напряжения всех ребер графа могут быть определены через узловые напряжения и контурные токи с использованием топологических матриц графа электронной схемы.

Поскольку каждое ребро графа образует с ребрами фундаментального дерева замкнутый контур, напряжения ребер можно выразить по второму закону Кирхгофа через узловые напряжения. Совокупность ребер фундаментального дерева, образующих контур с некоторым ребром графа, определяется совокупностью сечений, инцидентных данному ребру, то есть ненулевыми

элементами соответствующего столбца матрицы сечений. Следовательно,

$$\bar{U}_{\hat{a}} = \Pi^T \bar{U}. \quad (2.11)$$

Если фундаментальное дерево является деревом графа, то вектор напряжений ребер можно разбить на субвектор напряжений ребер дерева \bar{U}_T

и субвектор напряжений хорд \bar{U}_N , то есть $\bar{U}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \bar{U}_T \\ \bar{U}_N \end{bmatrix}$. На основании (2.11) с

учетом (2.4) получаем

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_T \\ \bar{U}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi^T \end{bmatrix} \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \pi^T \bar{U} \end{bmatrix}.$$

Так как $\bar{U}_T = \bar{U}$, то

$$\bar{U}_N = \pi^T \bar{U}_T, \quad (2.12)$$

то есть напряжения хорд выражаются через напряжения ребер дерева с помощью матрицы главных сечений для хорд.

Ток ребра графа равен алгебраической сумме контурных токов, инцидентных данному ребру. Совокупность циклов, инцидентных данному ребру, определяется ненулевыми элементами соответствующего столбца матрицы независимых циклов, следовательно

$$\bar{I}_{\hat{a}} = P^T \bar{I}. \quad (2.13)$$

Если совокупность независимых циклов образована главными циклами относительно некоторого дерева графа, то вектор токов ребер можно разбить на субвектор токов ребер дерева \bar{I}_T и субвектор токов хорд \bar{I}_N , то есть

$\bar{I}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_T \\ \bar{I}_N \end{bmatrix}$. На основании (2.13) с учетом (2.7) получаем

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_T \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^T \\ 1 \end{bmatrix} \bar{I} = \begin{bmatrix} \rho^T \bar{I} \\ \bar{I} \end{bmatrix}.$$

Так как $\bar{I}_N = \bar{I}$, то

$$\bar{i}_T = \rho^T \bar{i}_N, \quad (2.14)$$

то есть токи ребер дерева выражаются через токи хорд с помощью матрицы главных циклов для ребер дерева.

Между матрицами сечений и циклов имеется взаимная связь, позволяющая по одной из них определить другую. Подставляя (2.13) в (2.9), получим $\Pi \rho^T \bar{i} = \bar{0}$ при произвольных значениях контурных токов. Следовательно,

$$\Pi \rho^T = \bar{0}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим $\rho \Pi^T \bar{U} = \bar{0}$ при произвольных значениях узловых напряжений. Следовательно,

$$\rho \Pi^T = \bar{0}. \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15) и (2.16) справедливы в общем случае, если под Π и ρ понимать соответственно матрицы произвольных независимых сечений и циклов, но при условии, что для обеих матриц принят один и тот же порядок следования ребер.

Для матриц главных сечений и главных циклов, сформированных по одному и тому же покрывающему дереву выражение (2.15) с учетом (2.4) и (2.7) принимает вид

$$[\bar{1} \quad \pi] \begin{bmatrix} \rho^T \\ \bar{1} \end{bmatrix} = \bar{0},$$

откуда следует

$$\pi = -\rho^T. \quad (2.17)$$

Транспонируя (2.17), получаем

$$\rho = -\pi^T. \quad (2.18)$$

2.3 Математические модели компонентов электронных схем

Электромагнитные процессы в электронных устройствах в общем случае характеризуются величинами, зависящими как от времени, так и от пространственных координат. Если размеры устройства много меньше длины

волны электромагнитных колебаний, то можно считать, что всякие изменения во времени электрических и магнитных величин распространяются в пределах устройства практически мгновенно. В этом случае свойства элементов устройства характеризуются сосредоточенными параметрами, само устройство рассматривают как электронную цепь с сосредоточенными параметрами, а состояние цепи описывают электрическими токами и напряжениями на отдельных участках. Если размеры устройства и длина волны электромагнитных колебаний соизмеримы, то временем распространения изменений электромагнитного поля пренебрегать нельзя, а электронное устройство необходимо рассматривать как электронную цепь с распределенными параметрами.

Существует большое разнообразие элементов электронных цепей, отличающихся принципом действия и характеристиками. Для упрощения и формализации анализа широко используется подход, состоящий в замене всего многообразия реальных элементов цепи сравнительно небольшим числом идеальных схемных компонентов, различные соединения которых отображают с необходимой степенью точности электронные цепи и их элементы.

Идеальные схемные компоненты

Идеальные схемные компоненты подразделяются на активные и пассивные. К активным компонентам относят независимые и управляемые источники энергии и сигналов. К пассивным компонентам относят компоненты, рассеивающие или накапливающие энергию.

Схемные компоненты могут быть двухполюсными и многополюсными, причем многополюсные могут представлять собой объединение более простых компонентов.

Если токи и напряжения на компонентах схемы связаны линейными за-

зависимостями, то такие компоненты называют линейными, а постоянные коэффициенты в этих зависимостях – их параметрами. Линейные компоненты, параметры которых являются функциями времени, получили отдельное название – параметрические. Компоненты, токи и напряжения которых связаны нелинейными зависимостями, называют нелинейными.

Идеальными активными двухполюсными компонентами являются *идеальный источник ЭДС* и *идеальный источник тока*. Их условные графические обозначения показаны на рис. 2.14.

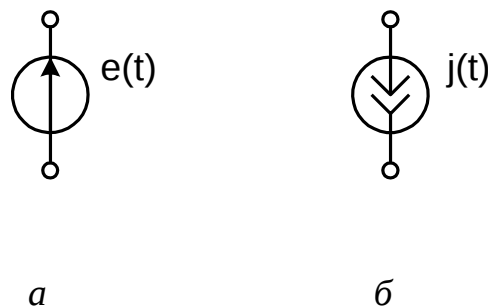


Рис. 2.14. Условное графическое обозначение идеального источника ЭДС (а) и идеального источника тока (б)

Идеальный источник ЭДС характеризуется задающей ЭДС $e(t)$, значение которой в любой момент времени не зависит от тока, протекающего через источник.

Идеальный источник тока характеризуется задающим током $j(t)$, значение которого в любой момент времени не зависит от напряжения на его полюсах.

Существует три типа пассивных двухполюсных схемных компонентов: *сопротивление, емкость и индуктивность*.

Сопротивление определяется вольт-амперной характеристикой, пред-

ставляющей зависимость между током и напряжением для каждого момента времени:

$$f_R(u, i) = 0. \quad (2.19)$$

Характеристика может иметь различный характер (рис. 2.15).

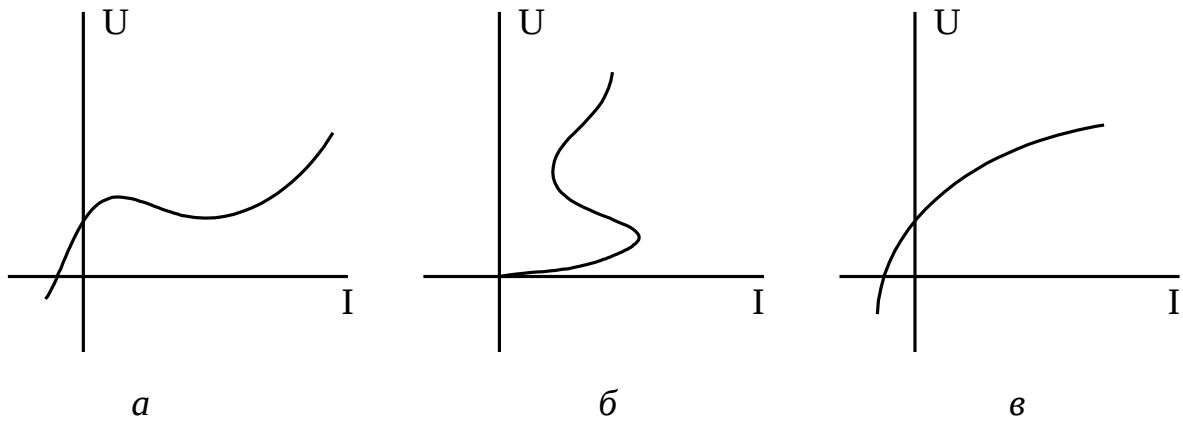


Рис. 2.15. Вольт-амперные характеристики сопротивлений:

a – управляемого током; *б* – управляемого напряжением;

в – взаимно определенного

Характеристика (рис. 2.15,*a*) является однозначной относительно изменения тока. Соответствующее ей сопротивление называется сопротивлением, управляемым током. Характеристика (рис. 2.15,*б*) является однозначной относительно изменения напряжения. Соответствующее ей сопротивление называется сопротивлением, управляемым напряжением. И, наконец, характеристика (рис. 2.15,*в*) является взаимно определенной относительно изменений и тока, и напряжения, а сопротивление, соответствующее этой характеристике называют взаимно определенным.

Емкость определяется вольт-кулонной характеристикой, связывающей заряд и напряжение для каждого момента времени:

$$f_C(q, u) = 0. \quad (2.20)$$

Индуктивность определяется вебер-амперной характеристикой, связывающей потокосцепление с током для каждого момента времени:

$$f_L(\psi, i) = 0. \quad (2.21)$$

По аналогии с характером зависимостей (рис. 2.15,а,б) различают емкости, управляемые зарядом или напряжением, а также индуктивности, управляемые потоком или током.

Статические параметры двухполюсных компонентов (статические сопротивления, емкости и индуктивности) определяются через координаты точек характеристик (2.19) – (2.21), а дифференциальные параметры (дифференциальные сопротивления, емкости и индуктивности) через тангенсы углов наклона этих характеристик к осям абсцисс.

Для линейных пассивных двухполюсных компонентов вольт-амперные характеристики являются линейными функциями, статические и дифференциальные параметры совпадают и называются сопротивлениями, емкостями и индуктивностями без уточнения характера параметров (статический или дифференциальный).

В достаточно малой окрестности некоторой точке характеристик дифференциальные параметры можно считать постоянными величинами, то есть для малых изменений токов, напряжений, зарядов и потоков относительно этой точки нелинейный двухполюсник можно рассматривать как линейный.

Вольт-амперные характеристики некоторых схемных компонентов могут не проходить через начало координат (рис. 2.15,а,в). Соответствующие компоненты получили название автономных двухполюсников.

Идеальными схемными компонентами, отображающими необратимость реальных компонентов электронных цепей, являются *зависимые источники тока и напряжения*. Различают четыре основных типа зависимых источников (рис. 2.16), каждый из которых управляется только одной величиной (током

или напряжением): *источник тока, управляемый током (ИТУТ)*; *источник тока, управляемый напряжением (ИТУН)*; *источник напряжения, управляемый током (ИНУТ)*; *источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН)*.

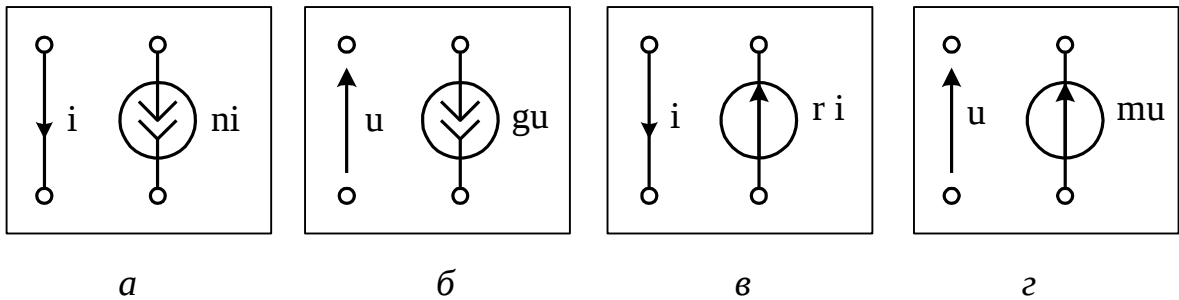


Рис. 2.16. Зависимые источники:

а – ИТУТ; *б* – ИТУН; *в* – ИНУТ; *г* – ИНУН

Зависимые источники являются многополюсными компонентами, включающими собственно источник и управляющий двухполюсник. Роль управляющего двухполюсника может играть любой двухполюсный компонент схемы, ток или напряжение которого управляет током или напряжением зависимого источника. В общем случае зависимым источником может управлять напряжение между любой парой узлов схемы, при этом управляющим двухполюсником является включенная между этими узлами разомкнутая ветвь, сопротивление которой стремится к бесконечности. Аналогично управляющим по току двухполюсником может служить короткозамкнутая ветвь, сопротивление которой равно нулю.

Величина (ток или напряжение), характеризующая зависимый источник, носит название *управляемой величины*, величина (ток или напряжение), связанная с управляющим двухполюсником называется *управляющей величиной*. Коэффициенты n , g , r , m являются *управляющими параметрами* зави-

СИМЫХ ИСТОЧНИКОВ.

Любую электронную схему или ее часть, рассматриваемую относительно определенного количества полюсов, можно обобщенно представить одним идеальным схемным компонентом – *многополюсником*. Многополюсник, у которого выделено N полюсов, называют N - *полюсником*. Любая пара полюсов многополюсника образует его *сторону*. Стороны, к которым приложены внешние воздействия в виде задающих токов или напряжений, называют *входами*. Стороны, на которых определяются реакции в виде искомых токов и напряжений, называют *выходами*. Электрическое состояние многополюсника характеризуется токами и напряжениями на его сторонах. Совокупность сторон, токи и напряжения которых являются линейно независимыми, называется *независимой*. Из N полюсов многополюсника можно образовать всего $\frac{N(N-1)}{2}$ различных сторон. Но только совокупности из $n = N-1$ сторон, не образующих замкнутых контуров, являются совокупностями независимых сторон. Многополюсник, у которого все независимые стороны имеют общий (базисный) полюс, называют $(n+1)$ -*полюсником* (рис. 2.17). Положительными для $(n+1)$ -полюсника полагают токи, втекающие в полюсы, и напряжения, направленные от общего полюса к остальным.

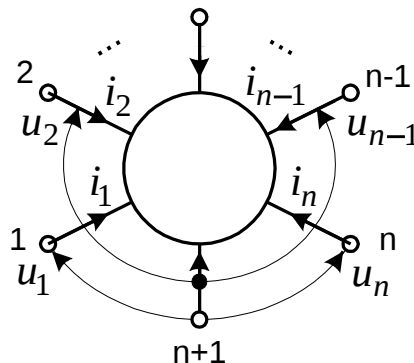


Рис. 2.17. Токи и напряжения $(n+1)$ -полюсника

В общем случае многополюсники можно рассматривать как $N \times M$ -полюсники, полюсы которые разбиты на M групп по N полюсов, причем каждая из групп содержит свой общий полюс. Среди многополюсников этого типа наиболее распространены $(2n)$ -полюсники (n -входники) и $(n \times 2)$ -полюсники (рис. 2.18).

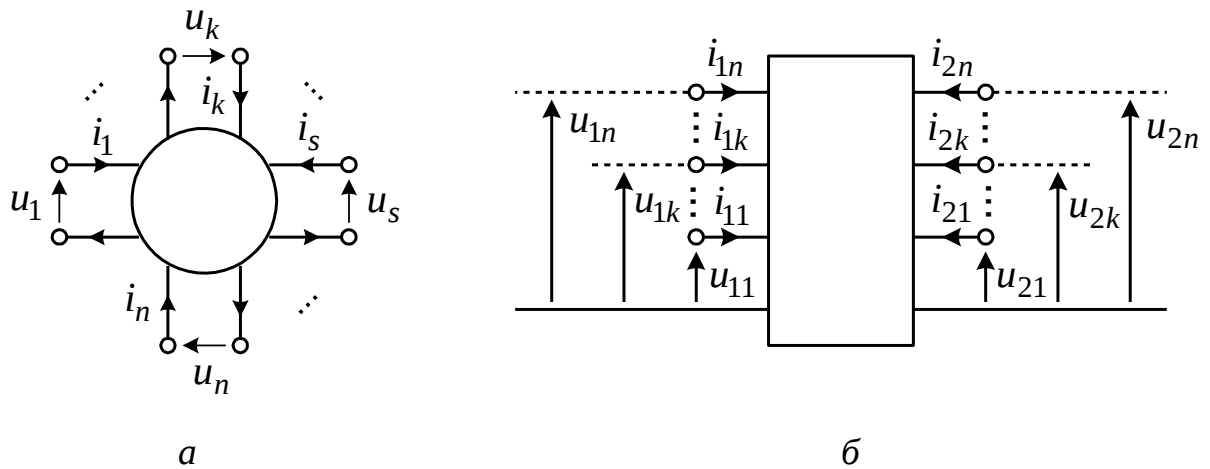


Рис. 2.18. Токи и напряжения $(2n)$ -полюсника (а) и $(n \times 2)$ -полюсника (б)

Частным случаем таких многополюсников являются (2×2) -полюсники (проходные четырехполюсники). Число независимых сторон для $N \times M$ -полюсника определяется формулой $n = (N-1)M$. Следовательно, (2×2) -полюсник имеет только две независимые стороны.

Для описания многополюсного компонента с n независимыми сторонами требуется n независимых уравнений, включающих $2n$ связанных с его сторонами переменных (токов и напряжений):

$$\begin{cases} \varphi_1(i_1, i_2, \dots, i_n, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0; \\ \varphi_2(i_1, i_2, \dots, i_n, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0; \\ \dots \\ \varphi_n(i_1, i_2, \dots, i_n, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Множество n токов i_1, i_2, \dots, i_n и n напряжений u_1, u_2, \dots, u_n независимых сторон многополюсника разбивают на два подмножества u_1, u_2, \dots, u_n и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ так, что в каждом из подмножеств каждая из независимых сторон представлена только одной своей переменной (током или напряжением). При этом систему уравнений (2.22) представляют в форме, разрешенной относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

$$\begin{cases} \xi_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n); \\ \xi_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n); \\ \dots \\ \xi_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{cases} \quad (2.23)$$

Переменные u_1, u_2, \dots, u_n называют основными, а переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – второстепенными. В соответствии с принятым разбиением переменных на две группы разбивают и стороны многополюсника. При этом стороны, для которых основными переменными являются токи, называют токовыми сторонами, а стороны, для которых основными переменными являются напряжения – потенциальными сторонами.

Для линейных многополюсников система уравнений (2.23) имеет вид

$$\begin{cases} \xi_1 = w_{11}u_1 + w_{12}u_2 + \dots + w_{1n}u_n + \xi_{10}; \\ \xi_2 = w_{21}u_1 + w_{22}u_2 + \dots + w_{2n}u_n + \xi_{20}; \\ \dots \\ \xi_n = w_{n1}u_1 + w_{n2}u_2 + \dots + w_{nn}u_n + \xi_{n0}. \end{cases} \quad (2.24)$$

и может быть представлена в матричной форме

$$\xi = w\gamma + \xi_0, \quad (2.25)$$

где $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ – вектор второстепенных переменных; $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ – вектор основных

переменных; $\xi_0 = \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \\ \dots \\ \xi_{n0} \end{bmatrix}$ – вектор начальных значений второстепенных пе-

ременных, определяемых в режимах короткого замыкания потенциальных сторон и холостого хода на токовых сторонах;

$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица эквивалентных параметров многополюсни-

ка.

Если все основные величины являются токами, а второстепенные – напряжениями, то все эквивалентные параметры W_{ij} являются сопротивлениями, а матрицу W называют матрицей сопротивлений многополюсника.

Если все основные величины являются напряжениями, а второстепенные – токами, то все эквивалентные параметры W_{ij} являются проводимостями, а матрицу W в этом случае называют матрицей проводимостей многополюсника.

Часто для описания N -полюсника удобно пользоваться системой уравнений, выражающих полюсные токи всех N полюсов i_1, i_2, \dots, i_N через напряжения полюсов, отсчитываемых от некоторой точки 0, лежащей вне N -полюсника (рис. 2.19,а)

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2 + \dots + y_{1N}u_N; \\ i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2 + \dots + y_{2N}u_N; \\ \dots \\ i_N = y_{N1}u_1 + y_{N2}u_2 + \dots + y_{NN}u_N. \end{cases} \quad (2.26)$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа для сечения, содержащего N -полюсник внутри, алгебраическая сумма токов всех N полюсов равна нулю, поэтому уравнения системы (2.26) являются линейно зависимыми. Матрица коэффициентов этих уравнений представляет собой *особенную (неопределенную) матрицу проводимостей* N -полюсного компонента:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{N1} & y_{N2} & \dots & y_{NN} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Сумма всех элементов в каждой строке и каждом столбце этой матрицы тождественно равна нулю. Таким образом, из N^2 элементов особенной матрицы проводимостей только $(N-1)^2$ элементов независимы.

В качестве величин, характеризующих состояние N -полюсника, можно выбрать напряжения e_1, e_2, \dots, e_N и токи j_1, j_2, \dots, j_N на N его сторонах, как указано на рис. 2.19,б. При этом система уравнений N -полюсника имеет вид

$$\begin{cases} e_1 = z_{11}j_1 + z_{12}j_2 + \dots + z_{1N}j_N; \\ e_2 = z_{21}j_1 + z_{22}j_2 + \dots + z_{2N}j_N; \\ \dots \\ e_N = z_{N1}j_1 + z_{N2}j_2 + \dots + z_{NN}j_N. \end{cases} \quad (2.28)$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для контура, содержащего

все N сторон N -полюсника, алгебраическая сумма напряжений N сторон равна нулю, поэтому уравнения системы (2.28) являются линейно зависимыми. Матрица коэффициентов этих уравнений представляет собой *особенную (неопределенную) матрицу сопротивлений N -полюсного компонента*:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{2N} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

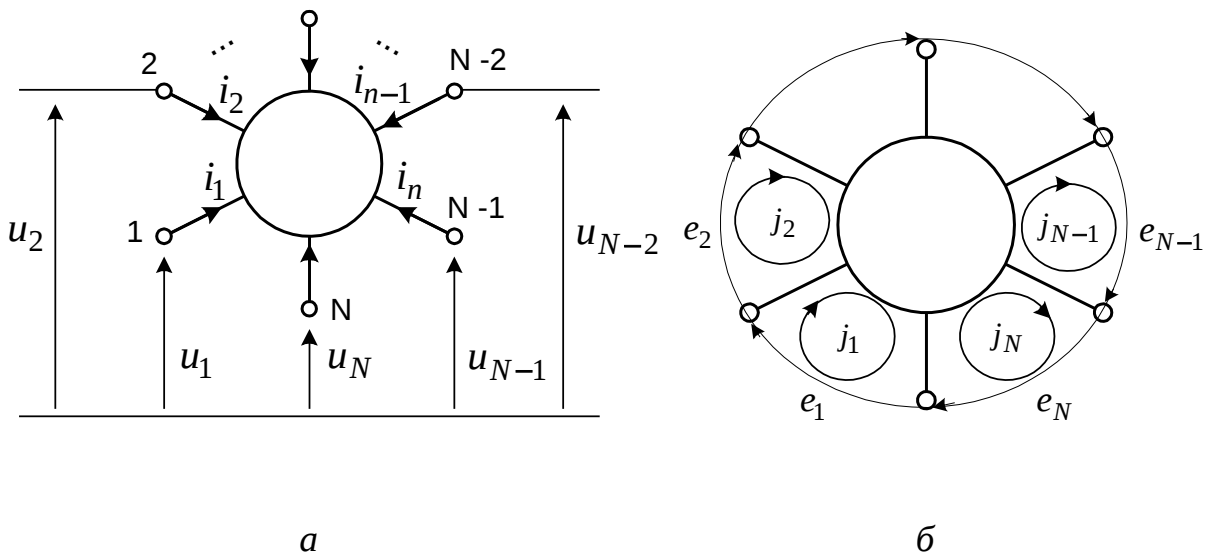


Рис. 2.19. Токи и напряжения многополюсника для неопределенной матрицы проводимостей (а) и неопределенной матрицы сопротивлений (б)

Сумма всех элементов в каждой строке и каждом столбце этой матрицы тождественно равна нулю. Таким образом, из N^2 элементов особенной матрицы сопротивлений только $(N-1)^2$ элементов независимы.

Эквивалентные схемы электронных компонентов

Электронные компоненты цепей (транзисторы, диоды, тиристоры, резисторы, конденсаторы и т.п.) могут быть представлены эквивалентными схемами, состоящими из идеальных схемных компонентов. В зависимости от режима работы электронной схемы и задачи исследования, эквивалентные схемы можно подразделить на следующие группы:

- низкочастотные линейные малосигнальные для квазилинейного режима на низких частотах;
- нелинейные постоянного тока для статического режима и больших низкочастотных сигналов;
- высокочастотные линейные малосигнальные для квазилинейного режима на высоких частотах;
- нелинейные универсальные для переходных режимов при больших сигналах.

Применение той или иной эквивалентной схемы чаще всего является результатом выбора наилучшего компромисса между двумя противоречивыми требованиями: достаточно высокой степенью точности отображения реальных процессов и предельной простоты модели. Использование при анализе электронных схем универсальных эквивалентных схем, снимает этот вопрос, но при этом решение сравнительно простых задач неоправданно усложняется. Поэтому представление электронных компонентов их эквивалентными схемами различных уровней является оправданным.

Компонентные уравнения

Каждому из ребер полюсного графа электронной схемы соответствует уравнение двухполюсного или многополюсного компонента (компонентное уравнение).

[Определение] В зависимости от вида компонентных уравнений ребра разбивают на два подмножества: Y -ребра (уравнения выражают токи) и Z -ребра (уравнения выражают напряжения). Ребра, уравнения которых записываются как для токов, так и для напряжений, называют взаимно определенными. [.]

Отнесение ребра к одному из двух подмножеств зависит от его характера, связи с другими ребрами и процедуры формирования уравнений схемы. В общем случае токи Y -ребер и напряжения Z -ребер могут зависеть от токов и напряжений любых ребер графа, а также от задающих токов и напряжений. Поэтому компонентные уравнения ребер графа электронной схемы можно записать в виде:

$$\begin{cases} \bar{I}_Y = Y_{\hat{a}} \bar{U}_Y + N \bar{I}_Z + N' \bar{I}_Y + G' \bar{U}_Z + \bar{J}_{\hat{a}}, \\ \bar{U}_Z = M \bar{U}_Y + Z_{\hat{a}} \bar{I}_Z + R' \bar{I}_Y + M' \bar{U}_Z + \bar{E}_{\hat{a}}, \end{cases} \quad (2.30)$$

где \bar{I}_Y, \bar{I}_Z – векторы токов Y -ребер и Z -ребер; \bar{U}_Y, \bar{U}_Z – векторы напряжений Y -ребер и Z -ребер; $\bar{J}_{\hat{a}}$ – вектор задающих токов; $\bar{E}_{\hat{a}}$ – вектор задающих ЭДС.

Уравнения (2.30) можно объединить в одно обобщенное компонентное уравнение:

$$X'' = VX' + V'X'' + F$$

или

$$(\bar{1} - V')X'' = VX' + F, \quad (2.31)$$

где векторы X' и X'' выражаются через векторы токов и напряжений Y - и Z -ребер:

$$X' = \begin{bmatrix} \bar{U}_Y \\ \bar{I}_Z \end{bmatrix}; \quad X'' = \begin{bmatrix} \bar{I}_Y \\ \bar{U}_Z \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Обобщенные компонентные матрицы V, V' и задающий вектор F имеют вид:

$$V = \begin{bmatrix} Y_{\hat{a}} & N \\ M & Z_{\hat{a}} \end{bmatrix}, \quad V' = \begin{bmatrix} N' & G' \\ R' & M' \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \bar{J}_{\hat{a}} \\ \bar{E}_{\hat{a}} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Элементами компонентных матриц являются параметры компонентов схемы. При этом в подматрицу $Y_{\hat{a}}$ входят проводимости Y -двухполюсников и управляющие проводимости зависимых источников тока, управляемых напряжениями Y -ребер, а в подматрицу $Z_{\hat{a}}$ – сопротивления Z -двухполюсников и управляющие сопротивления зависимых источников напряжения, управляемых токами Z -ребер. Элементами остальных подматриц являются соответствующие управляющие параметры зависимых источников.

Обобщенное компонентное уравнение (2.31) можно упростить, если предположить, что Y -ребра могут быть управляющими только по напряжению, а Z -ребра – управляющими только по току. Тогда $V' = \bar{0}$ и (2.31) приводится к виду

$$X'' = VX' + F. \quad (2.34)$$

Если искомые токи и напряжения не совпадают с токами и напряжениями каких-либо ветвей схемы, вводят специальные ребра искомых величин – короткозамкнутые для токов (рис. 2.20,б) и разомкнутые для напряжений (рис. 2.20,а). Их уравнения имеют вид:

$$U_z = 0; \quad I_y = 0. \quad (2.35)$$

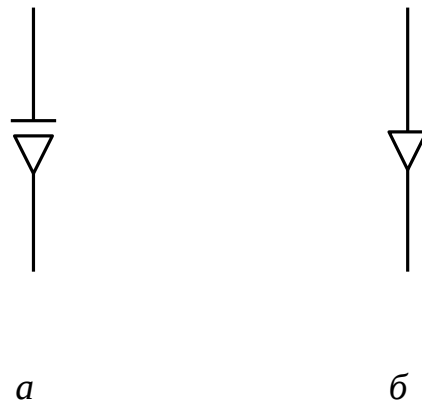


Рис. 2.20. Условные изображения разомкнутого (а) и короткозамкнутого (б)

ребер полюсных графов

Следует отметить, что выражения (2.30) могут применяться для описания нелинейных компонентных уравнений

$$\begin{cases} I_y = f(U_y, I_z, I_y, U_z, J_{\hat{a}}); \\ U_z = \varphi(U_y, I_z, I_y, U_z, E_{\hat{a}}). \end{cases} \quad (2.36)$$

Их линеаризацией, при этом элементы компонентных матриц V , V' определяются частными производными выражений (2.36) и являются переменными величинами.

Рассмотрим формирование компонентных уравнений на примере схемы замещения электронной цепи, представленной на рис. 2.21.

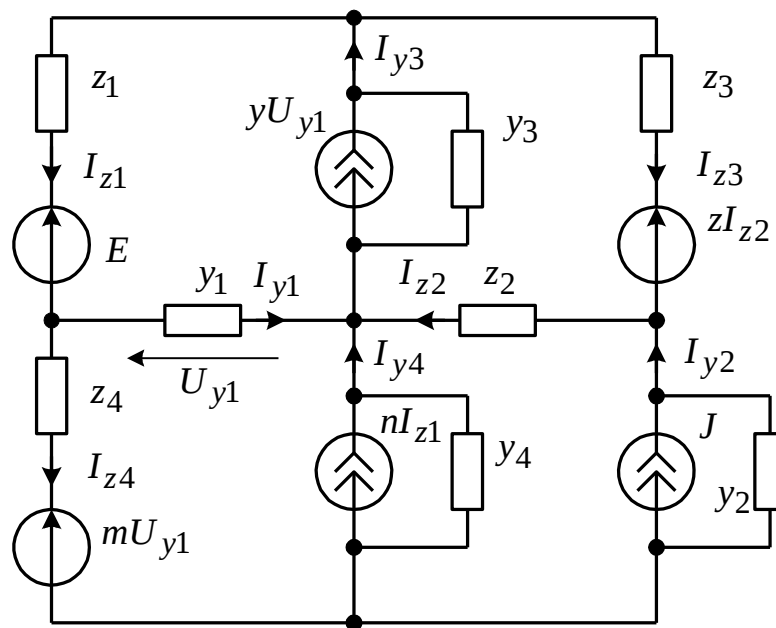


Рис. 2.21. Схема замещения электронной цепи

Компонентные уравнения для y -ребер:

$$I_{y1} = y_1 U_{y1};$$

$$I_{y2} = y_2 U_{y2} + J;$$

$$I_{y_3} = y_3 U_{y_3} + y U_{y_1};$$

$$I_{y_4} = y_4 U_{y_4} + n I_{z_1}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} I_{y_1} \\ I_{y_2} \\ I_{y_3} \\ I_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 \\ y & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{y_1} \\ U_{y_2} \\ U_{y_3} \\ U_{y_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{z_1} \\ I_{z_2} \\ I_{z_3} \\ I_{z_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Компонентные уравнения для z-ребер:

$$U_{z_1} = z_1 I_{z_1} + E;$$

$$U_{z_2} = z_2 I_{z_2};$$

$$U_{z_3} = z_3 I_{z_3} + z I_{z_2};$$

$$U_{z_4} = z_4 I_{z_3} + m U_{y_1}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} U_{z_1} \\ U_{z_2} \\ U_{z_3} \\ U_{z_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{y_1} \\ U_{y_2} \\ U_{y_3} \\ U_{y_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{z_1} \\ I_{z_2} \\ I_{z_3} \\ I_{z_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Из уравнений (2.37) и (2.38) следует, что

$$\bar{I}_y = \begin{bmatrix} I_{y_1} \\ I_{y_2} \\ I_{y_3} \\ I_{y_4} \end{bmatrix}, \quad \bar{U}_y = \begin{bmatrix} U_{y_1} \\ U_{y_2} \\ U_{y_3} \\ U_{y_4} \end{bmatrix}, \quad \bar{U}_z = \begin{bmatrix} U_{z_1} \\ U_{z_2} \\ U_{z_3} \\ U_{z_4} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_z = \begin{bmatrix} I_{z_1} \\ I_{z_2} \\ I_{z_3} \\ I_{z_4} \end{bmatrix},$$

$$Y_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 \\ y & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix}, \quad E_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а обобщенное компонентное уравнение имеет вид (2.34).

2.4 Полные уравнения электронных схем и их преобразования

Если столбцы топологических матриц расположить в таком порядке, чтобы сначала следовали столбцы у-ребер, а затем – столбцы z-ребер, то топологические матрицы можно представить через подматрицы для каждого из подмножеств ребер в виде:

$$\Pi = [\Pi_y \Pi_z], \quad P = [P_y P_z].$$

При этом топологические уравнения (2.9) и (2.10) будут иметь вид:

$$[\Pi_y \Pi_z] \begin{bmatrix} I_y \\ I_z \end{bmatrix} = \bar{0}, \quad [P_y P_z] \begin{bmatrix} U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \bar{0}.$$

Эти два уравнения можно объединить в одно матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \Pi_y & \bar{0} \\ \bar{0} & P_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \Pi_z \\ P_y & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix} = \bar{0}.$$

или

$$\Theta X'' + \Theta_1 X' = \bar{0}, \quad (2.39)$$

где топологические матрицы имеют вид

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_y & 0 \\ 0 & P_z \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \Pi_z \\ P_y & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Уравнение (2.39) является *обобщенным топологическим уравнением графа*, отображающим его структуру в алгебраической матричной форме. Независимо от характера компонентов схемы оно всегда линейное. Матрицы Θ и Θ_1 , называемые обобщенными топологическими матрицами, являются квадратными матрицами ℓ -го порядка с элементами, равными $+1, -1, 0$.

Вместе с обобщенным компонентным уравнением (2.34) обобщенное топологическое уравнение (2.39) образует полную систему уравнений графа:

$$\begin{cases} X'' = VX' + F, \\ \Theta X'' + \Theta_1 X' = \bar{0}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Эта система уравнений соответствует 2ℓ скалярным уравнениям, причем первое уравнение отражает ℓ компонентных уравнений, а второе ℓ уравнений равновесия относительно выбранной системы координат (независимых сечений и контуров).

Решив систему (2.41), можно определить векторы X' и X'' , то есть токи и напряжения всех ребер графа.

Недостатком полной системы уравнений является высокий порядок.

В ряде случаев систему (2.41) целесообразно свести к системе более низкого порядка.

[Внимание] В зависимости от используемого способа понижения порядка можно получить системы уравнений трех видов: *координатные уравнения для ветвей (КВ-уравнения), координатные уравнения для координат (КК-уравнения), уравнения ветвей для координат (ВК-уравнения)*. [.]

Координатные уравнения для ветвей

Для получения КВ-уравнений необходимо обобщенное компонентное уравнение полной системы уравнений подставить в обобщенное топологическое уравнение. В результате получим

$$\Theta(VX' + F) + \Theta_1 X' = \bar{0}$$

или

$$W'X' = Q', \quad (2.42)$$

где

$$W' = \Theta V + \Theta_1, \quad Q' = -\Theta F. \quad (2.43)$$

Матрица W' называется матрицей эквивалентных параметров в системе КВ-уравнений. Она является квадратной матрицей ℓ -го порядка, отображает как свойства компонентов, так и способ их соединения и, по существу, является обобщенным матричным параметром схемы.

Вектор Q' носит название вектора эквивалентных внешних воздействий, является обобщенным матричным параметром схемы и характеризует воздействие на схему задающих источников.

Определив из системы КВ-уравнений вектор X' , можно при необходимости найти вектор X'' . Таким образом, задача сводится к решению системы ℓ скалярных уравнений, то есть использование КВ-уравнений позволяет вдвое сократить размерность математической модели по сравнению с полной системой уравнений.

Название «координатные уравнения для ветвей» обусловлено тем, что сами уравнения записаны относительно выбранной системы координат (сечений и контуров), а искомые переменные связаны с ветвями схемы.

Координатные уравнения для координат

Для получения КК-уравнений необходимо элементы вектора X' в КВ-уравнениях выразить через координатные переменные (узловые напряжения и контурные токи).

Вектор X'' выражается через координатные переменные с помощью соотношений (2.11), (2.13):

$$X' = \begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_y^T U \\ P_z^T I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_y^T & \bar{0} \\ \bar{0} & P_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \Theta^T X, \quad (2.44)$$

где $X = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}$ — вектор координатных переменных.

Подставляя вектор X'' из (2.44) в (2.42), получаем

$$W' \Theta^T X = Q',$$

то есть приходим к уравнению

$$WX = Q, \quad (2.45)$$

где

$$\begin{aligned} W &= W' \Theta^T = \Theta V \Theta^T + \Theta_1 \Theta^T = \Theta V \Theta^T + \Theta_0; \\ Q &= Q' = -\Theta F. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Матрица W носит название матрицы эквивалентных параметров схемы в системе КК-уравнений и является, как и матрица W' , обобщенным матричным параметром схемы.

КК-уравнения позволяют найти узловые напряжения и контурные токи (вектор X), по которым в свою очередь можно определить токи и напряжения всех ветвей схемы. При этом элементы вектора X'' связаны с координат-

ными переменными соотношением

$$X'' = \begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_y^T U \\ \Pi_z^T I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & P_y^T \\ \Pi_z^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \Theta_1^T X, \quad (2.47)$$

а составляющие вектора X' — соотношением (2.44).

Название «координатные уравнения для координат» обусловлено тем, что и уравнения и искомые переменные связаны с выбранной системой координат (сечений и контуров).

Таким образом, как и в случае КВ-уравнений, использование КК-уравнений обеспечивает сокращение числа переменных по сравнению с полной системой уравнений. При этом существуют специальные приемы выбора системы координат, позволяющие уменьшить размерность КК-уравнений более чем в два раза по отношению к полной системе уравнений.

Уравнения ветвей для координат

Для получения ВК-уравнений необходимо в обобщенном компонентном уравнении системы (2.41) элементы векторов X'' и X' выразить через координатные переменные (узловые напряжения и контурные токи), используя выражения (2.44) и (2.47):

$$\Theta_1^T X = V\Theta^T X + F,$$

откуда после элементарных преобразований имеем

$$(V\Theta^T - \Theta_1^T)X = -F.$$

Таким образом, приходим к уравнению схемы в виде

$$W''X = Q'', \quad (2.48)$$

где

$$W'' = V\Theta^T - \Theta_1^T, \quad Q'' = -F. \quad (2.49)$$

Матрица W'' называется матрицей эквивалентных параметров в системе ВК-уравнений. Она является квадратной матрицей ℓ -го порядка, отображает как свойства компонентов, так и способ их соединения и, по существу, является обобщенным матричным параметром схемы.

Вектор Q'' носит название вектора эквивалентных внешних воздействий, является обобщенным матричным параметром схемы и характеризует воздействие на схему задающих источников.

ВК-уравнения позволяют найти узловые напряжения и контурные токи (вектор X), по которым в свою очередь можно определить токи и напряжения всех ветвей схемы, используя выражения (2.44) и (2.47).

Название «уравнения ветвей для координат» обусловлено тем, что уравнения представляют собой компонентные уравнения ребер графа, а искомые переменные связаны с выбранной системой координат (сечений и контуров). При этом первые ℓ_y уравнений являются компонентными уравнениями y -ветвей, а последние ℓ_z уравнений – компонентными уравнениями z -ветвей.

Понятие и виды координатного базиса

[Определение] Координатный базис представляет собой систему независимых фазовых переменных, называемых координатами, через линейную комбинацию которых может быть выражена любая фазовая переменная моде-

лируемого объекта. [.]

Количество координат базиса определяет его размерность μ .

При математическом описании электронных схем в качестве координат используют узловые напряжения, контурные токи и переменные состояния. Комбинации указанных координат образуют различные типы координатных базисов:

1. Полный координатный базис (ПКБ), образованный всеми независимыми узловыми напряжениями и контурными токами. Размерность ПКБ определяется выражением $\mu_{\text{ПКБ}} = \nu + \sigma = \ell$. При математическом моделировании ПКБ применяется для формирования всех видов уравнений электронных схем: КВ-уравнений, КК-уравнений и ВК-уравнений.

2. Сокращенный гибридный координатный базис (СГКБ), образованный узловыми напряжениями всех независимых невырожденных сечений и контурными токами всех независимых невырожденных циклов. При этом вырожденными называют сечения, образованные только Z-дугами (Z-сечения) и циклы, образованные только Y-дугами (Y-циклы). Количество вырожденных сечений $\nu_{\hat{a}}$ и циклов $\sigma_{\hat{a}}$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\nu_{\hat{a}} &= n_Y - n, & \sigma_{\hat{a}} &= \ell_Y - \nu + n_Y, \\ \mu_{\hat{a}} &= \nu_{\hat{a}} + \sigma_{\hat{a}} = \ell_Y + 2n_Y - \nu - n,\end{aligned}$$

где n_Y – количество компонентов графа, полученного из исходного путем размыкания всех Z-ребер. В результате размерность СГКБ уменьшается по отношению к ПКБ на величину $\mu_{\hat{a}}$ и составляет

$$\mu_{\text{СГКБ}} = \mu_{\text{ПКБ}} - \mu_{\hat{a}} = \ell_Z + \nu - 2n_Y + n.$$

В СГКБ формируются только КК-уравнения.

3. Контурный координатный базис (ККБ), образованный только контурными токами независимых циклов. Поскольку все координаты базиса имеют одинаковую физическую природу (все относятся к токам циклов), ККБ является однородным координатным базисом. Контурный базис представляет

собой предельный случай СГКБ, когда все ребра полюсного графа отнесены к Z-ребрам (все сечения оказываются вырожденными). Размерность ККБ определяется выражением $\mu_{\text{ККБ}} = \sigma = \ell - \nu + n$. В ККБ формируются только КК-уравнения.

4. Узловой координатный базис (УКБ), образованный только узловыми напряжениями независимых сечений. Узловой координатный базис, как и контурный, является однородным и также представляет собой предельный случай СГКБ, когда все ребра полюсного графа отнесены к U-ребрам (все циклы оказываются вырожденными). Размерность УКБ определяется выражением $\mu_{\text{УКБ}} = \nu = \nu - n$. В УКБ формируются только КК-уравнения.

5. Расширенная система координат (РСК), образованная узловыми напряжениями и контурными токами главных сечений и циклов, соответствующих покрывающему дереву, которое удовлетворяет специальным требованиям. Такое покрывающее дерево должно содержать все U-ребра полюсного графа и только их (все Z-ребра должны входить в дополнение дерева). В общем случае размерность РСК увеличивается по сравнению с ПКБ, если полюсный граф содержит вырожденные сечения и циклы. Использование РСК обуславливает приведение КВ-, КК- и ВК-уравнений к единой форме, которая имеет наиболее простые соотношения для матрично-векторных параметров.

6. Базис переменных состояния (БПС), образованный напряжениями всех емкостей, не образующих особых циклов, и токами всех индуктивностей, не образующих особых сечений. Количество особых сечений и циклов соотношением $\mu_0 = \sigma_C + \nu_L = l_C - \nu_C + n_C + \nu_L - n_L$. Тогда размерность БПС равна разности между числом реактивных дуг и числом особых циклов и сечений, то есть

$$\begin{aligned} \mu_{\text{БПС}} &= l_C + l_L - \mu_0 = l_C + l_L - (l_C - \nu_C + n_C + \nu_L - n_L) = \\ &= (\nu_C - n_C) + (l_L - \nu_L + n_L) = \nu_C + \sigma_L. \end{aligned}$$

Базис переменных состояния применяется при математическом описании электронных схем во временной области.

**Координатные уравнения для координат
в узловом координатном базисе (узловые уравнения)**

При использовании узлового координатного базиса полюсный граф схемы содержит только U -ребра, поэтому все контуры вырождаются, что приводит к вырождению матриц N , M , $Z_{\hat{a}}$, $E_{\hat{a}}$, Π_Z , $P = [P_Y P_Z]$, Θ_1 . В результате компонентные и топологические матрицы, а также задающие векторы принимают вид:

$$\begin{aligned} V &= Y_{\hat{a}} = Y_Y, & F &= J_{\hat{a}}, \\ \Pi &= \Pi_Y, & \Theta &= \Pi_Y = \Pi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

В этом случае матрично-векторные параметры в уравнениях типа КК запишутся:

$$W = Y = \Pi Y_{\hat{a}} \Pi^T; \quad Q = J = -\Pi J_{\hat{a}}, \quad (2.51)$$

где Y — матрица эквивалентных проводимостей схемы; J — вектор задающих токов сечений.

Вектор искоемых переменных X содержит узловые напряжения ($X = U$), а сами уравнения типа КК называются *узловыми уравнениями* и записываются в виде

$$YU = J. \quad (2.52)$$

Узловое уравнение соответствует $v = v - n$ скалярным уравнениям, а вектор U играет роль вектора состояния и содержит V узловых напряжений.

Определив из (2.52) узловые напряжения

$$U = Y^{-1}J, \quad (2.53)$$

можно найти напряжения и токи ветвей схемы по формулам:

$$U_{\hat{a}} = \Pi^T U, \quad (2.54)$$

$$I_{\hat{a}} = Y_{\hat{a}} U_{\hat{a}} + J_{\hat{a}}. \quad (2.55)$$

В общем случае матрица проводимостей Y несимметрична. Для обратимых схем, компонентные матрицы $Y_{\hat{a}}$ которых симметричны ($Y_{\hat{a}} = Y_{\hat{a}}^T$), матрица Y также симметрична ($Y = Y^T$).

Наиболее простой вид матрично-векторные параметры принимают в канонической системе сечений. Поскольку в канонической системе сечений между вершинами графа и независимыми сечениями существует взаимно однозначное соответствие, для выбора канонической системы сечений достаточно выбрать базисную вершину и пронумеровать остальные вершины от 1 до V .

Для канонической системы сечений матрица сечений Π совпадает с сокращенной структурной матрицей A_0 , образованной из структурной матрицы A вычеркиванием строки, которая соответствует базисной вершине ($\Pi = A_0$).

Координатные уравнения для координат в контурном координатном базисе (контурные уравнения)

При использовании контурного координатного базиса полюсный граф

схемы содержит только Z-ребра, поэтому все сечения вырождаются, что приводит к вырождению матриц N , M , $Y_{\hat{a}}$, $J_{\hat{a}}$, P_Y , $\Pi = [\Pi_Y \Pi_Z]$, Θ_1 . В результате компонентные и топологические матрицы, а также задающие векторы принимают вид:

$$V = Z_{\hat{a}} = Z_Z, \quad F = E_{\hat{a}}, \quad P = P_Z, \quad \Theta = P_Z = P. \quad (2.56)$$

В этом случае матрично-векторные параметры в уравнениях типа КК запишутся:

$$W = Z = PZ_{\hat{a}}P^T; \quad Q = E = -PE_{\hat{a}}, \quad (2.57)$$

где Z – матрица сопротивлений схемы; E – вектор задающих контурных ЭДС.

Вектор искомых переменных X содержит контурные токи ($X = I$), а сами уравнения типа КК называются *контурными уравнениями* и записываются в виде

$$ZI = E. \quad (2.58)$$

Контурное уравнение соответствует $\sigma = \ell - v + n$ скалярным уравнениям, а вектор I играет роль вектора состояния и содержит σ контурных токов.

Определив из (2.58) контурные токи

$$I = Z^{-1}E, \quad (2.59)$$

можно найти напряжения и токи ветвей схемы по формулам:

$$I_{\hat{a}} = P^T I, \quad (2.60)$$

$$U_{\hat{a}} = Z_{\hat{a}} I_{\hat{a}} + E_{\hat{a}}. \quad (2.61)$$

В общем случае матрица сопротивлений Z несимметрична. Для обратимых схем, компонентные матрицы $Z_{\hat{a}}$ которых симметричны ($Z_{\hat{a}} = Z_{\hat{a}}^T$), матрица Z также симметрична ($Z = Z^T$).

Наиболее простой вид матрично-векторные параметры принимают в канонической системе циклов.

Методы формирования узловых и контурных уравнений

Матрично-векторные параметры узловых и контурных уравнений могут быть сформированы непосредственно по схемам замещения электронных цепей.

[Внимание] Для этого находят применение два метода: *метод эквивалентных схем в матричной форме и обобщенный матричный метод*. [.]

Метод эквивалентных схем в матричной форме предполагает формирование матрично-векторных параметров по схемам замещения, содержащим только двухполюсные компоненты. При этом в качестве моделей активных многополюсных компонентов используют линейные малосигнальные эквивалентные схемы. Обобщенный матричный метод основан на формировании матрично-векторных параметров по схеме замещения, содержащей активные многополюсники, в качестве моделей которых выступают неопределенные матрицы проводимостей или сопротивлений.

Метод эквивалентных схем в матричной форме

Формирование матрично-векторных параметров узловых и контурных уравнений методом эквивалентных схем включает следующие этапы:

- составление схемы замещения электронной цепи;
- замещение активных многополюсных компонентов схемы замещения линейными малосигнальными эквивалентными схемами, содержащими пассивные двухполюсники и зависимые источники;
- преобразование зависимых источников к требуемому типу;
- выбор однородной системы координат (независимых сечений или контуров);
- формирование матрицы эквивалентных параметров (проводимостей или сопротивлений);
- формирование вектора эквивалентных воздействий (задающих токов сечений или контурных ЭДС).

Выбор типа координатного базиса определяется стремлением минимизировать количество координат, а, следовательно, и размерность матрично-векторных параметров. В случае, если $V < \sigma$ целесообразно использовать узловой координатный базис, в противном случае – контурный. Другим фактором, влияющим на выбор типа координатного базиса, является планарность исследуемой схемы. Для непланарных схем выбор узлового базиса является предпочтительным. Кроме того, при выборе типа координатного базиса целесообразно учитывать характер активных электронных компонентов схемы. Так, например, физические эквивалентные схемы биполярных транзисторов являются более удобными для применения контурного координатного базиса. В то же время физические эквивалентные схемы полевых транзисторов предпочтительнее для применения узлового базиса.

В узловом координатном базисе желательно использовать эквивалентные схемы активных электронных компонентов, которые не содержат внутренних узлов, а в качестве зависимых источников содержат только зависимые

источники тока, управляемые напряжением. В контурном координатном базисе целесообразно использовать эквивалентные схемы активных электронных компонентов, которые не содержат внутренних контуров, а в качестве зависимых источников содержат только зависимые источники напряжения, управляемые током.

В узловом координатном базисе все компоненты схемы замещения должны быть представлены как u -компоненты: независимые источники – как источники тока, зависимые источники – как источники тока, управляемые напряжением, пассивные двухполюсники – операторными проводимостями. В контурном координатном базисе все компоненты схемы замещения должны быть представлены как Z -компоненты: независимые источники – как источники напряжения, зависимые источники – как источники напряжения, управляемые током, пассивные двухполюсники – операторными сопротивлениями.

Для упрощения формирования матрично-векторных параметров рекомендуется выбирать канонические системы независимых сечений и контуров. При этом необходимо учитывать, что каноническая система сечений может быть выбрана для любой электронной схемы, а каноническая система контуров – только для планарных схем.

Матрица проводимостей электронной схемы является квадратной матрице V -го порядка, строки и столбцы которой соответствуют независимым сечениям. Элементы U_{ij} главной диагонали матрицы проводимостей в канонической системе сечений представляют собой *собственные проводимости соответствующих узлов*. Собственная проводимость узла по величине равно сумме проводимостей ветвей, инцидентных данному узлу. Недиagonальные элементы матрицы проводимостей в канонической системе сечений представляют собой *взаимные проводимости узлов*, взятые со знаком «минус». Взаимная проводимость U_{ij} определяется как сумма проводимостей ветвей, включенных между узлами i и j . Зависимый источник тока, управ-

ляемый напряжением, отображается в матрице проводимостей его управляющей проводимостью. Управляющая проводимость располагается на пересечении строк, определяемых номерами узлов, между которыми включен сам зависимый источник тока, и столбцов, определяемых номерами узлов, между которыми действует управляющее напряжение. При добавлении управляющей проводимости к элементу матрицы U_{ks} знак проводимости изменяется на противоположный, если направление зависимого источника относительно k -го узла и направление управляющей величины (напряжения) относительно s -го узла характеризуются одинаково. Если направление зависимого источника относительно k -го узла и направление управляющей величины (напряжения) относительно s -го узла характеризуются различно, то знак управляющей проводимости остается без изменений.

Вектор задающих токов сечений содержит V элементов. Элемент J_j вектора представляет собой алгебраическую сумму задающих токов независимых источников, инцидентных i -му узлу схемы. Если задающий ток направлен от i -го узла, то знак задающего тока изменяется на противоположный.

Матрица сопротивлений электронной схемы является квадратной матрице σ -го порядка, строки и столбцы которой соответствуют независимым контурам. Элементы Z_{ij} главной диагонали матрицы сопротивлений представляют собой *собственные сопротивления соответствующих контуров*. Собственное сопротивление контура по величине равно сумме сопротивлений ветвей, входящих в контур. Недиагональные элементы Z_{ij} матрицы сопротивлений представляют собой *взаимные сопротивления контуров*. Взаимное сопротивление Z_{ij} определяется как сумма сопротивлений ветвей, одновременно принадлежащих контурам i и j . Знак, с которым взаимное сопротивление вводится в матрицу, определяется взаимной ориентацией положительных направлений обхода контуров i и j относительно взаимного

сопротивления. При различных направлениях контуров относительно взаимного сопротивления оно вводится в матрицу со знаком «минус», в противном случае – со знаком «плюс». Зависимый источник напряжения, управляемый током, отображается в матрице сопротивлений его управляющим сопротивлением. Управляющее сопротивление располагается на пересечении строк, определяемых номерами контуров, в которые входит сам зависимый источник напряжения, и столбцов, определяемых номерами контуров, в которые входит управляющая ветвь. При добавлении управляющего сопротивления к элементу матрицы Z_{ks} знак сопротивления изменяется на противоположный, если направление зависимого источника относительно k -го контура и направление управляющей величины (тока) относительно s -го контура характеризуются одинаково. Если направление зависимого источника относительно k -го контура и направление управляющей величины (тока) относительно s -го контура характеризуются различно, то знак управляющего сопротивления остается без изменений.

Вектор контурных ЭДС содержит σ элементов. Элемент E_i вектора представляет собой алгебраическую сумму задающих ЭДС независимых источников, инцидентных i -му контуру схемы. Если задающая ЭДС направлена против положительного направления обхода i -го контура, то знак задающей ЭДС изменяется на противоположный.

Рассмотрим применение метода эквивалентных схем для формирования матрично-векторных параметров узловых уравнений на примере схемы истокового повторителя с повышенным входным сопротивлением, представленной на рис. 2.22,а.

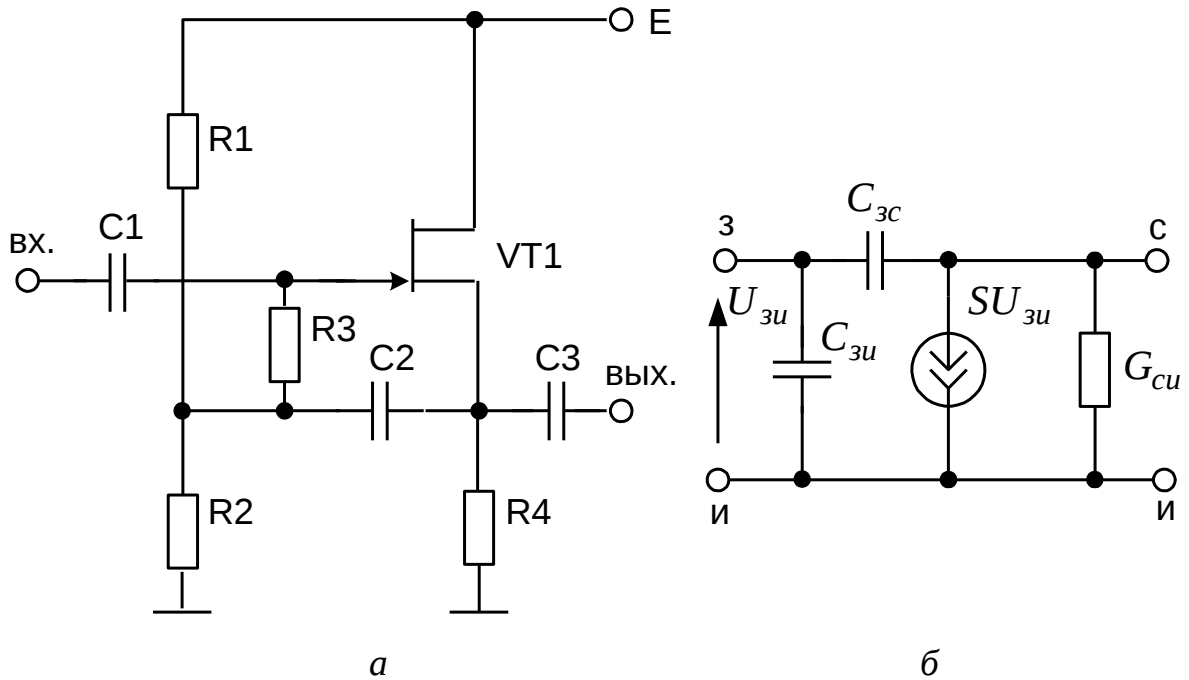


Рис. 2.22. Схема истокового повторителя с повышенным входным сопротивлением (а) и эквивалентная схема полевого транзистора с управляющим p - n -переходом (б)

Операторная схема замещения повторителя по переменному току для полного диапазона частот приведена на рис. 2.23.

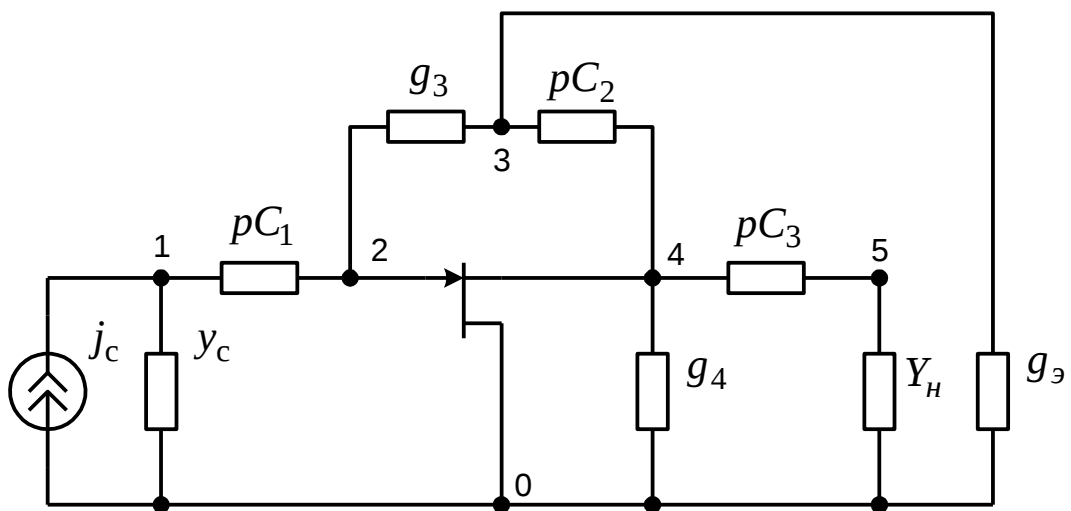


Рис. 2.23. Схема замещения истокового повторителя

по переменному току

Замещая в схеме рис. 2.23 полевой транзистор эквивалентной схемой рис. 2.22,б, получаем схему замещения повторителя, содержащую только двухполюсные Y -компоненты, которая приведена на рис. 2.24.

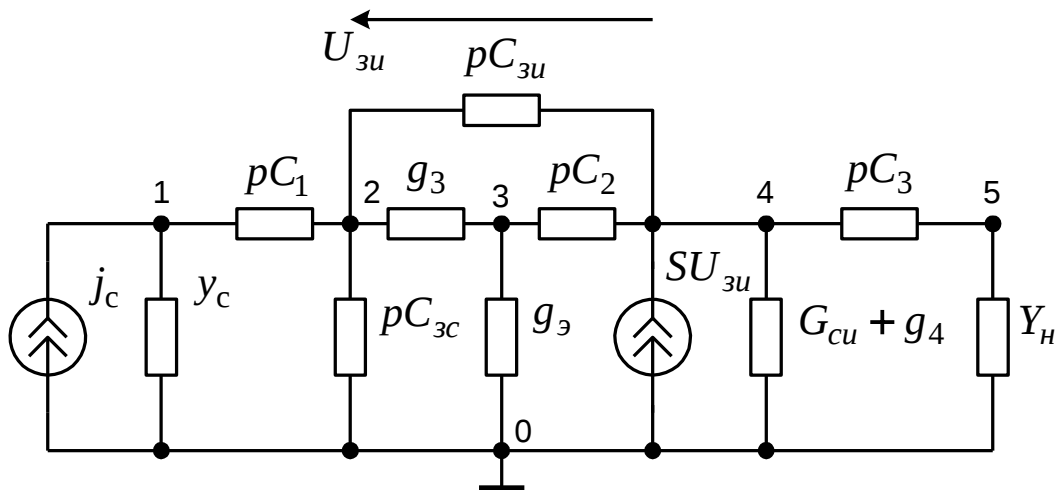


Рис. 2.24. Операторная схема замещения истокового повторителя

Схема замещения содержит $\nu = 6$ узлов, поэтому система независимых сечений содержит $\nu = \nu - 1 = 6 - 1 = 5$ сечений. Выберем каноническую систему сечений, для чего в схеме замещения рис. 2.24 выбран базисный узел и пронумерованы остальные узлы.

Порядок укороченной матрицы проводимостей равен $\nu = 5$. Главную диагональ матрицы заполняем собственными проводимостями соответствующих узлов, а недиагональные элементы – взаимными проводимостями, взятыми со знаком «минус». Зависимый источник включен между базисным узлом и узлом 4, а его управляющее напряжение действует между узлами 2 и 4. Поэтому управляющая проводимость S добавляется к элементам укороченной матрицы проводимостей, расположенным на пересечении 4 строки и 2 и

4 столбцов. Зависимый источник направлен к узлу 4, а управляющее напряжение – от узла 4 к узлу 2, следовательно, при добавлении к элементу матрицы Y_{44} знак управляющей проводимости S не изменится, а при добавлении к элементу Y_{42} – изменится на противоположный. В результате укороченная матрица Y^* проводимостей принимает вид:

	1	2	3	4	5
1	pC_1	$-pC_1$	0	0	0
2	$-pC_1$	$pC_1 + pC_{zc} + pC_{zu} + g_3$	$-g_3$	$-pC_{zu}$	0
3	0	$-g_3$	$g_3 + g_3 + pC_2$	$-pC_2$	0
4	0	$-pC_{zu} - S$	$-pC_2$	$pC_2 + pC_3 + pC_{zu} + G_{cu} + g_4 + S$	$-pC_3$
5	0	0	0	$-pC_3$	pC_3

Применение метода эквивалентных схем для формирования матрично-векторных параметров контурных уравнений рассмотрим на примере схемы усилителя низкой частоты с низкочастотной коррекцией, представленной на рис. 2.25,а.

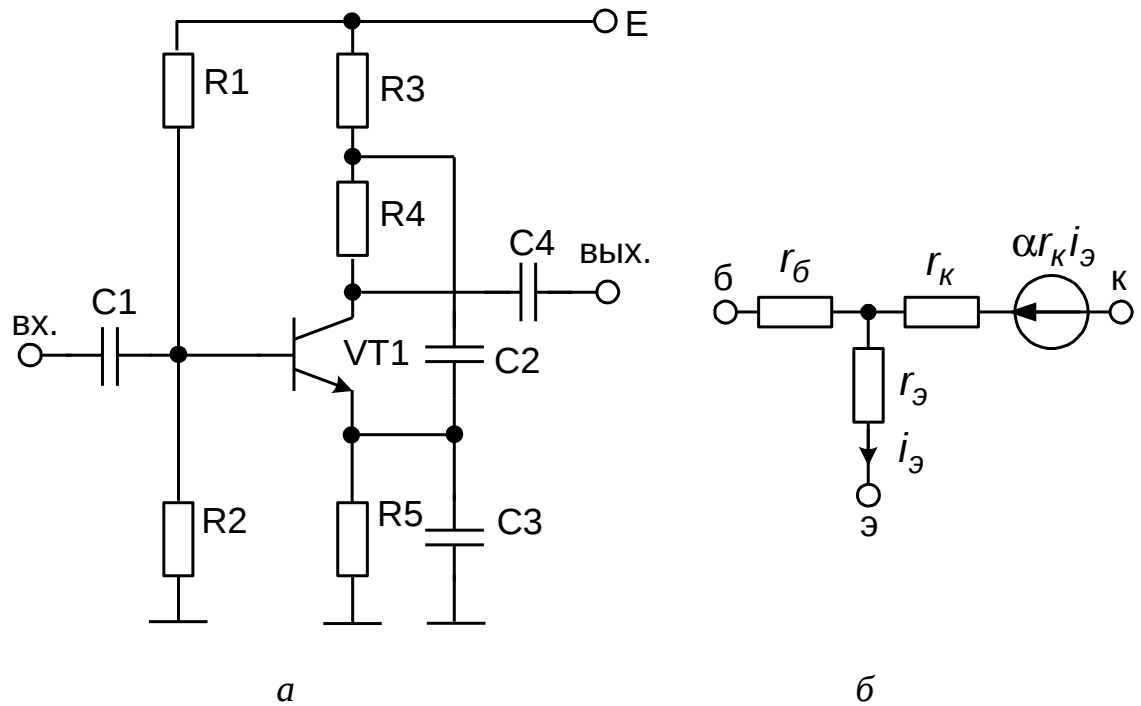


Рис. 2.25. Схема усилителя низкой частоты с низкочастотной коррекцией (а) и эквивалентная схема биполярного транзистора (б)

Схема замещения усилителя по переменному току представлена на рис. 2.26.

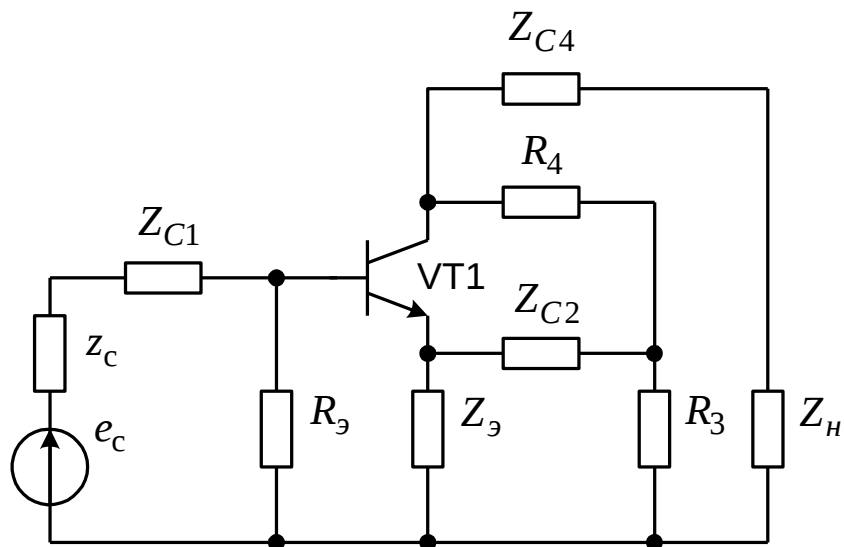


Рис. 2.26. Схема замещения усилителя низкой частоты
по переменному току

С целью уменьшения количества независимых контуров параллельно включенные ветви с сопротивлениями R_1 и R_2 представлены эквивалентной ветвью с сопротивлением $R_{\dot{y}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а параллельно включенные резистор R_5 и конденсатор C_3 – эквивалентной ветвью с операторным сопротивлением $Z_{\dot{y}} = \frac{R_5}{R_5 C_3 p + 1}$.

Замещая в схеме рис. 2.26 биполярный транзистор эквивалентной схемой рис. 2.25,б, получаем схему замещения усилителя, содержащую только двухполюсные Z -компоненты, которая приведена на рис. 2.27.

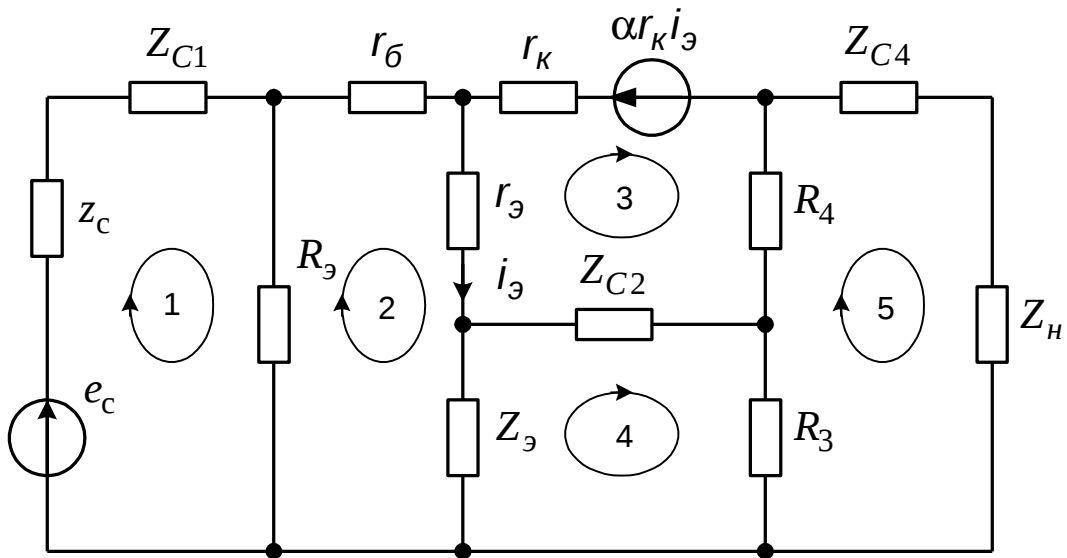


Рис. 2.27. Операторная схема замещения усилителя низкой частоты

Схема замещения содержит $\ell = 10$ ветвей и $\nu = 6$ узлов, поэтому система независимых контуров содержит $\sigma = \ell - \nu + 1 = 10 - 6 + 1 = 5$ контуров. По-

сколькx схема является планарной, выберем каноническую систему контуров, показанную на рис. 2.27.

Порядок укороченной матрицы сопротивлений равен $\sigma = 5$. Главную диагональ матрицы заполняем собственными сопротивлениями соответствующих контуров, а недиагональные элементы – взаимными сопротивлениями, взятыми со знаком «минус». Зависимый источник входит в состав контура 3, а управляющая ветвь – в контуры 2 и 3. Поэтому управляющее сопротивление $\alpha r_{\hat{e}}$ добавляется к элементам укороченной матрицы сопротивлений, расположенным на пересечении 3 строки и 2 и 3 столбцов. Зависимый источник направлен против направления обхода контура 3, а управляющий ток – по направлению обхода контура 2 и против направления обхода контура 3, следовательно, при добавлении к элементу матрицы U_{32} знак управляющего сопротивления не изменится, а при добавлении к элементу U_{33} – изменится на противоположный. В результате укороченная матрица Z^* сопротивлений принимает вид:

	1	2	3	4	5
1	$Z_{C1} + R_3$	$-R_3$	0	0	0
2	$-R_3$	$R_3 + r_6 + r_3 + Z_3$	$-r_3$	$-Z_3$	0
3	0	$-r_3 + \alpha r_k$	$r_3 + r_k(1 - \alpha) + R_4 + Z_{C2}$	$-Z_{C2}$	$-R_4$
4	0	$-Z_3$	$-Z_{C2}$	$Z_3 + Z_{C2} + R_3$	$-R_3$
5	0	0	$-R_4$	$-R_3$	$R_3 + R_4 + Z_{C4}$

Обобщенный матричный метод

Процедуру формирования матрично-векторных параметров электронных схем в однородных системах координат можно дополнительно упростить за счет предварительного отдельного составления матрицы схемы без учета

многополюсных компонентов, обобщенной матрицы многополюсников и их последующего суммирования.

В узловом координатном базисе матрица проводимостей электронной схемы формируется в соответствии с выражением

$$Y = Y_{i\ddot{a}n\ddot{n}} + Y_i = Y_{i\ddot{a}n\ddot{n}} + \sum_{i=1}^M Y_{i i}, \quad (2.62)$$

где $Y_{i\ddot{a}n\ddot{n}}$ – матрица проводимостей схемы без учета многополюсных компонентов (матрица проводимостей пассивной части схемы); Y_i – обобщенная матрица проводимостей многополюсников схемы; $Y_{i i}$ – матрица проводимостей, отражающая отдельный многополюсник в выбранной системе независимых сечений; M – количество многополюсных компонентов в схеме.

Матрица проводимостей электронной схемы без учета многополюсных компонентов формируется по методике, изложенной для метода эквивалентных схем.

В качестве исходной модели i -го многополюсного компонента используется его неопределенная матрица проводимостей Y_i , по которой формируется матрица $Y_{i i}$ с помощью топологической матрицы $\Pi_{i i}$ независимых сечений для полюсов этого многополюсника

$$Y_{i i} = \Pi_{i i} Y_i \Pi_{i i}^T. \quad (2.63)$$

Строки топологической матрицы $\Pi_{i i}$ соответствуют независимым сечениям, выбранным в графе схемы, а столбцы – полюсам i -го многополюсного компонента. Элемент этой матрицы, расположенный на пересечении q -ой строки и s -го столбца равен +1, если s -ый полюс многополюсника инци-

дентен Q -ому сечению и их направления совпадают; равен (-1) , если S -ый полюс многополюсника инцидентен Q -ому сечению и их направления противоположны; равен 0 , если S -ый полюс многополюсника не инцидентен Q -ому сечению.

В контурном координатном базисе матрица сопротивлений схемы составляется в соответствии с выражением

$$Z = Z_{i\ddot{a}\ddot{n}\ddot{n}} + Z_i = Z_{i\ddot{a}\ddot{n}\ddot{n}} + \sum_{i=1}^M Z_i \quad (2.64)$$

где $Z_{i\ddot{a}\ddot{n}\ddot{n}}$ – матрица сопротивлений схемы без учета многополюсных компонентов (матрица сопротивлений пассивной части схемы); Z_i – обобщенная матрица сопротивлений многополюсников схемы; $Z_i \quad i$ – матрица сопротивлений, отражающая отдельный многополюсник в выбранной системе независимых контуров; M – количество многополюсных компонентов в схеме.

Матрица сопротивлений электронной схемы без учета многополюсных компонентов формируется по методике, изложенной для метода эквивалентных схем.

В качестве исходной модели i -го многополюсного компонента используется его неопределенная матрица сопротивлений Z_i , по которой формируется матрица $Z_i \quad i$ с помощью топологической матрицы $P_1 \quad i$ независимых контуров для сторон этого многополюсника

$$Z_i \quad i = P_1 \quad i Z_i P_1^T \quad (2.65)$$

Строки топологической матрицы $P_1 \quad i$ соответствуют независимым контурам, выбранным в графе схемы, а столбцы – сторонам i -го многополюсного компонента. Элемент этой матрицы, расположенный на пересечении q -ой строки и S -го столбца равен $+1$, если S -ая сторона многополюсника инци-

дентна Q -ому контуру и их направления совпадают; равен (-1) , если S -ая сторона многополюсника инцидентна Q -ому контуру и их направления противоположны; равен 0 , если S -ая сторона многополюсника не инцидентна Q -ому контуру.

Для схем, содержащих небольшое количество многополюсных компонентов, можно рекомендовать следующий порядок формирования матриц схемы.

При использовании узлового координатного базиса:

- формируется матрица проводимостей схемы без учета многополюсных компонентов;

- в неопределенных матрицах проводимостей многополюсников собственные номера (обозначения) полюсов заменяют номерами независимых сечений, которым инцидентны эти полюса; если какие-либо полюса многополюсника не инцидентны ни одному сечению, то соответствующие им строки и столбцы неопределенной матрицы проводимостей не учитываются;

- формируется матрица проводимостей схемы путем добавления элементов неопределенных матриц проводимостей многополюсных компонентов к элементам матрицы $Y_{i\alpha n\bar{n}}$ с учетом нумерации строк и столбцов неопределенных матриц, соответствующей системе независимых сечений.

При использовании контурного координатного базиса:

- Формируется матрица сопротивлений схемы без учета многополюсных компонентов;

- В неопределенных матрицах сопротивлений многополюсников собственные номера (обозначения) сторон заменяют номерами независимых контуров, которым инцидентны эти стороны; если какие-либо стороны многополюсника не инцидентны ни одному контуру, то соответствующие им строки и столбцы неопределенной матрицы сопротивлений не учитываются;

– Формируется матрица сопротивлений схемы путем добавления элементов неопределенных матриц сопротивлений многополюсных компонентов к элементам матрицы $Z_{i\alpha\beta}$ с учетом нумерации строк и столбцов неопределенных матриц, соответствующей системе независимых контуров.

Рассмотрим применение обобщенного матричного метода для формирования укороченной матрицы проводимостей применительно к схеме истокового повторителя, представленной на рис. 2.22,а. Схема замещения повторителя по переменному току, содержащая многополюсный компонент, приведена на рис. 2.23. Воспользуемся канонической системой сечений, соответствующей указанной на рис. 2.23 нумерации узлов.

Укороченная матрица проводимостей пассивной части схемы имеет вид

		1	2	3	4	5
$Y_{i\alpha\beta}^* =$	1	pC_1	$-pC_1$	0	0	0
	2	$-pC_1$	$pC_1 + g_3$	$-g_3$		0
	3	0	$-g_3$	$g_3 + g_3 + pC_2$	$-pC_2$	0
	4	0		$-pC_2$	$pC_2 + pC_3 + g_4$	$-pC_3$
	5	0	0	0	$-pC_3$	pC_3

Неопределенная матрица проводимостей полевого транзистора, соответствующая эквивалентной схеме рис. 2.22,б, имеет вид

		з	с	и
$Y_{пт} =$	з	$pC_{zu} + pC_{zc}$	$-pC_{zc}$	$-pC_{zu}$
	с	$-pC_{zc} + S$	$pC_{zc} + G_{cu}$	$-(G_{cu} + S)$
	и	$-(pC_{zu} + S)$	$-G_{cu}$	$G_{cu} + pC_{zu} + S$

Матрица независимых сечений для полюсов полевого транзистора имеет размерность (5×3):

з с и

$$\Pi_{i\delta} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя выражение (2.63), найдем обобщенную матрицу проводимостей многополюсных компонентов схемы:

$$Y_i = \Pi_{i\delta} Y_{i\delta} \Pi_{i\delta}^T =$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	$pC_{zu} + pC_{zc}$	0	$-pC_{zu}$	0
3	0	0	0	0	0
4	0	$-(pC_{zu} + S)$	0	$G_{cu} + pC_{zu} + S$	0
5	0	0	0	0	0

Суммируя матрицу проводимостей пассивной части схемы с обобщенной матрицей проводимостей многополюсных компонентов, получим укороченную матрицу проводимостей схемы повторителя, которая совпадает с укороченной матрицей проводимостей, составленной методом эквивалентных схем:

$$Y^* =$$

	1	2	3	4	5
1	pC_1	$-pC_1$	0	0	0
2	$-pC_1$	$pC_1 + pC_{zc} + pC_{zu} + g_3$	$-g_3$	$-pC_{zu}$	0
3	0	$-g_3$	$g_3 + g_3 + pC_2$	$-pC_2$	0
4	0	$-pC_{zu} - S$	$-pC_2$	$pC_2 + pC_3 + pC_{zu} + G_{cu} + g_4 + S$	$-pC_3$
5	0	0	0	$-pC_3$	pC_3

Применение обобщенного матричного метода для формирования укороченной матрицы сопротивлений рассмотрим на примере схемы усилителя низкой частоты с низкочастотной коррекцией, представленной на рис.2.25,а. Схема замещения усилителя, содержащая активный многополюсный

компонент, с выбранной канонической системой независимых контуров приведена на рис. 2.28.

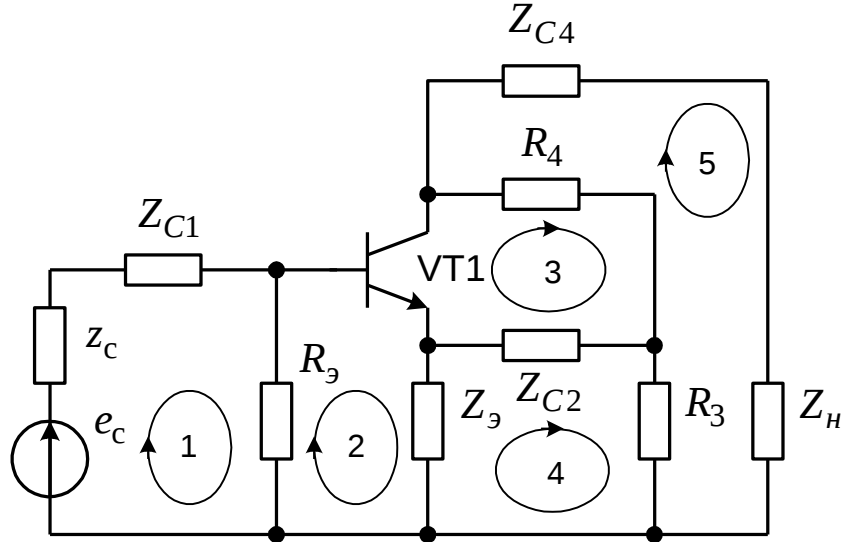


Рис. 2.28. Выбор канонической системы независимых контуров

Укороченная матрица сопротивлений пассивной части схемы:

$$Z_{i\ddot{a}n\ddot{n}}^* =$$

	1	2	3	4	5
1	$Z_{C1} + R_3$	$-R_3$	0	0	0
2	$-R_3$	$R_3 + Z_3$	0	$-Z_3$	0
3	0	0	$R_4 + Z_{C2}$	$-Z_{C2}$	$-R_4$
4	0	$-Z_3$	$-Z_{C2}$	$Z_3 + Z_{C2} + R_3$	$-R_3$
5	0	0	$-R_4$	$-R_3$	$R_3 + R_4 + Z_{C4}$

Неопределенная матрица сопротивлений биполярного транзистора, соответствующая эквивалентной схеме рис. 2.25,б и выбору токов сторон, показанному на рис. 2.29, имеет вид

$$Z_{BT} =$$

	б-э	к-э	б-к
б-э	$r_э + r_б$	$-r_э$	$-r_б$
к-э	$r_m - r_э$	$r_э + r_к - r_m$	$-r_к$
б-к	$-(r_m + r_б)$	$r_m - r_к$	$r_к + r_б$

ченной матрицей сопротивлений, составленной методом эквивалентных схем:

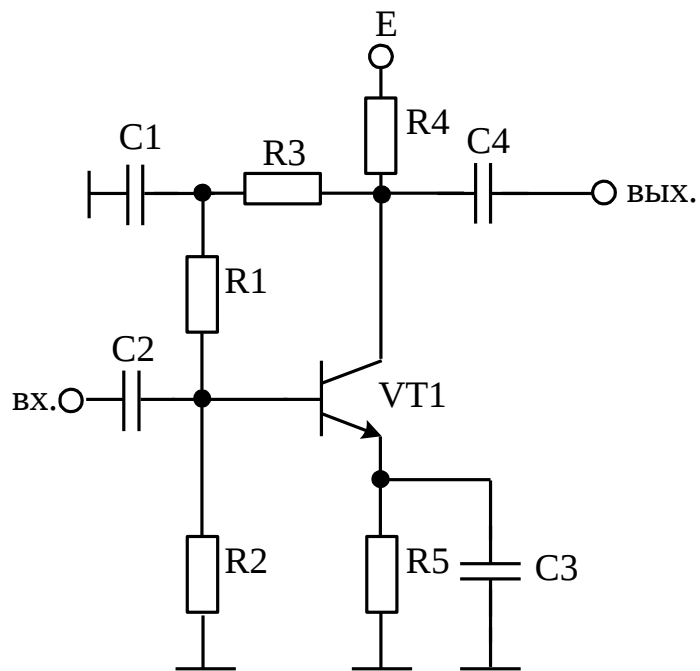
	1	2	3	4	5
1	$Z_{C1} + R_3$	$-R_3$	0	0	0
2	$-R_3$	$R_3 + r_6 + r_3 + Z_3$	$-r_3$	$-Z_3$	0
$Z^* =$ 3	0	$-r_3 + \alpha r_k$	$r_3 + r_k(1 - \alpha) + R_4 + Z_{C2}$	$-Z_{C2}$	$-R_4$
4	0	$-Z_3$	$-Z_{C2}$	$Z_3 + Z_{C2} + R_3$	$-R_3$
5	0	0	$-R_4$	$-R_3$	$R_3 + R_4 + Z_{C4}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

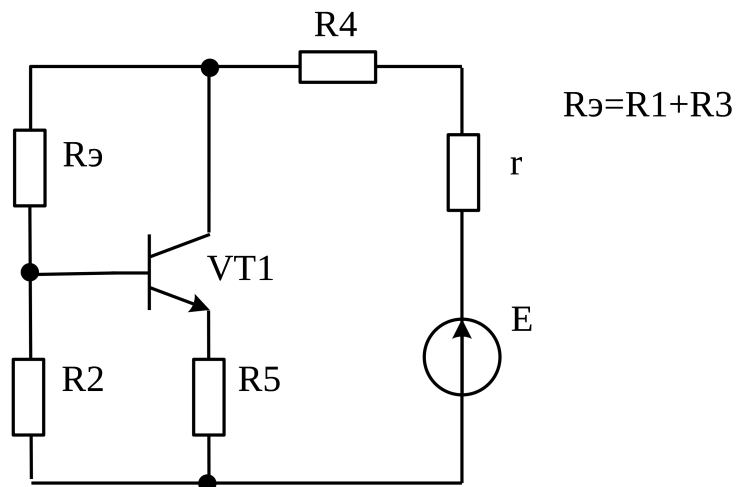
1. Укажите основные свойства линейных электронных схем.

Ответ: свойства суперпозиции и инвариантности отношения реакции к воздействию к операциям интегрирования и дифференцирования.

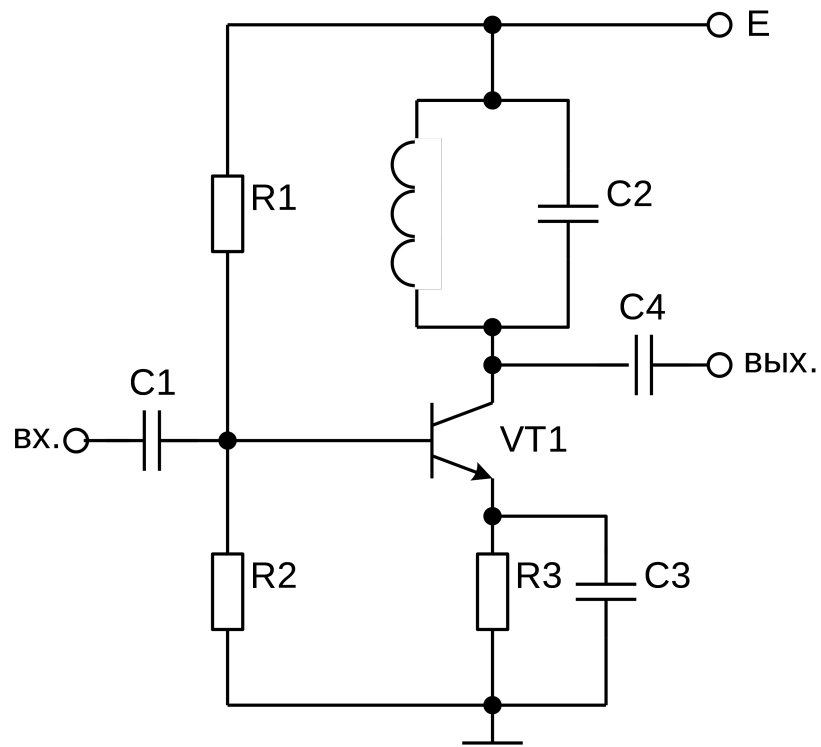
2. Сформируйте схему замещения усилителя низкой частоты по постоянному току



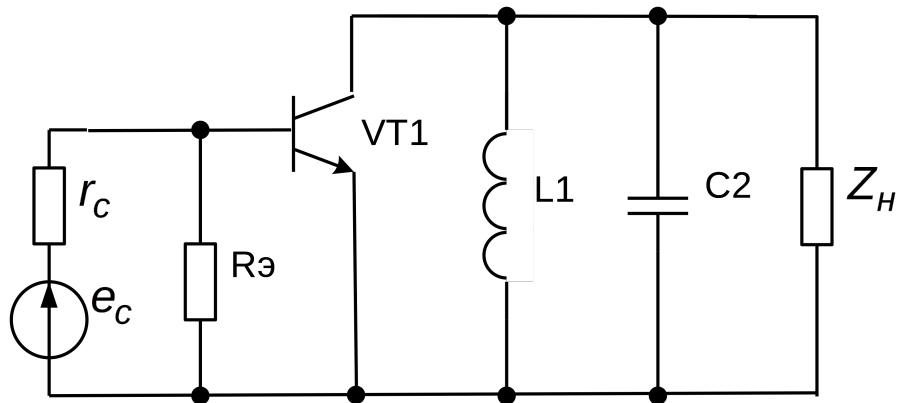
Ответ:



3. Сформируйте схему замещения усилителя низкой частоты по переменному току для рабочего диапазона частот

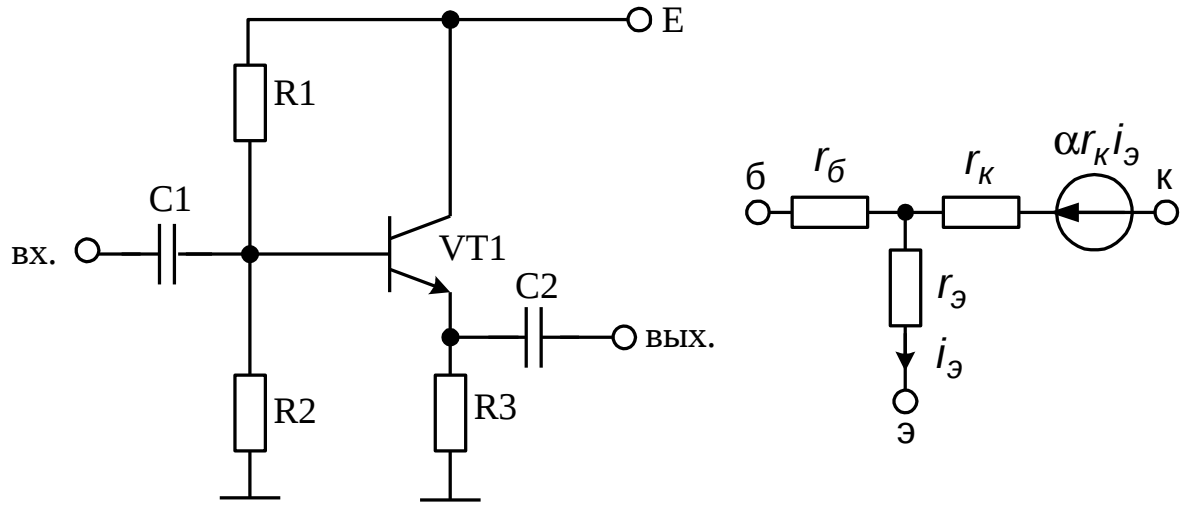


Ответ:

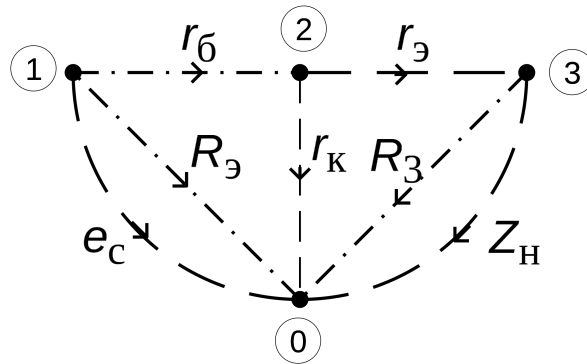


$$R_{\dot{y}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

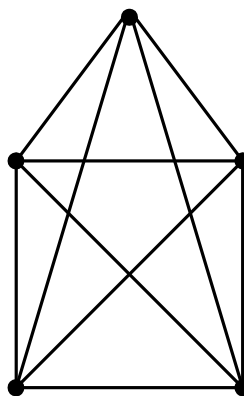
4. Сформируйте полюсный граф эмиттерного повторителя для малосигнального режима работы в рабочем диапазоне частот, используя Т-образную физическую эквивалентную схему биполярного транзистора.



Ответ:

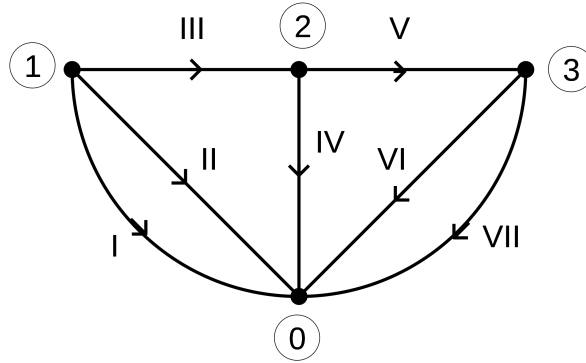


5. Определите количество покрывающих деревьев графа



Ответ: $\det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 125.$

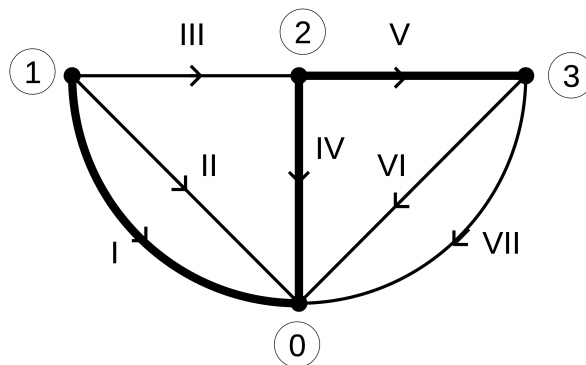
6. Составьте сокращенную структурную матрицу полюсного графа



Ответ:

$$A_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} & \text{VII} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

7. Для заданного покрывающего дерева графа сформируйте матрицу главных сечений

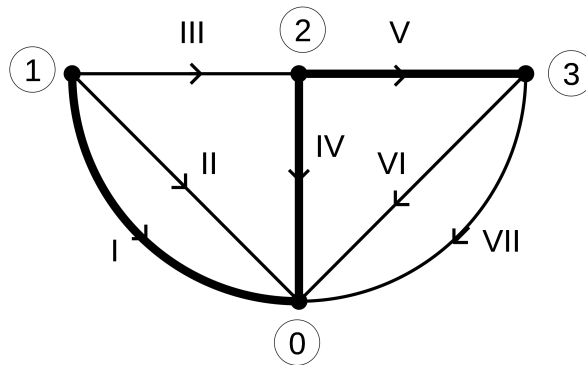


Ответ:

I II III IV V VI VII

$$\Pi = \begin{matrix} C_I \\ C_{IV} \\ C_V \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

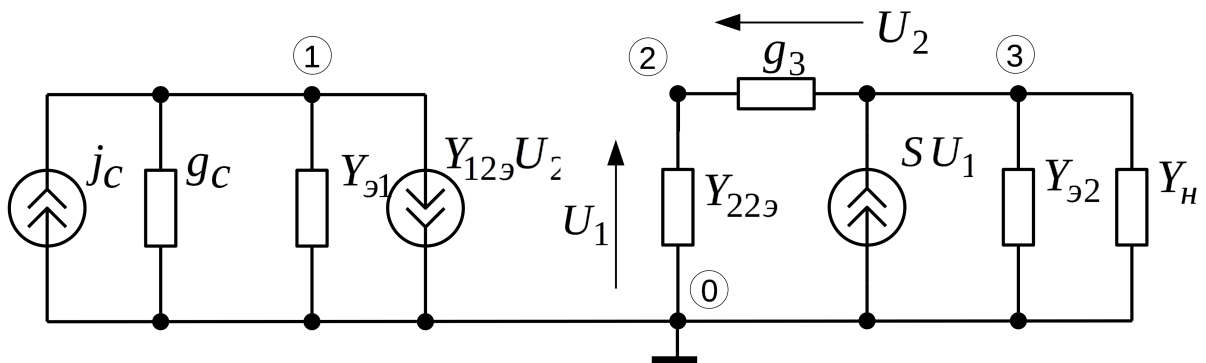
8. Для заданного покрывающего дерева графа сформируйте матрицу главных циклов



Ответ:

$$P = \begin{matrix} & I & II & III & IV & V & VI & VII \\ \begin{matrix} II \\ III \\ VI \\ VII \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

9. Сформируйте укороченную матрицу проводимостей по приведенной схеме замещения.



Ответ:

$$Y^* = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Y_{\dot{y}1} & Y_{12\dot{y}} & -Y_{12\dot{y}} \\ \hline 2 & 0 & Y_{22\dot{y}} + g_3 & -g_3 \\ \hline 3 & 0 & -g_3 - S & Y_{\dot{y}2} + g_3 \end{array}$$

10. Дайте классификацию электронных схем по математическому описанию.

Ответ: линейные, линейные параметрические, нелинейные и нелинейные параметрические электронные схемы.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ.....	21
2.1 Классификация электронных схем по математическому описанию.....	21
2.2 Топологические модели электронных схем.....	24
2.3 Математические модели компонентов электронных схем.....	49
2.4 Полные уравнения электронных схем и их преобразования.....	66
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	96

3 СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ АНАЛИЗ

3.1 Понятие и виды схемных функций электронных схем

В общем случае электронная схема может рассматриваться как $2n$ -полюсник (n -входник), на часть входов которого подаются внешние воздействия, а на оставшихся входах определяются реакции на эти воздействия (рис. 3.1).

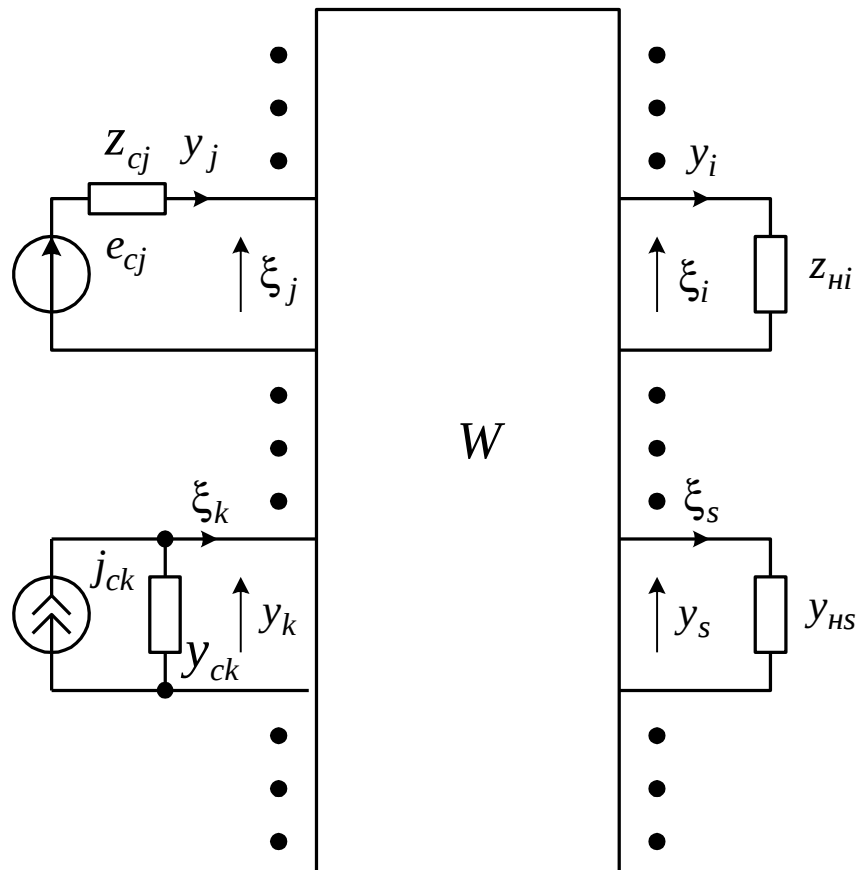


Рис. 3.1. Электронная схема как $2n$ -полюсник

Электрическое состояние линейной электронной схемы как $2n$ -полюсника определяется системой уравнений:

$$WY = \Xi, \quad (3.1)$$

где W — матрица эквивалентных параметров $2n$ -полюсника; $Y = [y_1 \dots y_n]^T$ — вектор основных величин $2n$ -полюсника; $\Xi = [\xi_1 \dots \xi_n]^T$ — вектор второстепенных величин $2n$ -полюсника.

При этом второстепенные величины характеризуют воздействия на входы многополюсника, а основные — реакции на эти воздействия.

Решая систему уравнений (3.1), получаем переменные реакций многополюсника на внешние воздействия в виде:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} \xi_j = \sum_{j=1}^n F_{ij} \xi_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

где $\Delta = \det W$ — определитель матрицы эквивалентных параметров $2n$ -полюсника; Δ_{ji} — алгебраические дополнения матрицы эквивалентных параметров $2n$ -полюсника; $F_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}$ — схемная функция электронной схемы.

Выражение (3.2) отражает принцип суперпозиции, который позволяет свести линейную электронную схему к проходному четырехполюснику относительно произвольной пары входов и анализировать его независимо от воздействий на других входах.

[Внимание] Для определения реакции электронной схемы на внешние воздействия, одновременно подаваемые на несколько входов, необходимо рассматривать ряд проходных четырехполюсников. [.]

Наибольшее распространение получили способы приведения электронной схемы к четырехполюснику, основанные на использовании систем Z - и Y -параметров (рис. 3.2 и 3.3).

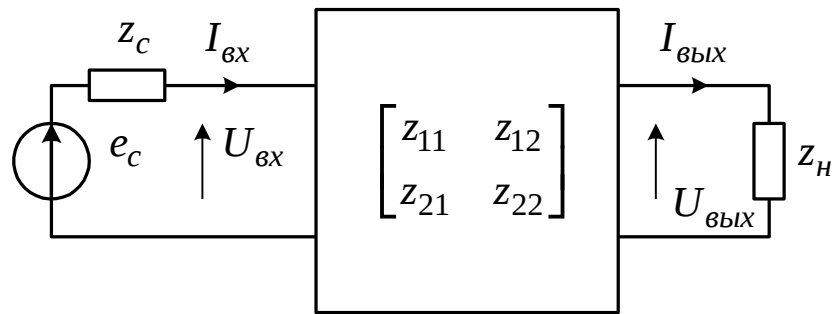


Рис. 3.2. Электронная схема как проходной четырехполюсник в системе Z-параметров

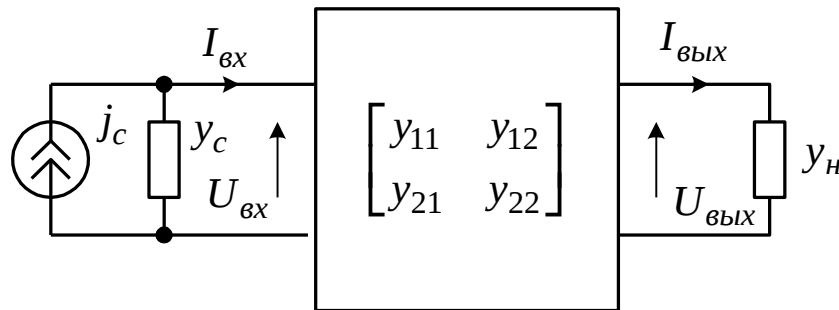


Рис. 3.3. Электронная схема как проходной четырехполюсник в системе Y-параметров

[**Определение**] Схемной функцией называют отношение операторных изображений токов и напряжений, характеризующих электрическое состояние электронной схемы как проходного четырехполюсника, при нулевых начальных условиях. [.]

Основными схемными функциями проходного четырехполюсника являются:

– передаточные

$$\begin{aligned}
 k_U(p) &= \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}, & k_I(p) &= \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}, \\
 Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}(p) &= \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}, & Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}(p) &= \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

– ВХОДНЫЕ

$$Z_{\hat{a}\hat{o}}(p) = \frac{1}{Y_{\hat{a}\hat{o}}(p)} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}, \quad (3.4)$$

– ВЫХОДНЫЕ

$$Z_{\hat{a}\hat{o}.(p)} = \frac{1}{Y_{\hat{a}\hat{o}}(p)} = -\frac{U_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{c}\hat{c}}(p)} = -\frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)|_{Z_i \rightarrow \infty}}{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)|_{Z_i = 0}}. \quad (3.5)$$

Помимо схемных функций проходного четырехполюсника в практике анализа электронных схем находят применение полные схемные функции, определяемые с учетом внутренних иммитансов источников сигналов:

– схемные функции цепи передачи

$$k_E(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{E_c(p)}, \quad k_J(p) = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{J_c(p)},$$

$$Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}.J}(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{J_c(p)}, \quad Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}.E}(p) = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{E_c(p)}, \quad (3.6)$$

– схемные функции входной цепи

$$Z_{\hat{a}\hat{o}.J}(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{J_c(p)}, \quad Y_{\hat{a}\hat{o}.E}(p) = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{E_c(p)},$$

$$k_{U,\hat{a}\hat{o}}(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{E_c(p)}, \quad k_{I,\hat{a}\hat{o}}(p) = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{J_c(p)}. \quad (3.7)$$

Между схемными функциями проходного четырехполюсника существует связь, определяемая соотношениями:

$$k_U k_I = Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}} Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}},$$

$$Z_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}}{k_U} = \frac{k_I}{Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}} = Z_i \frac{k_I}{k_U} = \frac{k_I}{Y_i k_U},$$

$$Y_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{k_U}{Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}} = \frac{Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}}}{k_I} = \frac{k_U}{Z_i k_I} = Y_i \frac{k_U}{k_I}, \quad (3.8)$$

$$Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}} = Z_i k_I, \quad Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}} = Y_i k_U.$$

3.2 Формы представления схемных функций

Схемные функции электронных схем определяются только параметрами компонентов схемы (внутренними параметрами), а также способом их соединения и в общем случае являются функциями комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$.

Алгебраические формы представления схемных функций

Основной алгебраической формой представления схемных функций является отношение двух полиномов комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$, то есть дробно-рациональная форма:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}, \quad (3.9)$$

где $A(p) = \sum_{i=0}^m a_i p^i$ – полином m -ой степени; $B(p) = \sum_{i=0}^n b_i p^i$ – полином n -ой степени. В выражении (3.9) все коэффициенты при переменной p являются вещественными и определяются только параметрами компонентов схемы.

Для передаточных схемных функций реальных электронных схем выполняется условие степени полинома числителя и знаменателя выражения (3.9) связаны условием $m \leq n$, а для входных и выходных схемных функций – $m \leq (n+1)$.

Используя основную теорему алгебры, выражение (3.9) можно представить в виде

$$F(p) = H \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}, \quad (3.10)$$

где $H = \frac{a_m}{b_n}$ – масштабный коэффициент; Z_i – нули, а p_i – полюса схемной функции.

В задачах, связанных с построением временных характеристик электронных схем, широкое применение находит представление схемных функций в виде суммы простых слагаемых:

$$F(p) = \sum_{i=0}^{m-n} k_{i0} p^i + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{p - p_i} + \sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{q_i} \frac{k_{is}}{(p - p_i)^{q_i - s + 1}}, \quad (3.11)$$

где ℓ – число простых полюсов схемной функции; r – число кратных полюсов схемной функции; q_i – кратность i -го кратного полюса. Границы индексов суммирования ℓ , r и q_i связаны соотношением

$$\ell + \sum_{i=1}^r q_i = n.$$

Коэффициенты k_{i0} определяют в результате деления полинома числителя схемной функции на полином знаменателя. Для передаточных схемных функций реальных электронных схем первая сумма в (3.11) может содержать не больше одного слагаемого k_{00} в силу условия $m \leq n$, а для входных и выходных схемных функций – не больше двух слагаемых $k_{00} + k_{10}p$ в силу условия $m \leq (n+1)$. При этом чаще всего слагаемые первой суммы выражения (3.11) отсутствуют.

Коэффициенты k_i определяются как вычеты схемной функции в точке простого полюса p_i :

$$k_i = \text{Res} F(p) = \lim_{p \rightarrow p_i} [(p - p_i) F(p)] = \frac{A(p_i)}{\left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_i}}. \quad (3.12)$$

Коэффициенты k_{is} определяются с использованием формул для вычетов схемной функции в точках кратных полюсов:

$$k_{is} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \left[\frac{d^{(s-1)}}{dp^{(s-1)}} \left\{ (p - p_i)^{q_i} F(p) \right\} \right]. \quad (3.13)$$

Для примера рассмотрим схему избирательного усилителя, приведенн-

ную на рис. 3.4.

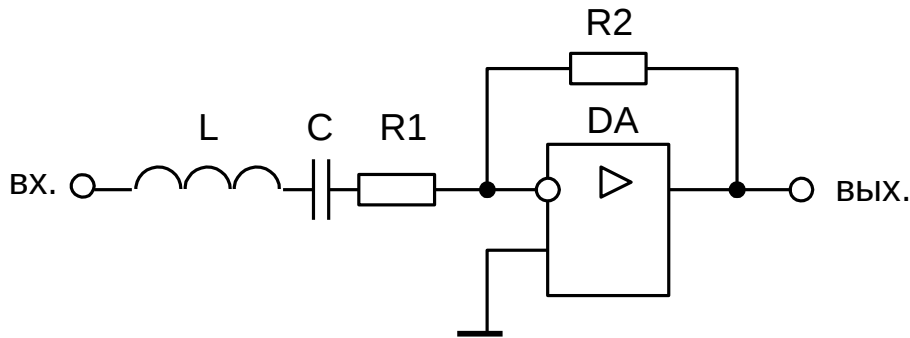


Рис. 3.4. Схема избирательного усилителя

В предположении, что операционный усилитель является идеальным, коэффициент передачи по напряжению определяется выражением

$$k_U(p) = -\frac{R_2 C p}{L C p^2 + R_1 C p + 1},$$

которое представлено в дробно-рациональной форме (3.9).

Для схемной функции $k_U(p)$: $m=1$, $a_1=R_2C$, $a_0=0$; $n=2$, $b_2=LC$, $b_1=R_1C$, $b_0=1$ и выполняется условие $m < n$.

Определив масштабный коэффициент, нули и полюса схемной функции $k_U(p)$, ее можно представить в форме (3.10):

$$k_U(p) = -\frac{R_2}{L} \cdot \frac{p}{p^2 + \frac{R_1}{L}p + \frac{1}{LC}} = H \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)},$$

где $H = -\frac{R_2}{L}$, $p_{1,2} = -\frac{R_1}{2L} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{L}{CR_1^2}} \right)$, причем $z_1 = 0$.

Если полюса схемной функции $k_U(p)$ являются простыми, то для представления функции в форме (3.11) справедливо: $m-n=1-2=-1 < 0$, $r=0$,

поэтому слагаемые $\sum_{i=0}^{m-n} k_{i0} p^i$ и $\sum_{i=1}^r \sum_{s=1}^{q_i} \frac{k_{is}}{(p-p_i)^{q_i-s+1}}$ отсутствуют; $\ell=2$. Следо-

вательно,

$$k_U(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{p-p_i} = \frac{k_1}{p-p_1} + \frac{k_2}{p-p_2}, \quad (3.14)$$

где $k_1 = \operatorname{Res} k_U(p) = \lim_{p \rightarrow p_1} [(p-p_1)k_U(p)] = H \frac{p_1}{p_1-p_2};$

$$k_2 = \operatorname{Res} k_U(p) = \lim_{p \rightarrow p_2} [(p-p_2)k_U(p)] = H \frac{p_2}{p_2-p_1}.$$

Для кратных полюсов схемной функции $k_U(p)$ в представлении функции (3.11): $m-n=1-2=-1<0$, $\ell=0$, поэтому слагаемые $\sum_{i=0}^{m-n} k_{i0} p^i$ и

$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{k_i}{p-p_i}$ отсутствуют; $r=1$, $q_1=2$. Таким образом

$$k_U(p) = \sum_{s=1}^2 \frac{k_{1s}}{(p-p_1)^{2-s+1}} = \frac{k_{11}}{(p-p_1)^2} + \frac{k_{12}}{p-p_1}, \quad (3.15)$$

где $k_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow p_1} [(p-p_1)^2 k_U] = H p_1;$

$$k_{12} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{d}{dp} \{ (p-p_1)^2 k_U(p) \} \right] = H, \text{ причем } p_1 = -\frac{R_1}{2L}.$$

Выполняя в выражениях схемных функций подстановку $p = \sigma + j\omega$, их можно представить в виде функций двух переменных:

$$\begin{aligned} F(p) = F(\sigma + j\omega) &= F_R(\sigma, \omega) + jF_J(\sigma, \omega) = \\ &= |F(\sigma + j\omega)| e^{j \arg F(\sigma + j\omega)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $F_R(\sigma, \omega) = \operatorname{Re}[F(\sigma + j\omega)]$ – вещественная часть схемной функции;

$F_J(\sigma, \omega) = \operatorname{Im}[F(\sigma + j\omega)]$ – мнимая часть схемной функции;

$|F(\sigma + j\omega)| = \sqrt{F_R^2(\sigma, \omega) + F_J^2(\sigma, \omega)}$ – модуль схемной функции; $\arg F(\sigma + j\omega)$ – аргумент схемной функции.

Графические формы представления схемных функций

Наиболее простой формой графического представления схемных функций является карта нулей и полюсов, связанная с алгебраической формой представления схемной функции вида (3.10). Карта нулей и полюсов строится на плоскости комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$ путем нанесения координат всех нулей и полюсов схемной функции. При этом принято полюса обозначать точками, а нули функции — символами «×». Порядок кратности обозначают цифрами, а масштабный коэффициент H указывают справа у действительной оси. Текущее значение переменной $p = \sigma + j\omega$ на комплексной плоскости представляется в виде вектора $p = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \exp[j \arg F(\sigma + j\omega)]$, направленного из начала координат в данную точку плоскости.

Карта нулей и полюсов схемной функции $k_U(p)$ избирательного усилителя, приведенного на рис. 3.4, соответствующая случаю комплексно-сопряженных полюсов, представлена на рис. 3.5.

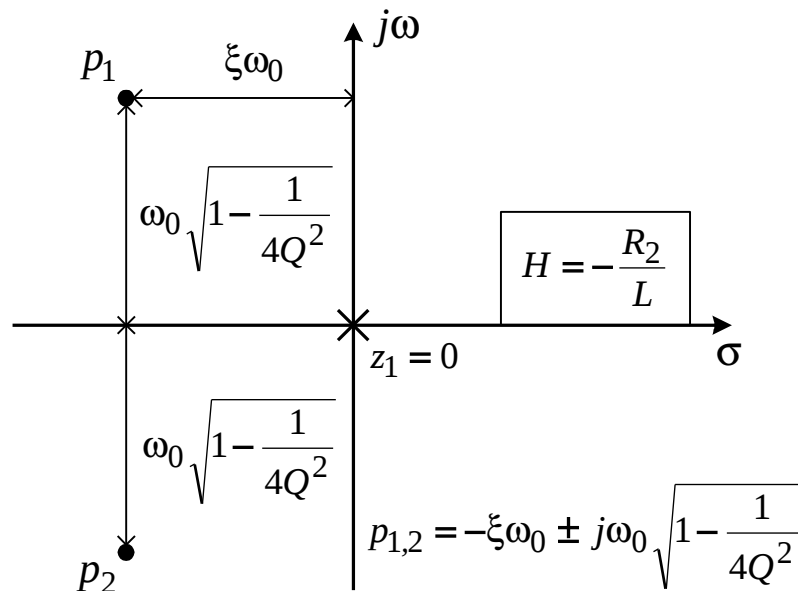


Рис. 3.5. Карта нулей и полюсов коэффициента передачи по напряжению избирательного усилителя

При этом комплексно-сопряженные полюса можно представить выражениями $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота, $\xi = \frac{R_1}{2\rho}$ – коэффициент демпфирования; $Q = \frac{\rho}{R_1}$ – добротность; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление последовательного колебательного контура.

На алгебраическом представлении (3.16) схемных функций в виде функций двух переменных основано их графическое представление в виде поверхностей, расстояние от которых до комплексной плоскости определяется значениями функций $F_R(\sigma, \omega)$, $F_J(\sigma, \omega)$, $|F(\sigma + j\omega)|$ и $\arg F(\sigma + j\omega)$. Более простым способом графического представления функций двух переменных является семейство линий равных значений (изолиний).

3.3 Частотные и временные характеристики и их параметры

Схемные функции позволяют определять реакцию электронной схемы на внешние воздействия произвольной формы, однако их использование на практике неудобно, так как они содержат в себе достаточно много информации, спрессованной в ограниченном координатном пространстве.

На практике поведение электронных схем в переходных и установившихся режимах, как правило, рассматривают независимо друг от друга, используя при этом типовые тестовые воздействия специальных видов.

Для анализа установившихся режимов электронных схем широко применяют частотные характеристики. Для анализа электронных схем в переходных режимах применяют временные характеристики. И частотные, и временные характеристики являются частными случаями представления схемных функций при воздействиях специальных видов.

Частотные характеристики

Частотные характеристики отражают реакцию электронной схемы на тестовое гармоническое воздействие в установившемся режиме.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) может быть получена из выражения для схемной функции путем замены $p = j\omega$. АФЧХ представляет собой комплексную функцию, которую можно представить в виде

$$F(j\omega) = F_R(\omega) + jF_J(\omega) = |F(j\omega)|e^{j\arg F(j\omega)}, \quad (3.17)$$

где $F_R(\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)]$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); $F_J(\omega) = \operatorname{Im}[F(j\omega)]$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ); $|F(j\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\arg F(j\omega)$ – фазово-частотная характеристика (ФЧХ).

Вещественная частотная характеристика связана с амплитудно-частотной характеристикой соотношением

$$F_R(\omega) = |F(j\omega)|\cos(\arg F(j\omega)), \quad (3.18)$$

из которого следует, что ВЧХ является четной функцией частоты ($F_R(-\omega) = F_R(\omega)$).

Мнимая частотная характеристика связана с амплитудно-частотной характеристикой соотношением

$$F_J(\omega) = |F(j\omega)|\sin(\arg F(j\omega)), \quad (3.19)$$

из которого следует, что МЧХ является нечетной функцией частоты ($F_J(-\omega) = -F_J(\omega)$).

Для компактного представления частотных характеристик применяют логарифмический масштаб, в котором строят логарифмические частотные характеристики

$$\lg F(j\omega) = \lg |F(j\omega)| + j\arg F(j\omega), \quad (3.20)$$

где $\lg|F(j\omega)|$ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ), выраженная в беллах.

Переход от схемной функции к частотным характеристикам рассмотрим на примере коэффициента передачи по напряжению для схемы избирательного усилителя рис. 3.4

$$k_U(p) = -\frac{R_2 C p}{L C p^2 + R_1 C p + 1} = H \frac{p}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2},$$

где $H = -\frac{R_2}{L}$ – масштабный множитель, $\xi = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ – коэффициент демпфирования, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота.

Выполняя подстановку $p = j\omega$, получим выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики

$$k_U(j\omega) = H \frac{j\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega},$$

выделяя из которого действительную и мнимую части, модуль и аргумент, найдем вещественную частотную характеристику $k_{U,R}(\omega)$, мнимую частотную характеристику $k_{U,J}(\omega)$, амплитудно-частотную характеристику $|k_U(\omega)|$ и фазо-частотную характеристику $\varphi(\omega)$:

$$k_{U,R}(\omega) = H \frac{2\xi\omega_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}},$$

$$k_{U,J}(\omega) = H \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}},$$

$$|k_U(j\omega)| = H \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Временные характеристики

Временные характеристики отражают реакцию электронной схемы на типовые импульсные воздействия при переходе из одного стационарного режима в другой.

В качестве типовых воздействий наибольшее применение находят единичное импульсное воздействие и единичное ступенчатое воздействие.

Единичное импульсное воздействие математически определяется обобщенной функцией Дирака (δ -функцией):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Операторное изображение δ -функции имеет вид:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} = 1. \quad (3.22)$$

Реакция электронной схемы на единичное импульсное воздействие представляет собой импульсную (импульсную переходную) характеристику $g(t)$. Из (3.22) следует, что операторное изображение импульсной характеристики совпадает с выражением схемной функции:

$$G(p) = F(p) L\{\delta(t)\} = F(p). \quad (3.23)$$

Таким образом, импульсная характеристика определяется обратным преобразованием Лапласа от схемной функции

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\}. \quad (3.24)$$

Применяя импульсную характеристику, можно найти реакцию электронной схемы на произвольное воздействие $\xi(t)$:

$$y(t) = g(0)\xi(0) + \int_0^t g(t-\tau)\xi(\tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Единичное ступенчатое воздействие математически определяется функцией Хэвисайда

$$1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

операторное изображение которой имеет вид

$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{p}. \quad (3.27)$$

Реакцией электронной схемы на единичное ступенчатое воздействие является переходная характеристика $h(t)$, изображение которой по Лапласу имеет вид:

$$H(p) = F(p)L\{\eta(t)\} = \frac{F(p)}{p}, \quad (3.28)$$

откуда

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\}. \quad (3.29)$$

Импульсная и переходная характеристики связаны между собой соотношениями:

$$H(p) = \frac{G(p)}{p},$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (3.30)$$

$$h(t) = h(0) + \int_0^{\infty} g(\sigma) d\sigma.$$

Существует также связь временных характеристик с частотными характеристиками:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_R(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad (3.31)$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_R(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega.$$

В качестве примера рассмотрим получение импульсной переходной и

переходной характеристик для коэффициента передачи по напряжению избирательного усилителя рис. 3.4. Для упрощения процедуры перехода от операторного изображения схемной функции к оригиналу воспользуемся представлением схемной функции в виде суммы простых слагаемых: выражение (3.14) для случая простых полюсов и выражение (3.15) для случая кратного полюса схемной функции.

В результате импульсная переходная характеристика в случае простых полюсов

$$\begin{aligned} k_U(t) &= L^{-1}\{k_U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_1}{p-p_1} + \frac{k_2}{p-p_2}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{k_1}{p-p_1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{k_2}{p-p_2}\right\} = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}, \end{aligned}$$

а в случае кратного полюса

$$\begin{aligned} k_U(t) &= L^{-1}\{k_U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_{11}}{(p-p_1)^2} + \frac{k_{12}}{p-p_1}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{k_{11}}{(p-p_1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{k_{12}}{p-p_1}\right\} = k_{11} t e^{p_1 t} + k_{12} e^{p_1 t}. \end{aligned}$$

Используя связь (3.30) переходной характеристики с импульсной переходной характеристикой найдем переходную характеристику в случае про-

СТЫХ ПОЛЮСОВ

$$h_U(t) = \int_0^t (k_1 e^{p_1 \sigma} + k_2 e^{p_2 \sigma}) d\sigma = \frac{k_1}{p_1} (e^{p_1 t} - 1) + \frac{k_2}{p_2} (e^{p_2 t} - 1)$$

и в случае кратного полюса

$$\begin{aligned}
 h_U(t) &= \int_0^t (k_{11}te^{p_1t} + k_{12}e^{p_1t}) d\sigma = \\
 &= \frac{k_{11}}{p_1} te^{p_1t} - \frac{k_{11}}{p_1^2} (e^{p_1t} - 1) + \frac{k_{12}}{p_1} (e^{p_1t} - 1).
 \end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение схемной функции. Назовите основные схемные функции проходного четырехполюсника.

Ответ: схемной функцией называют отношение операторных изображений токов и напряжений, характеризующих электрическое состояние электронной схемы как проходного четырехполюсника, при нулевых начальных условиях. Основные схемные функции проходного четырехполюсника: передаточные (коэффициенты передачи по напряжению и по току, передаточные сопротивление и проводимость), входные (входные сопротивление и проводимость) и выходные (выходные сопротивление и проводимость).

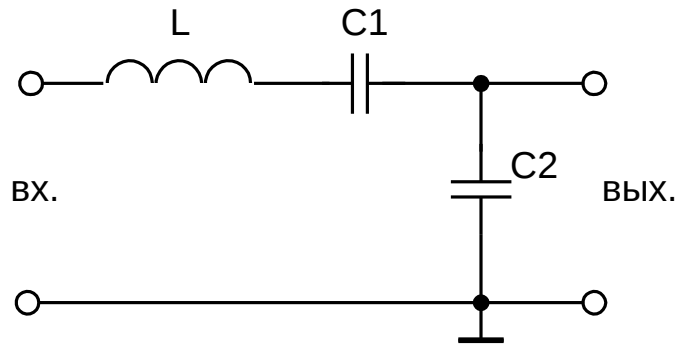
2. Укажите отличие схемных функций проходного четырехполюсника от полных схемных функций. Назовите основные полные схемные функции.

Ответ: при определении полных схемных функций учитывают внутренние иммитансы источников сигналов; полными схемными функциями являются схемные функции цепи передачи (сквозные коэффициенты передачи задающей ЭДС и задающего тока источника сигнала, сквозные передаточные сопротивление и проводимость) и схемные функции входной цепи (полные входные сопротивление и проводимость, коэффициенты передачи входной цепи по напряжению и току) .

3. Укажите основные алгебраические формы представления схемных функций.

Ответ: дробно-рациональная, в виде суммы простых слагаемых, в виде цепных дробей.

4. Получите дробно-рациональную форму представления коэффициента передачи по напряжению для схемы



Ответ: $k_U(p) = \frac{a_0}{b_2 p^2 + b_0}$, где $a_0 = C_1$, $b_2 = LC_1 C_2$, $b_0 = C_1 + C_2$.

5. Для схемной функции $F(p) = \frac{4p^2 + 12p + 8}{2p^2 + 12p + 18}$ укажите масштабный коэффициент, нули и полюса.

Ответ: масштабный коэффициент $H = 2$, нули $z_1 = -1$, $z_2 = -2$, кратный полюс $p_1 = -3$ с кратностью $q_1 = 2$.

6. Представьте схемную функцию $F(p) = \frac{p^2 + 4p + 4}{p^2 + 4p + 3}$ в виде суммы простых слагаемых.

Ответ: $F(p) = k_{00} + \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{p - p_i} = 1 + \frac{0,5}{p+1} - \frac{0,5}{p+3}$.

7. Что представляют собой временные характеристики и как они связаны со схемными функциями.

Ответ: временные характеристики отражают реакцию электронной схемы на типовые импульсные воздействия при переходе из одного стационарного режима в другой; различают импульсную переходную характеристику $g(t) = L^{-1}[F(p)]$ и переходную характеристику $h(t) = L^{-1}\left[\frac{F(p)}{p}\right]$.

8. Получите выражение переходной характеристики, если схемная функция имеет вид

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)}.$$

Ответ: $h(t) = \exp(-t) - \exp(-2t)$.

9. Запишите выражение импульсной переходной характеристики по схемной функции

$$F(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Ответ: $g(t) = 2 \cdot \exp(-t) + t \cdot \exp(-t)$.

10. Укажите, как связаны переходная и импульсная переходная характеристики в операторной и во временной формах.

Ответ: $H(p) = \frac{G(p)}{p}$, $g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$.

3 СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ АНАЛИЗ.....	103
3.1 Понятие и виды схемных функций электронных схем.....	103
3.2 Формы представления схемных функций.....	107
3.3 Частотные и временные характеристики и их параметры.....	113
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	119

4 АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ

Основным этапом исследования линейных электронных схем на основе операторных математических моделей является определение выражений схемных функций, по которым далее производится расчет частотных и временных характеристик, определяются параметры последних, исследуется параметрическая чувствительность, устойчивость и т.д.

В зависимости от используемого языка математического описания выделяют три группы методов определения схемных функций:

- матричные методы;
- топологические методы;
- теоретико-множественные методы.

Алгебраический язык основан на представлении информации в виде матриц, является удобным для автоматизации анализа и служит теоретической базой для обоснования методов, основанных на других языках описания.

Топологический язык основан на представлении математических моделей в виде взвешенных графов и получении выражений для схемных функций непосредственно по виду графов путем применения к нему специальных операций.

В основе теоретико-множественного языка описания методов определения схемных функций лежит отображение матричных или топологических моделей электронных схем совокупностью множеств, содержащих коды их ненулевых элементов, с последующим преобразованием этих множеств на основе теоретико-множественных операций.

4.1 Определение схемных функций по матрично-векторным параметрам электронных схем

Как отмечалось, схемные функции характеризуют электронную схему, приведенную к проходному четырехполюснику относительно пары входов, к одному из которых приложено внешнее воздействие, а на другом определяется реакция на это воздействие.

Используя какой-либо тип уравнений четырехполюсника совместно с соотношениями, которые связывают входные и выходные токи и напряжения с параметрами источника сигнала и нагрузки, схемные функции можно выразить через параметры проходного четырехполюсника.

В свою очередь, параметры четырехполюсника непосредственно связаны с матрицами эквивалентных параметров схемы. В каждом конкретном случае определять схемные функции через параметры четырехполюсника неудобно, поэтому целесообразно установить непосредственную связь между схемными функциями и матрицами эквивалентных параметров схемы для уравнений различных типов (КВ, КК, ВК) в различных системах координат.

Определение схемных функций через параметры проходного четырехполюсника

Электронная схема как проходной четырехполюсник характеризуется двумя уравнениями, выражающими две второстепенные величины через две основные. В общем случае уравнения, называемые основными уравнениями проходного четырехполюсника, имеют вид

$$\begin{cases} \xi_{\hat{a}\hat{o}} = W_{11}Y_{\hat{a}\hat{o}} + W_{12}Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} , \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = W_{21}Y_{\hat{a}\hat{o}} + W_{22}Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} . \end{cases} \quad (4.1)$$

Связь основных и второстепенных величин с параметрами источника сигнала и нагрузки в общем случае можно представить в виде:

$$\begin{cases} \xi_{\hat{a}\hat{o}} = \xi_c - w_c y_{\hat{a}\hat{o}}, \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = w_i y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где ξ_c – задающая величина источника сигнала (задающая ЭДС или задающий ток); w_c , w_i – иммитансы источника сигнала и нагрузки соответственно.

Совместное решение (4.1) и (4.2) дает выражения для отношений основных и второстепенных величин:

$$F_{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\xi_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{w_i w_{21}}{|w| - w_{11} w_i}, \quad F_{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} y_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{y_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{w_i w_{21}}{w_{22} - w_i},$$

$$F_{y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\xi_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{w_{21}}{|w| - w_{11} w_i}, \quad F_{y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} y_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{y_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{w_{21}}{w_{22} - w_i}, \quad (4.3)$$

$$F_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{o}}}{y_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{|w| - w_{11} w_i}{w_{22} - w_i}, \quad F_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}} \Big|_{w_i=0} = \frac{|w| + w_{22} w_{\hat{n}}}{w_{11} + w_{\hat{n}}},$$

где $|w| = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix}$.

Подставляя в выражения (4.3), конкретные физические величины, можно получить выражения для конкретных видов схемных функций, соответствующие различным системам параметров проходного четырехполюсника.

В системе U -параметров

$$\begin{aligned} y_{\hat{a}\hat{o}} &= U_{\hat{a}\hat{o}}, & \xi_{\hat{a}\hat{o}} &= I_{\hat{a}\hat{o}}, & \xi_{\hat{n}} &= J_c, & w_i &= y_i \\ y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, & \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, & w_c &= y_c, \end{aligned} \quad (4.4)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} k_I &= \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{y_i y_{21}}{|y| - y_{11} y_i}, & k_U &= \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{y_{21}}{y_{22} - y_i}, \\ Z_{i\hat{a}\hat{o}} &= \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{y_{21}}{|y| - y_{11} y_i}, & Y_{i\hat{a}\hat{o}} &= \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{y_i y_{21}}{y_{22} - y_i}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$Y_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{|Y| - Y_{11}Y_{\hat{i}}}{Y_{22} - Y_{\hat{i}}}, \quad Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}} \Big|_{Y_{\hat{i}}=0} = \frac{|Y| + Y_{22}Y_{\hat{n}}}{Y_{11} + Y_{\hat{n}}}.$$

В системе Z-параметров

$$\begin{aligned} Y_{\hat{a}\hat{o}} &= I_{\hat{a}\hat{o}}, & \xi_{\hat{a}\hat{o}} &= U_{\hat{a}\hat{o}}, & \xi_{\hat{n}} &= e_c, & w_{\hat{i}} &= z_{\hat{i}} \\ Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, & \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, & w_c &= z_c, \end{aligned} \quad (4.6)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} k_U &= \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{z_{\hat{i}} z_{21}}{|z| - z_{11}z_{\hat{i}}}, & k_I &= \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{z_{21}}{z_{22} - z_{\hat{i}}}, \\ Y_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}} &= \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{z_{21}}{|z| - z_{11}z_{\hat{i}}}, & Z_{\hat{i}\hat{a}\hat{o}} &= \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{z_{\hat{i}} z_{21}}{z_{22} - z_{\hat{i}}}, \\ Z_{\hat{a}\hat{o}} &= \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{|z| - z_{11}z_{\hat{i}}}{z_{22} - z_{\hat{i}}}, & Z_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}} \Big|_{z_{\hat{i}}=0} = \frac{|z| + z_{22}z_{\hat{n}}}{z_{11} + z_{\hat{n}}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Связь параметров проходного четырехполюсника с матрицами эквивалентных параметров схемы

Представим входную и выходную ветви четырехполюсника независимыми источниками, задающими величинами которых являются $\xi_{\hat{a}\hat{o}}$ и $\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$.

В зависимости от характера этих источников (источники тока или напряжения) получим одну из форм уравнений (4.1). Инцидентность внешних (входной и выходной) ветвей четырехролюсника системе независимых сечений и контуров определяется соответствующими столбцами топологических матриц Π независимых сечений и \mathbf{P} независимых контуров. Полагая, что внутри четырехролюсника независимые источники отсутствуют, уравнение схемы можно представить в виде

$$WX = -[\theta_{\hat{a}\hat{o}} \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}] \begin{bmatrix} \xi_{\hat{a}\hat{o}} \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix}$$

или

$$[W \quad \theta_{\hat{a}\hat{o}} \quad \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}] \begin{bmatrix} X \\ \xi_{\hat{a}\hat{o}} \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} = \bar{0}, \quad (4.8)$$

где W – матрица эквивалентных параметров схемы, соответствующая любому типу уравнений, а $\theta_{\hat{a}\hat{o}}$ и $\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$ – матрицы-столбцы, описывающие задающий вектор Q .

Основные величины $Y_{\hat{a}\hat{o}}$ и $Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$ четырехполюсника могут быть выражены через вектор состояния X

$$\begin{bmatrix} Y_{\hat{a}\hat{o}} \\ Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} X, \quad (4.9)$$

где $\lambda_{\hat{a}\hat{o}}$, $\lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$ – векторы-строки, образуемые из столбцов топологических матриц Θ и (или) Θ_1 , которые соответствуют внешним ветвям четырехполюсника.

Объединив (4.8) и (4.9) в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{o}} & \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{o}} & 0 & 0 \\ \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \xi_{\hat{a}\hat{o}} \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_{\hat{a}\hat{o}} \\ Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

и решив его относительно $\xi_{\hat{a}\hat{o}}$ и $\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$, получим

$$\begin{cases} \xi_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{1}{\Delta''} (\Delta''_{n+1,n+1} Y_{\hat{a}\hat{o}} + \Delta''_{n+2,n+1} Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}), \\ \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \frac{1}{\Delta''} (\Delta''_{n+1,n+2} Y_{\hat{a}\hat{o}} + \Delta''_{n+2,n+2} Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}), \end{cases} \quad (4.11)$$

где $\Delta'' = \det W'' = \det \begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{o}} & \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{o}} & 0 & 0 \\ \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а $\Delta''_{n+1,n+1}$, $\Delta''_{n+1,n+2}$, $\Delta''_{n+2,n+1}$, $\Delta''_{n+2,n+2}$ –

алгебраические дополнения матрицы W'' относительно элементов двух последних строк и столбцов.

Сравнивая уравнения (4.11) с основными уравнениями четырехполюсника (4.1), можно записать матрицу четырехполюсника в виде

$$W = \frac{1}{\Delta''} \begin{bmatrix} \Delta''_{n+1,n+1} & \Delta''_{n+2,n+1} \\ \Delta''_{n+1,n+2} & \Delta''_{n+2,n+2} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Алгебраические дополнения, входящие в матрицу четырехполюсника (4.12), представляют собой определители матриц $(n+1)$ -го порядка

$$\Delta''_{n+1,n+1} = \det \begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta''_{n+2,n+1} = -\det \begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{o}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\Delta''_{n+1,n+2} = -\det \begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta''_{n+2,n+2} = \det \begin{bmatrix} W & \theta_{\hat{a}\hat{o}} \\ \lambda_{\hat{a}\hat{o}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, определение выражений параметров проходного четырехполюсника сводится к отысканию определителей матриц вида

$$W' = \begin{bmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad W'' = \begin{bmatrix} W & \theta_1 & \theta_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

где W – матрица n -го порядка, θ , λ , θ_1 , θ_2 , λ_1 , λ_2 – n -мерные векторы.

Элементы векторов θ и λ равны $+1$, -1 или 0 , поэтому определитель матрицы W' можно привести к определителю $(n-1)$ -го порядка, используя операции разложения по столбцу θ и строке λ :

$$\det W' = \theta_p \lambda_q \Delta'_{p,n+1;n+1,q} = -\theta_p \lambda_q \Delta'_{p,q;n+1,n+1} = -\theta_p \lambda_q \Delta_{pq}^{\Omega}, \quad (4.14)$$

где θ_p и λ_q – опорные элементы столбца θ и строки λ ; Δ_{pq}^{Ω} – алгебраическое дополнение матрицы Ω , полученной из матрицы W путем алгебраического суммирования строк и столбцов.

[Определение] Величину $\Delta_{\theta\lambda} = \theta_p \lambda_q \Delta_{pq}^{\Omega}$ называют суммарным алгебраическим дополнением матрицы W относительно векторов θ и λ . [.]

Векторы θ и λ называют преобразующими векторами. Обычно векторы θ и λ содержат значительное число нулевых составляющих, поэтому удобно отображать эти векторы множеством номеров их ненулевых составляющих, разбивая каждое из них на подмножество номеров положительных (α^+, β^+) и отрицательных (α^-, β^-) составляющих, то есть

$$\Delta_{\theta\lambda} = \Delta(\alpha^+ / \alpha^-) | \beta^+ / \beta^-).$$

Например, суммарное алгебраическое дополнение матрицы

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ относительно преобразующих векторов } \theta = [0 \ 1 \ 1 \ -1]^T \text{ и}$$

$\lambda = [-1 \ 0 \ 0 \ -1]$ равно

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta\lambda} &= \Delta_{[0 \ 1 \ 1 \ -1] [-1 \ 0 \ 0 \ -1]} = \Delta_{(2,3/4)(0/1,4)} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -18. \end{aligned}$$

Определитель Δ'' матрицы W'' можно выразить через определитель ($n-2$)-го порядка матрицы W , то есть

$$\Delta'' = \det W'' = \Delta_{\theta_1 \lambda_1; \theta_2 \lambda_2} = \Delta_{\theta_2 \lambda_2; \theta_1 \lambda_1}. \quad (4.15)$$

Величина $\Delta_{\theta_1 \lambda_1; \theta_2 \lambda_2} = \Delta_{\theta_2 \lambda_2; \theta_1 \lambda_1} = \theta_{p_1} \lambda_{q_1} \theta_{p_2} \lambda_{q_2} \Delta_{p_1 q_1; p_2 q_2}^{\Omega}$ представляет собой двухкратное суммарное алгебраическое дополнение матрицы W относительно преобразующих векторов θ_1, λ_1 и θ_2, λ_2 .

Например, двухкратное суммарное алгебраическое дополнение матри-

$$\text{цы } W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ относительно преобразующих векторов}$$

$\theta_1 = [0 \ 1 \ 1 \ -1]^T$, $\lambda_1 = [-1 \ 0 \ 0 \ -1]$ и $\theta_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$, $\lambda_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ равно

$$\Delta_{\theta_1 \lambda_1, \theta_2 \lambda_2} = \Delta_{(2,3/4)(0/1,4)(3,4/0)(1/0)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

[Выводы] Таким образом, параметры четырехполюсника можно выразить через суммарные алгебраические дополнения матрицы эквивалентных параметров схемы. [.]

Согласно (4.14) и (4.17) имеем

$$W = \frac{1}{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}} \begin{bmatrix} -\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}} & \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} \\ \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}} & -\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Используя соотношения (4.16) для параметров четырехполюсника, выразим отношения (4.3) основных и второстепенных величин проходного четырехполюсника через определитель и суммарные алгебраические дополнения матриц эквивалентных параметров схемы:

$$F_{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}}{\Delta + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}},$$

$$F_{Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} Y_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}}{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}},$$

$$F_{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} Y_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}}{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}},$$

(4.17)

$$F_{Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}}{\Delta + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}},$$

$$F_{\hat{a}\hat{o}} = -\frac{\Delta + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}}{\Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} + W_1 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}},$$

$$F_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = -\frac{\Delta - W_{\hat{n}}\Delta\theta_{\hat{a}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{o}}}{\Delta\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} - W_{\hat{n}}\Delta\theta_{\hat{a}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{o}};\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}.$$

Связь схемных функций с матрицами эквивалентных параметров схемы

Схемные функции могут быть найдены через определитель и алгебраические дополнения матрицы эквивалентных параметров схемы W , соответствующей уравнениям любого типа: КВ, ВК, КК. Соотношения для схемных функций, соответствующие уравнениям разных типов, будут отличаться только видом преобразующих векторов.

Пусть внешние ветви представлены источниками тока, причем направления этих ветвей выбраны противоположными внешним напряжениям четырехполюсника (рис. 4.1).

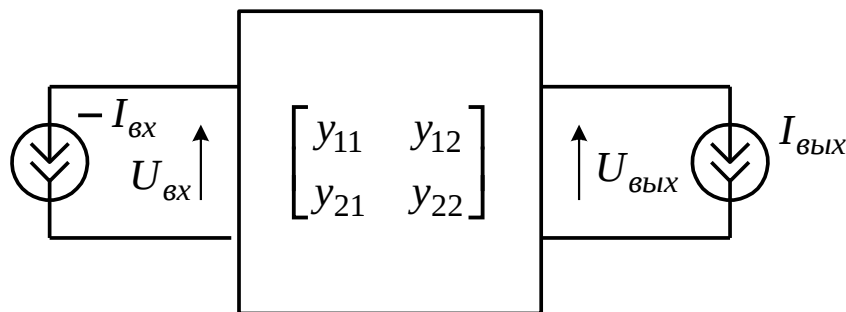


Рис. 4.1. Четырехполюсник с задающими источниками тока

Тогда $\xi_{\hat{a}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{o}}$, $\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$, $Y_{\hat{a}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{o}}$, $Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$, а схемные функции определяются выражениями:

$$k_I = -\frac{Y_i \Delta\theta_{\hat{a}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta + Y_i \Delta\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}\lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}},$$

$$\begin{aligned}
k_U &= \frac{\Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + y_i \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
y_{i\hat{a}\hat{o}} &= \frac{y_i \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + y_i \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
z_{i\hat{a}\hat{o}} &= -\frac{\Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta + y_i \Delta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
y_{\hat{a}\hat{o}} &= \frac{\Delta + y_i \Delta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + y_i \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= -\frac{\Delta - y_{\hat{n}} \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}}{\Delta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} - y_{\hat{n}} \Delta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Для КК-уравнений в соответствии с правилом формирования задающего вектора Q , учитывая, что ток $I_{\hat{a}\hat{o}}$ противоположен направлению входной ветви, получаем

$$\theta_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} -\pi_{\hat{a}\hat{o}} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

где $\pi_{\hat{a}\hat{o}}$ и $\pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$ – векторы-столбцы матрицы невырожденных сечений для входной и выходной ветвей.

Вектор X содержит в качестве составляющих узловые напряжения U' и контурные токи I' невырожденных координат, причем $y_{\hat{a}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{o}} = \pi_{\hat{a}\hat{o}}^T U'$, $y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T U'$.

Следовательно, можно записать

$$\lambda_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \pi_{\hat{a}\hat{o}}^T & \bar{0} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T & \bar{0} \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

В однородном узлом координатном базисе все контуры являются вырожденными, поэтому преобразующие векторы для узловых уравнений принимают вид:

$$\theta_{\hat{a}\hat{o}} = -\pi_{\hat{a}\hat{o}}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{o}} = \pi_{\hat{a}\hat{o}}^T, \tag{4.21}$$

$$\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T.$$

В канонической системе сечений входная и выходная ветви могут быть инцидентными не более чем двум сечениям. Тогда в общем случае преобразующие векторы содержат по два ненулевых элемента, один из которых равен +1, а другой — (-1). Допустим, что входная ветвь инцидентна только сечениям с номерами a и c , а выходная ветвь — сечениям с номерами b и d , причем направления ветвей совпадают с направлениями a -го и b -го сечений (рис. 4.2).

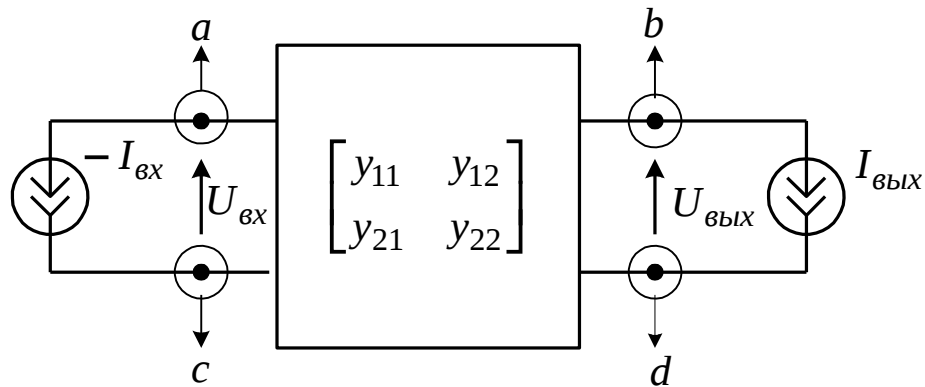


Рис. 4.2. Четырехполюсник с задающими источниками тока и канонической системой независимых сечений

Тогда

$$\pi_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \dots \\ a & 1 \\ \dots \\ c & -1 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \pi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \dots \\ b & 1 \\ \dots \\ d & -1 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

а суммарные алгебраические дополнения матрицы проводимостей электрон-

ной схемы принимают вид

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} &= -\Delta_{(a+\tilde{n})(b+d)}, \\
 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} &= -\Delta_{(a+\tilde{n})(a+c)}, \\
 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} &= \Delta_{(b+d)(b+d)}, \\
 \Delta_{\theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}} &= -\Delta_{(a+\tilde{n})(a+c); (b+d)(b+d)}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Формулы для схемных функций, записанные с учетом (4.23), представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Связь схемных функций с укороченной матрицей проводимостей в канонической системе независимых сечений

Название	Определение	Формула
Коэффициент передачи напряжения	$K_U = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Y_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Коэффициент передачи напряжения при холостом ходе	$K_U^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i=0}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)}}$
Коэффициент передачи тока	$K_I = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Y_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Y_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Коэффициент передачи тока при коротком замыкании	$K_I^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Входная проводимость	$Y_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Y_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Y_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Входная проводимость при холостом ходе	$Y_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i=0}$	$\frac{\Delta}{\Delta_{(a+c)(a+c)}}$
Входная проводимость при коротком замыкании	$Y_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{(b+d)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Проводимость передачи	$Y_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Y_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Y_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$

Название	Определение	Формула
Коэффициент передачи напряжения	$K_U = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Y_i \Delta_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}$
Сопротивление передачи	$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Y_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Выходная проводимость	$Y_{\hat{a}\hat{o}} = -\frac{I_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}c}}{U_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Y_c \Delta_{(a+c)(a+c)}}{\Delta_{(b+d)(b+d)} + Y_c \Delta_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}$

Наиболее простой вид соотношения для схемных функций принимают в частном случае, когда каждая внешняя ветвь четырехполюсника инцидентна только одному сечению и их направления совпадают с направлениями сечений. Тогда преобразующие векторы содержат только по одному ненулевому элементу, равному +1. Вследствие этого суммарные алгебраические дополнения обращаются в простые алгебраические дополнения матрицы проводимостей электронной схемы. Допустим, что входная ветвь инцидентна только сечению с номером a ($c=0$), а выходная ветвь – сечению с номером b ($d=0$). Соответствующие формулы для схемных функций являются частным случаем формул, приведенных в таблице 4.1, и в свою очередь представлены в таблице 4.2.

В канонической системе сечений выражения для схемных функций (таблица 4.2) применимы, если схему можно привести к четырехполюснику с короткозамкнутой стороной, у которого вход и выход имеют общий узел, являющийся одновременно базисным узлом. При этом числа a и b означают номера входного и выходного узлов четырехполюсника соответственно.

Таблица 4.2 — Связь схемных функций с укороченной матрицей проводимостей при инцидентности входной ветви одному входному сечению и выходной ветви одному выходному сечению

Название	Определение	Формула
----------	-------------	---------

Коэффициент передачи напряжения	$K_U = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + Y_i \Delta_{aa,bb}}$
Коэффициент передачи напряжения при холостом ходе	$K_U^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i = 0}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$
Коэффициент передачи тока	$K_I = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Y_i \Delta_{ab}}{\Delta + Y_i \Delta_{bb}}$
Коэффициент передачи тока при коротком замыкании	$K_I^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}}$
Входная проводимость	$Y_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Y_i \Delta_{bb}}{\Delta_{aa} + Y_i \Delta_{aa,bb}}$
Входная проводимость при холостом ходе	$Y_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i = 0}$	$\frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$
Входная проводимость при коротком замыкании	$Y_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Y_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{bb}}{\Delta_{aa,bb}}$
Проводимость передачи	$Y_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Y_i \Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + Y_i \Delta_{aa,bb}}$
Сопротивление передачи	$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta + Y_i \Delta_{bb}}$
Выходная проводимость	$Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = -\frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}}}{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Y_c \Delta_{aa}}{\Delta_{bb} + Y_c \Delta_{aa,bb}}$

Рассмотрим пример определения схемных функций для схемы фильтра нижних частот, приведенной на рис. 4.3,а.

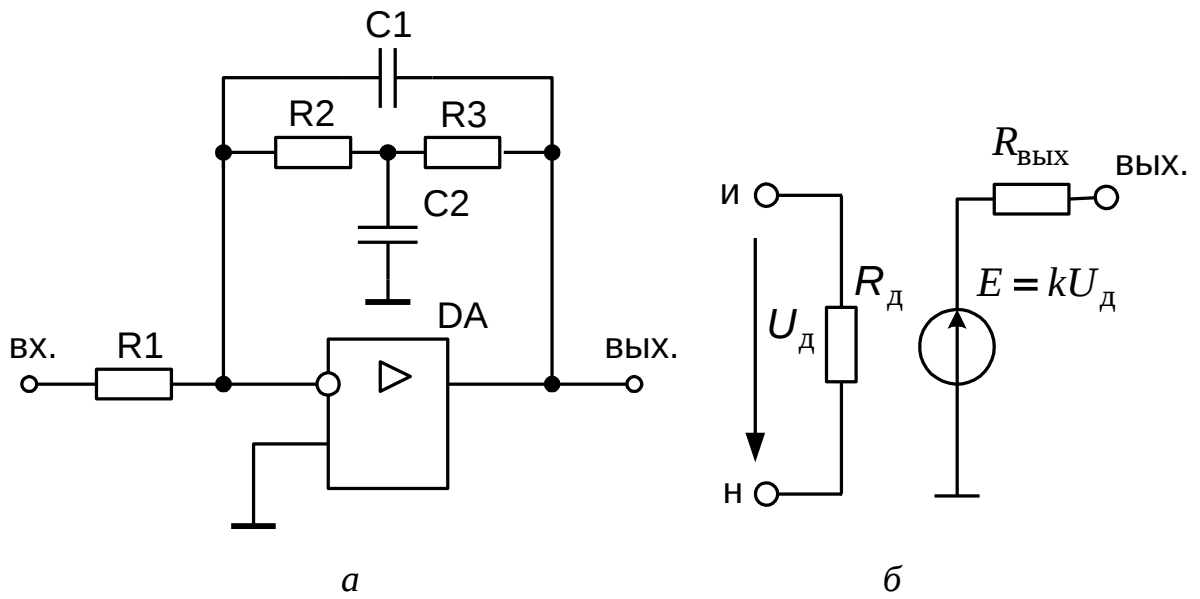


Рис. 4.3. Схема фильтра нижних частот (а)
и эквивалентная схема операционного усилителя (б)

Используя эквивалентную схему операционного усилителя, приведенную на рис. 4.3,б, получим схему замещения фильтра по переменному току, представив входную и выходную ветви источниками тока (рис. 4.4).

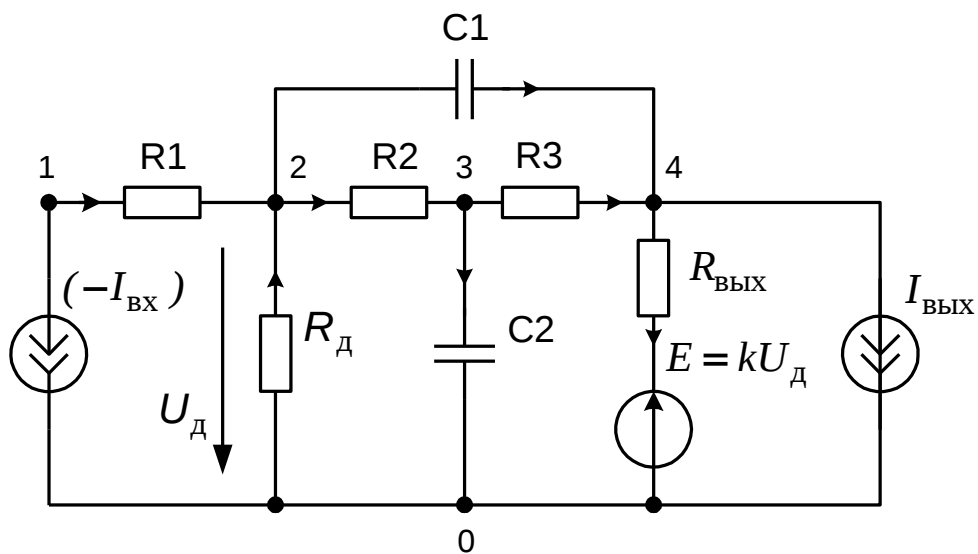


Рис. 4.4. Схема фильтра нижних частот с задающими источниками тока

При использовании канонической системы независимых сечений, которой соответствует указанная на рис. 4.4 нумерация узлов $a = 1$, $b = 4$, $c = d = 0$ (схема приводится к четырехполюснику с короткозамкнутой стороной), схемные функции определяются выражениями таблицы 4.2, в которых определитель и алгебраические дополнения вычисляются по укороченной матрице проводимостей, имеющей 4-ый порядок. Например, выражение для коэффициента передачи по напряжению будет иметь вид

$$k_U = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11} + Y_i \Delta_{11,44}}.$$

Внешние ветви можно представить источниками напряжения, причем так, чтобы направления этих ветвей соответствовали направлениям входного и выходного токов четырехполюсника (рис. 4.5)

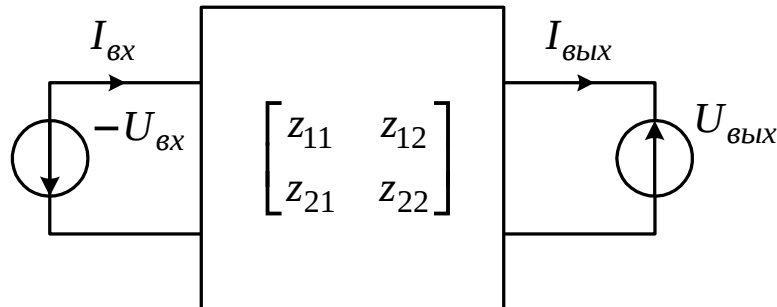


Рис. 4.5. Четырехполюсник с задающими источниками напряжения

Тогда

$$\xi_{\hat{a}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{o}}, \xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, Y_{\hat{a}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{o}}, Y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}},$$

а схемные функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
k_U &= -\frac{Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
k_I &= \frac{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
Z_{i\hat{a}\hat{o}} &= \frac{Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
Y_{i\hat{a}\hat{o}} &= -\frac{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
Z_{\hat{a}\hat{o}} &= \frac{\Delta + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}} + Z_i \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}, \\
Z_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} &= -\frac{\Delta - Z_{\hat{a}\hat{o}} \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}}{\Delta \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} - Z_{\hat{a}\hat{o}} \Delta \theta_{\hat{a}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{o}}; \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Для КК-уравнений в соответствии с правилом формирования задающего вектора Q , учитывая, что напряжение $U_{\hat{a}\hat{o}}$ противоположно направлению входной ветви, получаем

$$\theta_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -\rho_{\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix}, \quad \theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

где $\rho_{\hat{a}\hat{o}}$ и $\rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$ – векторы-столбцы матрицы невырожденных контуров для входной и выходной ветвей.

Вектор X содержит в качестве составляющих узловые напряжения U' и контурные токи I' невырожденных координат, причем $y_{\hat{a}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{o}} = \rho_{\hat{a}\hat{o}}^T I'$, $y_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T I'$.

Следовательно, можно записать

$$\lambda_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \rho_{\hat{a}\hat{o}}^T \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

В однородном контурном координатном базисе все сечения являются вырожденными, поэтому преобразующие векторы для контурных уравнений принимают вид:

$$\theta_{\hat{a}\hat{o}} = -\rho_{\hat{a}\hat{o}}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{o}} = \rho_{\hat{a}\hat{o}}^T, \quad (4.27)$$

$$\theta_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}, \quad \lambda_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^T.$$

В канонической системе контуров входная и выходная ветви могут быть инцидентными не более чем двум контурам. Тогда в общем случае преобразующие векторы содержат по два ненулевых элемента, один из которых равен +1, а другой – (-1). Допустим, что входная ветвь инцидентна только контурам с номерами a и c , а выходная ветвь – контурам с номерами b и d , причем направления ветвей совпадают с направлениями a -го и b -го контуров (рис. 4.6).

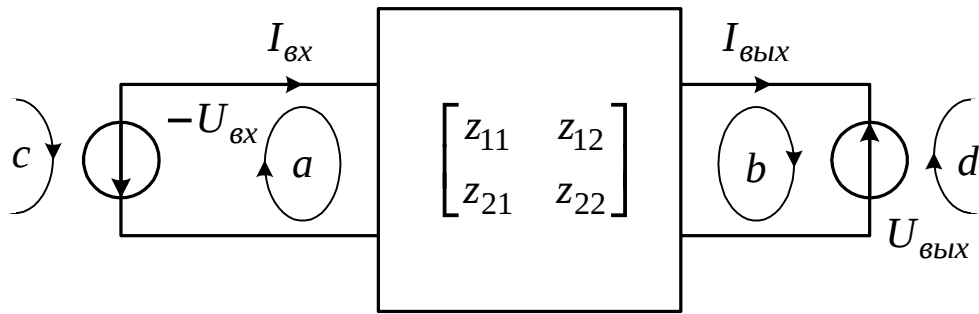


Рис. 4.6. Четырехполюсник с задающими источниками напряжения и канонической системой независимых контуров

Тогда

$$\rho_{\hat{a}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \dots \\ a & 1 \\ \dots \\ c & -1 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \rho_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = \begin{bmatrix} \dots \\ b & 1 \\ \dots \\ d & -1 \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

а суммарные алгебраические дополнения матрицы сопротивлений электрон-

ной схемы принимают вид (4.23)

Формулы для схемных функций, записанные с учетом (4.23), представлены в таблице 4.3

Таблица 4.3 — Связь схемных функций с укороченной матрицей сопротивлений в канонической системе независимых контуров

Название	Определение	Формула
Коэффициент передачи тока	$K_I = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Z_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Коэффициент передачи тока при коротком замыкании	$K_I^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i=0}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)}}$
Коэффициент передачи напряжения	$K_U = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Z_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Z_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Коэффициент передачи напряжения при холостом ходе	$K_U^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Входное сопротивление	$Z_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Z_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Z_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Входное сопротивление при коротком замыкании	$Z_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i=0}$	$\frac{\Delta}{\Delta_{(a+c)(a+c)}}$
Входное сопротивление при холостом ходе	$Z_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{(b+d)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Сопротивление передачи	$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Z_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Z_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$
Проводимость передачи	$Y_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Z_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}$
Выходное сопротивление	$Z_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = -\frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}}}$	$\frac{\Delta + Z_c \Delta_{(a+c)(a+c)}}{\Delta_{(b+d)(b+d)} + Z_c \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}$

Наиболее простой вид соотношения для схемных функций принимают

в частном случае, когда каждая внешняя ветвь четырехполюсника инцидентна только одному контуру и их направления совпадают с направлениями контуров. Тогда преобразующие векторы содержат только по одному ненулевому элементу, равному +1. Вследствие этого суммарные алгебраические дополнения обращаются в простые алгебраические дополнения матрицы сопротивлений электронной схемы. Допустим, что входная ветвь инцидентна только контуру с номером a ($c=0$), а выходная ветвь – контуру с номером b ($d=0$). Соответствующие формулы для схемных функций являются частным случаем формул, приведенных в таблице 4.3, и в свою очередь представлены в таблице 4.4.

В канонической системе контуров условие применимости выражений для схемных функций (таблице 4.4) сводится к тому, чтобы электронная схема была планарной, а входная и выходная ветви были внешними ветвями схемы, причем числа a и b означают номера ячеек, инцидентных входной и выходной ветвям соответственно.

Таблица 4.4 — Связь схемных функций с укороченной матрицей сопротивлений при инцидентности входной ветви одному входному контуру и выходной ветви одному выходному контуру

Название	Определение	Формула
Коэффициент передачи тока	$K_I = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + Z_i \Delta_{aa,bb}}$
Коэффициент передачи тока при коротком замыкании	$K_I^{\hat{e}\hat{c}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i=0}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$
Коэффициент передачи напряжения	$K_U = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Z_i \Delta_{ab}}{\Delta + Z_i \Delta_{bb}}$
Коэффициент передачи напряжения при холостом ходе	$K_U^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}}$

Входное сопротивление	$Z_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta + Z_i \Delta_{bb}}{\Delta_{aa} + Z_i \Delta_{aa,bb}}$
Входное сопротивление при коротком замыкании	$Z_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}c} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i = 0}$	$\frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$
Входное сопротивление при холостом ходе	$Z_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} \Big _{Z_i \rightarrow \infty}$	$\frac{\Delta_{bb}}{\Delta_{aa,bb}}$
Сопротивление передачи	$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{Z_i \Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + Z_i \Delta_{aa,bb}}$
Проводимость передачи	$Y_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$	$\frac{\Delta_{ab}}{\Delta + Z_i \Delta_{bb}}$
Выходное сопротивление	$Z_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}} = -\frac{U_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}^{\hat{e}c}}$	$\frac{\Delta + Z_c \Delta_{aa}}{\Delta_{bb} + Z_c \Delta_{aa,bb}}$

Рассмотрим пример определения схемных функций для схемы фильтра нижних частот, приведенной на рис. 4.3,а, представив входную и выходную ветви источниками напряжения (рис. 4.7)

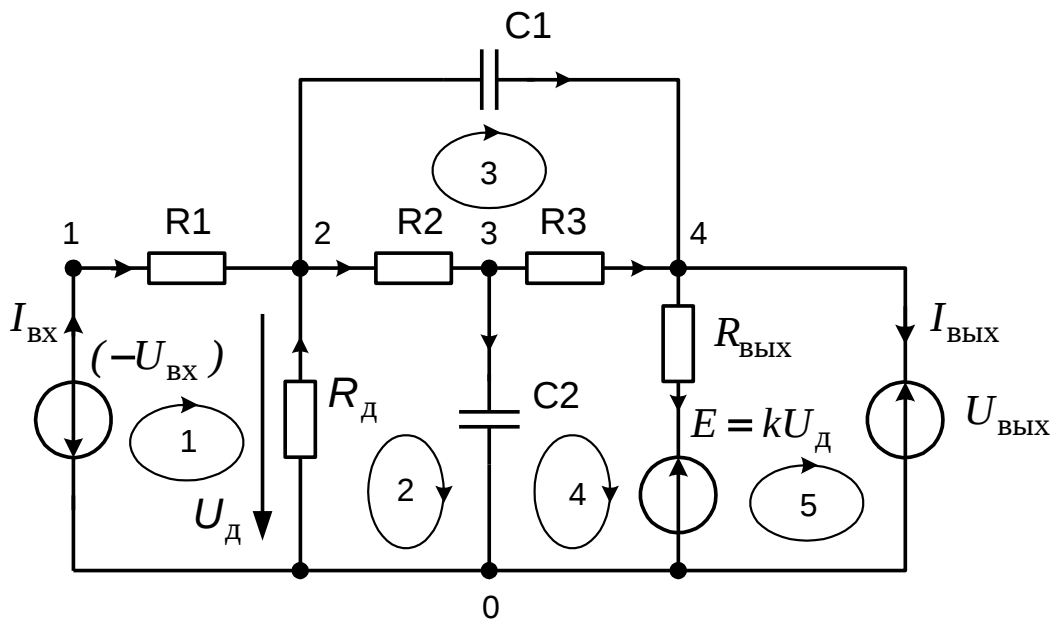


Рис. 4.7. Схема фильтра нижних частот с задающими источниками напряжения

При использовании канонической системы независимых контуров, показанной на рис. 4.7 $a = 1$, $b = 5$, $c = d = 0$, схемные функции определяются выражениями таблицы 4.4, в которых определитель и алгебраические дополнения вычисляются по укороченной матрице сопротивлений, имеющей 5-ый порядок. Например, выражение для коэффициента передачи по напряжению будет иметь вид

$$k_U = \frac{Z_i \Delta_{15}}{\Delta + Z_i \Delta_{55}}.$$

4.2 Определение схемных функций электронных схем методом сигнальных графов

Исследование электронных схем зачастую сводится к решению систем линейных уравнений. При этом существенный интерес представляет аналитическое решение, поскольку только символьная форма записи результата позволяет эффективно оценить влияние внутренних и внешних параметров на характеристики анализируемой схемы. Получение решения в аналитической форме алгебраическими методами связано со значительной затратой времени и практически может быть достигнуто лишь в случаях невысокого порядка систем уравнений. Никаких преимуществ при решении систем уравнений не дает переход от скалярной формы записи уравнений к матричной, поскольку все известные операции матричной алгебры эффективны только в случае численного представления элементов матриц.

Получение результата в аналитической форме значительно упрощается при переходе к топологическим способам решения систем линейных уравнений.

К топологическим методам анализа электронных схем относятся методы, которые подразумевают представление модели электронной схемы в виде графа и получение искомым результатов на основе операций, применяемых непосредственно к этому графу.

В зависимости от характера графов топологические методы анализа электронных схем можно разделить на две большие группы:

- основанные на использовании взвешенных полюсных графов электронных схем, дугам которых приписаны веса, определяемые параметрами компонентов электронной схемы;
- основанные на использовании ориентированных графов, отображающих систему линейных алгебраических уравнений, описывающих электронную схему (сигнальных графов).

Понятие и виды сигнальных графов

[Определение] Сигнальным называют ориентированный граф, отображающий систему линейных алгебраических уравнений, сформированную для электронной схемы. [.]

При этом вершины графа соответствуют искомым (x_j) и задающим (f_j) переменным, дуги отражают связи переменных в уравнениях и характеризуются весами a_{ij} , определяемыми коэффициентами уравнений.

В зависимости от *типа* системы линейных уравнений различают:

- однородные сигнальные графы, отображающие системы однородных линейных уравнений (не содержащих задающих переменных);
- неоднородные графы, отображающие системы неоднородных линейных уравнений (содержащих задающие переменные);

В зависимости от *формы представления* системы линейных уравнений различают следующие виды сигнальных графов:

- сигнальные графы Мэзона;
- сигнальные графы Коутса;
- обобщенные сигнальные графы (сигнальные графы Анисимова);
- ориентированные беспетлевые графы и др.

[Внимание] Наибольшее распространение при анализе электронных схем получили сигнальные графы Мэсона и обобщенные сигнальные графы. [.]

В зависимости от характера искомых и задающих переменных системы уравнений выделяют:

- гибридные сигнальные графы, переменными системы уравнений для которых являются как токи, так и напряжения;
- сигнальные U -графы, искомыми переменными системы уравнений для которых являются узловые потенциалы, а задающими – задающие токи;
- сигнальные I -графы, искомыми переменными системы уравнений для которых являются контурные токи, а задающими – задающие ЭДС.

При анализе электронных схем сигнальные I -графы практически не используются.

Существует два основных способа формирования сигнальных графов электронных схем:

- косвенный, который предполагает предварительную запись системы линейных алгебраических уравнений в требуемой форме;
- прямой, который заключается в построении сигнального графа непосредственно по схеме замещения электронной цепи, минуя этап записи системы уравнений.

[Определение] Передачей между вершинами сигнального графа называют отношение соответствующих переменных системы линейных алгебраических уравнений:

$$F_{ij} = \frac{x_i}{f_j}, \quad F'_{ij} = \frac{x_i}{x_j}. \quad [.]$$

Существует два основных способа определения передач сигнальных графов:

- путем эквивалентных преобразований исходного графа в граф, содержащий вершины x_i и f_j и одну дугу, направленную от f_j к x_i (либо

вершины x_i и x_j и одну дугу, направленную от x_j к x_i);

– путем применения топологической формулы общей передачи

$$F_{ij} = \frac{x_i}{f_j} = \frac{\sum_{k=1}^s \rho_k^{(x_i, f_j)} D_k}{D}, \quad (4.29)$$

где D – определитель сигнального графа; $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины f_j в вершину x_i ; D_k – величина дополнения k -го простого пути, направленного из вершины f_j в вершину x_i . Передача простого пути определяется как произведение передач дуг, входящих в этот путь. Величина дополнения простого пути находится как определитель части исходного графа, которая не касается соответствующего пути (не имеет с ним общих вершин). Правила вычисления определителя зависят от используемого вида сигнального графа, поэтому для графов каждого вида топологическая формула общей передачи имеет дополнительное название: формула Мэзона, формула Коутса, формула Анисимова и т.д.

Сигнальные графы Мэзона

Сигнальные графы Мэзона отображают системы линейных алгебраических уравнений, представленные в причинно-следственной форме, когда в каждом уравнении одна из искомым переменных явно выражена через другие искомые и задающие переменные:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^m a'_{ij} f_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.30)$$

где x_i – искомые переменные; f_j – задающие переменные; a_{ij} , a'_{ij} – коэффициенты системы уравнений.

Сигнальный граф Мэзона содержит:

- вершины-истоки, соответствующие задающим переменным f_j ;
- смешанные вершины, соответствующие искомым переменным x_i ;

– дуги, направленные от вершин, соответствующих переменным в правой части, к вершинам, соответствующим переменным в левой части уравнений (4.30), и характеризуются весами (передачами), равными коэффициентам a_{ij} , a'_{ij} .

Вершинам-истокам инцидентны только исходящие дуги, смешанным вершинам – как исходящие, так и входящие дуги. Вершины, которым инцидентны только входящие дуги, называют *вершинами-стоками*. Вершины-стоки, как и смешанные вершины, отображают искомые переменные системы уравнений.

Рассмотрим формирование сигнального графа Мэсона по системе уравнений, представленной в причинно-следственной форме

$$\begin{cases} x_1 = a_{12}x_2 + a'_{11}f_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ x_3 = a_{32}x_2. \end{cases}$$

Сигнальный граф Мэсона приведен на рис. 4.8 и содержит одну вершину-исток f_1 , две смешанные вершины x_1 и x_2 , одну вершину-сток x_3 , пять дуг с весами a_{12} , a'_{11} , a_{21} , a_{22} , a_{32} , одна из которых (дуга a_{22}) является петлей.

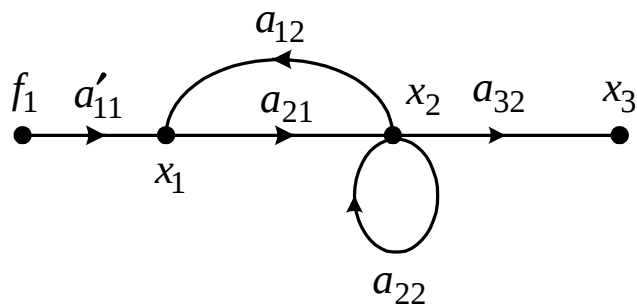


Рис 4.8. Сигнальный граф Мэсона

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений электронных схем имеют вид:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j = \sum_{j=1}^m w'_{ij} f_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.31)$$

Для представления системы уравнений (4.31) общего вида сигнальным графом Мэсона используют два основных способа приведения системы к причинно-следственной форме.

Первый способ основан на нормализации системы уравнений (4.31) и приведении ее к виду

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(-\frac{w_{ij}}{w_{ii}} \right) x_j + \sum_{j=1}^m \frac{w'_{ij}}{w_{ii}} f_j. \quad (4.32)$$

[*Определение*] Сигнальный граф Мэсона, построенный с использованием (4.32), называется *нормализованным*. [.]

Из сопоставления (4.32) и (4.30) следует, что веса дуг нормализованного графа связаны с коэффициентами системы уравнений общего вида выражениями:

$$a_{ij} = 0, \quad a_{ij} = -\frac{w_{ij}}{w_{ii}} \quad (i \neq j), \quad a'_{ij} = \frac{w'_{ij}}{w_{ii}}, \quad (4.33)$$

которые показывают, что в нормализованном графе Мэсона отсутствуют петли.

Второй способ заключается в том, что к обеим частям каждого i -го уравнения системы (4.31) прибавляется искомая переменная x_i , а затем все слагаемые, кроме вершины x_i , переносятся в правую часть уравнения:

$$x_i = (1 - w_{ii}) x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij} x_j + \sum_{j=1}^m w'_{ij} f_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.34)$$

[*Определение*] Сигнальные графы Мэсона, построенные с использованием (4.34), называются *ненормализованным*. [.]

Из сопоставления (4.34) с (4.30) следует, что веса дуг ненормализованных графов связаны с коэффициентами системы уравнений общего вида

выражениями:

$$a_{ij} = 1 - w_{ij}, \quad a_{ij} = w_{ij} \quad (i \neq j), \quad a'_{ij} = w'_{ij} \quad (4.35)$$

которые показывают, что в ненормализованных графах Мэсона при смешанных вершинах присутствуют петли.

Рассмотрим построение нормализованного и ненормализованного сигнальных U -графов Мэсона косвенным способом для электронной схемы рис. 4.9.

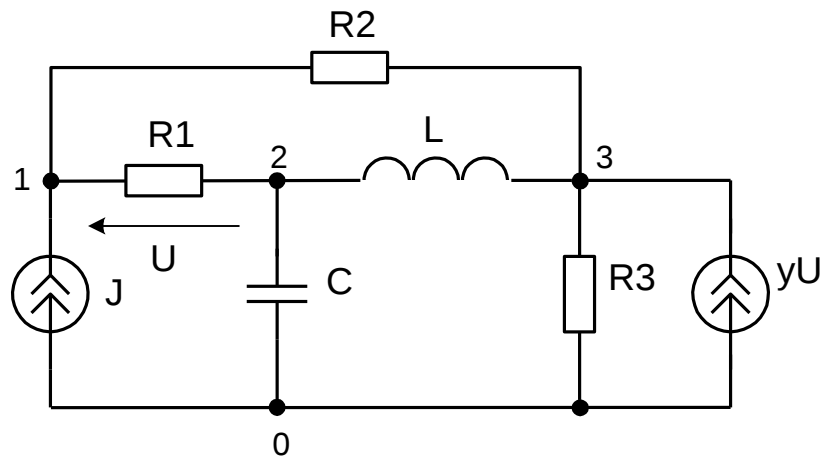


Рис. 4.9. Электронная схема

Система операторных линейных алгебраических уравнений, сформированная для схемы рис. 4.9 методом узловых потенциалов имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varphi_1 - \frac{1}{R_1} \varphi_2 - \frac{1}{R_2} \varphi_3 = J, \\ -\frac{1}{R_1} \varphi_1 + \left(\frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{pL} \right) \varphi_2 - \frac{1}{pL} \varphi_3 = 0, \\ -\frac{1}{R_2} \varphi_1 - \frac{1}{pL} \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{pL} \right) \varphi_3 = y(\varphi_1 - \varphi_2). \end{cases} \quad (4.36)$$

Систему уравнений (4.36) запишем в виде

$$\begin{cases} Y_{11}\varphi_1 - g_1\varphi_2 - g_2\varphi_3 = J, \\ -g_1\varphi_1 + Y_{22}\varphi_2 - y_L\varphi_3 = 0, \\ -(g_2 + y)\varphi_1 - (y_L - y)\varphi_2 + Y_{33}\varphi_3 = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1}$, $g_2 = \frac{1}{R_2}$, $g_3 = \frac{1}{R_3}$, $y_L = \frac{1}{\rho L}$ – операторные проводимости ветвей схемы; $Y_{11} = g_1 + g_2$, $Y_{22} = g_1 + \rho C + y_L$, $Y_{33} = g_2 + g_3 + y_L$ – собственные проводимости узлов схемы.

Нормализуя систему уравнений (4.37), получаем

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{g_1}{Y_{11}} \varphi_2 + \frac{g_2}{Y_{11}} \varphi_3 + \frac{1}{Y_{11}} J, \\ \varphi_2 = \frac{g_1}{Y_{22}} \varphi_1 + \frac{y_L}{Y_{22}} \varphi_3, \\ \varphi_3 = \frac{g_2 + y}{Y_{33}} \varphi_1 + \frac{y_L - y}{Y_{33}} \varphi_2. \end{cases} \quad (4.38)$$

Системе уравнений соответствует нормализованный сигнальный U -граф Мэсона, приведенный на рис. 4.10.

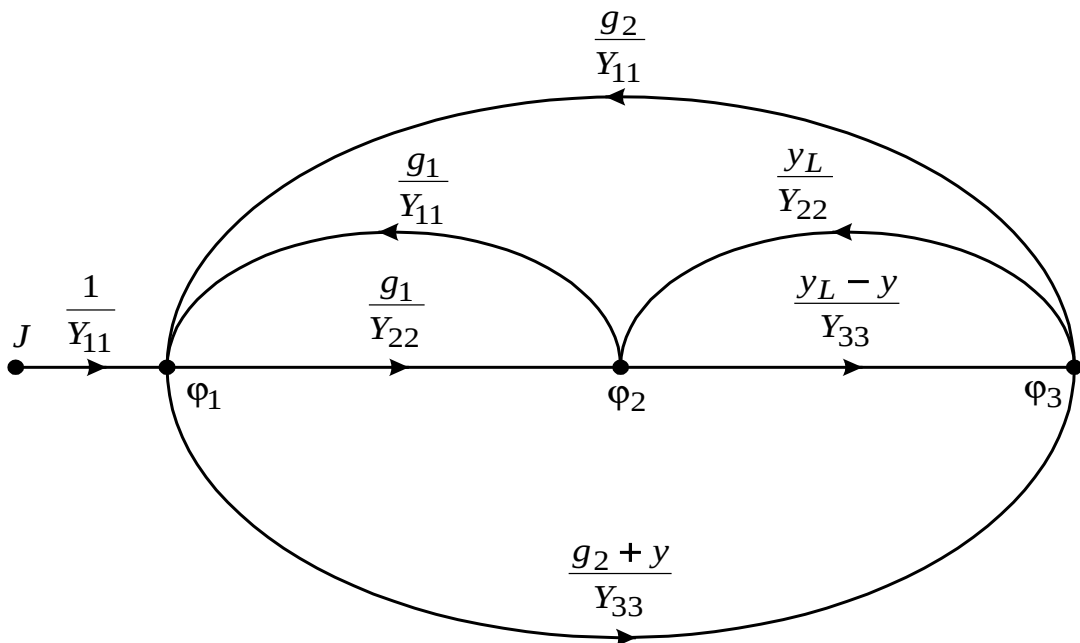


Рис. 4.10. Нормализованный сигнальный U -граф Мэсона

Прибавляя к обеим частям уравнений системы (4.37) переменные Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 в первом, втором и третьем уравнениях соответственно и перенося все слагаемые, кроме Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , в правые части соответствующих уравнений, получим

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - Y_{11})\Phi_1 + g_1\Phi_2 + g_2\Phi_3 + J, \\ \Phi_2 = g_1\Phi_1 + (1 - Y_{22})\Phi_2 + y_L\Phi_3, \\ \Phi_3 = (g_2 + y)\Phi_1 + (y_L - y)\Phi_2 + (1 - Y_{33})\Phi_3. \end{cases} \quad (4.39)$$

Системе уравнений соответствует ненормализованный сигнальный U -граф Мэсона, приведенный на рис. 4.11.

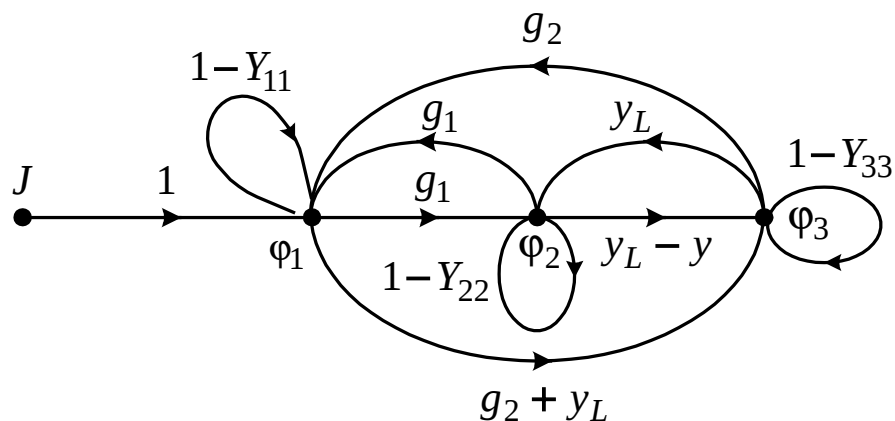


Рис. 4.11. Ненормализованный сигнальный U -граф Мэсона

Косвенный способ построения сигнальных графов Мэсона на базе систем уравнений общего вида, записанных в однородных координатных базисах, обязательно включает этап преобразования исходной системы уравнений к причинно-следственной форме.

Сопоставляя структуру сигнальных графов Мэсона с видом электронной схемы можно установить правила, которые позволяют формировать граф непосредственно по схеме замещения, минуя этап записи системы линейных уравнений. Наиболее простыми являются правила прямого построения не-

нормализованного сигнального U -графа Мэсона:

- в схеме замещения выбирается базисный узел и обозначаются остальные узлы;
- на поле графа наносятся вершины $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_V$, соответствующие узловым потенциалам (число вершин определяется числом V независимых сечений);
- в вершинах графа строятся петли с передачами $a_{kk} = 1 - Y_{kk}$, где Y_{kk} – собственная проводимость k -го узла схемы;
- пассивный двухполюсный компонент, инцидентный узлам i и j отображается двумя противоположными по направлению дугами, инцидентными вершинам Φ_i и Φ_j , с передачами, равными операторной проводимости компонента;
- зависимый источник тока, управляемый напряжением, (ИТУН) отображается дугами, направленными из вершин, соответствующих узлам управляющего двухполюсника, в вершины, соответствующие узлам ИТУН, и имеющими передачи, равные управляющей проводимости; если направление ИТУН относительно i -го узла и направление управляющего напряжения относительно j -го узла характеризуются различно, то в передачу дуги, направленной из вершины Φ_j в вершину Φ_i , управляющая проводимость входит с противоположным знаком;
- зависимые источники других типов (ИНУН, ИНУТ, ИТУТ) предварительно преобразуются в ИТУН;
- многополюсные компоненты предварительно замещаются эквивалентными схемами либо отображаются сигнальными U -графами Мэсона, которые берут готовыми из научно-технической литературы либо формируют по эквивалентным схемам или неопределенным матрицам проводимостей.
- независимый источник тока, направленный от узла c к узлу a , отображается вершиной-истоком, которая соответствует задающему току J , и двумя ду-

гами, направленными от вершины J к вершинам Φ_a и Φ_c , и имеющими передачи «1» и «-1» соответственно;

– независимые источники напряжения предварительно преобразуются в источники тока.

Формирование сигнальных U -графов Мэсона многополюсных компонентов по неопределенным матрицам проводимостей выполняются по следующим правилам:

– на поле графа наносятся вершины $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, соответствующие потенциалам всех полюсов N -полюсника;

– в вершинах графа строятся петли с передачами, равными диагональным элементам неопределенной матрицы проводимостей $a_{ii} = Y_{ii}$, $i = \overline{1, N}$;

– недиагональные элементы Y_{ij} ($i \neq j$) отображаются дугами, направленными из вершин Φ_j в вершины Φ_i и имеющими передачи $a_{ij} = -Y_{ij}$.

Например, неопределенной матрице проводимостей полевого транзистора с управляющим p - n -переходом

$$Y_{i\bar{0}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{з} & \text{с} & \text{и} \\ \text{з} & pC_{zu} + pC_{zc} & -pC_{zc} & -pC_{zu} \\ \text{с} & -pC_{zc} + S & pC_{zc} + G_{cu} & -(G_{cu} + S) \\ \text{и} & -(pC_{zu} + S) & -G_{cu} & G_{cu} + pC_{zu} + S \end{array} \end{array}$$

соответствует сигнальный U -граф Мэсона, приведенный на рис. 4.12.

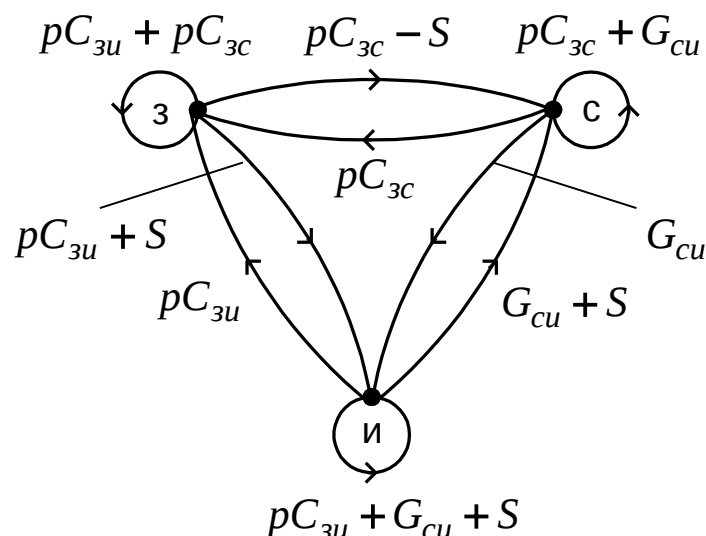


Рис. 4.12. Сигнальный U -граф Мэсона полевого транзистора с управляющим p - n -переходом

Для схем с активными электронными компонентами, сигнальные U -графы Мэсона, как правило, формируют по схемам замещения, в которых активные компоненты представлены как многополюсники, используя следующий алгоритм:

- составляют схему замещения электронной цепи;
- формируют однородный сигнальный U -граф Мэсона пассивной части схемы;
- из научно-технической литературы выбирают (или составляют самостоятельно) сигнальные U -графы Мэсона активных электронных компонентов; собственные обозначения вершин этих графов заменяют обозначениями узлов, которым инцидентны соответствующие полюса активных компонентов; из графов активных компонентов исключаются вершины, соответствующие заземленным полюсам, и все инцидентные этим вершинам дуги;
- формируют однородный суммарный сигнальный U -граф Мэсона (совмещают одноименные вершины графов пассивной части схемы и активных многополюсников; параллельные однонаправленные дуги заменяют одной дугой с суммарной передачей; петли при одной вершине заменяют одной петлей с передачей $a_{ii} = a_{ii, \text{пассив}} - \sum_{k=1}^M a_{ii, \text{актив}}^k$, где $a_{ii, \text{пассив}} = 1 - Y_{ii, \text{пассив}}$ – передача петли графа пассивной части схемы, $a_{ii, \text{актив}}^k$ – передача петли графа k -го многополюсника, M – число многополюсных компонентов схемы, полюса которых инцидентны i -му узлу);
- в графе отображают независимые источники.

Рассмотрим прямой способ построения сигнального U -графа Мэсона для схемы истокового повторителя с повышенным входным сопротивлением рис. 2.30,а в рабочем диапазоне частот. Схема замещения повторителя по пе-

ременному току для рабочего диапазона частот приведена на рис. 4.13.

В схеме замещения рис. 4.13 закорочены все конденсаторы, а параллельно включенные по переменному току резисторы R_1 , R_2 и R_4 представлены эквивалентной ветвью с проводимостью

$$g_{\dot{y}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}.$$

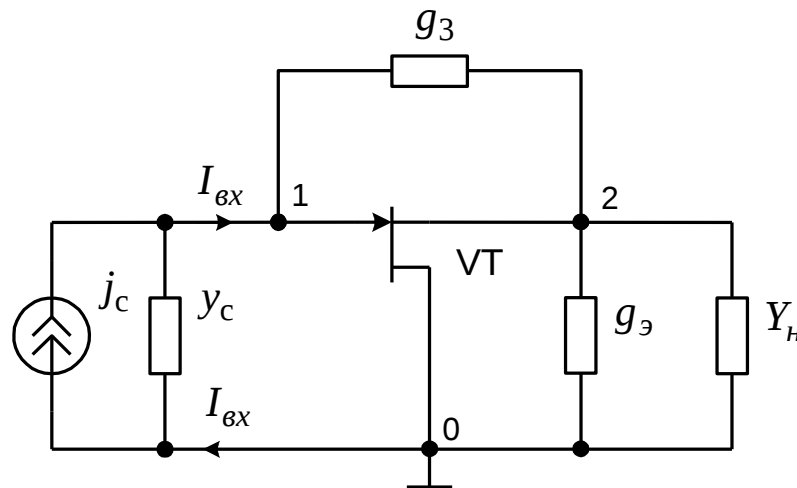
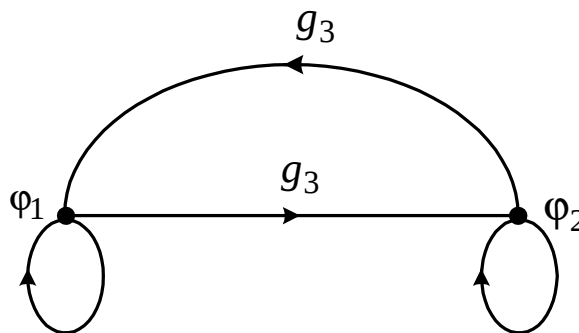


Рис. 4.13. Схема замещения истокового повторителя по переменному току в рабочем диапазоне частот

Однородный сигнальный U -граф Мэсона пассивной части схемы имеет вид:



$$a_{11,насс} = 1 - Y_{11,насс} = 1 - g_3$$

$$a_{22,насс} = 1 - Y_{22,насс} = 1 - (g_3 + g_{\dot{y}} + Y_H)$$

Рис. 4.14. Сигнальный U -граф Мэсона пассивной части схемы истокового повторителя

Для полевого транзистора воспользуемся сигнальным U -графом Мэсона, представленным на рис. 4.12. Поскольку сток полевого транзистора в схеме замещения заземлен, затвор связан с узлом «1», а исток – с узлом «2», то граф полевого транзистора примет вид:

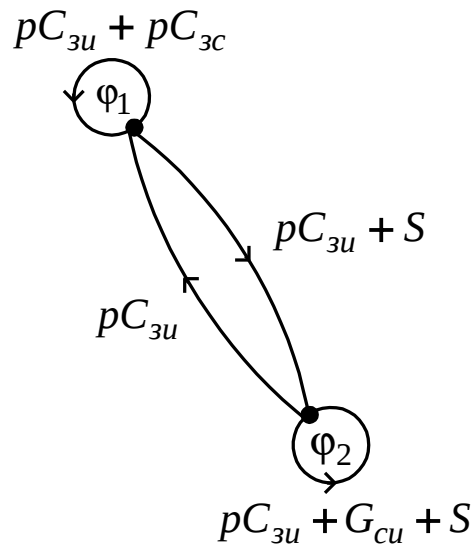


Рис. 4.15. Сигнальный U -граф Мэсона полевого транзистора

Составляем однородный суммарный сигнальный U -граф Мэсона истокового повторителя

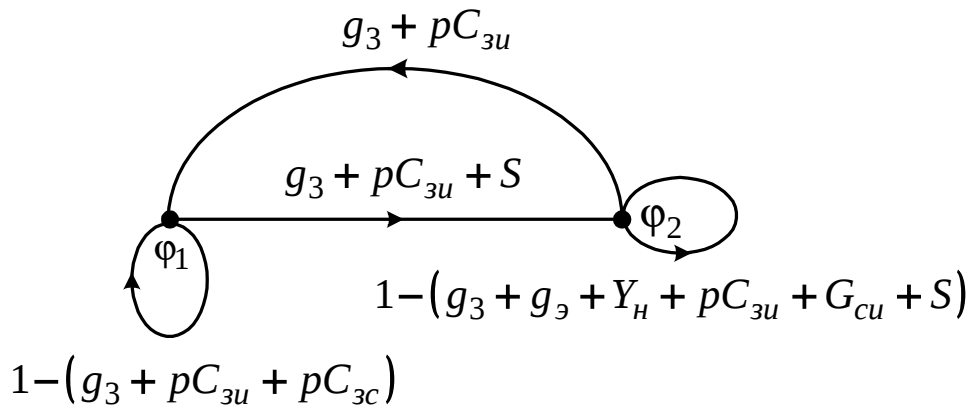


Рис. 4.16. Однородный суммарный сигнальный U -граф Мэзона истокового повторителя

Принимая в качестве задающей переменной входной ток, получим неоднородный сигнальный U -граф Мэзона истокового повторителя

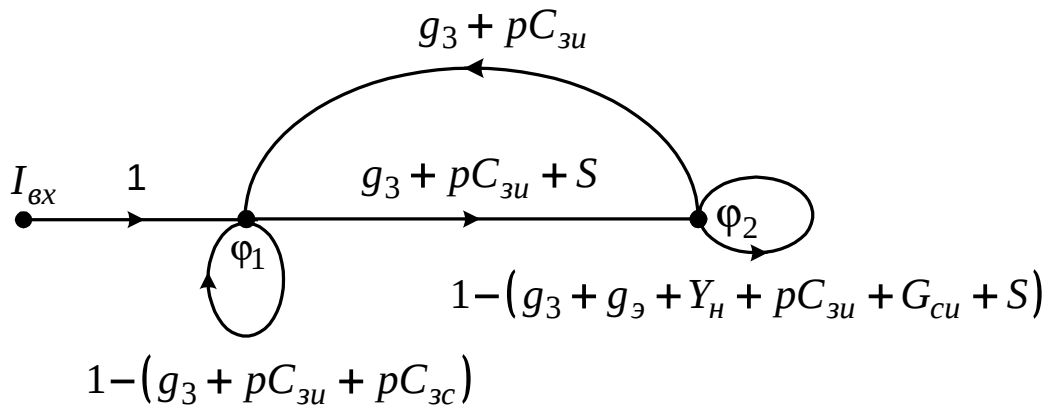


Рис. 4.17. Неоднородный сигнальный U -граф Мэзона истокового повторителя

Определение передач сигнальных графов Мэзона путем применения формулы Мэзона

Формула Мэзона, определяющая передачу сигнального графа Мэзона из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_i , имеет вид

$$F_{ij} = \frac{x_i}{f_j} = \frac{\sum_{k=1}^S p_k^{(x_i, f_j)} D_k^M}{D^M}, \quad (4.40)$$

где D^M – определитель сигнального графа Мэсона; $p_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_i ; D_k^M – величина дополнения k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_i .

[Определение] Определитель сигнального графа Мэсона может быть найден как сумма величин всех элементарных сигнальных графов Мэсона, которые можно выделить в составе исходного графа. [.]

[Определение] Элементарный сигнальный граф Мэсона представляет собой совокупность одновременно не касающихся контуров. Число q контуров элементарного сигнального графа называют его фактором. [.]

Исходный граф может содержать несколько элементарных графов с одним и тем же фактором. Кроме того, в составе сигнального графа Мэсона всегда существует единственный элементарный граф с фактором $q = 0$, который следует считать множеством контуров, вырожденных в вершину, причем величина такого элементарного графа равна 1.

Следовательно, выражение для определителя сигнального графа Мэсона можно записать в виде:

$$D^M = 1 + \sum_{q=1}^Q \left[(-1)^q \sum_{i=1}^{N_q} \left(\prod_{r=1}^q L_r^{(i)} \right) \right], \quad (4.41)$$

где Q – максимально возможное значение фактора элементарных графов, равное максимально возможному числу одновременно не касающихся контуров графа; N_q – число элементарных графов с фактором q ; $L_r^{(i)}$ – передача r -го контура i -го элементарного графа.

[Внимание] Для практического использования формулу (4.41) целесообразно представить в виде:

$$D^M = 1 - \sum_{i=1}^{N_1} L_i + \sum_{i=1}^{N_2} L_k^{(i)} L_S^{(i)} - \sum_{i=1}^{N_3} L_k^{(i)} L_S^{(i)} L_q^{(i)} + \dots, \quad (4.42)$$

где $L_k^{(i)} L_S^{(i)}$ – произведение передач i -ой пары некасающихся контуров;
 $L_k^{(i)} L_S^{(i)} L_q^{(i)}$ – произведение передач i -ой тройки некасающихся контуров. [.]

Передачи сигнальных графов Мэзона между смешанными вершинами определяются на основе формулы Мэзона (4.40):

$$F'_{ij} = \frac{x_i}{x_j} = \frac{x_i / f_j}{x_j / f_j} = \frac{\sum_{k=1}^S \rho_k^{(x_i, f_j)} D_k^M}{D^M} \cdot \frac{D^M}{\sum_{k=1}^{S'} \rho_k^{(x_j, f_j)} D_k^M} = \frac{\sum_{k=1}^S \rho_k^{(x_i, f_j)} D_k^M}{\sum_{k=1}^{S'} \rho_k^{(x_j, f_j)} D_k^M}, \quad (4.43)$$

где $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_i ; $\rho_k^{(x_j, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_j ; D_k^M , $D_k'^M$ – величины дополнений путей $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ и $\rho_k^{(x_j, f_j)}$ соответственно.

При определении передач сигнальных графов по формуле Мэзона каждая петля образует дополнительный контур, что приводит к росту объема вычислений определителей и величин дополнений простых путей. С целью

упрощения поиска передач сигнальные графы Мэзона рекомендуется нормализовывать путем исключения петель. В первую очередь это относится к сигнальным U -графам Мэзона, формируемым прямым способом.

Обобщенные сигнальные графы

Обобщенные сигнальные графы отображают системы линейных алгебраических уравнений, представленные в обобщенной причинно-следственной форме, когда в каждом уравнении одна из искомым переменных со своим весовым коэффициентом выражена через другие искомые и задающие переменные:

$$a_{ij}x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^m a'_{ij}f_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.44)$$

Обобщенный сигнальный граф содержит:

- невзвешенные вершины-истоки, соответствующие задающим переменным f_j ;
- взвешенные вершины, соответствующие искомым переменным x_i и характеризующиеся весами, равными весовым коэффициентам a_{ij} ;
- дуги, направленные от вершин, соответствующих переменным в правой части, к вершинам, соответствующим переменным в левой части уравнений (4.44), и характеризующиеся весами (передачами), равными коэффициентам a_{ij} , a'_{ij} .

Рассмотрим формирование обобщенного сигнального U -графа электронной схемы рис. 4.9. Представим систему уравнений (4.37) в обобщенной причинно-следственной форме:

$$\begin{cases} Y_{11}\varphi_1 = g_1\varphi_2 + g_2\varphi_3 + J, \\ Y_{22}\varphi_2 = g_1\varphi_1 + y_L\varphi_3, \\ Y_{33}\varphi_3 = (g_2 + y)\varphi_1 + (y_L - y)\varphi_2. \end{cases} \quad (4.45)$$

Системе уравнений (4.45) соответствует обобщенный сигнальный U -граф, приведенный на рис. 4.18.

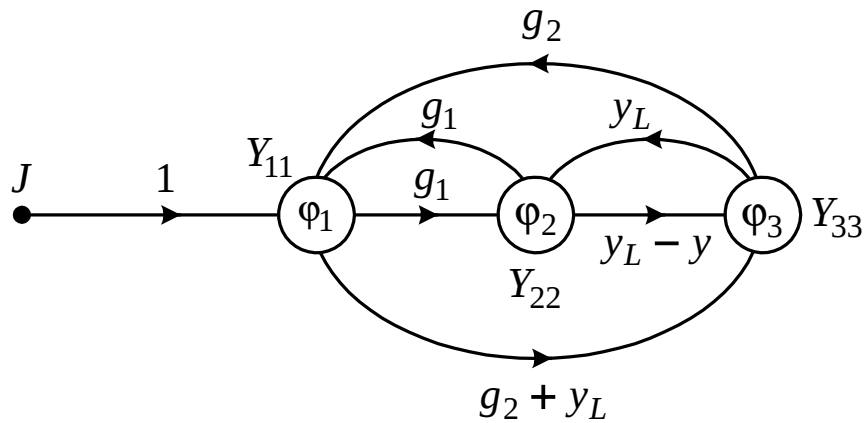


Рис. 4.18. Обобщенный сигнальный U -граф

При использовании обобщенных сигнальных графов наибольшее распространение получил прямой способ формирования U -графов.

Прямое построение обобщенных сигнальных U -графов электронных схем выполняют по правилам:

- в схеме замещения выбирается базисный узел и обозначаются остальные узлы;
- на поле графа наносятся взвешенные вершины $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v$, соответствующие узловым потенциалам (число вершин определяется числом V независимых сечений), и обладающие весами Y_{ii} , равными собственным проводимостям соответствующих узлов;
- пассивный двухполюсный компонент, инцидентный узлам i и j отображается двумя противоположными по направлению дугами, инцидентными

вершинам Φ_i и Φ_j , с передачами, равными операторной проводимости компонента;

- зависимый источник тока, управляемый напряжением, (ИТУН) отображается дугами, направленными из вершин, соответствующих узлам управляющего двухполюсника, в вершины, соответствующие узлам ИТУН, и имеющими передачи, равные управляющей проводимости; если направление ИТУН относительно i -го узла и направление управляющего напряжения относительно j -го узла характеризуются различно, то в передачу дуги, направленной из вершины Φ_j в вершину Φ_i , управляющая проводимость входит с противоположным знаком;

- зависимые источники других типов (ИНУН, ИНУТ, ИТУТ) предварительно преобразуются в ИТУН;

- многополюсные компоненты предварительно замещаются эквивалентными схемами либо отображаются обобщенными сигнальными U -графами, которые берут готовыми из научно-технической литературы либо формируют по эквивалентным схемам или неопределенным матрицам проводимостей.

- независимый источник тока, направленный от узла c к узлу a , отображается вершиной-истоком, которая соответствует задающему току J , и двумя дугами, направленными от вершины J к вершинам Φ_a и Φ_c , и имеющими передачи «1» и «-1» соответственно;

- независимые источники напряжения предварительно преобразуются в источники тока.

Формирование обобщенных сигнальных U -графов многополюсных компонентов по неопределенным матрицам проводимостей выполняют по следующим правилам:

- на поле графа наносятся взвешенные вершины $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, соответствующие потенциалам всех полюсов N -полюсника и имеющие веса, рав-

ные диагональным элементам неопределенной матрицы проводимостей $a_{ij} = Y_{ij}$, $i = \overline{1, N}$;

– недиагональные элементы Y_{ij} ($i \neq j$) отображаются дугами, направленными из вершин Φ_j в вершины Φ_i и имеющими передачи $a_{ij} = -Y_{ij}$.

Например, для операционного усилителя с заземленным базисным выводом (рис. 4.19),

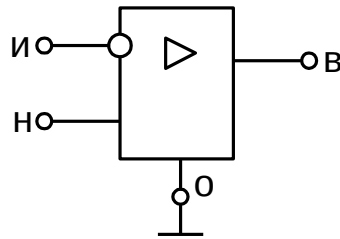


Рис. 4.19. Операционный усилитель с заземленным базисным выводом

используя неопределенную матрицу проводимостей

$$Y_{\text{io}} =$$

	И	Н	В	О
И	$G_{\partial} + G_{\text{сф1}}$	$-G_{\partial}$	0	$-G_{\text{сф1}}$
Н	$-G_{\partial}$	$G_{\partial} + G_{\text{сф2}}$	0	$-G_{\text{сф2}}$
В	$kG_{\text{вых}}$	$-kG_{\text{вых}}$	$G_{\text{вых}}$	$-G_{\text{вых}}$
О	$-G_{\text{сф1}} - kG_{\text{вых}}$	$kG_{\text{вых}} - G_{\text{сф2}}$	$-G_{\text{вых}}$	$G_{\text{вых}} + G_{\text{сф1}} + G_{\text{сф2}}$

построим обобщенный сигнальный U -граф

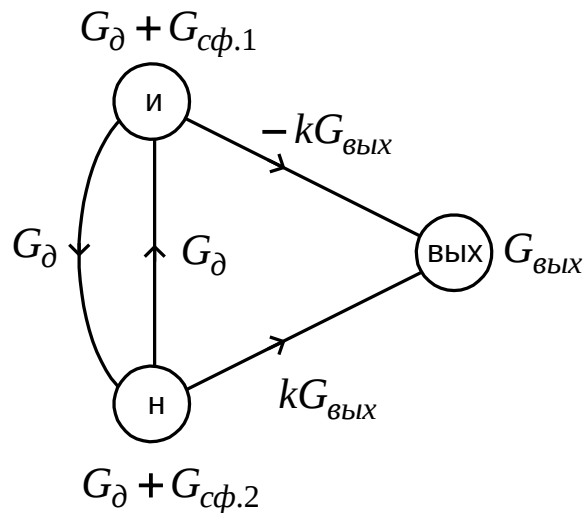


Рис. 4.20. Обобщенный сигнальный U -граф операционного усилителя

Для схем с активными электронными компонентами, обобщенные сигнальные U -графы, как правило, формируют по схемам замещения, в которых активные компоненты представлены как многополюсники, используя следующий алгоритм:

- составляют схему замещения электронной цепи;
- формируют однородный обобщенный сигнальный U -граф пассивной части схемы;
- из научно-технической литературы выбирают (или составляют самостоятельно) обобщенные сигнальные U -графы активных электронных компонентов; собственные обозначения вершин этих графов заменяют обозначениями узлов, которым инцидентны соответствующие полюса активных компонентов; из графов активных компонентов исключаются вершины, соответствующие заземленным полюсам, и все инцидентные этим вершинам дуги;
- формируют однородный суммарный обобщенный сигнальный U -граф (совмещают одноименные вершины графов пассивной части схемы и ак-

тивных многополюсников и суммируют их веса $a_{ij} = a_{ij,1} + \dots + \sum_{k=1}^M a_{ij,k}$; параллельные однонаправленные дуги заменяют одной дугой с суммарной передачей);

– в графе отображают независимые источники.

Рассмотрим прямой способ построения обобщенного сигнального U -графа для схемы фильтра нижних частот, приведенной на рис. 4.3,а. Схема замещения фильтра по переменному току, в которой операционный усилитель представлен как многополюсный компонент, представлена на рис. 4.21.

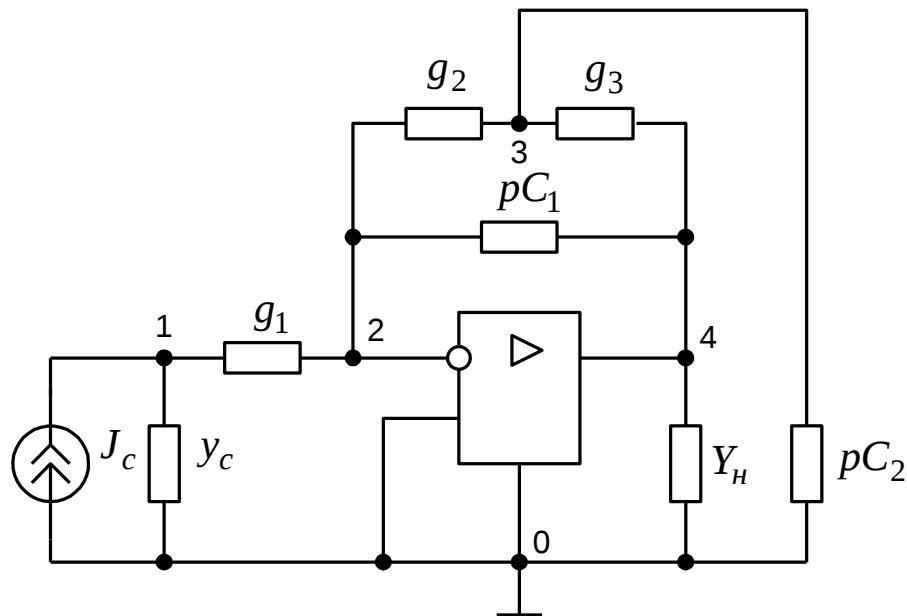


Рис. 4.21. Схема замещения фильтра нижних частот по переменному току

Однородный обобщенный сигнальный U -граф пассивной части схемы имеет вид

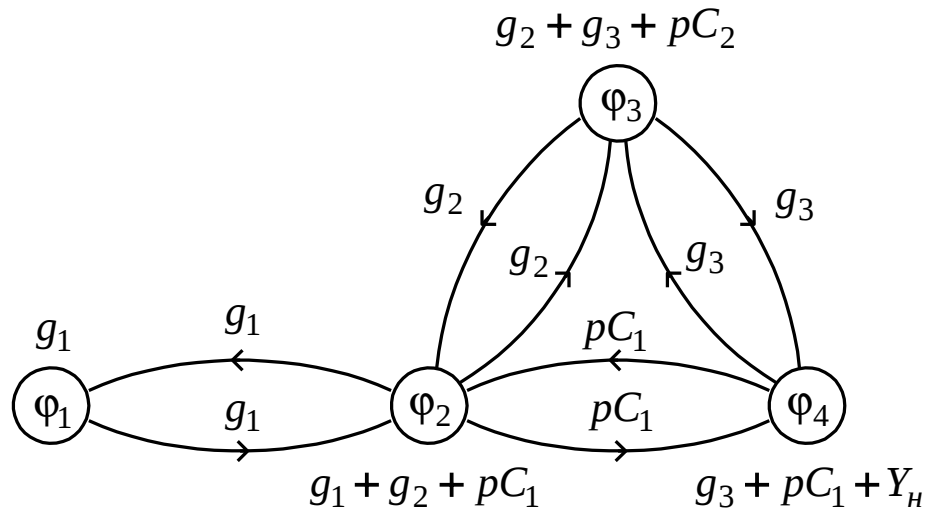


Рис. 4.22. Однородный обобщенный сигнальный U -граф пассивной части схемы фильтра нижних частот

Операционный усилитель представим обобщенным сигнальным U -графом, приведенным на рис. 4.20. Поскольку неинвертирующий вход операционного усилителя в схеме замещения заземлен, инвертирующий вход подключен к узлу «2», а выход – к узлу «4» граф операционного усилителя примет вид

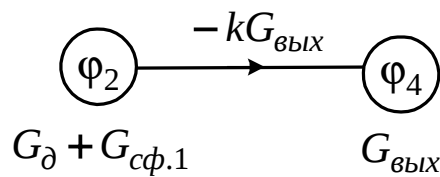


Рис. 4.23. Обобщенный сигнальный граф операционного усилителя

Формируем суммарный однородный обобщенный сигнальный U -граф фильтра:

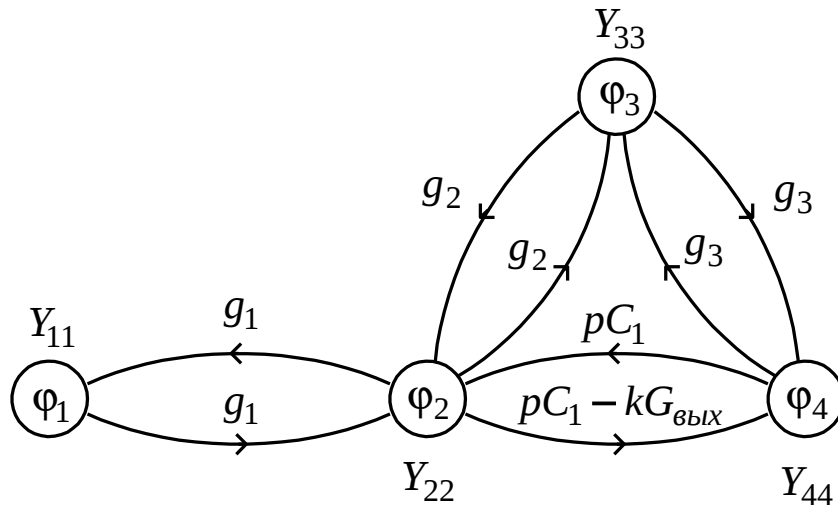


Рис. 4.24. Суммарный однородный обобщенный сигнальный U -граф фильтра нижних частот

На рис. 4.24 веса вершин определяются выражениями:

$$Y_{11} = g_1, Y_{22} = g_1 + g_2 + pC_1 + G_{\text{а}} + G_{\text{пб.1}}, Y_{33} = g_2 + g_3 + pC_2, Y_{44} = g_3 + pC_1 + Y_{\text{г}} + G_{\text{а\ddot{u}\ddot{o}}}.$$

Принимая в качестве задающей переменной входной ток, получим неоднородный обобщенный сигнальный U -граф

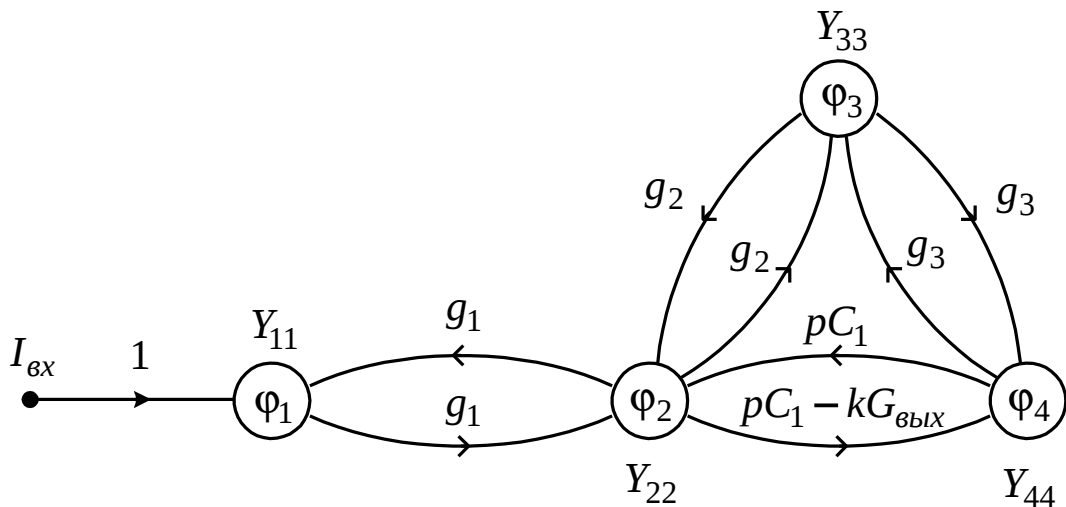


Рис. 4.25. Неоднородный обобщенный сигнальный U -граф фильтра нижних частот

Определение передач обобщенных сигнальных графов

Основным способом определения передач обобщенных сигнальных графов является применение топологической формулы Анисимова

$$F_{ij} = \frac{x_i}{f_j} = \frac{\sum_{k=1}^S p_k^{(x_i, f_j)} D_k^{\Delta}}{D^{\Delta}}, \quad (4.46)$$

где D^{Δ} – определитель обобщенного сигнального графа; $p_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j во взвешенную вершину x_i ; D_k^{Δ} – величина дополнения простого пути $p_k^{(x_i, f_j)}$.

Определитель обобщенного сигнального графа может быть найден непосредственно по графу как сумма величин δ_i^{Δ} всех элементарных обобщенных сигнальных графов, которые можно выделить в составе исходного графа:

$$D^{\Delta} = \sum_i \delta_i^{\Delta}. \quad (4.47)$$

[Определение] Элементарный обобщенный сигнальный граф представляет собой совокупность одновременно не касающихся контуров и всех не входящих в них взвешенных вершин исходного графа. Число q контуров элементарного обобщенного сигнального графа называют его фактором. [.]

Величина δ_i^{Δ} элементарного обобщенного сигнального графа с фактором q определяется произведением передач его контуров и весов взвешенных вершин, не входящих в эти контура:

$$\delta_i^{\Delta} = (-1)^q \prod_{r=1}^q L_r \cdot \prod_{t=1}^m B_t, \quad (4.48)$$

где L_r – передача r -го контура элементарного графа, определяемая произведением входящих в него дуг; B_t – вес t -ой взвешенной вершины; m – число взвешенных вершин элементарного графа.

Исходный граф может содержать несколько элементарных графов с одним и тем же фактором. Кроме того, в составе обобщенного сигнального графа всегда существует единственный элементарный граф с фактором $q = 0$, который не содержит контуров и содержит все взвешенные вершины исходного графа. Следовательно, выражение (4.47) с учетом (4.48) можно записать:

$$D^A = \prod_{t=1}^n B_t + \sum_{q=1}^Q \left[(-1)^q \sum_{i=1}^{N_q} \left(\prod_{r=1}^q L_r^{(i)} \cdot \prod_{t=1}^m B_t^{(i)} \right) \right], \quad (4.49)$$

где n – число взвешенных вершин исходного графа, равное числу искомым переменных системы уравнений; Q – максимально возможное значение фактора элементарных графов, равное максимально возможному числу одновременно не касающихся контуров графа; N_q – число элементарных графов с фактором q ; $L_r^{(i)}$ – передача r -го контура i -го элементарного графа; $B_t^{(i)}$ – вес t -ой взвешенной вершины i -го элементарного графа.

Передачи обобщенных сигнальных графов между смешанными вершинами определяются на основе формулы (4.46):

$$\begin{aligned} F'_{ij} &= \frac{x_i}{x_j} = \frac{x_i / f_j}{x_j / f_j} = \frac{\sum_{k=1}^S p_k^{(x_i, f_j)} D_k^A}{D^A} \cdot \frac{D^A}{\sum_{k=1}^{S'} p_k^{(x_j, f_j)} D_k^A} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^S p_k^{(x_i, f_j)} D_k^A}{\sum_{k=1}^{S'} p_k^{(x_j, f_j)} D_k^A}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_i ; $\rho_k^{(x_j, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины-истока f_j в смешанную вершину x_j ; $D_k^A, D_k'^A$ – величины дополнений путей $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ и $\rho_k^{(x_j, f_j)}$ соответственно.

В качестве примера рассмотрим определение схемных функций фильтра нижних частот, используя обобщенный сигнальный граф рис. 4.25.

Передающее сопротивление определяется по формуле Анисимова (4.46):

$$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\Phi_4}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k^{(\Phi_4, I_{\hat{a}\hat{o}})} D_k^A}{D^A}.$$

Обобщенный сигнальный граф рис. 4.25 содержит $n=4$ взвешенных вершин; 6 контуров с передачами $L_1(\Phi_1, \Phi_2) = g_1^2$, $L_2(\Phi_2, \Phi_3) = g_2^2$, $L_3(\Phi_2, \Phi_4) = \rho C_1(\rho C_1 - kG_{\hat{a}\hat{o}})$, $L_4(\Phi_3, \Phi_4) = g_3^2$, $L_5(\Phi_2, \Phi_4, \Phi_3) = g_2 g_3(\rho C_1 - kG_{\hat{a}\hat{o}})$, $L_6(\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = g_2 g_3 \rho C_1$, а также одну пару не касающихся контуров $L_1(\Phi_1, \Phi_2) = g_1^2$ и $L_4(\Phi_3, \Phi_4) = g_3^2$. Таким образом, в формуле (4.49) границы индексов суммирования принимают значения $Q=2$, $N_1=6$, $N_2=1$, а формула может быть записана в виде:

$$D^A = Y_{11}Y_{22}Y_{33}Y_{44} - (L_1Y_{33}Y_{44} + L_2Y_{11}Y_{44} + L_3Y_{11}Y_{33} + L_4Y_{11}Y_{22} + L_5Y_{11} + L_6Y_{11}) + L_1L_4. \quad (4.51)$$

Из графа рис. 4.25 следует

$$\rho_1^{(\Phi_4, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = g_1 g_2 g_3,$$

$$\rho_2^{(\Phi_4, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_4) = g_1(\rho C_1 - kG_{\hat{a}\hat{o}}).$$

Так как путь $\rho_1^{(\Phi_4, I_{\hat{a}\hat{o}})}$ проходит через все вершины, $D_1^A = 1$.

Величину дополнения D_2^A можно получить, устраняя из выражения

(4.51) для определителя графа слагаемые, содержащие передачи всех контуров, поскольку они касаются пути $\rho_2^{(\Phi_4/\hat{a}\hat{o})}$, и устрояя в оставшемся слагаемом веса Y_{11} , Y_{22} , Y_{44} вершин Φ_1 , Φ_2 , Φ_4 входящих в состав пути $\rho_2^{(\Phi_4/\hat{a}\hat{o})}$:

$$D_2^A = Y_{33}.$$

Тогда

$$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 (\rho C_1 - k G_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}) Y_{33}}{D^A}.$$

При определении коэффициента передачи по напряжению вершина, соответствующая задающей переменной $U_{\hat{a}\hat{o}} = \Phi_1$, не является вершиной-источком, поэтому используется формула (4.50):

$$k_U = \frac{U_i}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\Phi_4}{\Phi_1} = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k^{(\Phi_4/\hat{a}\hat{o})} D_k^A}{\rho_1^{(\Phi_1/\hat{a}\hat{o})} D_1^A}. \quad (4.52)$$

Числитель коэффициента передачи по напряжению совпадает с ранее найденным числителем передаточного сопротивления.

Из графа следует: $\rho_1^{(\Phi_1/\hat{a}\hat{o})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, \Phi_1) = 1$. Величину дополнения D_1^A можно получить, устрояя из выражения (4.51) для определителя графа слагаемые, содержащие передачу контура L_1 , касающегося пути $\rho_1^{(\Phi_1/\hat{a}\hat{o})}$, а в оставшихся слагаемых – вес Y_{11} вершины Φ_1 , которая входит в состав пути $\rho_1^{(\Phi_1/\hat{a}\hat{o})}$:

$$D_1^A = Y_{22} Y_{33} Y_{44} - (L_2 Y_{44} + L_3 Y_{33} + L_4 Y_{22} + L_5 + L_6).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4.52) окончательно получаем:

$$k_U = \frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 (\rho C_1 - k G_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}) Y_{33}}{Y_{22} Y_{33} Y_{44} - (L_2 Y_{44} + L_3 Y_{33} + L_4 Y_{22} + L_5 + L_6)}.$$

Следует отметить, что непосредственно по сигнальному U -графу можно определить только такие схемные функции, как $Z_{i\hat{a}\hat{o}}$, k_U , $Z_{\hat{a}\hat{o}}$. Для определения остальных схемных функций необходимо использовать соотношения, связывающие схемные функции, например,

$$k_I = Y_i Z_{i\hat{a}\hat{o}}, \quad Y_{i\hat{a}\hat{o}} = Y_i k_U, \quad Y_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{1}{Z_{\hat{a}\hat{o}}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите, какие схемные функции определяет выражение

$F_{\xi_{\hat{a}\hat{o}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\xi_{\hat{a}\hat{o}}} = -\frac{w_i w_{21}}{|W| - w_{11} w_i}$ при представлении схемы как проходного четырехполюсника в системах U - и Z -параметров.

Ответ: в системе u -параметров это коэффициент передачи по току

$\left(F_{\xi_{\hat{a}\hat{o}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = k_I \right)$; в системе z -параметров это коэффициент передачи по

напряжению $\left(F_{\xi_{\hat{a}\hat{o}\hat{o}} \xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\xi_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{\xi_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = k_U \right)$.

2. Приведите соотношение, выражающее определитель матрицы

$\begin{bmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$, через суммарное алгебраическое дополнение матрицы W , где W – матрица эквивалентных параметров схемы, а θ и λ – преобразующие векторы.

Ответ: $\begin{vmatrix} W & \theta \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\Delta_{\theta\lambda}$.

3. Вычислите суммарное алгебраическое дополнение $\Delta_{(1/2,3)(1,3/0)}$ матри-

цы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\Delta_{(1/2,3)(1,3/0)} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$

4. Вычислите двухкратное суммарное алгебраическое дополнение мат-

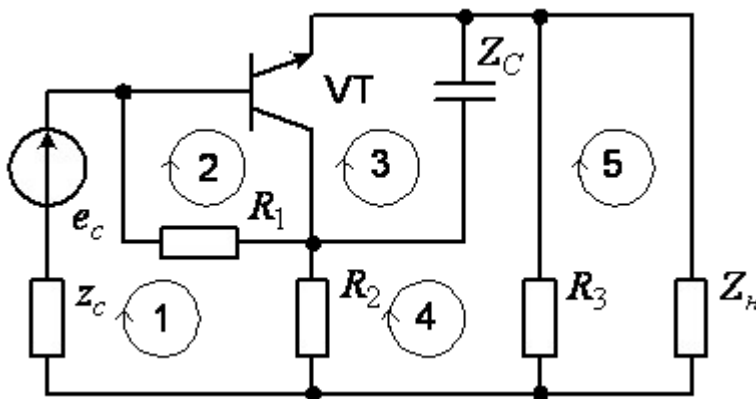
рицы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ относительно преобразующих векторов $\theta_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$,

$\lambda_1 = [-1 \ 0 \ 1]^T$, $\theta_2 = [-1 \ 0 \ -1]^T$, $\lambda_2 = [1 \ 0 \ 0]^T$.

Ответ: $\Delta_{\theta_1 \lambda_1, \theta_2 \lambda_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

5. Определите численные значения индексов алгебраических дополне-

ний в формуле $\frac{Z_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Z_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}$ применительно к схеме замещения вида



Ответ: $a = 1$, $b = 5$, $c = d = 0$.

6. Дайте определение сигнального графа.

Ответ: сигнальным называют ориентированный граф, отображающий систему линейных алгебраических уравнений, сформированную для электронной схемы; при этом вершины графа соответствуют искомым и задающим переменным, дуги отражают связи переменных в уравнениях и характеризуются весами, определяемыми коэффициентами уравнений.

7. Укажите основные виды сигнальных графов.

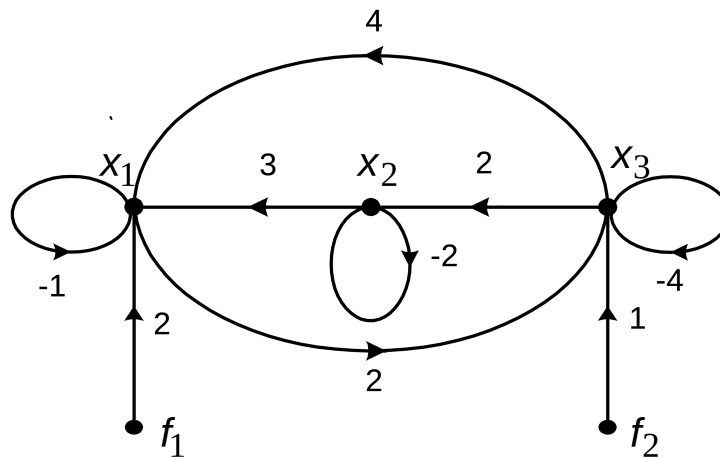
Ответ: в зависимости от типа системы линейных уравнений различают однородные и неоднородные сигнальные графы; в зависимости от формы представления системы линейных уравнений различают сигнальные графы Мэсона, сигнальные графы Коутса, обобщенные сигнальные графы (сигнальные графы Анисимова), ориентированные беспетлевые графы и др.; в зависимости от характера искомым и задающих переменных системы уравнений выделяют гибридные сигнальные графы, сигнальные U -графы и сигнальные I -графы.

8. Назовите основные способы определения передач сигнальных графов.

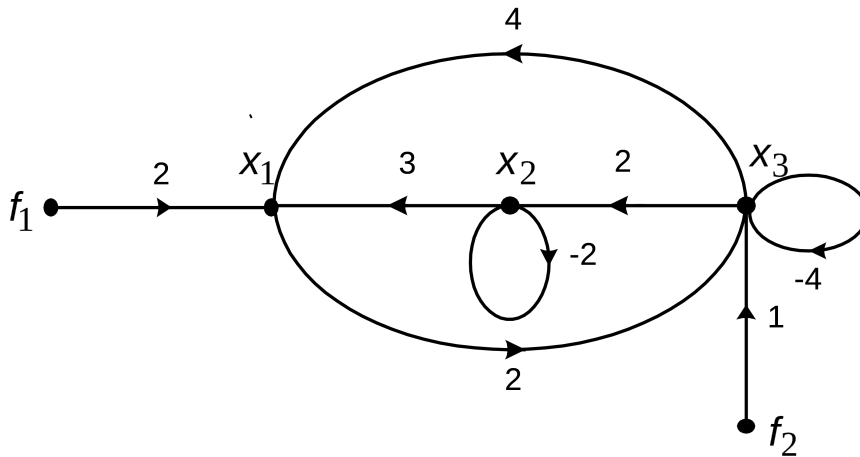
Ответ: метод эквивалентных преобразований и применение топологических формул общей передачи.

9. Для системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2f_1, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_3 = f_2. \end{cases}$$
 сформируйте ненормализованный сигнальный граф Мэсона.

Ответ:

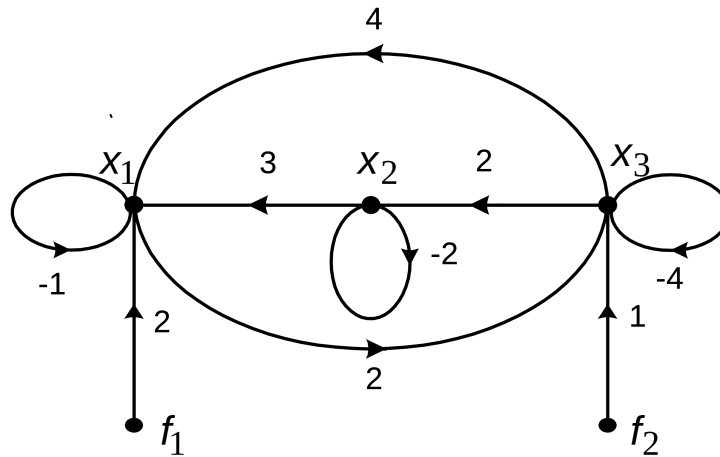


10. Определите передачу сигнального графа Мэсона из вершины f_1 в вершину x_2 .



Ответ: $F_{21} = \frac{x_2}{f_1} = -\frac{8}{21}$.

11. Определить величины всех элементарных сигнальных графов Мэсона с фактором, равным двум, для графа

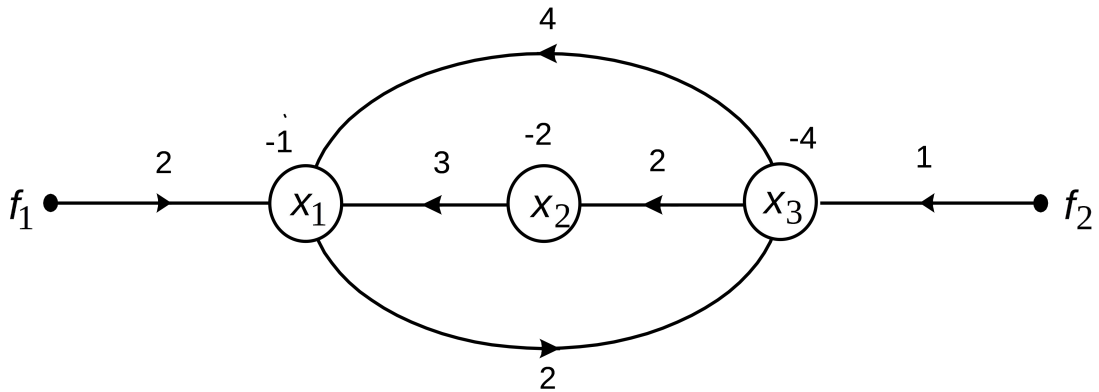


Ответ: $\delta_1^M = (-1)^2(-1)(-4) = 4$, $\delta_2^M = (-1)^2(-1)(-2) = 2$, $\delta_3^M = (-1)^2(-2)(-4) = 8$,
 $\delta_4^M = (-1)^2(-2)(2 \cdot 4) = -16$.

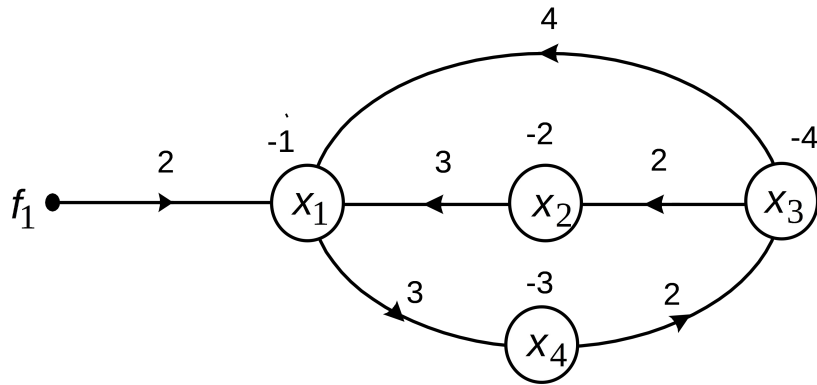
12. Для системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2f_1, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_3 = f_2. \end{cases}$$
 сформируйте

обобщенный сигнальный граф.

Ответ:

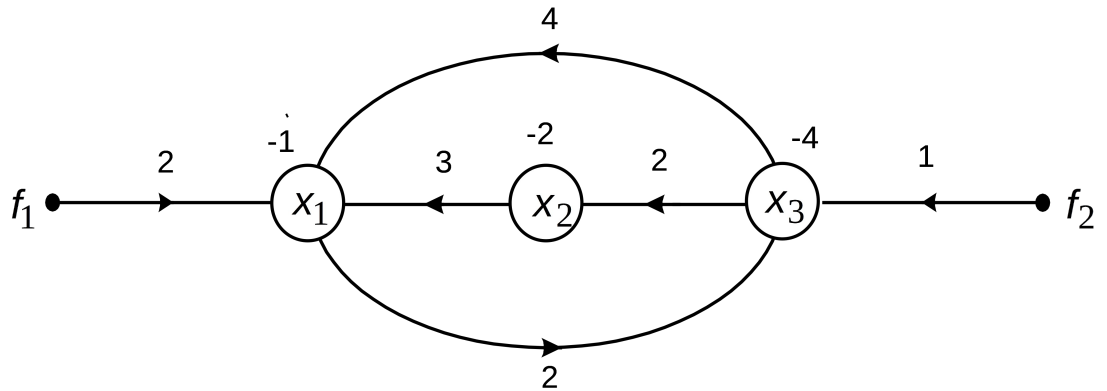


13. Найдите определитель обобщенного сигнального графа



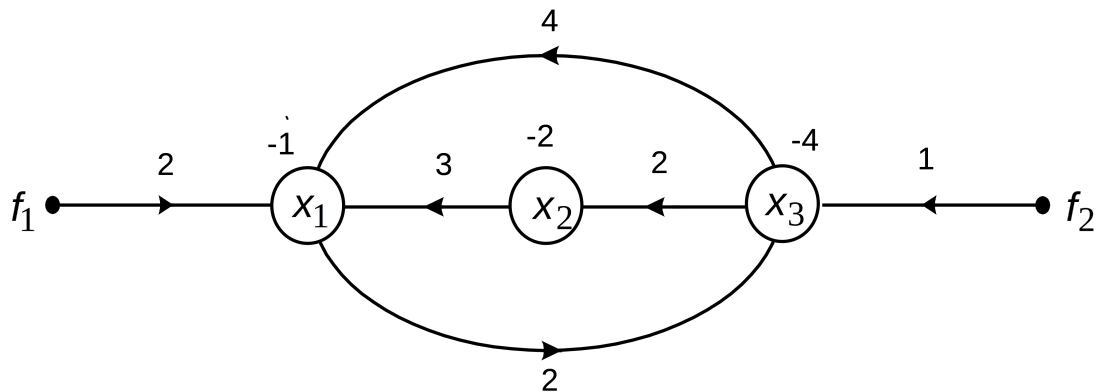
Ответ: $D^A = 36$.

14. По обобщенному сигнальному графу определите передачу $F_{31} = \frac{x_3}{f_1}$.



Ответ: $F_{31} = \frac{x_3}{f_1} = 2$.

15. По обобщенному сигнальному графу определите передачу $F'_{31} = \frac{x_3}{x_1}$.



Ответ: $F'_{31} = \frac{x_3}{x_1} = -\frac{1}{2}$.

4 АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ОПЕРАТОРНЫМИ МЕТОДАМИ.....	122
4.1 Определение схемных функций по матрично-векторным параметрам электронных схем.....	122
4.2 Определение схемных функций электронных схем методом сигнальных графов....	143
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	173

5 АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Анализ электронных цепей во временной области основан на использовании математических моделей, переменные которых представлены как функции времени. Среди методов анализа цепей во временной области можно выделить классический метод и метод временных характеристик.

В классическом методе анализа математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, которые описывают состояние электронной цепи в различные моменты времени и называются *уравнениями состояния*. Реализация математической модели при этом предполагает, что на первом этапе производится расчет мгновенных значений фазовых переменных путем интегрирования уравнений состояния, на основе которых определяются все интересующие вторичные выходные параметры электронной цепи (средние и действующие значения, гармонический состав, входные и выходные сопротивления, длительности фронтов реакций схемы и т.д.).

[Внимание] Метод временных характеристик состоит в определении реакций электронных схем на произвольные воздействия на основе переходных и импульсных характеристик путем применения интегралов наложения (интегралов Дюамеля). [.]

Следует отметить, что метод временных характеристик пригоден для анализа только линейных электронных схем, тогда как классический метод анализа является наиболее универсальным, позволяя проводить исследования как линейных, так и нелинейных, в том числе дискретных, электронных схем.

5.1 Математическое описание электронных схем в базисе переменных состояния

Для формирования уравнений состояния все переменные, характеризующие электронную схему, распределяют на три множества:

- входные переменные $F = \{ f_1, \dots, f_m \}$, характеризующие внешние воздействия на электронную схему;
- выходные переменные $Y = \{ y_1, \dots, y_r \}$, отражающие реакцию схемы на внешние воздействия;
- переменные состояния $X = \{ x_1, \dots, x_n \}$, к которым относятся линейно независимые переменные, однозначно определяющие состояние электронной схемы в каждый момент времени.

[Определение] Совокупность всех значений, которые могут принять переменные состояния в любой момент времени, называют *пространством состояния*, а сами переменные состояния образуют базис этого пространства.

[.]

Уравнения состояния электронных схем могут быть представлены в различных формах.

Наибольшее практическое применение нашло представление уравнений состояния в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши), наиболее приспособленной к применению явных методов интегрирования.

[Определение] Математическое описание электронной цепи в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши) относительно производных от переменных состояния, представляет собой *математическую модель в базе переменных состояния*, а метод анализа, основанный на реализации такой модели, носит название *метода переменных состояния*. [.]

К переменным состояния могут относиться любые линейно независимые токи и напряжения, однако наиболее обоснованным с физической точки зрения является выбор в качестве переменных состояния величин, характеризующих энергетический запас электронной схемы, который, в свою очередь, определяется напряжениями емкостных и токами индуктивных

компонентах.

[Выводы] Таким образом, переменными состояниями электронных цепей чаще всего являются напряжения емкостей и токи индуктивностей, к входным переменным относятся задающие токи и напряжения независимых источников, а в качестве выходных переменных рассматриваются токи и напряжения, подлежащие определению. [.]

В общем случае математическая модель электронной схемы в базисе переменных состояний включает:

- систему уравнений состояния

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(t, X(t), F(t)), \quad (5.1)$$

- систему выходных уравнений

$$Y(t) = \Psi(X(t), F(t)), \quad (5.2)$$

где $X = [x_1, \dots, x_n]^T$, $F = [f_1, \dots, f_m]^T$, $Y = [y_1, \dots, y_r]^T$ – векторы переменных состояний, входных и выходных переменных соответственно; $G(t, X(t), F(t))$ – n -мерная вектор-функция; $\Psi(X(t), F(t))$ – r -мерная вектор-функция.

Для линейных электронных схем системы уравнений (5.1) и (5.2) принимают вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)F(t) + \sum_{i=1}^s B_i(t) \frac{d^i F(t)}{dt^i}, \quad (5.3)$$

$$Y(t) = K(t)X(t) + K_f(t)F(t) + \sum_{i=1}^p K_{f,i}(t) \frac{d^i F(t)}{dt^i}, \quad (5.4)$$

где $A(t)$ – матрица системы (матрица состояния) n -го порядка; $B(t)$, $B_i(t)$ – матрицы управления размерности $(n \times m)$; $K(t)$ – матрица выхода размерности $(r \times n)$; $K_f(t)$, $K_{f,i}(t)$ – матрицы входа размерности $(r \times m)$.

С целью получения математической модели электронной схемы в дифференциальной форме относительно переменных состояний необходимо использовать компонентные уравнения емкостных и индуктивных компонентов, выражающие токи и напряжения через производные.

Для емкостных компонентов в общем случае

$$i_C = \frac{dq(u_C)}{dt} = \frac{dq(u_C)}{du_C} \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (5.5)$$

Для линейных постоянных емкостей с учетом $C(u_C) = \text{const} = C$ выражение (5.5) принимает вид

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Для индуктивных компонентов в общем случае

$$u_L = \frac{d\psi(i_L)}{dt} = \frac{d\psi(i_L)}{di_L} \frac{di_L}{dt} = L \frac{di_L}{dt}. \quad (5.6)$$

Для линейных постоянных индуктивностей с учетом $L(i_L) = \text{const} = L$ выражение (5.6) принимает вид

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

На основании вида используемых компонентных уравнений (5.5) и (5.6) дуги емкостных компонентов следует отнести к U -дугам, а дуги индуктивных компонентов – к Z -дугам.

Совокупность переменных состояния электронной схемы должна содержать только независимые дифференциальные переменные u_C и i_L .

При формировании уравнений в базисе переменных состояния принято множество всех дуг компонентов схемы разбивать на подмножества: емкостных дуг (C -дуг), индуктивных дуг (L -дуг), дуг независимых источников напряжения (e -дуг), дуг независимых источников тока (j -дуг) и дуг безреактивных компонентов (X -дуг).

Для исключения топологически зависимых дифференциальных переменных, обусловленных наличием особых циклов и сечений, необходимо при выборе покрывающего дерева включить в него все независимые источники напряжения и максимально возможное число C -дуг, а все задающие источники тока и максимально возможное число L -дуг отнести к дополнению дерева. Тогда переменные состояния представляются векторами U_{CT} напря-

жений на емкостных дугах дерева и векторами токов I_{LN} в индуктивных хордах. Таким образом, указанное требование о распределении реактивных дуг между деревом и дополнением обеспечивается, если в покрывающее дерево включаются в следующем порядке:

- дуги всех независимых источников ЭДС;
- максимально возможное число C -дуг;
- максимально возможное число безреактивных X -дуг;
- минимально необходимое число L -дуг.

Топологические уравнения в системе координат, определяемой выбором покрывающего дерева в соответствии с принятой иерархией дуг, имеют вид

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \pi_{LL} & \pi_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_E \\ I_{CT} \\ I_{XT} \\ I_{LT} \\ I_{CN} \\ I_{XN} \\ I_{LN} \\ J \end{bmatrix} = \bar{0}; \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} -\pi_{EC}^T & -\pi_{CC}^T & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ -\pi_{EX}^T & -\pi_{CX}^T & -\pi_{XX}^T & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ -\pi_{EL}^T & -\pi_{CL}^T & -\pi_{XL}^T & -\pi_{LL}^T & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ -\pi_{EJ}^T & -\pi_{CJ}^T & -\pi_{XJ}^T & -\pi_{LJ}^T & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U_{CT} \\ U_{XT} \\ U_{LT} \\ U_{CN} \\ U_{XN} \\ U_{LN} \\ U_J \end{bmatrix} = \bar{0}. \quad (5.8)$$

Компонентное уравнение для X -дуг целесообразно представить в неявной форме:

$$\begin{bmatrix} V_{UT} & V_{UN} & V_{IT} & V_{IN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{XT} \\ U_{XN} \\ I_{XT} \\ I_{XN} \end{bmatrix} = \bar{0}. \quad (5.9)$$

Из топологического уравнения (5.7) выразим вектор токов I_{XT} X -дуг дерева

$$I_{XT} = -\pi_{XX} I_{XN} - \pi_{XL} I_{LN} - \pi_{XJ} J, \quad (5.10)$$

а из топологического уравнения (5.8) – вектор напряжений U_{XN} X -хорд

$$U_{XN} = \pi_{XX}^T U_{XT} + \pi_{CX}^T U_{CT} + \pi_{EX}^T E. \quad (5.11)$$

Подставив (5.10) и (5.11) в (5.9), получим уравнение для безреактивных компонентов

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_{UT} + V_{UN} \pi_{XX}^T & V_{IN} - V_{IT} \pi_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{XT} \\ I_{XN} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -V_{UN} \pi_{CX}^T & V_{IT} \pi_{XL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_{UN} \pi_{EX}^T & V_{IT} \pi_{XJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

которое можно представить в краткой записи

$$W_0 X_0 = Q_1 X + Q_2 F, \quad (5.12)$$

$$\text{где } X_0 = \begin{bmatrix} U_{XT} \\ I_{XN} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}.$$

Формирование уравнений состояния производится на основе топологического уравнения для главных сечений, определяемых C -дугами дерева

$$I_{CT} + \pi_{CC} I_{CN} = -\pi_{CX} I_{XN} - \pi_{CL} I_{LN} - \pi_{CJ} J, \quad (5.13)$$

и топологического уравнения для главных циклов, определяемых L -хордами

$$U_{LN} - \pi_{LL}^T U_{LT} = \pi_{XL}^T U_{XT} + \pi_{CL}^T U_{CT} + \pi_{EL}^T E. \quad (5.14)$$

Введение вектора $q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN}$ для зарядов и вектора $\psi = \psi_{LN} - \pi_{LL}^T \psi_{LT}$ для потокосцеплений позволяет представить левые части уравнений (5.13) и (5.14) в виде

$$I_{CT} + \pi_{CC} I_{CN} = \frac{dq_{CT}}{dt} + \pi_{CC} \frac{dq_{CN}}{dt} = \frac{d}{dt} (q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN}) = \frac{dq}{dt},$$

(5.15)

$$U_{LN} - \pi_{LL}^T U_{LT} = \frac{d\psi_{LN}}{dt} - \pi_{LL}^T \frac{d\psi_{LT}}{dt} = \frac{d}{dt} (\psi_{LN} - \pi_{LL}^T \psi_{LT}) = \frac{d\psi}{dt}.$$

Объединяя уравнения (5.13) и (5.14), получаем дифференциальное матричное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CX} \\ \pi_{XL}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{XT} \\ I_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CL} \\ \pi_{CL}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CJ} \\ \pi_{EL}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

которое в сокращенной записи принимает форму

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \Theta_0 X_0 + \Theta_1 X + \Theta_2 F, \quad (5.16)$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix}$.

Решив уравнение (5.12) относительно вектора X_0 и подставив найденное решение $X_0 = W_0^{-1}(Q_1 X + Q_2 F) = Q_1' X + Q_2' F$ в (5.16), получим дифференциальное матричное уравнение

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (\Theta_0 Q_1' + \Theta_1) X + (\Theta_0 Q_2' + \Theta_2) F = \Theta_1' X + \Theta_2' F. \quad (5.17)$$

Дальнейшее преобразование уравнения (5.17) в уравнение относительно переменных состояния требует перехода от вектора \tilde{X} к вектору переменных состояния X , что имеет свои особенности для линейных и нелинейных электронных схем.

Уравнения переменных состояния линейных электронных схем

Для линейных электронных схем заряды емкостей и потокосцепления индуктивностей могут быть представлены матричными уравнениями

$$q_C = \begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \bar{C} \bar{U}_C = \bar{C} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{CN} \end{bmatrix},$$

$$\psi_L = \begin{bmatrix} \psi_{LT} \\ \psi_{LN} \end{bmatrix} = \bar{L} \bar{I}_L = \bar{L} \begin{bmatrix} I_{LT} \\ I_{LN} \end{bmatrix},$$

где \bar{C} – диагональная матрица емкостей, \bar{L} – матрица индуктивностей.

При отсутствии индуктивно-связанных двухполюсников матрица \bar{L} является диагональной, в противном случае – недиагональной, но симметричной.

Дифференциальные переменные q и ψ системы уравнений (5.16) можно выразить следующим образом

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \pi_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC} q_C = \Pi_{CC} \bar{C} \bar{U}_C, \quad (5.18)$$

$$\psi = \psi_{LN} - \pi_{LL}^T \psi_{LT} = \begin{bmatrix} -\pi_{LL}^T & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{LT} \\ \psi_{LN} \end{bmatrix} = P_{LL} \psi_L = P_{LL} \bar{L} \bar{I}_L. \quad (5.19)$$

Из топологического уравнения для главных циклов, определяемых C -хордами, и из топологического уравнения для главных сечений, определяемых L -дугами дерева, следует соответственно

$$U_{CN} = \pi_{CC}^T U_{CT} + \pi_{EC}^T E, \quad (5.20)$$

$$I_{LT} = -\pi_{LL} I_{LN} - \pi_{LJ} J. \quad (5.21)$$

Векторы напряжений емкостей и токов индуктивностей с учетом соотношений (5.20) и (5.21) могут быть представлены в виде

$$\bar{U}_C = \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \pi_{CC}^T \end{bmatrix} U_{CT} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \pi_{EC}^T \end{bmatrix} E = \Pi_{CC}^T U_{CT} + \Pi_{EC}^T E, \quad (5.22)$$

$$\bar{I}_L = \begin{bmatrix} I_{LT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi_{LL} \\ \bar{1} \end{bmatrix} I_{LN} + \begin{bmatrix} -\pi_{LJ} \\ \bar{0} \end{bmatrix} J = P_{LL}^T I_{LN} + P_{LJ}^T J. \quad (5.23)$$

Подставляя выражения (5.22) и (5.23) в (5.18) и (5.19), получаем

$$q = (\Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{CC}^T) U_{CT} + (\Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{EC}^T) E,$$

$$\psi = (P_{LL} \bar{L} P_{LL}^T) I_{LN} + (P_{LL} \bar{L} P_{LJ}^T) J,$$

на основании чего можно записать

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} q \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{CC}^T & \bar{0} \\ \bar{0} & P_{LL} \bar{L} P_{LL}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{EC}^T & \bar{0} \\ \bar{0} & P_{LL} \bar{L} P_{LJ}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} = W_x X + \Theta_3 F. \quad (5.24)$$

Дифференцируя уравнение (5.24), находим

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = W_x \frac{dX}{dt} + \Theta_3 \frac{dF}{dt}.$$

Подстановка полученного выражения для производной $\frac{d\tilde{X}}{dt}$ в уравнение (5.17) дает

$$W_x \frac{dX}{dt} = \Theta_1' X + \Theta_2' F - \Theta_3 \frac{dF}{dt},$$

откуда получаем уравнение переменных состояния линейной электронной схемы в виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + BF + B_1 \frac{dF}{dt}, \quad (5.25)$$

где $A = W_x^{-1} \Theta_1'$, $B = W_x^{-1} \Theta_2'$, $B_1 = -W_x^{-1} \Theta_3$.

Появление производной вектора F в уравнении переменных состояния обусловлено особыми циклами и сечениями с задающими источниками. Если задающие источники в особых циклах и сечениях отсутствуют, то $\pi_{EC} = \bar{0}$ и $\pi_{LJ} = \bar{0}$, следовательно, $\Theta_3 = \bar{0}$.

При отсутствии особых циклов и сечений все дифференциальные переменные независимы и входят в векторы U_{CT} и I_{LN} , а в составе топологических матриц отсутствуют подматрицы π_{CC} и π_{LL} . Тогда $\Pi_{CC} = \bar{1}$ и $P_{LL} = \bar{1}$, вследствие чего матрица W_x имеет квазидиагональную структуру

$$W_x = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{L} \end{bmatrix},$$

а при отсутствии индуктивных связей W_x представляет собой диагональную матрицу, элементами которой являются параметры реактивных двухполюсников.

Уравнения переменных состояния нелинейных электронных схем

При формировании покрывающего дерева из дуг безреактивных компонентов (X -дуг) выделяются дуги нелинейных двухполюсников, причем управляемые током дуги включают в дерево после e -дуг и C -дуг, а управляемые напряжением – в дополнение дерева перед L -дугами и J -дугами.

Уравнение для безреактивных линейных компонентов и дифференциальное уравнение для зарядов и потокосцеплений отличаются от аналогичных уравнений (5.12) и (5.16) линейной схемы только наличием в правой части слагаемых, которые зависят от вектора переменных нелинейных безре-

активных компонентов $X_i = \begin{bmatrix} U_{HT} \\ I_{HN} \end{bmatrix}$:

$$W_0 X_0 = Q_1 X + Q_2 F + Q_3 X_H, \quad (5.26)$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \Theta_0 X_0 + \Theta_1 X + \Theta_2 F + \Theta_3 X_H. \quad (5.27)$$

где $Q_3 = \begin{bmatrix} -V_{UN}\pi_{HX}^T & V_{IT}\pi_{XH} \end{bmatrix}$; $\Theta_3 = \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CH} \\ \pi_{HL}^T & \bar{0} \end{bmatrix}$.

В качестве топологических уравнений, связывающих переменные нелинейных безреактивных компонентов, используются уравнение для главных сечений, определяемых дугами нелинейных компонентов, входящих в дерево,

$$I_{HT} = -\pi_{HX} I_{XN} - \pi_{HL} I_{LN} - \pi_{HJ} J - \pi_{HN} I_{HN} \quad (5.28)$$

и уравнение для главных циклов, определяемых дугами нелинейных компонентов, входящих в дополнение дерева

$$U_{HT} = \pi_{XH}^T U_{XT} + \pi_{CH}^T U_{CT} + \pi_{EH}^T E + \pi_{HN}^T U_{HT}. \quad (5.29)$$

Объединяя (5.28) и (5.29), получаем матричное топологическое уравнение для нелинейных безреактивных компонентов вида

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{HT} \\ U_{HN} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{HX} \\ \pi_{XH}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{XT} \\ I_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{HL} \\ \pi_{CH}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{HJ} \\ \pi_{EH}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{HN} \\ \pi_{HN}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{HT} \\ I_{HN} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

которое в сокращенной записи принимает форму

$$Y_H = \Omega_0 X_0 + \Omega_1 X + \Omega_2 F + \Omega_3 X_H, \quad (5.30)$$

где $Y_H = \begin{bmatrix} I_{HT} \\ U_{HN} \end{bmatrix}$.

Решив уравнение (5.26) относительно вектора X_0 и подставив найденное решение $X_0 = W_0^{-1}(Q_1 X + Q_2 F + Q_3 X_H) = Q'_1 X + Q'_2 F + Q'_3 X_H$ в (5.27) и (5.30), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= (\Theta_0 Q'_1 + \Theta_1) X + (\Theta_0 Q'_2 + \Theta_2) F + (\Theta_0 Q'_3 + \Theta_3) X_H = \\ &= \Theta'_1 X + \Theta'_2 F + \Theta'_3 X_H, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} Y_H &= (\Omega_0 Q'_1 + \Omega_1) X + (\Omega_0 Q'_2 + \Omega_2) F + (\Omega_0 Q'_3 + \Omega_3) X_H = \\ &= \Omega'_1 X + \Omega'_2 F + \Omega'_3 X_H. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Уравнения (5.31) и (5.32) дополняются компонентными уравнениями нелинейных безреактивных компонентов $\varphi(X_H, Y_H) = \bar{0}$, в результате чего математическая модель нелинейной электронной схемы в базисе переменных состояния принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \Theta'_1 X + \Theta'_2 F + \Theta'_3 X_H, \\ Y_H &= \Omega'_1 X + \Omega'_2 F + \Omega'_3 X_H, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$X_0 = Q'_1 X + Q'_2 F + Q'_3 X_H,$$

$$\varphi(X_H, Y_H) = \bar{0}$$

где $\varphi(X_H, Y_H)$ – нелинейная вектор-функция.

Если нелинейными являются только безреактивные компоненты, то дифференциальное уравнение математической модели нелинейной электронной схемы может быть приведено к канонической форме. Для этого уравне-

ние (5.24), которое остается справедливым, необходимо подставить в дифференциальное уравнение математической модели

$$W_x \frac{dX}{dt} = \Theta'_1 X + \Theta'_2 F - \Theta_3 \frac{dF}{dt} + \Theta'_3 X_H,$$

$$\frac{dX}{dt} = (W_x^{-1} \Theta'_1) X + (W_x^{-1} \Theta'_2) F - (W_x^{-1} \Theta_3) \frac{dF}{dt} + (W_x^{-1} \Theta'_3) X_H,$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + BF + B' \frac{dF}{dt} + DX_H. \quad (5.34)$$

Остальные уравнения математической модели (5.33) остаются без изменений.

При наличии нелинейных реактивных компонентов используется дифференциальное уравнение математической модели, разрешенное относительно производной $\frac{d\tilde{X}}{dt}$, а вектор \tilde{X} определяется в процессе решения на основе заданных нелинейных функций $q_C(u_C)$, $\psi_L(i_L)$ или $C(u_C)$, $L(i_L)$.

Рассмотренным алгоритмам формирования уравнений переменных состояния присущи следующие ограничения:

- управляемые и управляющие дуги являются дугами безреактивных компонентов;
- управляющие параметры являются постоянными величинами.

Ограничения на характер управляющих двухполюсников снимается за счет введения дополнительных дуг, фиксирующих управляющие переменные: последовательно с управляющими по току двухполюсниками вводятся короткозамкнутые дуги, а параллельно с управляющими по напряжению двухполюсниками – разомкнутые дуги.

Обобщение на случаи нелинейных зависимостей между управляемыми и управляющими величинами достигается введением дуг, фиксирующих управляющие переменные, и отнесением их к множеству дуг нелинейных компонентов. При этом в векторе X_H следует положить нулю компоненты, соответствующие управляющим дугам, что равносильно их удалению

совместно с соответствующими столбцами матриц Θ'_3 , Ω'_3 , Q'_3 .

При математическом описании нелинейных электронных схем по изложенным алгоритмам дуги всех нелинейных компонентов, управляемых током, должны войти в дерево, а дуги всех нелинейных компонентов, управляемых напряжением, – в дополнение дерева. Это требование является топологическим ограничением, которое служит одним из условий детерминированности схемы, то есть возможности получения для искомых переменных однозначного решения при заданных воздействиях и начальных условиях. Невыполнение этого требования служит признаком того, что схема может оказаться недетерминированной.

[Внимание] Порядок системы дифференциальных уравнений определяется числом переменных состояния как разность между числом всех дифференциальных переменных и числом зависимых дифференциальных переменных. [.]

В состав зависимых дифференциальных переменных входят топологически зависимые и компонентно зависимые переменные. Компонентно зависимые переменные имеются только в схемах с необратимыми компонентами при определенных значениях управляющих параметров зависимых источников. Наличие компонентно зависимых дифференциальных переменных делает матрицу W_0 особенной, а их число определяется дефектом d этой матрицы. Дефект матрицы W_0 представляет собой разность между порядком и рангом матрицы. Компонентно зависимые дифференциальные переменные исключаются из числа переменных состояния в процессе приведения матрицы W_0 к единичной матрице. При этом в дифференциальных уравнениях математической модели появляются производные высших порядков $\frac{d^i F(t)}{dt^i}$ от вектора входных переменных.

Общее количество независимых переменных состояния выражается со-

отношением

$$\alpha_0 = v_C + \sigma_L - d. \quad (5.35)$$

Рассмотрим формирование математической модели в базисе переменных состояния для схемы однокаскадного избирательного усилителя, приведенной на рис. 5.1,а.

Схема замещения усилителя по переменному току, в которой полевой транзистор представлен эквивалентной схемой рис.5.1,б, приведена на рис. 5.2.

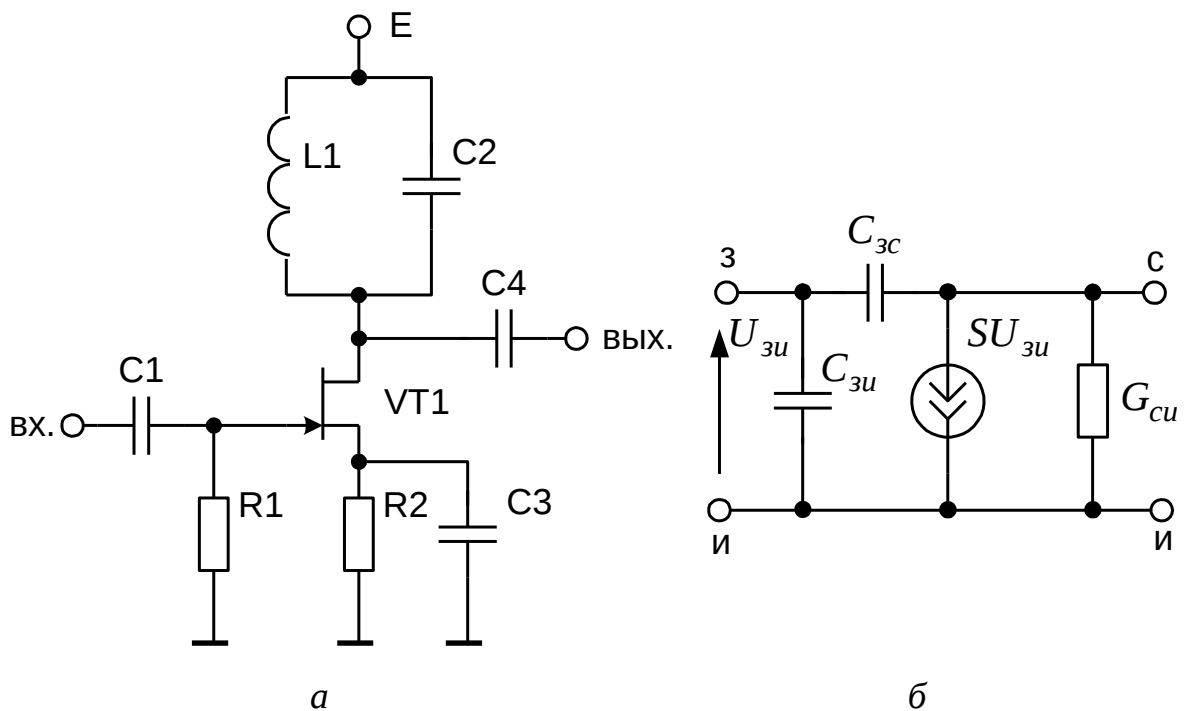


Рис. 5.1. Схема избирательного усилителя (а) и эквивалентная схема полевого транзистора с управляющим p - n -переходом

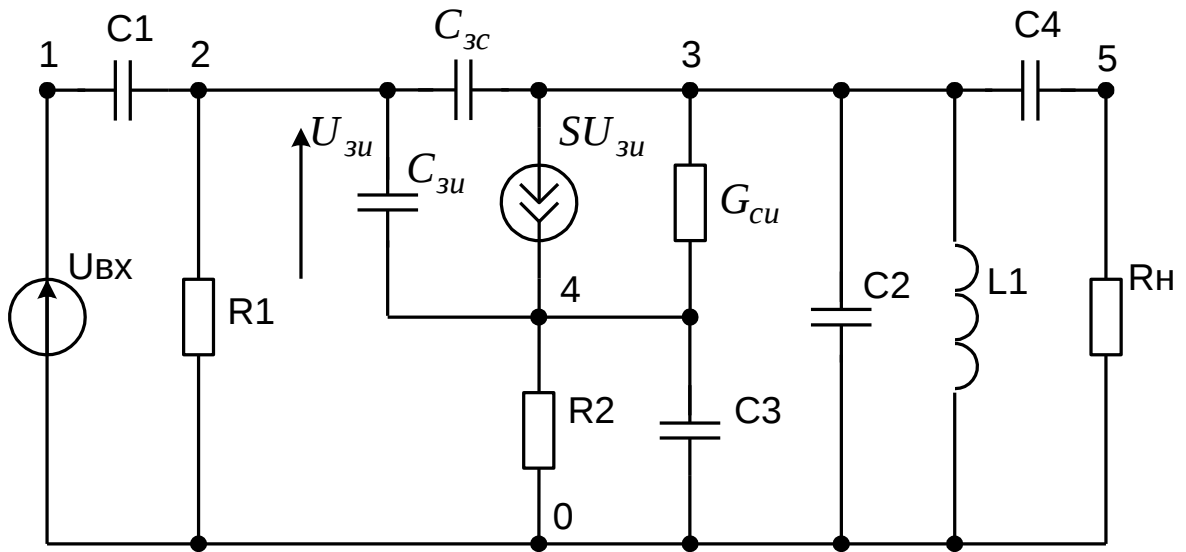


Рис. 5.2. Схема замещения избирательного усилителя
по переменному току

Полусный граф избирательного усилителя, соответствующий схеме замещения рис. 5.2, представлен на рис. 5.3.

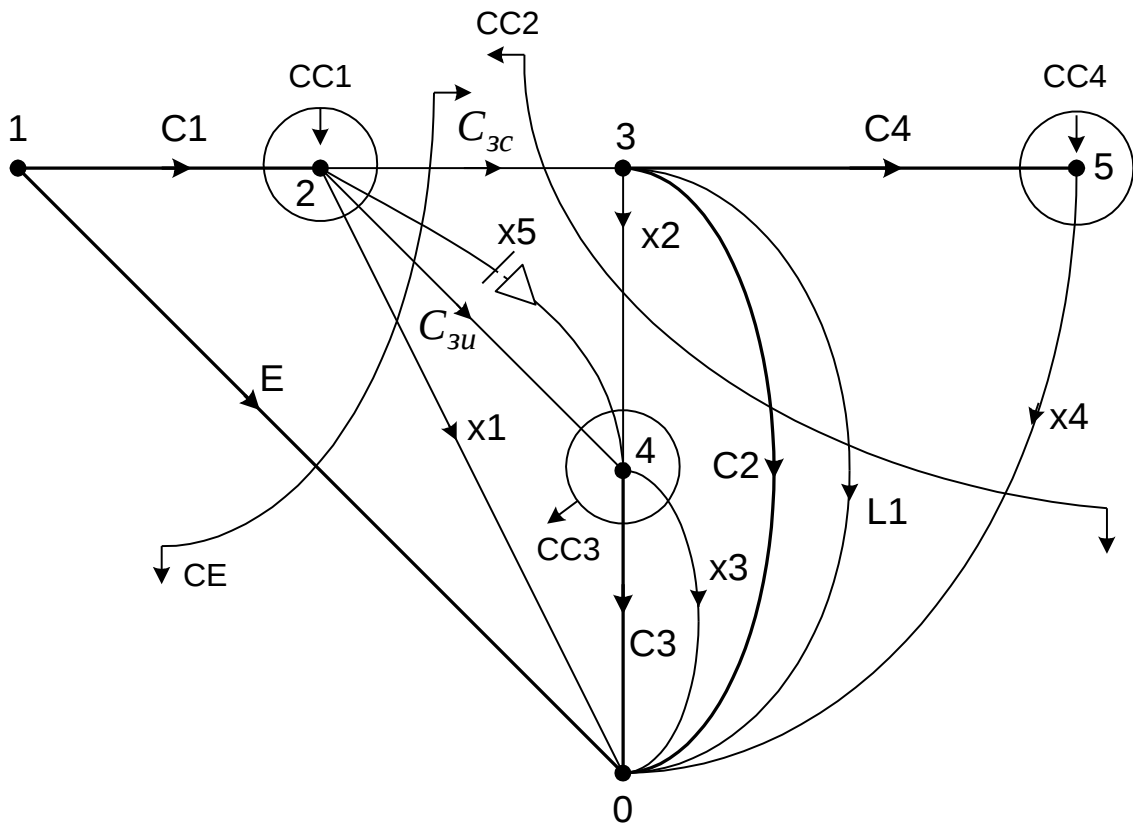


Рис. 5.3. Полусный граф избирательного усилителя

Полусный граф избирательного усилителя содержит $\ell_E = 1$ е-дуг ($U_{a\delta}$); $\ell_{\tilde{N}} = 6$ С-дуг ($C1, C2, C3, C4, \tilde{N}_{\zeta\delta}, \tilde{N}_{\zeta\tilde{n}}$); $\ell_L = 1$ L-дуг ($L1$) и $\ell_x = 5$ х-дуг (дуг безреактивных компонентов). При этом дуга $x2$ отображает параллельно включенные в схеме замещения зависимый источник тока $SU_{\zeta\delta}$ и ветвь с проводимостью $G_{\tilde{n}\delta}$. Поскольку при использовании рассмотренного алгоритма формирования математических моделей в базисе переменных состояния управляющими могут быть только безреактивные дуги, в граф введена разомкнутая дуга $x5$, управляющая по напряжению $U_{\zeta\delta}$. В полусном графе отсутствуют j -дуги.

Для определения числа топологически зависимых дифференциальных переменных сформируем С- и L-графы:

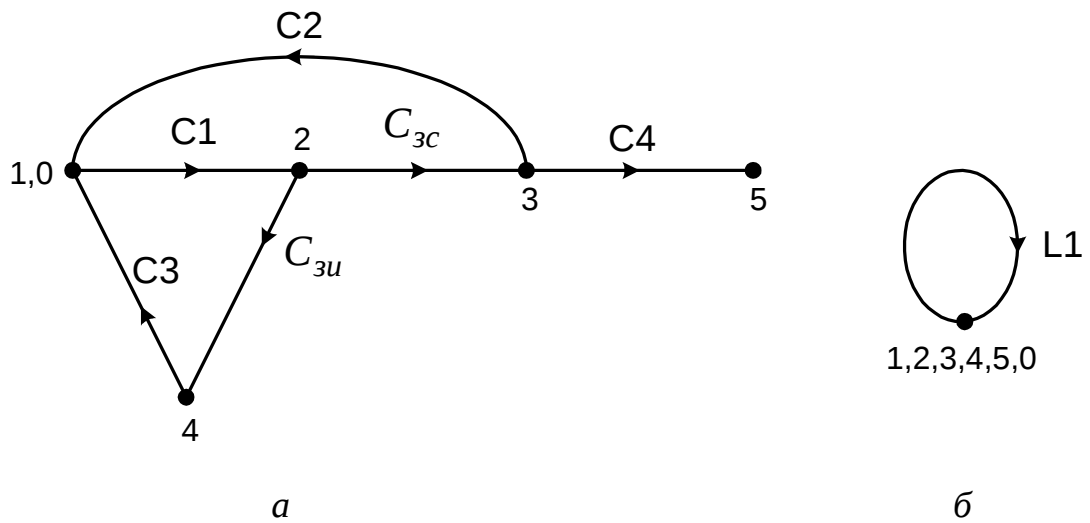


Рис. 5.4. С-граф (а) и L-граф (б) избирательного усилителя

Определяем число особых контуров $\sigma_c = \ell_c - \nu_c + n_c = 6 - 5 + 1 = 2$ и особых сечений $\nu_L = \nu_L - n_L = 1 - 1 = 0$.

Для исключения топологически зависимых дифференциальных переменных в состав покрывающего дерева последовательно включены $\ell_E = 1$ е-дуга ($U_{\hat{a}\hat{o}}$) и $l_{\tilde{N}T} = 4$ С-дуг (С1, С2, С3, С4). В дополнение покрывающего дерева входят $\ell_L = 1$ L-дуга (L1), $\ell_{xN} = 5$ х-дуг (х1, х2, х3, х4, х5) и $\ell_{\tilde{N}N} = 2$ С-дуг ($\tilde{N}_{\hat{c}\hat{e}}$, $\tilde{N}_{\hat{c}\hat{n}}$).

Выбранное покрывающее дерево определяет систему $\nu = \nu - n = 6 - 1 = 5$ главных сечений. При этом $\ell_E = 1$ сечение (сечение СЕ) определяется е-дугой дерева, а $\ell_{\tilde{N}T} = 4$ сечений (сечений СС1, СС2, СС3, СС4) – С-дугами дерева. Сечения, определяемые х-дугами и L-дугами в графе рис. 5.3 отсутствуют. Следовательно, (5.7), (5.8) и (5.9) принимают вид

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} \\ \bar{0} & \bar{1} & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_E \\ I_{CT} \\ I_{CN} \\ I_{XN} \\ I_{LN} \end{bmatrix} = \bar{0}, \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} -\pi_{EC}^T & -\pi_{CC}^T & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ -\pi_{EX}^T & -\pi_{CX}^T & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ -\pi_{EL}^T & -\pi_{CL}^T & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U_{CT} \\ U_{CN} \\ U_{XN} \\ U_{LN} \end{bmatrix} = \bar{0}. \quad (5.37)$$

$$[V_{UN} \quad V_{IN}] \begin{bmatrix} U_{XN} \\ I_{XN} \end{bmatrix} = \bar{0}. \quad (5.38)$$

По полюсному графу рис. 5.3 определяем:

$$\pi_{EC} = [1 \quad 1], \quad \pi_{EX} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1], \quad \pi_{EL} = [0],$$

$$\pi_{CC} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_{CX} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_{CL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Компонентные уравнения для X-дуг имеют вид:

$$\begin{aligned} U_{x1} &= R_1 I_{x1}, & I_{x2} &= S U_{x5} + G_{\bar{n}\bar{e}} U_{x2}, & U_{x3} &= R_2 I_{x3}, \\ U_{x4} &= R_1 I_{x4}, & I_{x5} &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Преобразовав уравнения (5.39) к виду

$$\begin{aligned} U_{x1} - R_1 I_{x1} &= 0, \\ -G_{\bar{n}\bar{e}} U_{x2} - S U_{x5} + I_{x2} &= 0, \\ U_{x3} - R_2 I_{x3} &= 0, \end{aligned}$$

$$U_{x4} - R_i I_{x4} = 0,$$

$$I_{x5} = 0,$$

их можно записать в матричной форме (5.38)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{\tilde{n}\tilde{e}} & 0 & 0 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{x4} \\ U_{x5} \\ I_{x1} \\ I_{x2} \\ I_{x3} \\ I_{x4} \\ I_{x5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{откуда } V_{UN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{\tilde{n}\tilde{e}} & 0 & 0 & -S \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_{IN} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выразив из топологического уравнения (5.37) вектор напряжений U_{xN} X-хорд и подставив его в компонентное уравнение (5.38), после преобразования получим уравнение для безреактивных дуг

$$V_{IN} I_{xN} = -V_{UN} \pi_{CX}^T U_{CT} - V_{UN} \pi_{EX}^T E, \quad (5.40)$$

сопоставляя которое с (5.12), находим:

$$W_0 = V_{IN}, \quad Q_1 = [-V_{UN} \pi_{CX}^T \quad \bar{0}], \quad Q_2 = -V_{UN} \pi_{EX}^T,$$

причем

$$X_0 = I_{xN} = [I_{x1} \ I_{x2} \ I_{x3} \ I_{x4} \ I_{x5}]^T,$$

$$U_{CT} = [U_{C1} \ U_{C2} \ U_{C3} \ U_{C4}]^T,$$

$$I_{LN} = [I_{L1}],$$

$$X = [U_{CT} \ I_{LN}]^T = [U_{C1} \ U_{C2} \ U_{C3} \ U_{C4} \ I_{L1}]^T,$$

$$F = E = [U_{\hat{a}\hat{o}}].$$

Поскольку матрица W_0 не является особенной, то ее дефект $d = 0$, поэтому в математической модели отсутствуют компонентно зависимые дифференциальные переменные.

Дифференциальное матричное уравнение (5.16) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi_{CX} \\ \bar{0} \end{bmatrix} I_{XN} + \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CL} \\ \pi_{CL}^T & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \pi_{EL}^T \end{bmatrix} E, \quad (5.41)$$

откуда следует

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} -\pi_{CX} \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \bar{0} & -\pi_{CL} \\ \pi_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \pi_{EL}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решая (5.40) относительно $X_0 = I_{XN}$ и подставляя в (5.41) найдем уравнение (5.17):

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \Theta'_1 X + \Theta'_2 F,$$

где

$$\Theta'_1 = \Theta_0 W_0^{-1} Q_1 + \Theta_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & -\left(G_{\tilde{n}\tilde{e}} + \frac{1}{R_1}\right) & G_{\tilde{n}\tilde{e}} + S & \frac{1}{R_1} & -1 \\ -S & G_{\tilde{n}\tilde{e}} & -\left(G_{\tilde{n}\tilde{e}} + S + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta'_2 = \Theta_0 W_0^{-1} Q_2 + \Theta_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ -S \\ S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Дифференциальные переменные q и Ψ представляем в виде:

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \pi_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC} q_C = \Pi_{CC} \bar{C} \bar{U}_C, \quad (5.42)$$

$$\Psi = \Psi_{LN} = \Psi_L = \bar{L} \bar{I}_L = L_1 i_{L1}, \quad (5.43)$$

где $\Pi_{CC} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \pi_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\bar{C} = \text{diag}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_{\tilde{c}\tilde{e}}, C_{\tilde{c}\tilde{n}});$$

$$\bar{U}_C = [u_{C1} \ u_{C2} \ u_{C3} \ u_{C4} \ u_{C_{\tilde{c}\tilde{e}}} \ u_{C_{\tilde{c}\tilde{n}}}]^T.$$

Векторы напряжений емкостей и токов индуктивностей с учетом соотношений (5.22) и (5.23) могут быть представлены в виде

$$\bar{U}_C = \begin{bmatrix} U_{CT} \\ U_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \pi_{CC}^T \end{bmatrix} U_{CT} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \pi_{EC}^T \end{bmatrix} E = \Pi_{CC}^T U_{CT} + \Pi_{EC}^T E, \quad (5.44)$$

$$\bar{I}_L = I_{LN} = I_{L1}, \quad (5.45)$$

где $\Pi_{EC} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \pi_{EC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Подставляя выражения (5.44) и (5.45) в (5.42) и (5.43), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{X} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{CC}^T & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{CT} \\ I_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{EC}^T \\ 0 \end{bmatrix} E = \\ &= W_X X + \Theta_3 F. \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\text{где } W_X = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{CC}^T & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_{\zeta\bar{e}} + C_{\zeta\bar{n}} & C_{\zeta\bar{n}} & C_{\zeta\bar{e}} & 0 & 0 \\ C_{\zeta\bar{n}} & C_2 + C_{\zeta\bar{n}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{\zeta\bar{e}} & 0 & C_3 + C_{\zeta\bar{e}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} \bar{C} \Pi_{EC}^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_{\zeta\bar{e}} + C_{\zeta\bar{n}}) \\ -C_{\zeta\bar{n}} \\ -C_{\zeta\bar{e}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Дифференцируя уравнение (5.46) и подставляя в (5.17), находим

$$W_X \frac{dX}{dt} = \Theta'_1 X + \Theta'_2 F - \Theta_3 \frac{dF}{dt},$$

откуда получаем уравнение переменных состояния линейной электронной схемы в виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + BF + B_1 \frac{dF}{dt},$$

где

$$A = W_X^{-1} \Theta'_1, \quad B = W_X^{-1} \Theta'_2, \quad B_1 = -W_X^{-1} \Theta_3,$$

причем матрица A является квадратной матрицей $\ell_{CT} + \ell_{LN} = 5$ порядка, матрицы B и B_1 имеют размерность $(\ell_{CT} + \ell_{LN}) \times \ell_E = 5 \times 1$.

Например, при численных значениях внутренних параметров избирательного усилителя $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 500$ Ом, $C_1 = 10$ мкФ, $C_2 = 100$ пФ, $C_3 = 50$ мкФ, $C_4 = 10$ мкФ, $L_1 = 300$ мкГн, $S = 1$ мА/В, $C_{\zeta\bar{e}} = C_{\zeta\bar{n}} = 10$ пФ,

$R_{\text{нè}} = 100$ кОм матрица состояния A и матрицы управления B и B_1 принимают вид:

$$A = \begin{pmatrix} -9.191 & 0.91 & -9.092 & -0.909 & 9.091 \times 10^3 \\ 9.091 \times 10^6 & -9.1 \times 10^5 & 9.092 \times 10^6 & 9.091 \times 10^5 & -9.091 \times 10^9 \\ -20 & 2 \times 10^{-3} & -60.002 & 1.818 \times 10^{-7} & -1.818 \times 10^{-3} \\ 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 3.333 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EMBED Mathcad

$$B = \begin{pmatrix} 9.191 \\ -9.091 \times 10^6 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1.909 \times 10^{-7} \\ 0.091 \\ 2 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Реализация математических моделей в базисе переменных состояния

[Внимание] Основу реализации математических моделей в базисе переменных состояния составляет решение задачи Коши, то есть интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями $X(t_0) = X_0$. [.]

Задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений может решаться как аналитически, так и с использованием методов числен-

ного интегрирования дифференциальных уравнений.

Для систем нелинейных дифференциальных уравнений общие аналитические методы решения отсутствуют, поэтому задача Коши решается преимущественно путем численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Аналитическое решение систем линейных дифференциальных уравнений

Аналитическое решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка (5.3) с начальными условиями $X(t_0) = X_0$ имеет вид:

$$X(t) = \Phi(t) \left[X_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\xi) \left(B(\xi)F(\xi) + \sum_{i=1}^s B_i(\xi) \frac{d^i F(\xi)}{d\xi^i} \right) d\xi \right],$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, определяемая решением матричного уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = \bar{1}. \quad (5.47)$$

Из (5.47) следует выражение для фундаментальной матрицы

$$\Phi(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\xi) d\xi \right]. \quad (5.48)$$

Для линейных электронных схем с постоянными параметрами (линейных стационарных систем) при отсутствии компонентно зависимых дифференциальных переменных справедливо $A(t) = \text{const} = A$, $B(t) = \text{const} = B$,

$B_i(t) = \text{const} = B_i$, $\frac{d^i F(\xi)}{d\xi^i} = 0$ ($i = \overline{2, s}$), поэтому фундаментальная матрица определяется выражением

$$\Phi(t) = \exp[A(t - t_0)],$$

а аналитическое решение принимает вид

$$X(t) = \exp[A(t-t_0)] \cdot X_0 + \int_{t_0}^t \exp[A(t-\xi)] \left(B(\xi)F(\xi) + B_1(\xi) \frac{dF(\xi)}{d\xi} \right) d\xi. \quad (5.49)$$

Экспоненциальная матрица (матричная экспонента) $\exp A$ от квадратной матрицы A n -го порядка представляет собой квадратную матрицу n -го порядка, определяемую рядом Тейлора:

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} A^k \right], \quad (5.50)$$

где $k! = \prod_{i=1}^k i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$ – факториал числа k (по определению $0! = 1$);

$A^k = \prod_{i=1}^k A = \underset{k \text{ раз}}{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}$ – k -ая степень матрицы A (по определению $A^0 = \bar{1}$ – единичная матрица n -го порядка).

Для практических расчетов матричной экспоненты широко применяется интерполяционный полином Лагранжа-Сильвестра, согласно которому функция $f(A)$ от матрицы A может быть представлена в виде

$$f(A) = \sum_{k=1}^q \sum_{s=1}^{m_k} f^{(s-1)}(\lambda_k) B_{ks}, \quad (5.51)$$

где $f^{(s-1)}(\lambda_k) = \left. \frac{d^{(s-1)} f(x)}{dx^{(s-1)}} \right|_{x=\lambda_k}$, $f^{(0)}(\lambda_k) = f(\lambda_k)$; B_{ks} – квадратные матрицы n -го порядка, называемые компонентами матрицы A ; λ_k – собственные числа матрицы A , определяемые из решения характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda \bar{1}) = 0.$$

Множество собственных чисел $\{\lambda_k\}$ называется спектром матрицы A . Если собственные числа матрицы A различны, то говорят, что спектр этой матрицы простой, в противном случае – сложный.

Если матрица A n -го порядка имеет сложный спектр, причем ее соб-

ственные числа λ_k имеют кратность m_k , $k = \overline{1, q}$ ($\sum_{k=1}^q m_k = n$), то ее компоненты определяются соотношением

$$B_{ks} = \frac{\prod_{j=1}^q (A - \lambda_j \bar{1})^{s-1} \prod_{j=1}^q (A - \lambda_j \bar{1})}{(s-1)! \prod_{j=1}^q (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad s = \overline{1, m_k}. \quad (5.52)$$

Таким образом, каждому собственному числу λ_k соответствует m_k компонент матрицы A : $B_{k1}, B_{k2}, \dots, B_{km_k}$. При этом матрицы B_{k1} ($k = \overline{1, q}$) называются проекторами матрицы A и обозначаются $B_{k1} = P_k$. Все компоненты матриц, обладающих простым спектром, являются проекторами. Проекторы матриц определяются соотношением

$$P_k = \frac{\prod_{j=1}^q (A - \lambda_j \bar{1})}{\prod_{j=1}^q (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad k = \overline{1, q} \quad (5.53)$$

Компоненты B_{k2}, \dots, B_{km_k} могут быть выражены через соответствующие проекторы:

$$B_{ks} = \frac{(A - \lambda_k \bar{1})^{(s-1)}}{(s-1)!} P_k, \quad s = \overline{2, m_k}. \quad (5.54)$$

В свою очередь компоненты матрицы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^q P_k = \bar{1}, \quad P_k^2 = P_k, \quad B_{ks} B_{rl} = \bar{0}, \quad (5.55)$$

$$k, r = \overline{1, q}; \quad l, s = \overline{1, m_k}; \quad r \neq k; \quad s \neq l.$$

В случае простого спектра матрицы A интерполяционный полином Лагранжа-Сильвестра упрощается:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n P_k f(\lambda_k). \quad (5.56)$$

Рассмотрим вычисление матричной экспоненты $\exp(At)$ для матрицы

$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

откуда определяем собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Поскольку спектр матрицы A простой, матричная экспонента выражается соотношением (5.56), в котором

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 \bar{1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-1 - (-2)} \left(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \frac{A - \lambda_1 \bar{1}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-2 - (-1)} \left(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Согласно (5.56):

$$\exp \left(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} t \right) = P_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Для матрицы $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix}$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0,25 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 0,25 = 0,$$

корни которого: $\lambda_1 = \lambda_2 = -0,5$. Таким образом, матрица A имеет одно собственное число $\lambda_1 = -0,5$ кратности $m_1 = 2$, то есть обладает сложным спектром. Согласно условиям (5.55)

$$B_{11} = P_1 = \bar{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а в соответствии с (5.54)

$$B_{12} = \frac{1}{1!} (A - \lambda_1 \bar{1}) P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix} - (-0,5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -1 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Далее по (5.51) находим

$$\begin{aligned} \exp \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0,25 & 0 \end{bmatrix} t \right) &= B_{11} e^{\lambda_1 t} + B_{12} \frac{d}{d\lambda} (e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-0,5t} + \begin{bmatrix} -0,5 & -1 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} t e^{-0,5t}. \end{aligned}$$

Расчет временных характеристик линейных

электронных схем

Для расчета переходных характеристик вектор входных переменных математической модели в базисе переменных состояния может быть представлен в виде

$$F(t) = [\eta_1(t_0) \quad \dots \quad \eta_k(t_0) \quad \dots \quad \eta_m(t_0)]^T, \quad (5.57)$$

где $\eta_k(t_0)$ – функция Хэвисайда, выражающая единичное ступенчатое изменение k -ой входной (задающей) переменной. Тогда при нулевых начальных условиях ($X_0 = 0$) из аналитического решения (5.49) следует

$$X(t) = A^{-1}[\exp(A(t-t_0)) - \bar{1}] \cdot B + \exp(A(t-t_0)) \cdot B_1. \quad (5.58)$$

Подставляя (5.58) в выходное уравнение $Y(t) = KX(t) + K_f F(t) + K_{f1} \frac{dF(t)}{dt}$ получим матричную переходную функцию $H(t)$:

$$H(t) = K[A^{-1}[\exp(A(t-t_0)) - \bar{1}] \cdot B + \exp(A(t-t_0)) \cdot B_1] + K_f + K_{f1}\delta(t_0). \quad (5.59)$$

Матричная переходная функция в общем случае представляет собой матрицу, которая имеет размерность $l \times m$:

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & \dots & h_{1s}(t) & \dots & h_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k1}(t) & \dots & h_{ks}(t) & \dots & h_{km}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{r1}(t) & \dots & h_{rs}(t) & \dots & h_{rm}(t) \end{bmatrix},$$

где $h_{ks}(t)$ – переходная функция (характеристика) для переменной реакции $Y_k(t)$ при переменной воздействия $f_s(t)$.

Расчет частотных характеристик

Для расчета частотных характеристик вектор входных переменных математической модели в базисе переменных состояния может быть пред-

ставлен в виде

$$F(t) = F_m \exp(j \omega t), \quad (5.60)$$

где F_m – вектор амплитуд гармонических воздействий.

Тогда из аналитического решения (5.49) следует

$$\begin{aligned} X(t) = & \exp[A(t-t_0)] \cdot X_0 + \\ & + [j \omega \cdot \bar{1} - A]^{-1} [\exp(j \omega t) - \exp((j \omega \cdot \bar{1} - A)t_0 + At)] \cdot [B + j \omega B_1] \cdot F_m. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Для устойчивых электронных схем собственные числа матрицы A лежат в левой комплексной полуплоскости, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(At) = \bar{0}. \quad (5.62)$$

Вектор переменных состояния в стационарном режиме определяется из (5.61) с учетом (5.62):

$$X_{\text{н\ddot{o}}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = [j \omega \cdot \bar{1} - A]^{-1} \cdot [B + j \omega B_1] \cdot F_m \cdot \exp(j \omega t). \quad (5.63)$$

Подставляя (5.63) в выходное уравнение $Y(t) = KX(t) + K_f F(t) + K_{f1} \frac{dF(t)}{dt}$

получим:

$$\begin{aligned} Y_{\text{н\ddot{o}}}(t) = & \left(K [j \omega \cdot \bar{1} - A]^{-1} \cdot [B + j \omega B_1] + K_f + j \omega K_{f1} \right) \cdot F_m \cdot \exp(j \omega t) = \\ = & T(j \omega) F(t), \end{aligned}$$

где $T(j \omega) = K [j \omega \cdot \bar{1} - A]^{-1} \cdot [B + j \omega B_1] + K_f + j \omega K_{f1}$ – матричная комплексная частотная функция.

Матричная комплексная частотная функция в общем случае представляет собой комплексную матрицу, которая имеет размерность $l \times m$:

$$T(j \omega) = \begin{bmatrix} T_{11}(j \omega) & \dots & T_{1s}(j \omega) & \dots & T_{1m}(j \omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{k1}(j \omega) & \dots & T_{ks}(j \omega) & \dots & T_{km}(j \omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{r1}(j \omega) & \dots & T_{rs}(j \omega) & \dots & T_{rm}(j \omega) \end{bmatrix},$$

где $T_{ks}(j\omega) = \frac{y_k(j\omega)}{f_s(j\omega)}$ – комплексная частотная функция для переменной реакции $y_k(j\omega)$ при переменной воздействия $f_s(j\omega)$.

При использовании комплексных частотных функций расчет амплитудно-частотных, фазо-частотных, вещественных и мнимых частотных характеристик осуществляется по выражениям

$$\begin{aligned} A_{ks}(\omega) &= |T_{ks}(j\omega)|, \\ \varphi_{ks}(\omega) &= \arg [T_{ks}(j\omega)], \\ T_{R,ks}(\omega) &= \operatorname{Re} [T_{ks}(j\omega)], \\ T_{J,ks}(\omega) &= \operatorname{Im} [T_{ks}(j\omega)]. \end{aligned}$$

Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Для решения во временном интервале $0 \leq t \leq T$ задачи Коши с начальными условиями $X(0) = X_0$ численными методами необходимо перейти от непрерывной, или континуальной, формы записи системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(t, X(t)) \quad (5.64)$$

к дискретной. С этой целью область интегрирования $[0, T]$ разбивается на отрезки $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_M = T$ и непрерывная область изменения аргумента t заменяется дискретной областью: $(0 \leq t \leq T) \rightarrow (t_0, t_1, \dots, t_M)$. Величину $h_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1, M}$ называют шагом дискретизации (шагом интегрирования), а саму дискретную область (t_0, t_1, \dots, t_M) – сеточной областью. Если $h_k = h = \text{const}$, то сеточная область является равномерной. Моменты t_k носят

название узлов сеточной области. Значения искомых функций в узлах сеточной области будем обозначать $X(t_k) = X_k$. В k -ом узле сеточной области систему (5.64) можно записать:

$$\frac{dX_k}{dt} = G_k, \quad (5.65)$$

где $\frac{dX_k}{dt} = \frac{dX}{dt} \Big|_{t=t_k}$; $G_k = G(t_k, X_k)$.

При достаточной гладкости вектор-функции $G(t, X(t))$ (то есть существовании производных нужного порядка по всем переменным) решение $X(t)$ системы дифференциальных уравнений можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки t_k :

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^{(i)}(t_k)}{i!} (t - t_k)^i. \quad (5.66)$$

Полагая в (5.66) $t = t_{k+1} = t_k + h$, получим

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \frac{X_k^{(1)}}{1!} h + \frac{X_k^{(2)}}{2!} h^2 + \dots + \frac{X_k^{(p)}}{p!} h^p + o(h^{p+1}) = \\ &= X_k + h \left[T_p(X_k, t_k, h) + o(h^p) \right], \end{aligned} \quad (5.67)$$

где $o(h^p) = \frac{X_k^{(p+1)}}{(p+1)!} h^p + \dots$ – величина, определяемая членами высших порядков,

называемая бесконечно малой порядка h^p ;

$$\begin{aligned} T_p(X_k, t_k, h) &= \frac{X_k^{(1)}}{1!} + \frac{X_k^{(2)}}{2!} h + \dots + \frac{X_k^{(p)}}{p!} h^{p-1} = \\ &= \frac{G_k}{1!} + \frac{G_k^{(1)}}{2!} h + \dots + \frac{G_k^{(p-1)}}{p!} h^{p-1}. \end{aligned}$$

Пренебрегая в (5.67) бесконечно малой величиной $o(h^p)$, получим систему разностных (алгебраических) уравнений,

$$X_{k+1} = X_k + h T_p(X_k, t_k, h), \quad (5.68)$$

которая представляет собой дискретную форму записи системы дифференциальных уравнений (5.64). Так как системы (5.67) и (5.68) отличаются на слагаемое $o(h^p)$, то говорят, что система разностных уравнений аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений с порядком $o(h^p)$ или с p -ым порядком (p -ая степень h). Ошибка, вызванная переходом от системы дифференциальных уравнений (5.67) к системе разностных уравнений (5.68), ограничена величиной

$$\varepsilon_k \leq K_p h^p,$$

где K_p – некоторая постоянная, не зависящая от шага интегрирования. Система разностных уравнений (5.68) определяет явный численный метод Тейлора p -го порядка. Название явный следует из того, что (5.68) разрешимо явным образом относительно X_{k+1} .

Раскладывая решение $X(t)$ системы дифференциальных уравнений можно в ряд Тейлора в окрестности точки t_{k+1} :

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^{(i)}(t_{k+1})}{i!} (t - t_{k+1})^i,$$

и полагая $t = t_k = t_{k+1} - h$, получим

$$\begin{aligned} X_k &= X_{k+1} - \frac{X_{k+1}^{(1)}}{1!} h + \frac{X_{k+1}^{(2)}}{2!} h^2 - \dots + \frac{X_{k+1}^{(p)}}{p!} h^p + o(h^{p+1}) = \\ &= X_{k+1} - h \left[T_p(X_{k+1}, t_{k+1}, h) - o(h^p) \right], \end{aligned} \quad (5.69)$$

где

$$\begin{aligned} T_p(X_{k+1}, t_{k+1}, h) &= \frac{X_{k+1}^{(1)}}{1!} - \frac{X_{k+1}^{(2)}}{2!} h + \dots - \frac{X_{k+1}^{(p)}}{p!} h^{p-1} = \\ &= \frac{G_{k+1}}{1!} - \frac{G_{k+1}^{(1)}}{2!} h + \dots - \frac{G_{k+1}^{(p-1)}}{p!} h^{p-1}. \end{aligned}$$

Пренебрегая в (5.69) бесконечно малой величиной $o(h^p)$, получим систему разностных (алгебраических) уравнений вида,

$$X_{k+1} = X_k + h T_p(X_{k+1}, t_{k+1}, h), \quad (5.70)$$

которая определяет неявный численный метод Тейлора ρ -го порядка. Название неявный объясняется тем, что (5.70) не разрешено явным образом относительно X_{k+1} .

Следует отметить существенное отличие уравнений (5.67), (5.69) и (5.68), (5.70). Уравнения (5.67) и (5.69) образуют систему нелинейных (трансцендентных) уравнений относительно вектора X_k , но поскольку они содержат неопределенное слагаемое $o(h^\rho)$, то и решить их не представляется возможным. Уравнения (5.68) и (5.70) не содержат неопределенного слагаемого $o(h^\rho)$ и, следовательно, могут быть решены. Векторы X_k в (5.67), (5.69) и (5.68), (5.70) различны: в (5.67), (5.69) – это решения системы дифференциальных уравнений в k -ом узле сеточной области, а в (5.68), (5.70) – решения систем разностных уравнений. В случае $h \rightarrow 0$ система (5.68) стремится принять вид (5.67), а система (5.70) стремится к (5.69). При этом решения систем нелинейных уравнений (5.67), (5.69) сближаются с решениям соответствующих систем разностных уравнений (5.68), (5.70) и при достаточно малых h будут мало различаться.

Простейшим численным методом интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является явный метод Тейлора первого порядка, получивший название явного метода Эйлера, для которого $\rho = 1$, $T_1(X_k, t_k, h) = G_k$ и тогда из (5.67) следует

$$X_{k+1} = X_k + hG_k. \quad (5.71)$$

Эта рекуррентная зависимость позволяет определять X_{k+1} по известному X_k . Система разностных уравнений (5.71) аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений с порядком $O(h)$.

Из (5.70) при $\rho = 1$ следует неявный метод Эйлера, для которого, $T_1(X_{k+1}, t_{k+1}, h) = G_{k+1}$ и

$$X_{k+1} = X_k + hG_{k+1}. \quad (5.72)$$

который также имеет порядок аппроксимации $O(h)$. Таким образом, явный и

неявный методы Эйлера обладают наименьшей точностью из всех численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Для получения требуемой точности методами Эйлера необходимо уменьшать шаг интегрирования, что вызывает значительное увеличение времени счета.

Выбор той или иной схемы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений определяется не только соображениями точности (порядок аппроксимации), удобства и экономичности (явные схемы), но и соображениями устойчивости.

Пусть на некотором шаге интегрирования допущена погрешность вычисления ε_k . Возмущенное решение разностного уравнения (5.68) представим в виде $\bar{X}_k = X_k + \varepsilon_k$ и подставим в (5.68):

$$X_{k+1} + \varepsilon_{k+1} = X_k + \varepsilon_k + hT_p(X_k + \varepsilon_k, t_k, h). \quad (5.73)$$

Вычитая (5.73) из (5.68), получим уравнение для возмущений:

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h(T_p(X_k + \varepsilon_k, t_k, h) - T_p(X_k, t_k, h)). \quad (5.74)$$

[Внимание] Численный метод является устойчивым, если решение уравнения для возмущений (5.74) удовлетворяет условию:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0. \quad [.]$$

Для явного метода Эйлера в случае системы линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей A уравнение для возмущений принимает вид:

$$\varepsilon_{k+1} = (E + hA)\varepsilon_k. \quad (5.75)$$

Общее решение этого разностного уравнения:

$$\varepsilon_k = (E + hA)^k \varepsilon_0, \quad (5.76)$$

где ε_0 – начальное возмущение.

Очевидно, что поведение ε_k при $k \rightarrow \infty$ определяется свойствами матрицы A . Общее решение разностного уравнения (5.76) можно записать в виде:

$$\varepsilon_k = S(E + h\Lambda)^k S^{-1}\varepsilon_0, \quad (5.77)$$

где S – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A .

Тогда условием устойчивости явного метода Эйлера является требование

$$|1 + h\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.78)$$

где λ_i – собственные числа матрицы A .

Неравенство (5.78) можно переписать в виде

$$\left| \frac{1}{h} + \lambda_i \right| < \frac{1}{h}. \quad (5.79)$$

На комплексной λ -плоскости оно определяет внутреннюю часть круга с центром в точке $(-\frac{1}{h}, 0)$ и радиусом $\frac{1}{h}$ (рис. 5.5, а), которая носит название области устойчивости явного метода Эйлера. Условием устойчивости явного метода Эйлера является такой выбор шага интегрирования h , который бы обеспечивал попадание всех собственных чисел матрицы A внутрь указанного круга.

Для линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей A и неявного метода Эйлера разностное уравнение (5.74) для возмущений имеет вид:

$$\varepsilon_{k+1} = (E - hA)^{-1}\varepsilon_k. \quad (5.80)$$

Решение уравнения (5.58) можно представить в виде

$$\varepsilon_k = (E - hA)^{-k}\varepsilon_0, \quad (5.81)$$

или

$$\varepsilon_k = S(E - h\Lambda)^{-k} S^{-1}\varepsilon_0. \quad (5.82)$$

где S – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A .

Условие устойчивости для неявного метода Эйлера примет вид:

$$\left| \frac{1}{h} - \lambda_i \right| > \frac{1}{h}. \quad (5.83)$$

Данное неравенство определяет область устойчивости, которая пред-

ставляет собой внешнюю часть круга с центром $(\frac{1}{h}, 0)$ и радиусом $\frac{1}{h}$ (рис. 5.5,б).

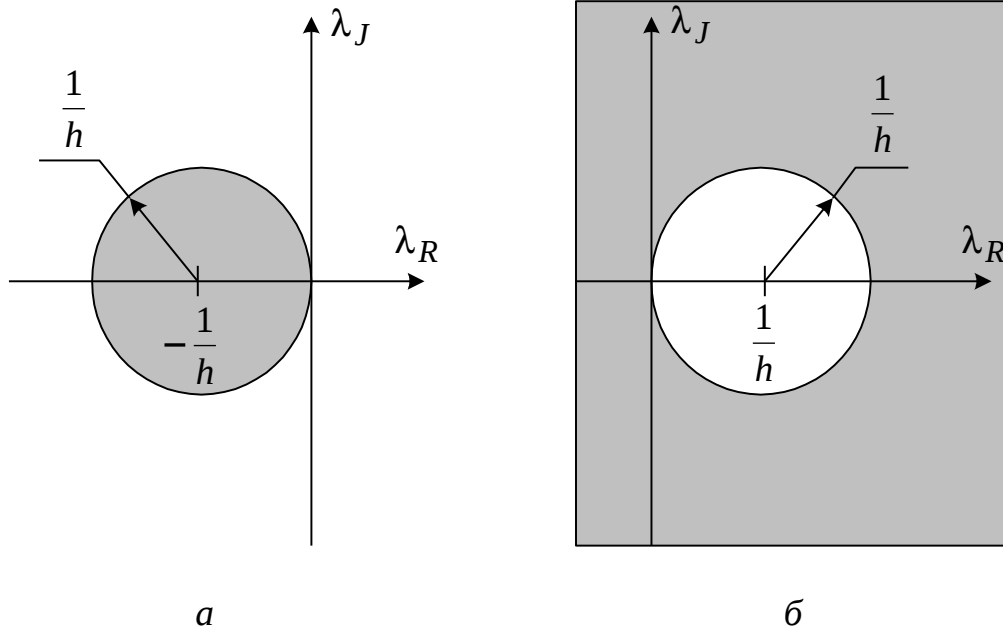


Рис. 5.5. Области устойчивости явного (а) и неявного численных методов Эйлера

Для систем уравнений устойчивых электронных схем собственные числа матрицы \mathbf{A} системы дифференциальных уравнений локализованы в левой полуплоскости комплексной λ -плоскости, хотя могут располагаться в ней достаточно произвольно. Для интегрирования этих систем уравнений целесообразно применять численные схемы, область устойчивости которых включает всю левую полуплоскость λ -плоскости независимо от шага интегрирования h . Такие схемы называются абсолютно устойчивыми (А-устойчивыми). К ним относятся, например, неявный метод Эйлера. Явные же методы Эйлера и Рунге-Кутты относятся к разряду условно устойчивых численных схем, так как выполнение условий устойчивости для них зависит от вы-

бора шага интегрирования h .

[Выводы] По отношению к абсолютно и условно устойчивым численным схемам справедливо утверждение, что не существует A -устойчивого неявного линейного многошагового метода с порядком аппроксимации $p > 2$.
[.]

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Переменные математической модели в базе переменных состояния, характеризующие реакцию схемы на внешние воздействия относятся к

- 1 – входным переменным,
- 2 – выходным переменным,
- 3 – переменным состояния.

Ответ: к выходным переменным.

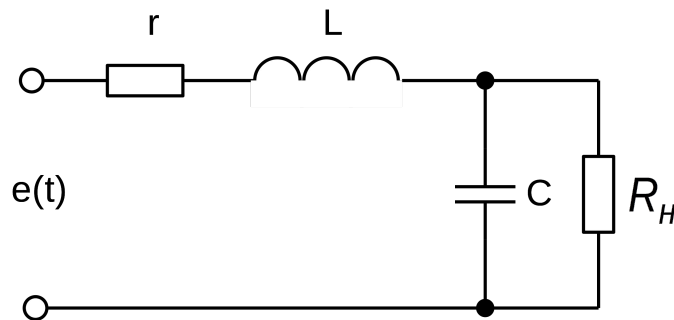
2. В представленной модели линейной электронной схемы в базе переменных состояния укажите матрицу состояния.

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)F(t) + \sum_{i=1}^s B_i(t) \frac{d^i F(t)}{dt^i},$$

$$Y(t) = K(t)X(t) + K_f(t)F(t) + \sum_{i=1}^p K_{f,i}(t) \frac{d^i F(t)}{dt^i},$$

Ответ: матрица состояния – $A(t)$.

3. Сформируйте матрицу управления электронной схемы, если вектор переменных состояний имеет вид $X = [i_L \quad u_C]^T$



Ответ: $B = \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. При каком значении параметра α матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$ имеет сложный спектр.

Ответ: при $\alpha = -1$.

5. Запишите аналитическое решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + 4f(t) + \frac{df(t)}{dt}$, если $x(0) = 0$, $f(t) = \eta(t)$.

Ответ: $x(t) = 2 - \exp(-2t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы анализа и расчета электронных схем составляют теоретическую базу процесса схемотехнического проектирования. Усложнение функций электронных устройств и повышение уровня технических требований привело к возникновению нового научно-технического направления – автоматизированного проектирования, основанного на применении средств электронно-вычислительной техники. Данное направление диктует необходимость развития методов анализа и расчета электронных схем по пути их максимальной формализации и оптимизации.

Адаптация методов анализа электронных схем к машинной реализации связана с широким использованием математического аппарата матричной алгебры и методов вычислительной математики.

Центральным этапом теоретического исследования широкого класса квазилинейных электронных схем является определение схемных функций, обеспечивающих дальнейший расчет характеристик и параметров электронных схем во временной и частотной области. Поэтому до настоящего времени сохраняют свою актуальность методы, основанные на линейных операторных математических моделях.

В то же время высокая производительность вычислительной техники позволяет с достаточной точностью моделировать процессы в сравнительно сложных электронных цепях на основе численных методов реализации существенно нелинейных математических моделей во временной форме. Такие методы являются наиболее перспективными на современном этапе развития методологии анализа электронных схем и зачастую опираются на математическое описание электронных цепей в базисе переменных состояния.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белецкий А.Ф.** Теория линейных электрических цепей / А.Ф. Белецкий. – М.: Лань, 2009. – 544 с.: ил. – ISBN 978-5-8114-0905-1. эл. адрес: <http://e.lanbook.com/viem/book/710>

2. **Глотов А.Ф.** Математическое моделирование электронных схем: Учебное пособие / А.Ф. Глотов; Томский политехнический университет. – Томск: изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 168 с. ISBN 978-5-4387-0005-0

3. **Довгун В.П.** Компьютерное моделирование электронных цепей и устройств: Методические указания по самостоятельной работе / В.П. Довгун, В. Б. Лыкова, П. А. Барыбин. – Красноярск: «Сибирский федеральный университет», 2008. – 75 с. [электронный ресурс, http://ikit.edu.sfu-kras.ru/files/5/samost_work.pdf доступ свободный]

4. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 210100 **Электроника и микроэлектроника** (квалификация (степень) “бакалавр”): Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 27 декабря 2009 г. № 743.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- A – структурная матрица полюсного графа
 A_0 – сокращенная структурная матрица полюсного графа
 $A(p)$ – полином m -ой степени
 $B(p)$ – полином n -ой степени
 B_t – вес t -ой взвешенной вершины
 $B_t^{(i)}$ – вес t -ой взвешенной вершины i -го элементарного графа
 \bar{C} – диагональная матрица емкостей
 D – определитель сигнального графа
 D^A – определитель обобщенного сигнального графа
 D_k – величина дополнения k -го простого пути
 $D^{\dot{I}}$ – определитель сигнального графа Мэзона
 F_{ij} – схемная функция электронной схемы
 F_m – вектор амплитуд гармонических воздействий
 $F(p)$ – схемная функция в операторной форме
 $L_r^{(i)}$ – передача r -го контура i -го элементарного графа
 L_r – передача r -го контура элементарного графа
 \bar{L} – матрица индуктивностей
 ℓ – число ребер графа
 M – количество многополюсных компонентов в схеме
 N_q – число элементарных графов с фактором q
 n – количество компонентов (частей) графа
 n_y – количество компонентов графа, полученного из исходного путем размыкания всех z -ребер
 $\rho_k^{(x_i, f_j)}$ – передача k -го простого пути, направленного из вершины f_j в верши-

ну X_j

Q – внешние параметры; максимально возможное значение фактора элементарных графов

$T_{kS}(j\omega)$ – комплексная частотная функция для переменной реакции $Y_k(j\omega)$ при переменной воздействия $f_S(j\omega)$

W – внутренние параметры, матрица эквивалентных параметров

X – первичные выходные параметры (фазовые переменные)

Y – матрица эквивалентных проводимостей схемы

$Y_{i\text{анн}}$ – матрица проводимостей схемы без учета многополюсных компонентов (матрица проводимостей пассивной части схемы)

Y_i – обобщенная матрица проводимостей многополюсных компонентов схемы

$Y_{i j}$ – матрица проводимостей, отражающая отдельный многополюсный компонент в выбранной системе независимых сечений

Z – матрица сопротивлений схемы

Z_i – обобщенная матрица сопротивлений многополюсных компонентов схемы

$Z_{i j}$ – матрица сопротивлений, отражающая отдельный многополюсный компонент в выбранной системе независимых контуров

$Z_{i\text{анн}}$ – матрица сопротивлений схемы без учета многополюсных компонентов (матрица сопротивлений пассивной части схемы)

α_0 – общее количество независимых переменных состояния

Δ – определитель матрицы эквивалентных параметров

Δ_{ji} – алгебраические дополнения матрицы эквивалентных параметров

ϑ – количество вершин графа

V – число независимых сечений графа

Π – матрица независимых сечений

P – матрица независимых контуров

σ – число независимых простых циклов графа

ГЛОССАРИЙ

Адекватность модели – способность модели отражать заданные свойства моделируемого объекта с требуемой точностью.

Алгоритмическая модель – модель, включающая математические соот-

ношения с учетом выбранного численного метода решения в форме алгоритма.

Анализ – определение изменений выходных параметров в зависимости от изменения внутренних или внешних параметров при известной постоянной структуре. Анализ сводится к многократному решению задач расчета. Типовые виды анализа: анализ чувствительности выходных параметров к изменениям внутренних или внешних параметров, статистический анализ, направленный на получение вероятностных оценок надежности схемы.

Аналитическая модель – математическая модель, которая является результатом аналитического решения исходных уравнений. Записывается в форме явных выражений выходных параметров через внутренние и внешние параметры.

Ациклический граф – граф, не содержащий циклов.

Величина элементарного сигнального графа Мэсона – произведение передач всех его контуров (при нечетном числе контуров знак изменяется на противоположный).

Величина обобщенного элементарного сигнального графа – произведение передач всех контуров и весов всех взвешенных вершин элементарного графа (при нечетном числе контуров знак изменяется на противоположный).

Взаимная степень вершин – количество ребер, соединяющих смежные вершины.

Взаимно определенное ребро – ребро полюсного графа, компонентное уравнение которого допускает выразить как ток, так и напряжение.

Внутренние параметры – характеризуют отдельные компоненты проектируемого устройства. Подразделяются на первичные внутренние (физико-технические) параметры, которые отражают конструктивно-технологические и электрофизические свойства компонентов, и вторичные внутренние (электрические) параметры, которые характеризуют соотношения между то-

ками и напряжениями на полюсах компонентов схемы.

Внешние параметры – характеризуют условия внешней среды, в которых функционирует электронная схема.

Вырожденный контур – контур, которому инцидентны только u -ребра полюсного графа.

Вырожденное сечение – сечение, которому инцидентны только z -ребра полюсного графа.

Выходные параметры – характеризуют количественные значения технико-экономических показателей, определяемых функциональным назначением технического объекта как целостной системы. Подразделяются на первичные и вторичные.

Вторичные выходные параметры – (схемные параметры, схемные функции) определяются отношениями фазовых переменных друг к другу, зависят от структуры электронной схемы и внутренних параметров, позволяют определять реакции электронных схем на внешние воздействия различных видов.

Главный контур – простой цикл, которому инцидентна только одна хорда графа.

Главное сечение – сечение, которому инцидентно только одно ребро покрывающего дерева графа.

Граф $G(X, A, \Gamma)$ – совокупность непустого множества вершин X ($X \neq \emptyset$), не пересекающегося с ним множества ребер A ($A \cap X = \emptyset$) и закона Γ , устанавливающего взаимосвязь между элементами множества вершин с помощью элементов множества ребер. Аналитически закон Γ описывается логическим высказыванием:

$$\Gamma(x_j, a_k, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ââðèíû } x_j \text{ è } x_j \text{ ñâÿçàíû ðááðîî } a_k \\ 0, & \text{ââðèíû } x_j \text{ è } x_j \text{ íâ ñâÿçàíû ðááðîî } a_k \end{cases}$$

Дерево – связный ациклический граф. Несвязный граф, компоненты

которого являются деревьями, называется лесом.

Дерево графа – любая связная совокупность ребер графа, не содержащая контуров, вместе с инцидентными им вершинами. Если такое дерево является суграфом, то оно называется покрывающим деревом или остовом.

Дополнение дерева – множество ребра графа (хорд), не входящих в покрывающее дерево (остов).

Звездное дерево – дерево, одна из вершин которого (центр), является смежной со всеми остальными вершинами.

Имитационная модель – разновидность алгоритмических моделей, предназначенная для имитации физических или информационных процессов в техническом объекте при задании различных зависимостей внешних воздействий от времени.

Инвариантная модель – модель, представленная на традиционном математическом языке безотносительно к методу ее реализации.

Инцидентные вершины – ребро графа и его граничная вершина называются друг другу: вершина инцидентна ребру, ребро инцидентно вершине. Граничные вершины какого-либо ребра называют смежными.

Каноническая система контуров – система независимых простых циклов, каждый из которых охватывает только одну ячейку графа, а все независимые циклы направлены одинаково.

Каноническая система сечений – система независимых центральных сечений, в которой все сечения направлены изнутри.

Классический метод анализа электронных схем во временной области – метод анализа, основанный на формировании и реализации математической модели в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние электронной цепи в различные моменты времени.

Компонентные уравнения – уравнения, которые характеризуют свойства отдельных компонентов топологической модели.

Контур - замкнутый путь. Простой замкнутый путь - простой контур.

Контурный координатный базис – совокупность независимых контуров полюсного графа, все сечения которого являются вырожденными.

Координатные уравнения для ветвей (КВ-уравнения) – уравнения электронных схем, записанные относительно системы независимых сечений и контуров, искомыми переменными которых являются напряжения u -ребер графа и токи z -ребер графа.

Координатные уравнения для координат (КК-уравнения) – уравнения электронных схем, записанные относительно системы независимых сечений и контуров, искомыми переменными которых являются узловые напряжения и контурные токи.

Макромодель – модель, которая характеризует процессы взаимодействия исследуемого объекта с окружающей средой и не описывает процессы внутри объекта.

Маршрут – последовательность ребер графа (не обязательно различных) и инцидентных им вершин таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. Число ребер маршрута определяет его длину. Если начальная вершина каждой последующей дуги маршрута совпадает с конечной вершиной предыдущей дуги, то маршрут является ориентированным.

Математическая модель – любое математическое описание, отражающее с требуемой точностью поведение реального объекта в заданных условиях и позволяющее определить все интересующие свойства этого объекта.

Математическая модель в базисе переменных состояния – математическое описание электронной цепи в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши) относительно производных от переменных состояния.

Моделирование – способ исследования, основанный на замене реаль-

ного объекта физическим или абстрактным объектом-аналогом (моделью), изучении свойств этого аналога и переносе полученных результатов на исходный объект. Подразделяется на физическое моделирование (в качестве модели используется материальный объект, поведение которого аналогично поведению исследуемого объекта) и математическое моделирование (модель представляет собой абстрактный образ реального объекта, выраженный в виде математических соотношений и условий).

Метод временных характеристик – метод определения реакций электронных схем на произвольные воздействия на основе переходных и импульсных характеристик путем применения интегралов наложения (интегралов Дюамеля).

Метод эквивалентных схем в матричной форме – метод формирования матрично-векторных параметров координатных уравнений для координат непосредственно по схемам замещения, содержащим только двухполюсные компоненты. В качестве моделей активных многополюсных компонентов используют линейные малосигнальные эквивалентные схемы.

Мультиграф – граф без петель, но с кратными ребрами,.

Неоднородный сигнальный граф – сигнальный граф, отображающий систему неоднородных линейных уравнений.

Несвязный граф – граф, между некоторыми парами вершин которого не существует маршрутов. Несвязный граф представляет собой совокупность отдельных частей (подграфов), называемых компонентами.

Неопределенная матрица проводимостей многополюсника – матрица коэффициентов системы уравнений, выражающих токи всех полюсов через напряжения полюсов, отсчитанные от некоторой точки, лежащей вне многополюсника.

Обобщенный матричный метод – метод формирования матрично-векторных параметров координатных уравнений для координат непосредственно

по схеме замещения, содержащей многополюсные компоненты. В качестве моделей многополюсников используют неопределенные матрицы проводимостей или сопротивлений.

Обобщенный сигнальный граф – сигнальный граф, отображающий систему линейных уравнений, представленную в обобщенной причинно-следственной форме, когда в каждом уравнении одна из искомым переменных со своим весовым коэффициентом (взвешенная переменная) выражена через другие искомые и задающие переменные.

Однородный сигнальный граф – сигнальный граф, отображающий систему однородных линейных уравнений.

Определитель сигнального графа – сумма величин всех элементарных сигнальных графов.

Оптимизация – поиск структуры и значений внутренних параметров электронной схемы, обеспечивающих наилучшие в заданном смысле значения выходных параметров при заданных внешних параметрах. Подразделяется на структурную оптимизацию (поиск или выбор оптимальной структуры) и параметрическую оптимизацию (поиск оптимальных значений внутренних параметров при известной постоянной структуре).

Первичные выходные параметры (фазовые переменные) – характеризуют электрическое состояние электронного устройства: токи и напряжения на полюсах компонентов схемы, узловые напряжения, контурные токи, выходные напряжения и токи.

Передача между вершинами сигнального графа – отношение соответствующих переменных системы линейных алгебраических уравнений, по которой сформирован сигнальный граф.

Переменные состояния – линейно независимые переменные, однозначно определяющие электрическое состояние электронной схемы в каждый момент времени. Наиболее обоснованным с физической точки зрения является

выбор в качестве переменных состояния величин, характеризующих энергетический запас системы. Для электронных цепей переменными состояниями чаще всего являются напряжения емкостей и токи индуктивностей.

Планарный (плоский) граф – граф, который может быть представлен на плоскости без пересечения ребер.

Пространство состояния – совокупность всех значений, которые могут принять переменные состояния в любой момент времени.

Подграф – часть графа, содержащая некоторое подмножество ребер исходного графа и все инцидентные им вершины. Совокупность всех ребер и вершин исходного графа, не принадлежащих его подграфу, образуют дополнение подграфа. Исходный граф по отношению к его подграфу называют надграфом.

Полный граф – простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

Полюсный граф электронной схемы – ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам схемы, дуги - ветвям схемы. Направления дуг совпадают с положительными направлениями токов соответствующих ветвей.

Продуктивность математической модели – возможность определить в реальных условиях численные значения всех исходных данных, необходимых для реализации модели.

Проектирование – это создание описания, необходимого для построения в заданных условиях еще не существующего технического объекта, на основе первичного описания этого объекта.

Простой граф – граф без петель и кратных ребер.

Псевдограф – граф, содержащий петли и кратные ребра.

Путь – ориентированный маршрут, не содержащий повторяющихся дуг. Путь, не содержащий повторяющихся вершин, - простой путь. Простой путь

характеризуется передачей, определяемой как произведение передач всех входящих в него дуг.

Расчет электронной схемы – определение выходных параметров при известной постоянной структуре и значениях внутренних и внешних параметров. Основные виды расчета электронных схем: расчет статического режима (режима покоя), расчет частотных характеристик, расчет переходных процессов.

Расширенная система координат – система главных сечений и главных контуров, определяемая выбором покрывающего дерева графа, при котором все U -ребра полюсного графа входят в состав покрывающего дерева, а все Z -ребра - в состав дополнения дерева.

Реализация математической модели – совокупность действий, направленных на получение необходимой информации о свойствах математической модели.

Робастность математической модели – устойчивость модели к погрешностям в исходных данных.

Связный граф – граф, между любой парой вершин которого существует маршрут.

Сечение связного графа – совокупность ребер, удаление которых делает граф несвязным. Графически выделяется замкнутой линией, которая пересекает инцидентные сечению ребра. Сечение характеризуется направлением (внутри или изнутри).

Сигнальный граф – ориентированный граф, отображающий систему линейных алгебраических уравнений, сформированную для электронной схемы, причем вершины графа соответствуют искомым и задающим переменным, дуги отражают связи переменных в уравнениях и характеризуются весами, определяемыми коэффициентами уравнений.

Сигнальный граф Мэсона – сигнальный граф, отображающий систему

линейных уравнений, представленную в причинно-следственной форме, когда в каждом уравнении одна из искомым переменных явно выражена через другие искомые и задающие переменные.

Сигнальный I -граф – сигнальный граф, отображающий систему уравнений, искомыми переменными которой являются контурные токи, а задающими – задающие ЭДС.

Сигнальный U -граф – сигнальный граф, отображающий систему уравнений, искомыми переменными которой являются узловые потенциалы, а задающими – задающие токи.

Синтез – создание описания еще не существующего технического объекта на основе требований к выходным параметрам при заданных внешних параметрах. Подразделяется на структурный синтез (определение состава элементов электронной схемы и порядка их связей между собой) и параметрического синтез (определение значений внутренних параметров электронной схемы при заданной постоянной структуре и заданных значениях внешних параметров).

Система независимых контуров – совокупность простых циклов графа, обеспечивающая линейную независимость системы уравнений по второму закону Кирхгофа. Каждому простому циклу приписывают направление (по часовой либо против часовой стрелки).

Система независимых сечений – совокупность сечений графа, обеспечивающая линейную независимость системы уравнений по первому закону Кирхгофа.

Сокращенный гибридный координатный базис (СГКБ) – совокупность независимых невырожденных сечений и контуров полюсного графа.

Степень вершины – число ребер, инцидентных вершине, (петля учитывается дважды).

Суграф – часть графа, содержащая некоторое подмножество ребер и все

вершины исходного графа. Исходный граф по отношению к его суграфу называют сверхграфом.

Схема замещения электронной цепи – геометрическая абстракция цепи, отражающая ее структуру и характер входящих в нее компонентов с учетом режима работы, постановки задачи исследования и требуемой точности.

Схемная функция – отношение операторных изображений токов и напряжений, характеризующих электрическое состояние электронной схемы, приведенной к проходному четырехполюснику, при нулевых начальных условиях.

Топологическая модель – модель, отражающая структурные свойства объекта, то есть состав элементов и связи между ними.

Топологические уравнения – уравнения связей между компонентами безотносительно к свойствам самих компонентов. Базируются на уравнениях равновесия и уравнениях непрерывности. Для электронных цепей - уравнения равновесия для токов (уравнения первого закона Кирхгофа) и уравнения непрерывности для напряжений (уравнения второго закона Кирхгофа).

Узловой координатный базис – совокупность независимых сечений полюсного графа, все контуры которого являются вырожденными.

Укороченная матрица – матрица эквивалентных параметров схемы, сформированная без учета иммитансов источника сигнала и нагрузки.

Универсальность модели – характеристика модели, определяемая числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров реального объекта.

Уравнения ветвей для координат (ВК-уравнения) – компонентные уравнения, записанные относительно узловых напряжений и контурных токов.

Фундаментальное дерево графа – дерево, содержащее все вершины

исходного графа. При этом ребра фундаментального дерева в общем случае не совпадают с ребрами исходного графа.

Функциональная модель – модель, отражающая процессы функционирования технического объекта (учитываются как структурные свойства объекта, так и свойства его отдельных компонентов).

Центральное сечение – совокупность ребер, инцидентных некоторой вершине графа.

Цепь – маршрут, все ребра которого различны. Цепь, для которой различны все вершины, – простая цепь.

Цикл – замкнутая цепь. Простая замкнутая цепь - простой цикл.

Цикломатическое число графа – количество независимых простых циклов графа.

Часть графа – граф, вершины и ребра которого являются подмножествами вершин и ребер исходного графа.

Элементарный сигнальный граф Мэсона – совокупность одновременно не касающихся контуров сигнального графа Мэсона, число которых называется фактором элементарного графа.

Элементарный обобщенный сигнальный граф – совокупность одновременно не касающихся контуров и всех не входящих в них взвешенных вершин исходного графа.

u-ребро – ребро полюсного графа, компонентное уравнение которого выражает ток.

z-ребро – ребро полюсного графа, компонентное уравнение которого выражает напряжение

5 АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.....	180
5.1 Математическое описание электронных схем в базисе переменных состояния.....	180
5.2 Реализация математических моделей в базисе переменных состояния.....	204
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	220
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	222

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	223
СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	224
ГЛОССАРИЙ.....	227