

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра промышленной электроники**

**Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов**

# **МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ**

**Методические указания по изучению дисциплины**

**Томск 2014**

**Легостаев Н.С.**

Методы анализа и расчета электронных схем: методические указания по изучению дисциплины / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2014. – 63 с.

Представлены рекомендации по самостоятельному изучению теоретического материала, выполнению тестовых заданий для промежуточного и итогового контроля.

Для студентов, обучающихся по направлению бакалаврской подготовки 210100.62 “Электроника и наноэлектроника” с профилем “Промышленная электроника”.

© Легостаев Н. С., Четвергов К. В., 2014

© Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА.....	5
1.1 Общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем.....	
1.2 Математическое описание электронных схем.....	
1.3 Схемные функции и их анализ.....	
1.4 Анализ линейных электронных схем операторными методами.....	
1.5 Анализ электронных схем во временной области.....	
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РА- БОТЫ.....	7
2.1 Общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем.....	
2.2 Математическое описание электронных схем.....	
2.3 Схемные функции и их анализ.....	
2.4 Анализ линейных электронных схем операторными..... методами.....	
2.5 Анализ электронных схем во временной области.....	
4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	62

## ВВЕДЕНИЕ

Предметом дисциплины «Методы анализа и расчета электронных схем» являются формализованные методы математического описания, расчета, анализа и оптимизации электронных цепей, содержащих активные многополюсные компоненты.

Курс «Методы анализа и расчета электронных схем» входит в *вариативную часть математического и естественнонаучного цикла дисциплин образовательной программы подготовки бакалавров по направлению 210100.62 “Электроника и наноэлектроника” с профилем “Промышленная электроника”*.

В результате изучения дисциплины студент должен

**знать:**

- общие положения методологии математического моделирования;
- правила формирования операторных и временных математических моделей электронных схем;
- методы анализа и расчета электронных цепей, основанные на алгебраических, топологических и временных моделях.
- основные модели компонентов электронных схем.

**уметь:**

- применять методы математического анализа и моделирования для теоретического исследования устройств различного функционального назначения, включая устройства и системы промышленной электроники;
- производить сбор и анализ исходных данных для построения и реализации математических моделей электронных устройств различного функционального назначения;
- формировать математические модели приборов и устройств электроники и наноэлектроники различного функционального назначения, а также использовать стандартные программные средства компьютерного моделирования;

**владеть:**

- методиками теоретических исследований приборов и устройств электроники и наноэлектроники различного функционального назначения;
- интегрированными системами автоматизированного моделирования и решения математических, инженерно-технических и научных задач.

Дисциплина является предшествующей для дисциплин профессионального цикла: «Основы проектирования электронной компонентной базы», «Основы преобразовательной техники», «Энергетическая электроника». Изучению дисциплины предшествуют дисциплины математического, естественнонаучного и профессионального циклов: «Математика», «Математическое моделирование и программирование», «Теоретические основы электротехники», «Твердотельная электроника», «Аналоговая электроника», «Теория автоматического управления».

## **1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

### **1.1 Общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем**

Для получения четких представлений о сущности и особенностях моделирования электронных схем необходимо усвоить понятие математической модели и основные требования, предъявляемые к моделям. Важно знать специфику этапов математического моделирования, основные методы реализации моделей и их возможности. С целью систематизированного применения методологии математического моделирования необходимо знать и уметь использовать классификацию математических моделей. Для уяснения практической значимости математического моделирования также следует знать основные виды задач, решаемых при проектировании технических объектов и классификацию их параметров.

## **1.2 Математическое описание электронных схем**

Необходимо знать, что учет классификации электронных схем по математическому описанию обеспечивает повышение эффективности математического моделирования. Теоретической базой формирования математических моделей электронных схем являются правила построения топологических моделей, моделей электронных компонентов и приемы объединения указанных моделей в модели функциональные. Особое внимание следует обратить на матричные формы представления математических моделей. Важно твердо овладеть рациональными методами формирования математических моделей: методом эквивалентных схем и обобщенным матричным методом в однородных координатных базисах.

## **1.3 Схемные функции и их анализ**

Определение схемных функций является основным этапом теоретического исследования линейных электронных схем. Поэтому необходимо знать виды схемных функций и в зависимости от поставленной задачи уметь выбирать наиболее пригодные формы их представления. Крайне важно владеть правилами перехода от схемных функций к частотным и временным характеристикам. Не менее важно знать связь между частотными и временными характеристиками.

## **1.4 Анализ линейных электронных схем операторными методами**

Операторные методы являются наиболее эффективными методами анализа линейных электронных схем. Несмотря на принципиальные ограничения операторные методы применимы для исследования значительного количества классов электронных схем различного функционального назначения. Именно поэтому необходимо твердо овладеть аппаратом алгебраических и топологических операторных методов. Применительно к алгебраическим методам анализа рекомендуется приобрести навыки применения формул связи схемных функций с матрично-векторными параметрами алгебраических моделей. Для метода сигнальных графов следует уметь формировать графы непосредственно по схемам и применять топологические формулы определения выражений схемных функций.

### **1.5 Анализ электронных схем во временной области**

Крайне важно овладеть классическим методом анализа электронных схем во временной области, поскольку этот метод является наиболее универсальным и позволяет проводить исследования как линейных, так и нелинейных, в том числе дискретных, электронных схем. Необходимо уметь распределять фазовые переменные моделируемых объектов на входные, выходные переменные и переменные состояния, а также выявлять топологически зависимые дифференциальные переменные. Для эффективного моделирования электронных схем во временной области следует приобрести навыки формализованного построения математических моделей в базисе переменных состояния в матричной форме. Реализация математических моделей в базисе переменных состояния требует навыков применения аналитических и численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Рабочая программа по дисциплине предполагает выполнение компьютерной контрольной работы.

Контрольная работа предусматривает выполнение 10 заданий по следующим разделам курса:

- общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем;
- математическое описание электронных схем;
- схемные функции и их анализ;
- анализ линейных электронных схем операторными методами;
- анализ электронных схем во временной области.

### 2.1 Общие положения моделирования, анализа и расчета электронных схем

**Задание 1.** Представьте классификацию параметров схемы избирательного усилителя (рис. 2.1).

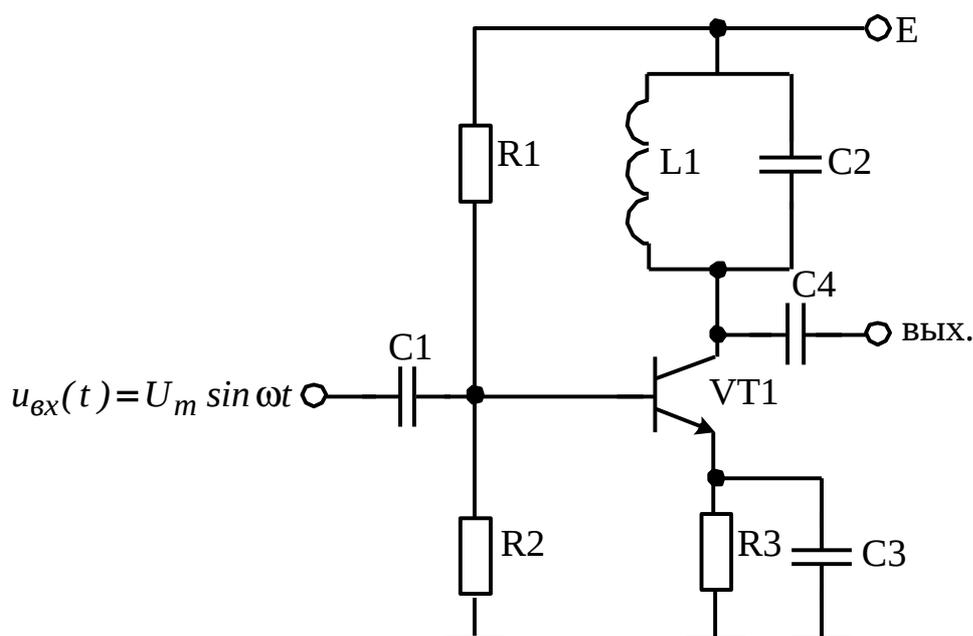


Рис. 2.1. Схема избирательного усилителя

*Решение.* Примерами физико-технических параметров избирательного усилителя являются: для конденсаторов – относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  диэлектрика, площадь  $S_{\text{пл}}$  пластин, расстояние  $d$  между пластинами; для резисторов – удельное сопротивление  $\rho$  проводника, длина  $l$  проводника, площадь  $S$  поперечного сечения проводника; для дросселя – относительная магнитная проницаемость  $\mu$  материала сердечника; площадь  $S_c$  поперечного сечения сердечника; средняя длина  $l_c$  линий магнитной индукции; число витков  $W$  обмотки; для биполярного транзистора – толщина  $w_a$  базы; диффузионная длина  $L_a$  неосновных носителей заряда в базе и диффузионная длина  $L_y$  неосновных носителей заряда в области эмиттера; удельная проводимость  $\sigma_a$  области базы и  $\sigma_y$  области эмиттера; концентрация примесей в базе  $N_a$ .

К электрическим параметрам избирательного усилителя относятся: для конденсаторов – емкость  $\tilde{N} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S_{\text{пл}}}{d}$ ; для резисторов – сопротивление  $R = \rho \frac{l}{S}$ ; для дросселя – индуктивность  $L = \frac{\mu_0 \mu W^2 S_c}{l_c}$ ; для биполярного транзистора – коэффициент передачи тока эмиттера  $\alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{w_a}{L_a} \right)^2 - \frac{\sigma_a w_a}{\sigma_y L_y}$ ; дифференциальное сопротивление обратносмещенного коллекторного перехода

$$r_{\text{е}} = \sqrt{\frac{2q_e N_a}{\epsilon \epsilon_0} \frac{L_a^2}{w_a} \frac{\sqrt{U_{\text{е.а.а.д}}}}{\gamma l_y}}.$$

Внешними параметрами для избирательного усилителя являются амплитуда  $U_m$  и круговая частота  $\omega$  входного воздействия; напряжение  $E$  источника питания; сопротивление  $R_1$  нагрузки.

К фазовым переменным усилителя относятся токи и напряжения всех ветвей схемы, контурные токи, узловые потенциалы и т.д.

Примером схемных параметров усилителя является коэффициент пере-

дачи по напряжению  $k_U(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}(p)}{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}$ , входное  $Z_{\hat{a}\hat{o}}(p) = \frac{U_{\hat{a}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{o}}(p)}$  и выходное

$Z_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}(p) = -\frac{U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{o}\hat{o}}(p)}{I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}^{\hat{e}\hat{c}}(p)}$  сопротивления.

**Задание 2.** Сформировать топологические и функциональные математические модели Г-образного LC-фильтра.

*Решение.* На рис. 2.2,а представлена схема замещения фильтра, которая отражает состав элементов и связи между ними, то есть представляет собой топологическую модель.

Если отвлечься от особенностей отдельных компонентов фильтра, то его структурные свойства можно представить топологической моделью другого вида – полюсным графом (рис. 2.2,б), в котором узлам схемы соответствуют вершины, изображенные точками, а ветвям схемы – ребра графа, изображенные непрерывными линиями.

Структурные особенности схемы могут также быть представлены топологической моделью на алгебраическом языке – матрицей инциденций (рис. 2.2,в). Строки матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы замещения. Элементы «1» каждой строки указывают на номера ветвей, токи которых направлены от соответствующего узла, а элементы «-1» – на номера ветвей, токи которых направлены к узлу.

На рис. 2.2,г представлена функциональная математическая модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

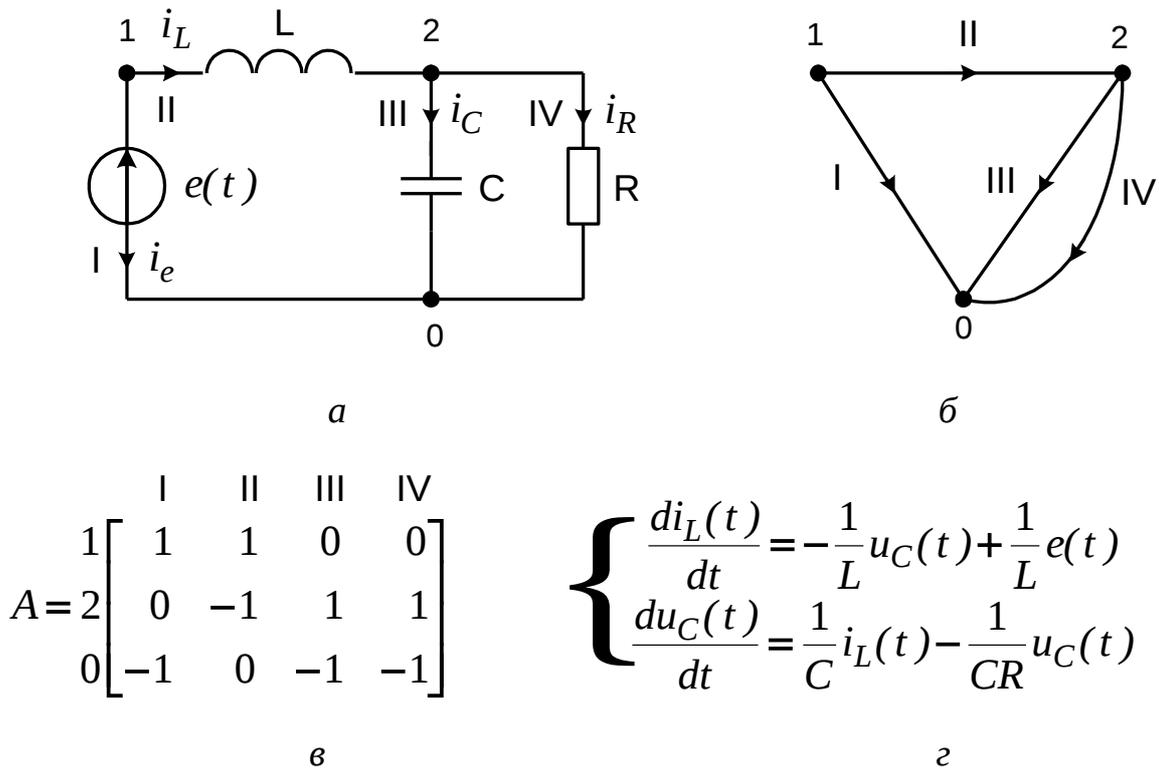


Рис. 2.2. Математические модели Г-образного  $LC$ -фильтра:  
*a* – схема замещения; *б* – полюсный граф; *в* – матрица инциденций;  
*г* – система обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Задание 3.** Сформировать теоретическую и формальную модели полевого транзистора с управляющим  $p$ - $n$ -переходом, работающего в малосигнальном режиме в области насыщения.

*Решение.* Для полевого транзистора с управляющим  $p$ - $n$ -переходом, работающего в малосигнальном режиме в области насыщения, справедлива теоретическая модель в виде системы уравнений, связывающих малые приращения токов и напряжений:

$$\begin{cases} \tilde{i}_{\zeta} = (C_{\zeta\grave{e}} + C_{\zeta\grave{n}}) \frac{d\tilde{u}_{\zeta\grave{e}}}{dt} - C_{\zeta\grave{n}} \frac{d\tilde{u}_{\grave{n}\grave{e}}}{dt}, \\ \tilde{i}_{\grave{n}} = S\tilde{u}_{\zeta\grave{e}} + \frac{1}{R_{\grave{n}\grave{e}}} \tilde{u}_{\grave{n}\grave{e}} - C_{\zeta\grave{n}} \frac{d\tilde{u}_{\zeta\grave{e}}}{dt} + C_{\zeta\grave{n}} \frac{d\tilde{u}_{\grave{n}\grave{e}}}{dt}. \end{cases}$$

Коэффициентами системы уравнений являются физические величины:  $\tilde{N}_{\zeta\grave{e}}$ ,  $\tilde{N}_{\zeta\grave{n}}$  – входная и проходная емкости полевого транзистора;  $R_{\grave{n}\grave{e}}$  – дифференциальное сопротивление канала;  $S$  – дифференциальная крутизна стокозатворной характеристики.

Примером формальной математической модели полевого транзистора может служить система операторных уравнений в системе  $U$ -параметров:

$$\begin{cases} I_{\zeta}(p) = y_{11}(p)U_{\zeta\grave{e}}(p) + y_{12}(p)U_{\grave{n}\grave{e}}(p), \\ I_{\zeta}(p) = y_{21}(p)U_{\zeta\grave{e}}(p) + y_{22}(p)U_{\grave{n}\grave{e}}(p). \end{cases}$$

Данная модель является формальной, поскольку  $U$ -параметры определяются из рассмотрения транзистора как «черного ящика» в режимах короткого замыкания для переменных сигналов на входе и на выходе, то есть при постоянном входном или выходном напряжениях.

**Задание 4.** Сформировать полную модель и макромодель  $\Gamma$ -образного  $LC$ -фильтра, используя его эквивалентную схему (рис. 2.3), составленную с учетом омического сопротивления  $r_L$  дросселя и сопротивления утечки  $R_C$  конденсатора.

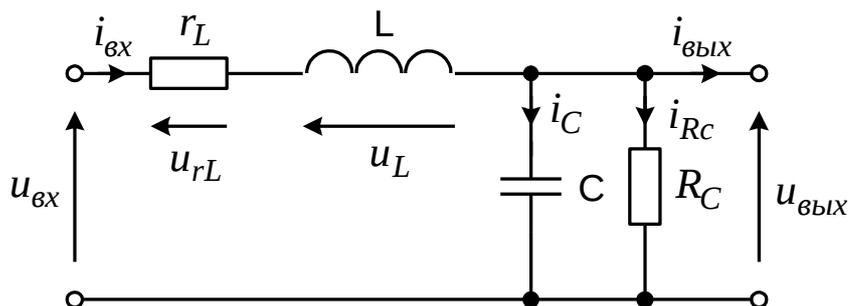


Рис. 2.3. Эквивалентная схема Г-образного LC-фильтра

*Решение.* Распределим фазовые переменные фильтра на множества входных, выходных и внутренних переменных.

К входным фазовым переменным следует отнести входное напряжение и выходной ток:

$$U = \begin{bmatrix} U_{\hat{a}\hat{o}}(p) \\ I_{\hat{a}\hat{u}}(p) \end{bmatrix}.$$

Выходными фазовыми переменными при этом будут выходной напряжение и входной ток:

$$Z = \begin{bmatrix} U_{\hat{u}\hat{o}}(p) \\ I_{\hat{a}\hat{o}}(p) \end{bmatrix},$$

а оставшиеся фазовые переменные являются внутренними

$$V = \begin{bmatrix} U_{r_L}(p) \\ U_L(p) \\ I_C(p) \\ I_{R_C}(p) \end{bmatrix}.$$

В качестве моделей отдельных компонентов эквивалентной схемы рис.2.3 выступают компонентные уравнения:  $U_{r_L}(p) = r_L I_{\hat{a}\hat{o}}(p)$ ,

$$U_L(p) = pL I_{\hat{a}\hat{o}}(p), \quad I_C(p) = pC U_{\hat{u}\hat{o}}(p), \quad I_{R_C}(p) = \frac{1}{R_C} U_{\hat{u}\hat{o}}(p).$$

Межэлементные связи выражаются уравнениями по законам Кирхгофа:

$$U_{r_L}(p) + U_L(p) + U_{\hat{u}\hat{o}}(p) = U_{\hat{a}\hat{o}}(p),$$

$$I_C(p) + I_{R_C}(p) + I_{\hat{u}\hat{o}}(p) = I_{\hat{a}\hat{o}}(p).$$

Представляя операторные уравнения в матричной форме, получаем полную модель фильтра в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{r_L} \\ U_L \\ I_C \\ I_{R_C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\hat{a}\hat{o}} \\ I_{\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r_L \\ 0 & -\rho L \\ -\rho C & 0 \\ -\frac{1}{R_C} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ I_{\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\Psi(V, U, Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} V + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 & -r_L \\ 0 & -\rho L \\ -\rho C & 0 \\ -\frac{1}{R_C} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Z,$$

то есть  $\Psi(V, U, Z) = 0$ .

Исключив из уравнений полной модели внутренние фазовые переменные, получим макро модель

$$\begin{aligned} (r_L + \rho L) I_{\hat{a}\hat{o}}(\rho) + U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}(\rho) &= 0, \\ \left( \rho C + \frac{1}{R_C} \right) U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}(\rho) + I_{\hat{a}\hat{o}}(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

которая в матричной форме имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_L + \rho L \\ \rho C + \frac{1}{R_C} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \\ I_{\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\hat{a}\hat{o}} \\ I_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\varphi(Z, U) = \begin{bmatrix} 1 & r_L + \rho L \\ \rho C + \frac{1}{R_C} & -1 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U,$$

то есть  $\varphi(Z, U) = 0$ .

**Задание 5.** Сформировать инвариантную, аналитическую, алгоритмическую и графическую модель Г-образного LC-фильтра, схема которого приведена на рис. 2.4.

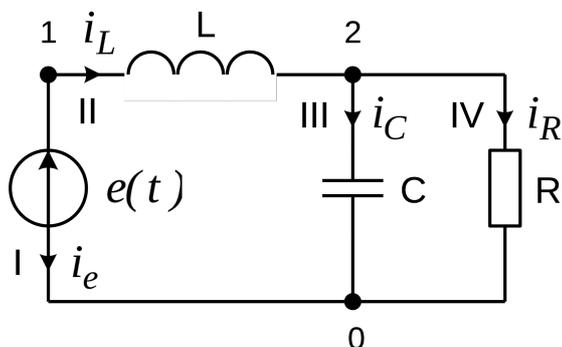


Рис. 2.4. Схема замещения Г-образного LC-фильтра

*Решение.* Примером инвариантной математической модели является система неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t).$$

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений представляет собой пример аналитической модели Г-образного LC-фильтра:

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t}{L} \\ \frac{t}{C} & -\frac{t}{RC} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e(\tau) \exp \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t-\tau}{L} \\ \frac{t-\tau}{C} & -\frac{t-\tau}{RC} \end{bmatrix} d\tau.$$

В качестве алгоритмической математической модели Г-образного LC-фильтра можно привести систему разностных уравнений, соответствующих интегрированию системы дифференциальных уравнений явным численным методом Эйлера:

$$\begin{bmatrix} i_{L,n+1} \\ u_{C,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & -\frac{h}{L} \\ \frac{h}{C} & h\left(1 - \frac{1}{RC}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L,n} \\ u_{C,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e_n.$$

Графической моделью Г-образного LC-фильтра может служить обобщенный сигнальный U-граф, приведенный на рис. 2.4.

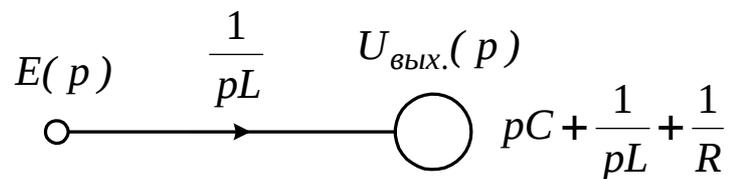


Рис. 2.4. Графическая модель Г-образного LC-фильтра

**Задание 6.** Рассмотрим статическую и динамическую модели инвертирующего усилителя постоянного тока на операционном усилителе, схема которого приведена на рис. 2.5

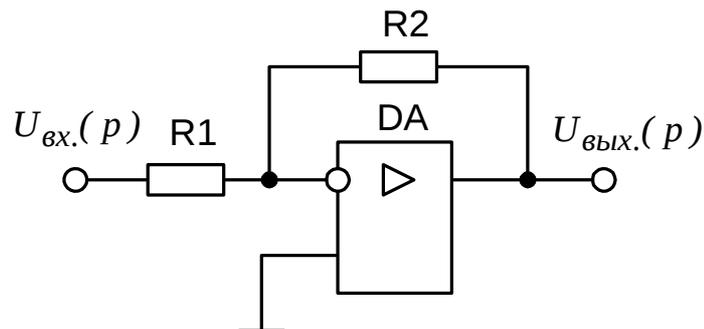


Рис. 2.5. Схема инвертирующего усилителя постоянного тока

*Решение.* Примером статической модели является выражение для коэффициента передачи по напряжению

$$k_U = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{1}{k_{\dot{U}} \gamma}},$$

где  $\gamma = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  – коэффициент передачи цепи отрицательной обратной связи;

$k_{\dot{U}}$  — коэффициент усиления операционного усилителя.

Инерционные свойства операционного усилителя в первом приближении можно учесть, представив коэффициент усиления операторным изображением вида

$k_{\dot{U}}(p) = \frac{k_{\dot{U}}}{1 + p\tau_{\dot{U}}}$ , где  $\tau_{\dot{U}}$  – постоянная времени операционного усилителя.

Тогда динамическая модель инвертирующего усилителя постоянного тока представляет собой операторное изображение коэффициента передачи по напряжению

$$k_U(p) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{1}{k_{\dot{U}} \gamma}} \cdot \frac{1}{1 + p \frac{\tau_{\dot{U}}}{1 + k_{\dot{U}} \gamma}}.$$

## 2.2 Математическое описание электронных схем

**Задание 7.** Сформировать схему замещения по переменному току двухкаскадного усилителя низкой частоты на биполярных транзисторах с общей отрицательной обратной связью по постоянному току (рис. 2.6).

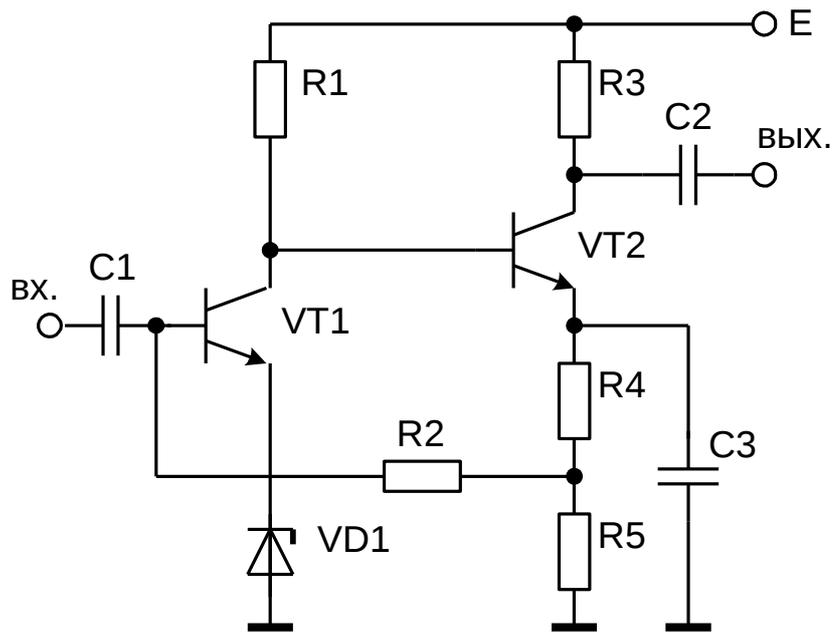


Рис. 2.6. Схема двухкаскадного усилителя низкой частоты на биполярных транзисторах с общей отрицательной обратной связью по постоянному току

*Решение.* При составлении схемы замещения по переменному току исключаем из принципиальной схемы источник питания  $E$  (так как это источник постоянного напряжения) путем закорачивания. Источник входного сигнала в схеме замещения по переменному току представлен идеальным источником переменной ЭДС  $e_c$  с последовательным внутренним сопротивлением  $r_c$ , а нагрузка – ветвью с сопротивлением  $Z_n$ . В схеме замещения усилителя по переменному току для полного диапазона частот (рис. 2.7) учтены все реактивные элементы. Активные электронные компоненты (транзисторы  $VT1$ ,  $VT2$  и стабилитрон  $VD1$ ) представлены соответствующими условными графическими обозначениями. Для устранения пересечения ветвей, содержащих резистор  $R2$  и стабилитрон  $VD1$ , ветвь источника сигнала сделана внутренней ветвью.

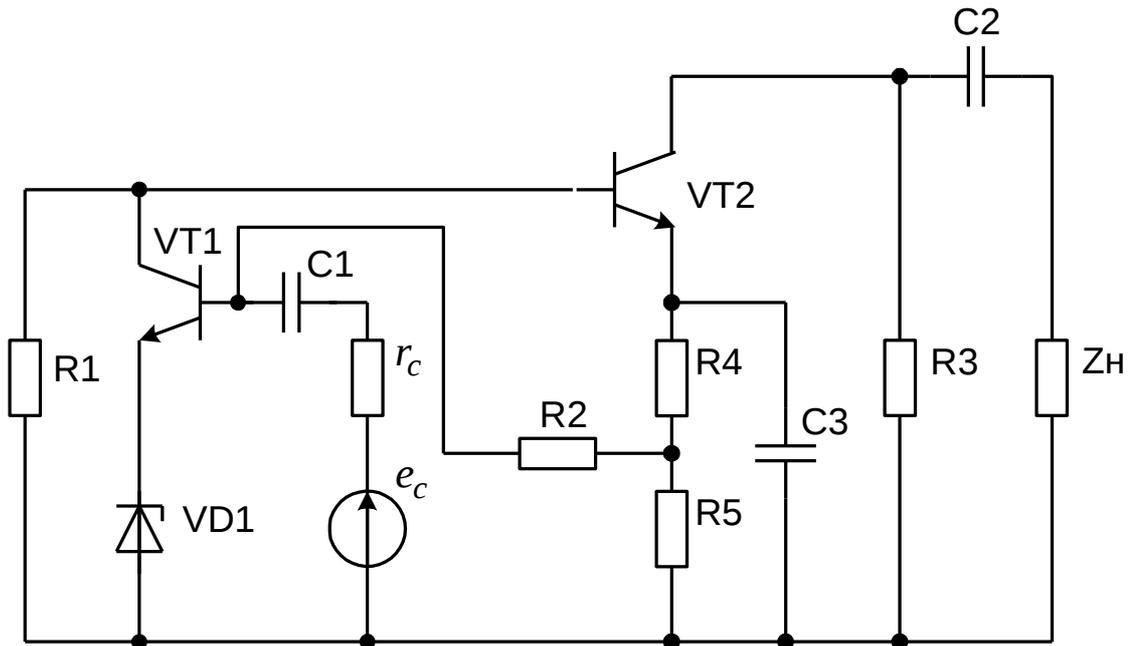


Рис. 2.7. Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току для полного диапазона частот

Из назначения конденсаторов  $C1$ ,  $C2$  и  $C3$  следует, что они должны иметь малое сопротивление переменному току в области рабочих частот. В связи с этим, в схеме замещения по переменному току для рабочего диапазона частот (рис. 2.8) ветви, содержащие эти конденсаторы, можно закоротить. При закорачивании конденсатора  $C3$  ветви с сопротивлениями  $R2$ ,  $R4$ ,  $R5$  образуют одну эквивалентную ветвь с сопротивлением

$$R_{\dot{y}} = R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}.$$

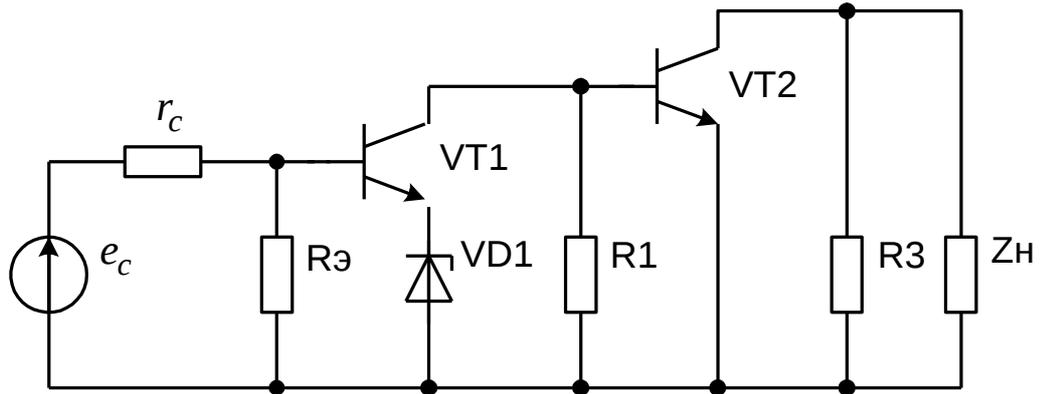


Рис. 2.8. Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току для рабочего диапазона частот

**Задание 8.** Определить число вырожденных сечений, число невырожденных сечений, число вырожденных циклов и число невырожденных циклов полюсного графа.

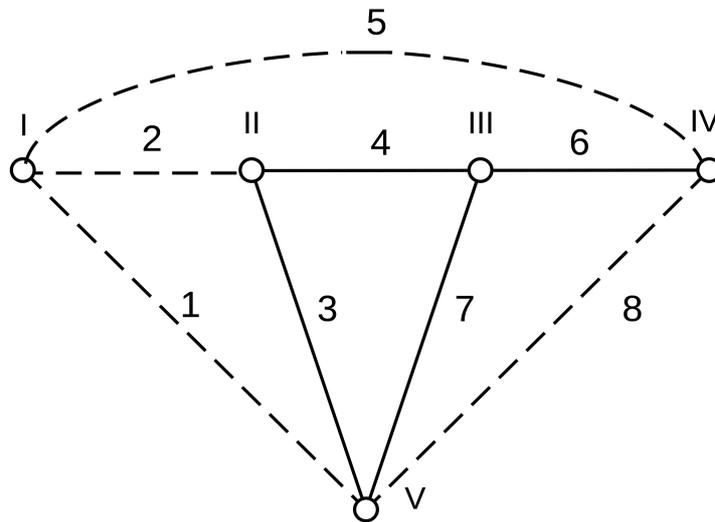


Рис. 2.9. Полюсный граф

*Решение.* Число  $\nu_a$  вырожденных сечений, число  $\nu'$  невырожденных сечений, число  $\sigma_a$  вырожденных циклов и число  $\sigma'$  невырожденных циклов

определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} v_{\hat{a}} &= n_y - n, & v' &= v - n_y, \\ \sigma_{\hat{a}} &= \ell_y - v + n_y, & \sigma' &= \ell_z - n_y + n, \end{aligned}$$

где  $n$  – количество компонентов исходного графа;  $n_y$  – количество компонентов графа, полученного из исходного путем размыкания всех Z-дуг;  $v$  – количество вершин исходного графа;  $\ell_y$  и  $\ell_z$  – количество Y- и Z-дуг графа соответственно.

Граф, полученный из исходного путем размыкания всех z-дуг, имеет вид

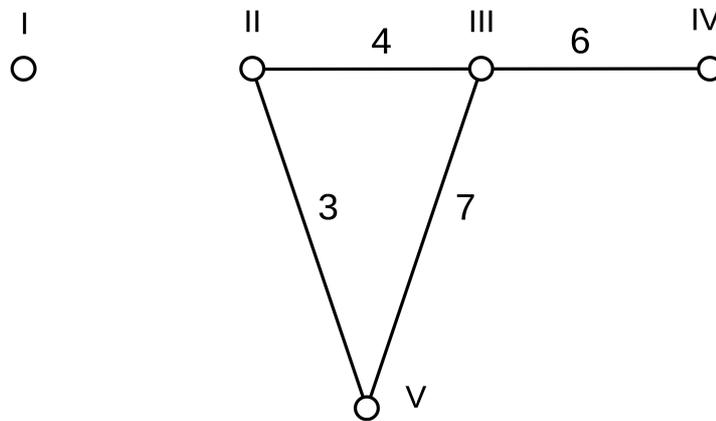


Рис. 2.10. Полюсный y-граф

Таким образом,  $n = 1$  (исходный граф связный),  $n_y = 2$  (граф рис.2.10 содержит два компонента),  $v = 5$ ,  $\ell_y = 4$ ,  $\ell_z = 4$  и тогда  $v_{\hat{a}} = 2 - 1 = 1$ ,  $v' = 5 - 2 = 3$ ,  $\sigma_{\hat{a}} = 4 - 5 + 2 = 1$ ,  $\sigma' = 4 - 2 + 1 = 3$ .

**Задание 9.** Сформировать структурную матрицу и сокращенную структурную матрицу по полюсному графу

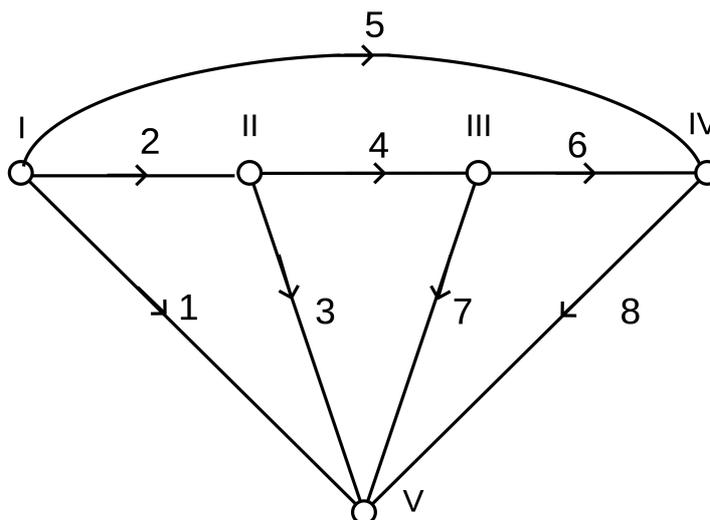


Рис. 2.11. Полюсный граф

*Решение.* Поскольку строки структурной матрицы соответствуют вершинам полюсного графа, а столбцы – его дугам, структурная матрица рассматриваемого графа имеет размерность  $5 \times 8$ . Используя правила определения элементов структурной матрицы [], получим структурную матрицу

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Для получения сокращенной структурной матрицы следует из структурной матрицы удалить произвольную строку. Удаляя из структурной матрицы строку V, получим сокращенную структурную матрицу

1 2 3 4 5 6 7 8

$$A = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\ \text{I} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{III} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{IV} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

**Задание 10.** Сформировать матрицу главных сечений по полюсному графу.

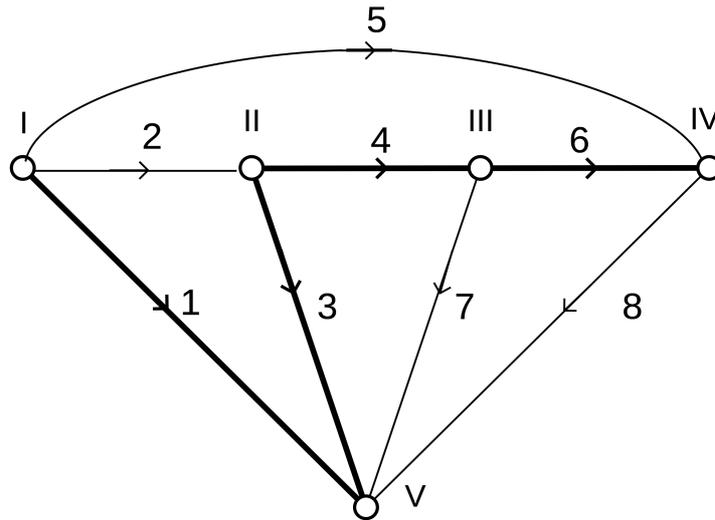


Рис. 2.12. Полюсный граф с покрывающим деревом

*Решение.* В системе главных сечений каждое сечение должно быть инцидентно только одному ребру покрывающего дерева. Система главных сечений представлена на рис. 2.13, причем обозначение сечения соответствует обозначению ребра покрывающего дерева.

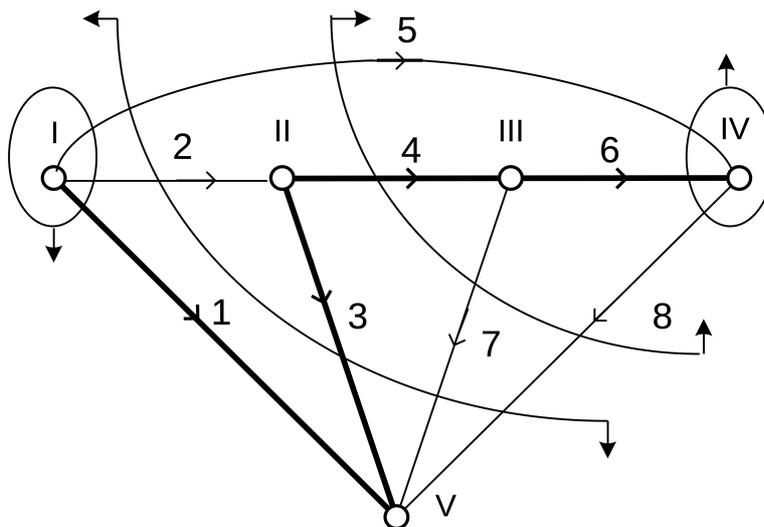


Рис. 2.13. Система главных сечений

Поскольку строки матрицы главных сечений соответствуют сечениям полюсного графа, а столбцы – его дугам, матрица главных сечений рассматриваемого графа имеет размерность  $\nu \times \ell = 4 \times 8$ . Используя правила определения элементов  $\pi_{ij}$  матрицы главных сечений [], получим матрицу вида

$$\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Располагая в матрице главных сечений сначала столбцы, соответствующие всем ребрам дерева, а затем столбцы, соответствующие хордам, приведем матрицу к канонической форме  $\Pi = [\bar{1}, \pi]$ :

$$\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где  $\bar{1} = \begin{matrix} & 1 & 3 & 4 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$  – единичная матрица 4-го порядка,

а матрица главных сечений для хорд  $\pi = \begin{matrix} & 2 & 5 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$ .

**Задание 11.** Сформировать матрицу главных циклов по полюсному графу.

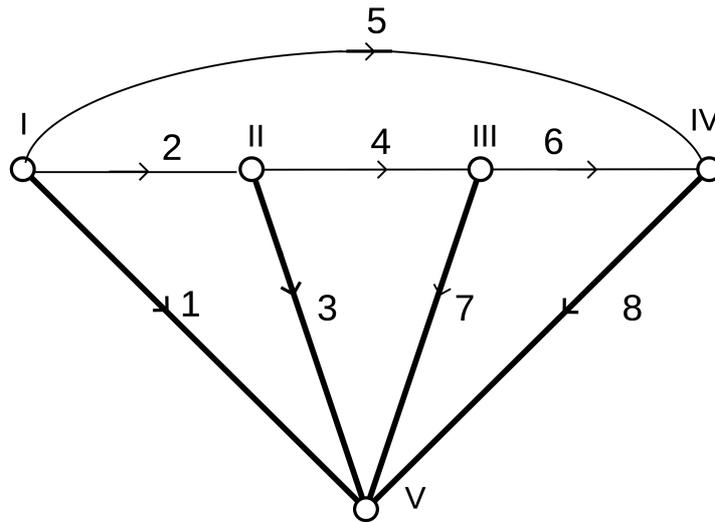


Рис. 2.14. Полюсный граф с покрывающим деревом

*Решение.* В системе главных циклов каждый цикл должен содержать только одну хорду. Система главных циклов представлена на рис. 2.15, причем обозначение цикла соответствует обозначению хорды.

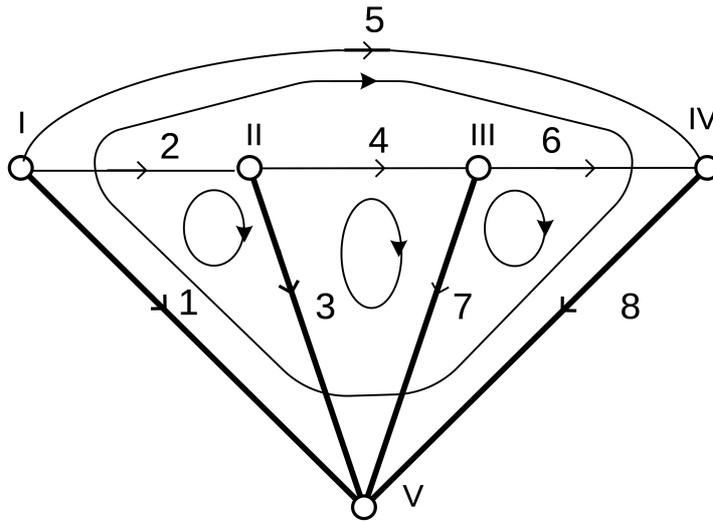


Рис. 2.15. Система главных циклов

Поскольку строки матрицы главных циклов соответствуют циклам плюсного графа, а столбцы – его дугам, матрица главных циклов рассматриваемого графа имеет размерность  $\sigma \times \ell = 4 \times 8$ . Используя правила определения элементов  $\rho_{ij}$  матрицы главных циклов [], получим матрицу вида

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Располагая в матрице главных циклов сначала столбцы, соответствующие всем ребрам дерева, а затем столбцы, соответствующие хордам, приведем матрицу к канонической форме  $P = [\rho, \bar{1}]$ :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{matrix}$$

$$\text{где } \bar{1} = \begin{matrix} & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ — единичная матрица 4-го порядка,}$$

$$\text{а матрица главных циклов для ребер дерева } \rho = \begin{matrix} & 1 & 3 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

**Задание 12.** Сформировать матрицу главных сечений для хорд, соответствующую матрице главных циклов для ребер дерева

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Используя связь топологических матриц [], определим матрица главных сечений для хорд:

$$\pi = -\rho^T = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Задание 13.** Сформировать матрицу главных циклов для ребер дерева, соответствующую матрице главных сечений для хорд

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Используя связь топологических матриц [], определим матрица главных циклов для ребер дерева:

$$\rho = -\pi^T = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Задание 14.** Получить соотношение между структурными элементами топологического графа, при котором число независимых сечений совпадает с числом независимых циклов.

*Решение.* Количество  $\nu$  независимых сечений и количество  $\sigma$  независимых циклов определяются выражениями:

$$\nu = \nu - n, \quad \sigma = \ell - \nu + n.$$

Приравнивая указанные выражения, находим  $\nu - n = \ell - \nu + n$ , откуда

$$2\nu - 2n - \ell = 0.$$

**Задание 16.** Сформировать укороченную матрицу сопротивлений фильтра верхних частот (рис. 2.16) методом эквивалентных схем в матричной форме.

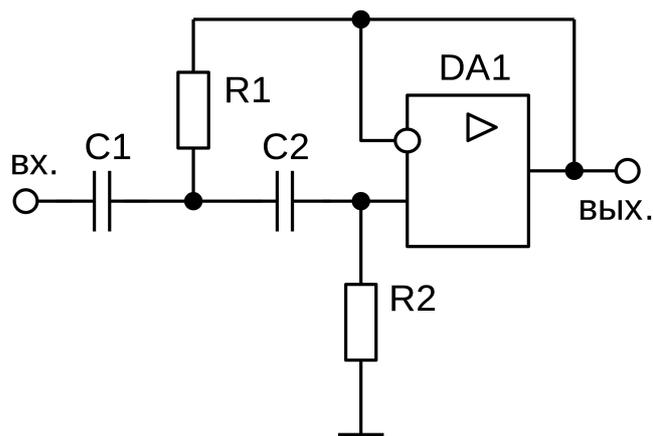


Рис. 2.16. Схема фильтра верхних частот

*Решение.* Поскольку для формирования укороченной матрицы сопро-

тивлений используется контурный координатный базис, в котором все схемные компоненты должны относиться к  $Z$ -компонентам, источник входного сигнала представляем ветвью, содержащей последовательно включенные идеальный источник переменной ЭДС  $e_c$  и внутреннее сопротивление  $r_c$ .

В схеме замещения для полного диапазона частот учитываем все реактивные компоненты исходной схемы, которые представляем операторными сопротивлениями  $Z_{C1} = \frac{1}{pC1}$  и  $Z_{C2} = \frac{1}{pC2}$ .

Нагрузка в схеме замещения по переменному току представляем ветвью с сопротивлением  $Z_1$ .

Схема замещения по переменному току для полного диапазона частот представлена на рис. 2.17.

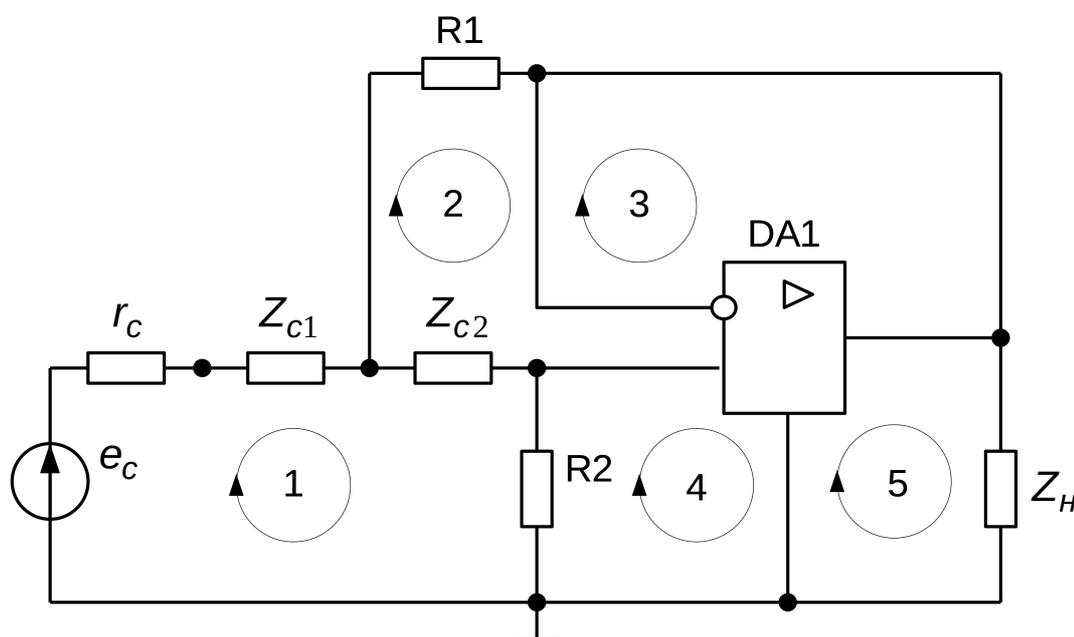


Рис. 2.17. Схема замещения фильтра верхних частот по переменному току для полного диапазона частот

В соответствии с алгоритмом метода эквивалентных схем замещаем операционный усилитель линейной малосигнальной эквивалентной схемой (рис.2.18).

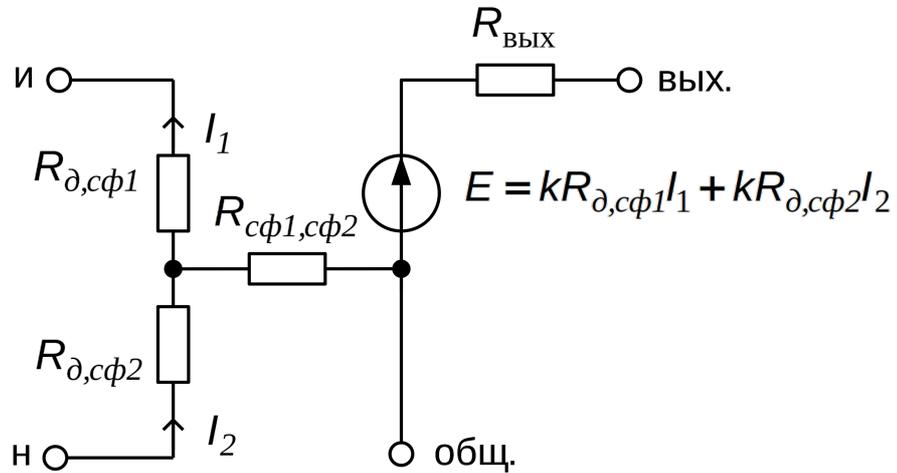


Рис 2.18. Эквивалентная схема операционного усилителя с ИНУТ

Схема замещения фильтра верхних частот, полученная замещением операционного усилителя эквивалентной схемой рис. 2.18, представлена на рис. 2.19.

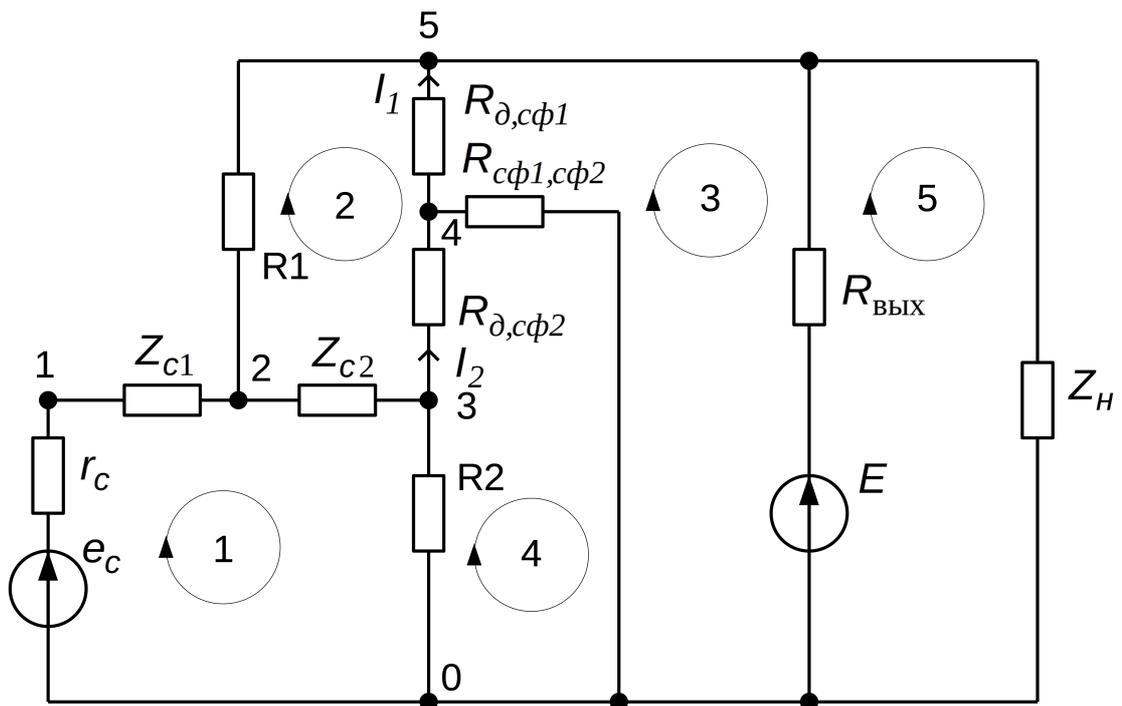


Рис. 2.19. Схема замещения фильтра верхних частот

Схема замещения рис. 2.19 содержит  $\ell=10$  ветвей и  $\nu=6$  узлов, поэтому система независимых циклов включает  $\sigma = \ell - \nu + 1 = 10 - 6 + 1 = 5$  циклов. Поскольку схема рис. 2.19 является планарной, для упрощения формирования матрично-векторных параметров выберем каноническую систему циклов.

Так как схема замещения рис. 2.19 содержит 5 независимых циклов, порядок укороченной матрицы сопротивлений равен 5.

При заполнении матрицы собственные сопротивления циклов располагают на главной диагонали, взаимные сопротивления циклов включают в состав соответствующих недиагональных элементов с противоположными знаками.

Так как в схеме рис. 2.19 зависимый источник входит в циклы 3 и 5, управляющая ветвь с током  $I_1$  – в циклы 2 и 3, а управляющая ветвь с током  $I_2$  – в циклы 2 и 4, то управляющее сопротивление  $kR_{\bar{a}, \hat{n}01}$  добавляется к элементам укороченной матрицы сопротивлений, расположенным на пересечении 3-ей и 5-ой строк и 2-го и 3-го столбцов, а управляющее сопротивление  $kR_{\bar{a}, \hat{n}02}$  добавляется к элементам укороченной матрицы сопротивлений, расположенным на пересечении 3-ей и 5-ой строк и 2-го и 4-го столбцов.

Направление зависимого источника совпадает с положительным направлением обхода цикла 5 и противоположно положительному направлению обхода цикла 3. Управляющий ток  $I_1$  направлен против положительного направления обхода цикла 2 и по направлению обхода цикла 3. Следовательно, при добавлении к элементам матрицы  $Z_{33}$  и  $Z_{52}$  знак управляющего сопротивления  $kR_{\bar{a}, \hat{n}01}$  не изменяется, а при добавлении к элементам  $Z_{32}$  и  $Z_{53}$  знак управляющего сопротивления  $kR_{\bar{a}, \hat{n}01}$  изменяется на противоположный. Управляющий ток  $I_2$  направлен против положительного направления

обхода цикла 2 и по направлению обхода цикла 4. Следовательно, при добавлении к элементам матрицы  $Z_{34}$  и  $Z_{52}$  знак управляющего сопротивления  $kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$  не изменяется, а при добавлении к элементам  $Z_{34}$  и  $Z_{52}$  знак управляющего сопротивления  $kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$  изменяется на противоположный.

Укороченная матрица сопротивлений:

	1	2	3	4	5
1	$Z_{c1} + Z_{c2} + R_2$	$-Z_{c2}$	0	$-R_2$	0
2	$-Z_{c2}$	$R_1 + Z_{c2} + R_{\dot{a}, \dot{n}1} + R_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$-R_{\dot{a}, \dot{n}1}$	$-R_{\dot{a}, \dot{n}2}$	0
3	0	$-R_{\dot{a}, \dot{n}1} - kR_{\dot{a}, \dot{n}1} - kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$R_{\dot{a}, \dot{n}1} + R_{c\dot{1}, \dot{n}2} + R_{\dot{a}\dot{u}\dot{o}} + kR_{\dot{a}, \dot{n}1}$	$-R_{c\dot{1}, \dot{n}2} + kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$-R_{\dot{a}\dot{u}\dot{o}}$
4	$-R_2$	$-R_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$-R_{c\dot{1}, \dot{n}2}$	$R_2 + R_{\dot{a}, \dot{n}2} + R_{c\dot{1}, \dot{n}2}$	0
5	0	$kR_{\dot{a}, \dot{n}1} + kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$-kR_{\dot{a}, \dot{n}1} - R_{\dot{a}\dot{u}\dot{o}}$	$-kR_{\dot{a}, \dot{n}2}$	$R_{\dot{a}\dot{u}\dot{o}}$

$Z^* =$

**Задание 17.** Сформировать укороченную матрицу проводимостей усилителя низкой частоты (рис. 2.20) методом эквивалентных схем в матричной форме

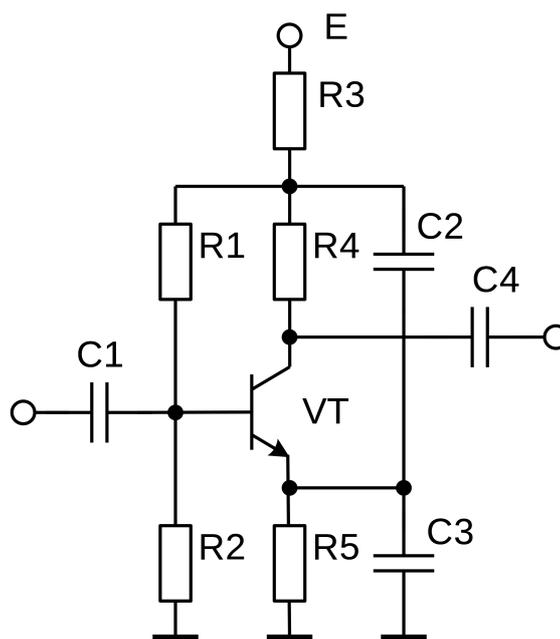


Рис. 2.20. Схема усилителя низкой частоты

*Решение.* При составлении схемы замещения по переменному току из принципиальной схемы рис. 2.20 исключаем путем закорачивания источник питания  $E$ . Поскольку для формирования укороченной матрицы проводимостей используется узловой координатный базис, в котором все схемные компоненты должны относиться к  $U$ -компонентам, источник входного сигнала представляем параллельно включенными идеальным источником переменного тока  $J_c$  и внутренней проводимостью  $g_c$ . В схеме замещения по переменному току для полного диапазона частот учитываем все реактивные компоненты исходной схемы. Конденсатор  $C3$  и резистор  $R5$  представлены одной ветвью с эквивалентной проводимостью  $Y_y = \frac{1}{R5} + pC3$ . Нагрузку в схеме замещения по переменному току представим ветвью с проводимостью  $Y_1$ .

Схема замещения по переменному току для полного диапазона частот представлена на рис. 2.21, где  $g_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $g_2 = \frac{1}{R_2}$ ,  $g_4 = \frac{1}{R_4}$ ,  $Y_{C1} = pC_1$ ,  $Y_{C2} = pC_2$

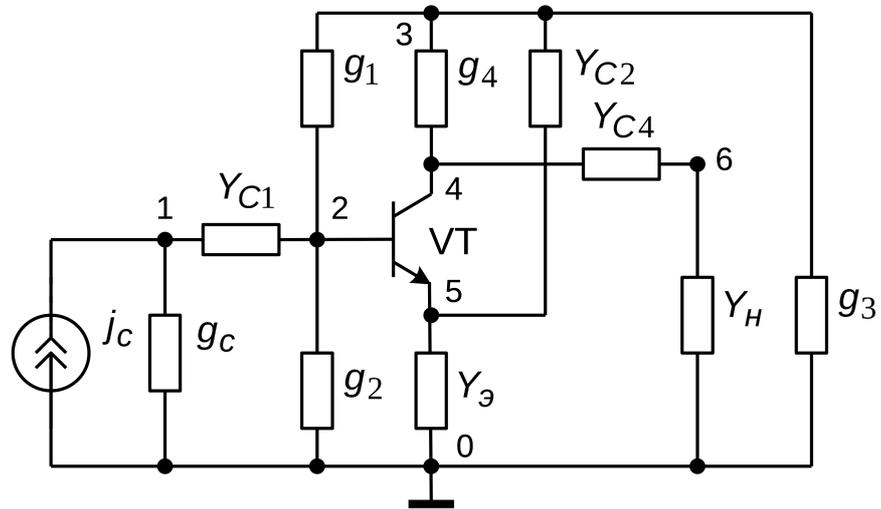


Рис. 2.21. Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току для полного диапазона частот

При формировании математической модели в узловом координатном базисе в качестве эквивалентной схемы биполярного транзистора целесообразно использовать эквивалентную схему в  $Y$ -параметрах (рис. 2.22), схемные компоненты которой являются  $Y$ -компонентами.

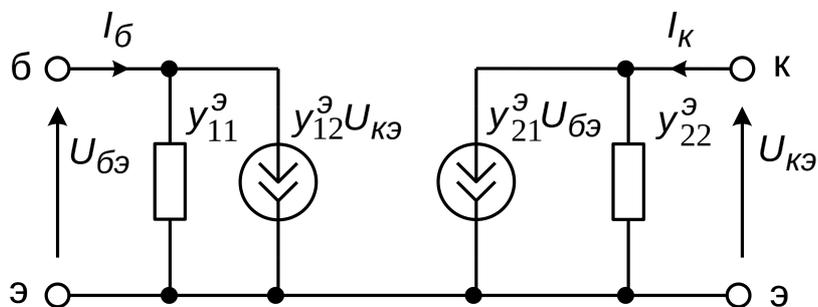


Рис. 2.22. Эквивалентная схема биполярного транзистора, включенного с общим эмиттером, в  $Y$ -параметрах

Схема замещения усилителя низкой частоты, полученная замещением биполярного транзистора эквивалентной схемой рис. 2.22, представлена на рис. 2.23.

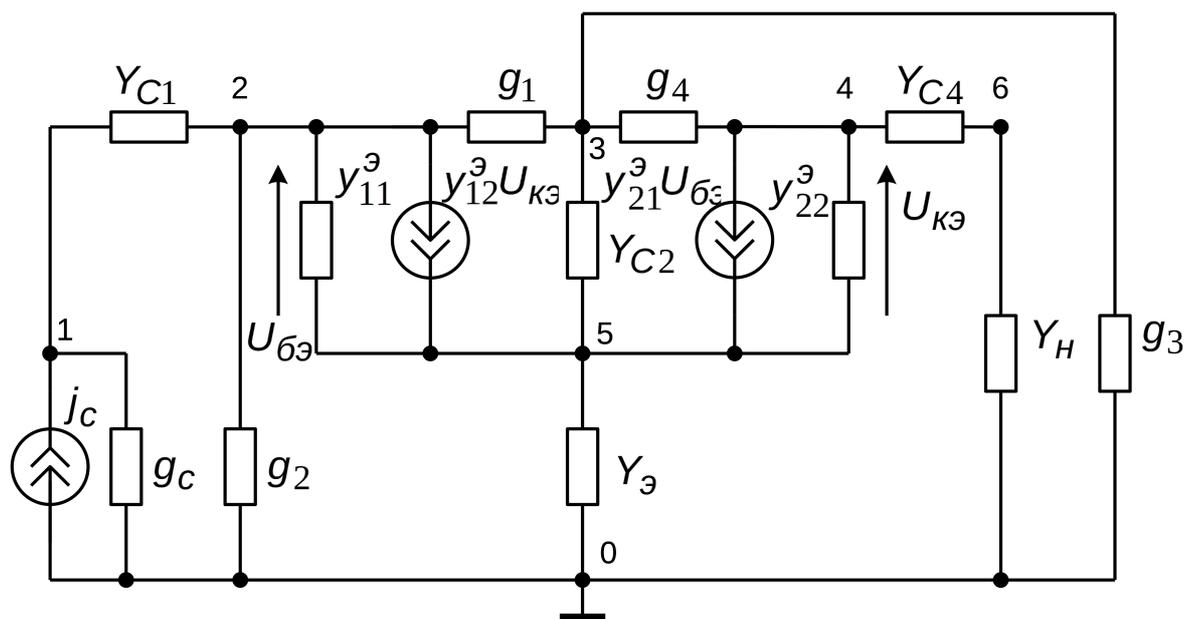


Рис. 2.23. Схема замещения усилителя низкой частоты

Схема замещения рис. 2.23 содержит  $\nu = 7$  узлов, поэтому система независимых сечений содержит  $\nu = \nu - 1 = 7 - 1 = 6$  сечений. Выберем каноническую систему сечений, для чего достаточно пронумеровать узлы схемы и один из них выбрать в качестве базисного. При этом инцидентность сечений и ветвей схемы эквивалентна инцидентности узлов и полюсов компонентов.

При заполнении матрицы собственные проводимости сечений (узлов) располагают на главной диагонали, взаимные проводимости сечений (узлов) включают в состав соответствующих недиагональных элементов с противоположными знаками.

Схема замещения рис. 2.23 содержит два зависимых источника тока, управляемых напряжением.

Зависимый источник тока  $\gamma_{12}^{\dot{y}} U_{\dot{e}\dot{y}}$  включен между узлами 2 и 5, а его управляющее напряжение  $U_{\dot{e}\dot{y}}$  между узлами 4 и 5, поэтому управляющая проводимость  $\gamma_{12}^{\dot{y}}$  добавляется к элементам укороченной матрицы проводимостей, расположенным на пересечении 2-ой и 5-ой строк и 4-го и 5-го столбцов. Зависимый источник  $\gamma_{12}^{\dot{y}} U_{\dot{e}\dot{y}}$  направлен от узла 2 к узлу 5, а управляющее напряжение  $U_{\dot{e}\dot{y}}$  – от узла 5 к узлу 4. Следовательно, при добавлении к элементам матрицы  $Y_{24}$  и  $Y_{55}$  знак управляющей проводимости  $\gamma_{12}^{\dot{y}}$  не изменяется, а при добавлении к элементам матрицы  $Y_{25}$  и  $Y_{54}$  – изменяется на противоположный.

Зависимый источник тока  $\gamma_{21}^{\dot{y}} U_{\dot{a}\dot{y}}$  включен между узлами 4 и 5, а его управляющее напряжение  $U_{\dot{a}\dot{y}}$  между узлами 2 и 5, поэтому управляющая проводимость  $\gamma_{21}^{\dot{y}}$  добавляется к элементам укороченной матрицы проводимостей, расположенным на пересечении 4-ой и 5-ой строк и 2-го и 5-го столбцов. Зависимый источник  $\gamma_{21}^{\dot{y}} U_{\dot{a}\dot{y}}$  направлен от узла 4 к узлу 5, а управляющее напряжение  $U_{\dot{a}\dot{y}}$  – от узла 5 к узлу 2. Следовательно, при добавлении к элементам матрицы  $Y_{42}$  и  $Y_{55}$  знак управляющей проводимости  $\gamma_{21}^{\dot{y}}$  не изменяется, а при добавлении к элементам матрицы  $Y_{52}$  и  $Y_{45}$  – изменяется на противоположный знак.

Укороченная матрица проводимостей:

1	1	$Y_{C1}$	$-Y_{C1}$	0	0	0	0
2	2	$-Y_{C1}$	$Y_{C1} + g_1 +$ $+y_{11}^{\dot{y}} + g_2$	$-g_1$	$y_{12}^{\dot{y}}$	$-y_{11}^{\dot{y}} - y_{12}^{\dot{y}}$	0
3	3	0	$-g_1$	$g_1 + g_3 +$ $+g_4 +$ $Y_{C2}$	$-g_4$	$-Y_{C2}$	0
4	4	0	$y_{21}^{\dot{y}}$	$-g_4$	$g_4 + y_{22}^{\dot{y}} +$ $+Y_{C4}$	$-y_{22}^{\dot{y}} - y_{21}^{\dot{y}}$	$-Y_{C4}$
5	5	0	$-y_{11}^{\dot{y}}$ $-y_{21}^{\dot{y}}$	$-Y_{C2}$	$-y_{22}^{\dot{y}} - y_{12}^{\dot{y}}$	$y_{11}^{\dot{y}} + Y_{C2} +$ $+y_{22}^{\dot{y}} + Y_{\dot{y}} +$ $+y_{12}^{\dot{y}} + y_{21}^{\dot{y}}$	0
6	6	0	0	0	$-Y_{C4}$	0	$Y_{C4}$

$$Y^* =$$

**Задание 18.** Сформируйте укороченную матрицу сопротивлений фильтра верхних частот (рис. 2.16) обобщенным матричным методом.

*Решение.* Схема замещения фильтра верхних частот по переменному току, содержащая многополюсный компонент, представлена на рис. 2.17.

Матрица  $Z_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}$  сопротивлений электронной схемы без учета многополюсных компонентов формируется по методике метода эквивалентных схем:

$$Z_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}^* =$$

	1	2	3	4	5
1	$Z_{C1} + Z_{C2} + R_2$	$-Z_{C2}$	0	$-R_2$	0
2	$-Z_{C2}$	$R_1 + Z_{C2}$	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	$-R_2$	0	0	$R_2$	0
5	0	0	0	0	0

В ка-

честве исходной модели операционного усилителя используем его неопределенную матрицу  $Z_{OY}$  сопротивлений:

	И-Н	В-И	Н-О	О-В
И-Н	$R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1} + R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1}$	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	
В-И	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1}(k+1) - kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1}(k+1) + R_{\hat{n}\hat{o}1, \hat{n}\hat{o}2} + R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$	$-R_{\hat{n}\hat{o}1, \hat{n}\hat{o}2} + kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$-R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$
Н-О	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$-R_{\hat{n}\hat{o}1, \hat{n}\hat{o}2}$	$R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2} + R_{\hat{n}\hat{o}1, \hat{n}\hat{o}2}$	
О-В	$kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1} + kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$-kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}1} - R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$	$-kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{o}2}$	$R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$

Матрица независимых циклов для сторон операционного усилителя имеет размерность (5×4):

$$P_{IO} = \begin{matrix} & \text{И-Н} & \text{В-И} & \text{Н-О} & \text{О-В} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В результате укороченная матрица сопротивлений схемы определяется выражением  $Z^* = Z_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}^* + P_{IO} Z_{IO} P_{IO}^T$  :

	1	2	3	4	5
1	$Z_{C1} + Z_{C2} + R_2$	$-Z_{C2}$	0	$-R_2$	0
2	$-Z_{C2}$	$R_1 + Z_{C2} + R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} + R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}}$	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	0
3	0	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} - kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} - kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} + R_{C\hat{1}, \hat{n}\hat{2}} + R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} + kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}}$	$-R_{C\hat{1}, \hat{n}\hat{2}} + kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$-R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$
4	$-R_2$	$-R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$-R_{C\hat{1}, \hat{n}\hat{2}}$	$R_2 + R_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}} + R_{C\hat{1}, \hat{n}\hat{2}}$	0
5	0	$kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} + kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$-kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{1}} - R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$	$-kR_{\hat{a}, \hat{n}\hat{2}}$	$R_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}$

$Z^* =$

**Задание 19.** Сформируйте укороченную матрицу проводимостей усилителя низкой частоты (рис. 2.20) обобщенным матричным методом.

*Решение.* Схема замещения усилителя низкой частоты по переменному току, содержащая многополюсный компонент, представлена на рис. 2.21.

Матрица  $Y_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}^*$  проводимостей электронной схемы без учета многополюсных компонентов формируется по методике метода эквивалентных схем:

$$Y_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}^* = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & Y_{C1} & -Y_{C1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -Y_{C1} & Y_{C1} + g_1 + g_2 & -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -g_1 & g_1 + g_3 + g_4 + Y_{C2} & -g_4 & -Y_{C2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -g_4 & g_4 + Y_{C4} & 0 & -Y_{C4} \\ 5 & 0 & 0 & -Y_{C2} & 0 & Y_{C2} + Y_3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -Y_{C4} & 0 & Y_{C4} \end{array}$$

В качестве исходной модели биполярного транзистора используем его неопределенную матрицу  $Y_{\hat{A}\hat{O}}$  проводимостей:

$$Y_{\hat{A}\hat{O}} = \begin{array}{c|ccc} & б & к & э \\ \hline б & Y_{11}^{\hat{y}} & Y_{12}^{\hat{y}} & -(Y_{11}^{\hat{y}} + Y_{12}^{\hat{y}}) \\ к & Y_{21}^{\hat{y}} & Y_{22}^{\hat{y}} & -(Y_{21}^{\hat{y}} + Y_{22}^{\hat{y}}) \\ э & -(Y_{11}^{\hat{y}} + Y_{21}^{\hat{y}}) & -(Y_{12}^{\hat{y}} + Y_{22}^{\hat{y}}) & Y_{11}^{\hat{y}} + Y_{12}^{\hat{y}} + Y_{21}^{\hat{y}} + Y_{22}^{\hat{y}} \end{array}$$

Матрица независимых сечений для полюсов биполярного транзистора имеет размерность (6×3):

$$P_{\hat{A}\hat{O}} = \begin{array}{c|ccc} & б & к & э \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

В результате укороченная матрица проводимостей схемы определяется выражением  $Y^* = Y_{i\hat{a}\hat{n}\hat{n}}^* + P_{\hat{A}\hat{O}} Y_{\hat{A}\hat{O}} P_{\hat{A}\hat{O}}^T$ :

$$Y^* = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & Y_{C1} & -Y_{C1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -Y_{C1} & Y_{C1} + g_1 + y_{11}^{\dot{y}} + g_2 & -g_1 & y_{12}^{\dot{y}} & -y_{11}^{\dot{y}} - y_{12}^{\dot{y}} & 0 \\ 3 & 0 & -g_1 & g_1 + g_3 + g_4 + Y_{C2} & -g_4 & -Y_{C2} & 0 \\ 4 & 0 & y_{21}^{\dot{y}} & -g_4 & g_4 + y_{22}^{\dot{y}} + Y_{C4} & -y_{22}^{\dot{y}} - y_{21}^{\dot{y}} & -Y_{C4} \\ 5 & 0 & -y_{11}^{\dot{y}} - y_{21}^{\dot{y}} & -Y_{C2} & -y_{22}^{\dot{y}} - y_{12}^{\dot{y}} & y_{11}^{\dot{y}} + Y_{C2} + y_{22}^{\dot{y}} + Y_{\dot{y}} + y_{12}^{\dot{y}} + y_{21}^{\dot{y}} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -Y_{C4} & 0 & Y_{C4} \end{array}$$

### 2.3 Схемные функции и их анализ

**Задание 20.** Определите масштабный коэффициент, резонансную частоту, коэффициент демпфирования и добротность для схемной функции

$$F(p) = 5 \frac{p}{p^2 + 10^2 p + 10^4}.$$

**Решение.** Выражение заданной схемной функции может быть представлено в канонической форме

$$F(p) = H \frac{p}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = H \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2},$$

где  $H$  – масштабный коэффициент;  $\omega_0$  – резонансная частота;  $\xi$  – коэффициент демпфирования;  $Q = \frac{1}{2\xi}$  – добротность.

Тогда масштабный коэффициент  $H = 5$ , резонансная частота

$$\omega_0 = \sqrt{10^4} = 100 \text{ (рад/с)}, \quad \text{коэффициент демпфирования } \xi = \frac{100}{2\omega_0} = \frac{100}{2 \cdot 100} = 0,5,$$

$$\text{добротность } Q = \frac{1}{2 \cdot 0,5} = 1.$$

**Задание 21.** Определите частотные характеристики, соответствующие схемной функции  $F(p) = H \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

*Решение.* Для получения выражения амплитудно-фазовой частотной характеристики выполним в выражении схемной функции замену переменной  $p = j \omega$ :

$$F(j \omega) = H \frac{(j \omega)}{(j \omega)^2 + \omega_0^2} = j \frac{H \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Выражение амплитудно-частотной характеристики:

$$F(\omega) = |F(j \omega)| = \frac{H \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Вещественная частотная характеристика:

$$F_R(\omega) = \operatorname{Re} F(j \omega) = 0.$$

Мнимая частотная характеристика:

$$F_J(\omega) = \operatorname{Im} F(j \omega) = \frac{H \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \arg F(j \omega) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(\omega_0 - \omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < \omega_0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

**Задание 22.** Определите временные характеристики, соответствующие схемной функции  $F(p) = H \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$

*Решение.* Импульсная переходная характеристика определяется обратным преобразованием Лапласа от выражения схемной функции:

$$g(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[H \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}\right] = H \cos(\omega_0 t).$$

Переходную характеристику определим через импульсную переходную характеристику:

$$h(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi = \int_0^t H \cos(\omega_0 \xi) d\xi = \frac{H}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

## 2.4 Анализ линейных электронных схем операторными методами

**Задание 23.** Записать выражение коэффициента передачи напряжения для схемы замещения вида

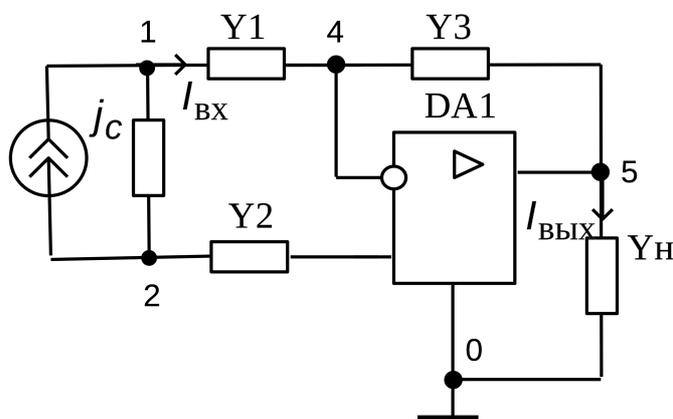


Рис. 2.24. Схема замещения дифференциального усилителя

*Решение.* Все компоненты схемы замещения являются  $Y$ -компонентами, следовательно, схемную функцию необходимо определять через укороченную матрицу проводимостей в канонической системе независимых сечений:

$$k_U = \frac{\Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta_{(a+c)(a+c)} + Y_i \Delta_{(a+c)(a+c), (b+d)(b+d)}}.$$

Индексы  $a$  и  $c$  алгебраических дополнений численно равны номерам входных узлов схемы, причем входной ток  $I_{a\bar{c}}$  направлен от узла  $a$  к узлу  $c$ . Таким образом  $a=1$ ,  $c=2$ . Индексы  $b$  и  $d$  алгебраических дополнений численно равны номерам выходных узлов схемы, причем выходной ток  $I_{\bar{a}b\bar{c}d}$

направлен от узла  $b$  к узлу  $d$ . Следовательно  $b = 5$ ,  $d = 0$ .

С учетом найденных значений индексов выражение для коэффициента передачи тока принимает вид

$$k_U = \frac{\Delta_{(1+2)5}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} + Y_i \Delta_{(1+2)(1+2),55}}.$$

**Задание 24.** Записать выражение коэффициента передачи напряжения для схемы замещения вида

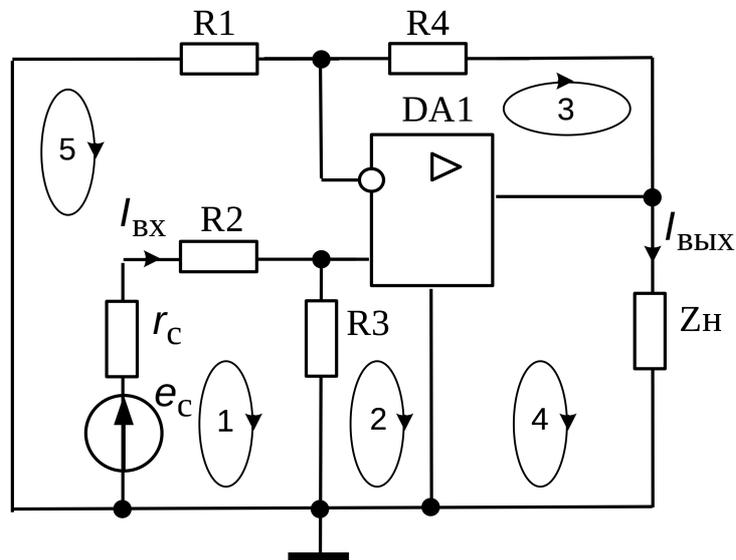


Рис. 2.25. Схема замещения неинвертирующего усилителя постоянного тока

*Решение.* Все компоненты схемы замещения являются Z-компонентами, следовательно, схемную функцию необходимо определять через укороченную матрицу сопротивлений в канонической системе независимых циклов:

$$k_U = \frac{Z_i \Delta_{(a+c)(b+d)}}{\Delta + Z_i \Delta_{(b+d)(b+d)}}.$$

Индексы  $a$  и  $c$  алгебраических дополнений численно равны номерам

циклов схемы, содержащих ветвь источника сигнала, причем направление входного тока  $I_{\hat{a}\hat{\delta}}$  совпадает с направлением цикла  $\hat{a}$  и противоположно направлению цикла  $\hat{c}$ . Таким образом,  $a = 1$ ,  $c = 5$ .

Индексы  $b$  и  $d$  алгебраических дополнений численно равны номерам циклов схемы, содержащих ветвь нагрузки, причем направление выходного тока  $I_{\hat{a}\hat{\delta}}$  совпадает с направлением цикла  $\hat{b}$  и противоположно направлению цикла  $\hat{d}$ .

Поскольку ветвь нагрузки схемы входит в состав только одного цикла, направление которого совпадает с направлением выходного тока, то  $b = 4$ ,  $d = 0$ .

С учетом найденных значений индексов выражение для коэффициента передачи тока принимает вид

$$k_U = \frac{Z_i \Delta_{(1+5)4}}{\Delta + Z_i \Delta_{44}}.$$

**Задание 25.** Определить алгебраические дополнения  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{11,33}$

матрицы  $Y^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ .

*Решение.*

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11,33} = (-1)^{1+1+3+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \det [:$$

**Задание 26.** Определить схемную функцию  $Y_{\hat{a}\hat{o}}$  в [См], если  $Y_i = 10^{-3}$  (См), а  $k_U = 100$ .

*Решение.* Для проходного четырехполюсника существует связь между схемными функциями  $Y_{\hat{a}\hat{o}}$  и  $k_U$ :  $Y_{\hat{a}\hat{o}} = Y_i k_U$ , откуда

$$Y_{\hat{a}\hat{o}} = 10^{-3} \cdot 100 = 0,1 \text{ (См)}.$$

**Задание 27.** Определить схемную функцию  $k_I$ , если  $Z_i = 10^3$  (Ом), а  $k_U = 100$ ,  $Z_{\hat{a}\hat{o}} = 5 \cdot 10^3$  (Ом).

*Решение.* Для проходного четырехполюсника существует связь между схемными функциями:  $Z_{\hat{a}\hat{o}} = Z_i \cdot \frac{k_I}{k_U}$ , откуда

$$k_I = k_U \cdot \frac{Z_{\hat{a}\hat{o}}}{Z_i} = 100 \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = 500.$$

**Задание 28.** Определить коэффициент передачи напряжения по укороченной матрице сопротивлений вида  $Z^* = \begin{bmatrix} R_{\hat{a}} & 0 \\ -kR_{\hat{a}} & R_{\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix}$ . Ветвь источника

сигнала входит в цикл 1, ветвь нагрузки – в цикл 2. Направления входного и выходного токов совпадают с направлениями циклов 1 и 2 соответственно

*Решение.* В случае инцидентности входной ветви одному входному циклу и выходной ветви одному выходному циклу коэффициент передачи напряжения связан с укороченной матрицей сопротивлений формулой

$$k_U = \frac{Z_j \Delta_{ab}^*}{\Delta^* + Z_j \Delta_{bb}^*}.$$

Из условия задачи следует, что индексы алгебраических дополнений

имеют значения  $a = 1$ ,  $b = 2$ . Тогда  $k_U = \frac{Z_j \Delta_{12}^*}{\Delta^* + Z_j \Delta_{22}^*}$ , где

$$\Delta_{12}^* = (-1)^{1+2} \cdot \det[-kR_{\bar{a}}] = kR_{\bar{a}}, \quad \Delta_{22}^* = (-1)^{2+2} \cdot \det[R_{\bar{a}}] = R_{\bar{a}},$$

$$\Delta^* = \det \begin{bmatrix} R_{\bar{a}} & 0 \\ -kR_{\bar{a}} & R_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}} \end{bmatrix} = R_{\bar{a}} R_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}}.$$

В результате получим выражение для коэффициента передачи напряжения:

$$k_U = \frac{Z_j \cdot kR_{\bar{a}}}{R_{\bar{a}} R_{\hat{a}\hat{a}\hat{o}} + Z_j \cdot R_{\bar{a}}}.$$

**Задание 29.** Определить передачи  $F_{61} = \frac{x_6}{f_1}$ ,  $F'_{64} = \frac{x_6}{x_4}$  сигнального графа

Мэзона

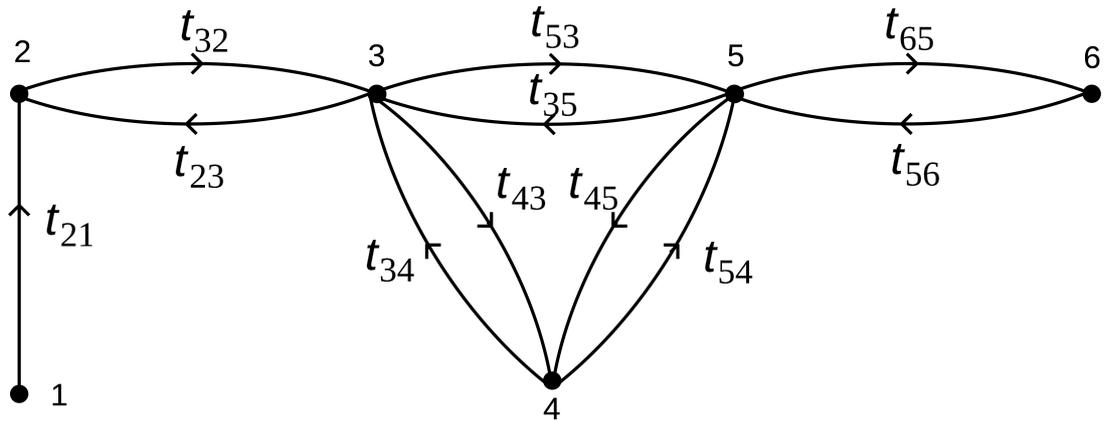


Рис. 2.26. Сигнальный граф Мэсона

*Решение.* Передачу  $F_{61} = \frac{x_6}{f_1}$ , определяемую отношением искомой переменной  $x_6$  к задающей переменной  $f_1$ , найдем с использованием топологической формулы общей передачи сигнального графа Мэсона:

$$F_{61} = \frac{x_6}{f_1} = \frac{\sum_{k=1}^2 p_k^{(x_6, f_1)} D_k^{(x_6, f_1)}}{D}.$$

Для определителя  $D$  сигнального графа справедливо выражение:

$$D = 1 + \sum_{q=1}^Q \left[ (-1)^q \sum_{i=1}^{N_q} \left( \prod_{r=1}^q L_r^{(i)} \right) \right].$$

В графе рис. 2.26 максимальное количество не касающихся контуров  $Q = 2$ , число контуров  $N_1 = 7$ , число пар не касающихся контуров  $N_2 = 3$ .

Тогда

$$D = 1 + (-1)^1 \cdot \sum_{i=1}^7 L_i + (-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 (L_k L_s)_i,$$

где  $L_i$  – передачи контуров сигнального графа;  $(L_k L_s)_i$  – произведение передач  $i$ -ой пары не касающихся контуров.

Передачи контуров сигнального графа рис. 2.26:

$$L_1(2,3) = t_{23}t_{32}, \quad L_2(3,4) = t_{34}t_{43}, \quad L_3(3,5) = t_{35}t_{53}, \quad L_4(4,5) = t_{45}t_{54}, \quad L_5(5,6) = t_{56}t_{65}, \\ L_6(3,4,5) = t_{43}t_{54}t_{35}, \quad L_7(3,5,4) = t_{53}t_{45}t_{34}.$$

Пары не касающихся контуров:  $L_1(2,3) = t_{23}t_{32}$  и  $L_4(4,5) = t_{45}t_{54}$ ;  $L_1(2,3) = t_{23}t_{32}$  и  $L_5(5,6) = t_{56}t_{65}$ ;  $L_2(3,4) = t_{34}t_{43}$  и  $L_5(5,6) = t_{56}t_{65}$ .

Определитель сигнального графа:

$$D = 1 - \sum_{i=1}^7 L_i + (L_1L_4 + L_1L_5 + L_2L_5).$$

Передачи простых путей, проходящих из вершины 1, соответствующей задающей переменной  $f_1$ , в вершину 6, соответствующую искомой переменной  $x_6$ :

$$p_1^{(x_6, f_1)}(1,2,3,5,6) = t_{21}t_{32}t_{53}t_{65}, \quad p_2^{(x_6, f_1)}(1,2,3,4,5,6) = t_{21}t_{32}t_{43}t_{54}t_{65}.$$

Величины дополнений простых путей могут быть найдены устранением из выражения для определителя  $D$  слагаемые, содержащие передачи контуров, имеющих общие вершины с соответствующими путями:

$$D_1^{(x_6, f_1)} = 1, \quad D_2^{(x_6, f_1)} = 1.$$

Искомую передачу графа можно представить в виде

$$F_{61} = \frac{x_6}{f_1} = \frac{p_1^{(x_6, f_1)} + p_2^{(x_6, f_1)}}{1 - \sum_{i=1}^7 L_i + (L_1L_4 + L_1L_5 + L_2L_5)}.$$

Передачу  $F'_{64} = \frac{x_6}{x_4}$ , определяемую отношением искомой переменной  $x_6$

к искомой переменной  $x_4$ , найдем с использованием топологической формулы:

$$F'_{64} = \frac{x_6}{x_4} = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k^{(x_6, f_1)} D_k^{(x_6, f_1)}}{\sum_{k=1}^2 \rho_k^{(x_4, f_1)} D_k^{(x_4, f_1)}}.$$

Передачи простых путей, проходящих из вершины 1, соответствующей задающей переменной  $f_1$ , в вершину 4, соответствующую искомой переменной  $x_4$ :

$$\rho_1^{(x_4, f_1)}(1,2,3,4) = t_{21}t_{32}t_{43}, \quad \rho_2^{(x_4, f_1)}(1,2,5,4) = t_{21}t_{32}t_{53}t_{45}.$$

Величины дополнений простых путей могут быть найдены устранением из выражения для определителя  $D$  слагаемые, содержащие передачи контуров, имеющих общие вершины с соответствующими путями:

$$D_1^{(x_6, f_1)} = 1 - L_5, \quad D_2^{(x_4, f_1)} = 1.$$

Искомую передачу  $F_{64}$  графа можно представить в виде

$$F_{64} = \frac{x_6}{x_4} = \frac{\rho_1^{(x_6, f_1)} + \rho_2^{(x_6, f_1)}}{\rho_1^{(x_4, f_1)}(1 - L_5) + \rho_2^{(x_4, f_1)}}.$$

**Задание 30.** Определить передаточное сопротивление, коэффициент передачи напряжения электронной схемы по ее обобщенному сигнальному  $U$ -графу, если  $U_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = U_5$

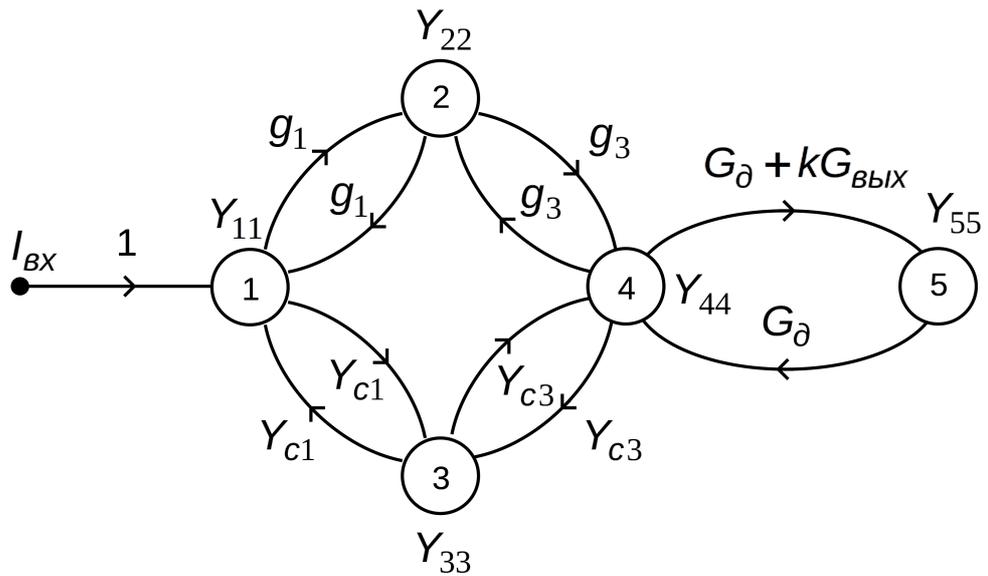


Рис. 2.27. Обобщенный сигнальный граф

*Решение.* При определении передаточного сопротивления  $Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_i}{I_{\hat{a}\hat{o}}}$  задающая переменная  $I_{\hat{a}\hat{o}}$  представлена в графе вершиной-исток, следовательно,

$$Z_{i\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_i}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{U_5}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{\sum_{k=1}^2 p_k^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})} D_k^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})}}{D}.$$

Определитель обобщенного сигнального графа вычисляется по формуле:

$$D = \prod_{t=1}^n B_t + \sum_{q=1}^Q \left[ (-1)^q \sum_{i=1}^{N_q} \left( \prod_{r=1}^q L_r^{(i)} \cdot \prod_{r=1}^m B_t^{(i)} \right) \right].$$

В графе рис. 2.27 количество взвешенных вершин  $n = 5$ , максимальное количество не касающихся контуров  $Q = 2$ , число контуров  $N_1 = 7$ , число пар не касающихся контуров  $N_2 = 4$ , веса взвешенных вершин  $B_t = Y_{tt}$ . Тогда

$$D = \prod_{t=1}^5 Y_{tt} + (-1)^1 \cdot \sum_{i=1}^7 \left( L_i \cdot \prod_{r=1}^m B_r^{(i)} \right) + (-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^4 \left( \prod_{r=1}^2 L_r^{(i)} \cdot \prod_{r=1}^m Y_{rr}^{(i)} \right).$$

Передачи контуров обобщенного сигнального графа:

$$L_1(1,2) = g_1^2, \quad L_2(1,3) = Y_{c1}^2, \quad L_3(2,4) = g_3^2, \quad L_4(3,4) = Y_{c3}^2, \quad L_5(4,5) = G_{\bar{a}}(G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}), \\ L_6(1,2,4,3) = g_1 g_3 Y_{c3} Y_{c1}, \quad L_7(1,3,4,2) = Y_{c1} Y_{c3} g_3 g_1,$$

$$\text{Пары не касающихся контуров } L_1(1,2) = g_1^2 \text{ и } L_4(3,4) = Y_{c3}^2; \quad L_1(1,2) = g_1^2 \text{ и } \\ L_5(4,5) = G_{\bar{a}}(G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}); \quad L_2(1,3) = Y_{c1}^2 \text{ и } L_3(2,4) = g_3^2; \quad L_2(1,3) = Y_{c1}^2 \text{ и } \\ L_5(4,5) = G_{\bar{a}}(G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}).$$

Определитель сигнального графа:

$$D = Y_{11} Y_{22} Y_{33} Y_{44} Y_{55} - \\ - (L_1 Y_{33} Y_{44} Y_{55} + L_2 Y_{22} Y_{44} Y_{55} + L_3 Y_{11} Y_{33} Y_{55} + L_4 Y_{11} Y_{22} Y_{55} + L_5 Y_{11} Y_{22} Y_{33} + \\ + L_6 Y_{55} + L_7 Y_{55}) + L_1 L_4 Y_{55} + L_1 L_5 Y_{33} + L_2 L_3 Y_{55} + L_2 L_5 Y_{22}.$$

Передачи простых путей, проходящих из вершины  $I_{\hat{a}\hat{o}}$ , в вершину 5, соответствующую переменной  $U_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}} = U_5$ :

$$p_1^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, 1, 2, 4, 5) = g_1 g_3 (G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}), \quad p_2^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, 1, 3, 4, 5) = Y_{c1} Y_{c3} (G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}).$$

Величины дополнений простых путей могут быть найдены устранением из выражения для определителя слагаемых, содержащих передачи контуров, касающихся соответствующих путей, и весов вершин, образующих пути:

$$D_1^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})} = Y_{33}, \quad D_2^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})} = Y_{22},$$

Выражение для передаточного сопротивления можно представить в виде

$$Z_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{U_1}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{U_5}{I_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{g_1 g_3 (G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}) Y_{33} + Y_{c1} Y_{c3} (G_{\bar{a}} + kG_{\hat{a}\hat{u}\hat{o}}) Y_{22}}{D}.$$

При определении коэффициента передачи напряжения  $k_U = \frac{U_1}{U_{\hat{a}\hat{o}}}$  за-

дающая переменная  $U_{\hat{a}\hat{o}} = U_1$  представлена в графе смешанной вершиной, следовательно,

$$k_U = \frac{U_i}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{U_5}{U_1} = \frac{\sum_{k=1}^2 \rho_k^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})} D_k^{(U_5, I_{\hat{a}\hat{o}})}}{\rho_1^{(U_1, I_{\hat{a}\hat{o}})} D_1^{(U_1, I_{\hat{a}\hat{o}})}}.$$

Передача простого пути, проходящего из вершины  $I_{\hat{a}\hat{o}}$ , в вершину 2, соответствующую переменной  $U_{\hat{a}\hat{o}} = U_1$ :  $\rho_1^{(U_1, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, 1) = 1$ .

Устраняя из выражения для определителя слагаемые, содержащие передачи контуров, касающихся пути  $\rho_1^{(U_1, I_{\hat{a}\hat{o}})}(I_{\hat{a}\hat{o}}, 1)$ , и веса вершины 1, определим величину дополнения пути:

$$D_1^{(U_1, I_{\hat{a}\hat{o}})} = Y_{22} Y_{33} Y_{44} Y_{55} - (L_3 Y_{33} Y_{55} + L_4 Y_{22} Y_{55} + L_5 Y_{22} Y_{33})$$

Выражение для коэффициента передачи напряжения можно представить в виде

$$k_U = \frac{U_i}{U_{\hat{a}\hat{o}}} = \frac{U_5}{U_1} = \frac{g_1 g_3 (G_{\hat{a}} + kG_{\hat{a}\hat{o}}) Y_{33} + Y_{c1} Y_{c3} (G_{\hat{a}} + kG_{\hat{a}\hat{o}}) Y_{22}}{Y_{22} Y_{33} Y_{44} Y_{55} - (L_3 Y_{33} Y_{55} + L_4 Y_{22} Y_{55} + L_5 Y_{22} Y_{33})}.$$

**Задание 31.** Определить значение  $x_2$ , если  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$

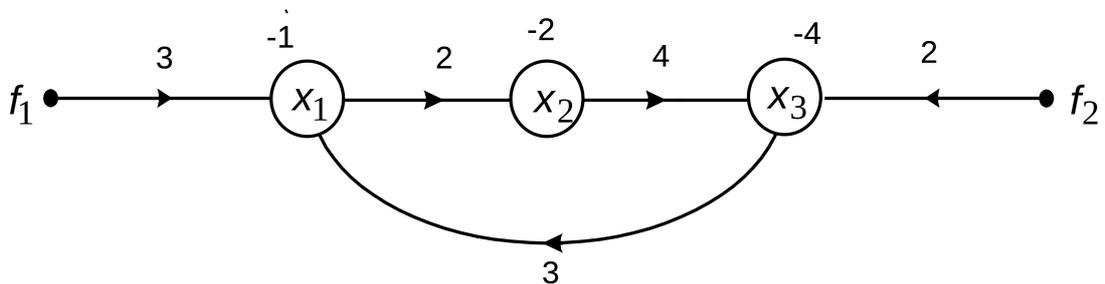


Рис. 2.28. Обобщенный сигнальный граф

**Решение.** Переменная  $x_2$  может быть определена с использованием принципа суперпозиции и топологических формул общей передачи обобщен-

ного сигнального графа:

$$x_2 = (x_2)_1 + (x_2)_2 = F_{21}f_1 + F_{22}f_2 = \frac{\rho_1^{(x_2, f_1)} D_1^{(x_2, f_1)}}{D} f_1 + \frac{\rho_1^{(x_2, f_2)} D_1^{(x_2, f_2)}}{D} f_2.$$

В графе рис. 2.28 количество взвешенных вершин  $n = 3$ , не касающиеся контуры отсутствуют ( $Q = 1$ ), число контуров  $N_1 = 1$ , передача контура  $L_1(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ . Тогда

$$D = B_1 B_2 B_3 + (-1)^1 L_1 = (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) - 24 = -32.$$

Передачи простых путей:

$$\rho_1^{(x_2, f_1)}(f_1, x_1, x_2) = 3 \cdot 2 = 6, \quad \rho_1^{(x_2, f_2)}(f_2, x_3, x_1, x_2) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12.$$

Величины дополнений путей:

$$D_1^{(x_2, f_1)} = B_3 = -4, \quad D_1^{(x_2, f_2)} = B_3 = 1.$$

В результате:

$$x_2 = \frac{6 \cdot (-4)}{-32} \cdot 1 + \frac{12 \cdot 1}{-32} \cdot 1 = \frac{3}{8} = 0,375.$$

## 2.5 Анализ электронных схем во временной области

**Задание 32.** Определить размерность базиса переменных состояния для схемы замещения

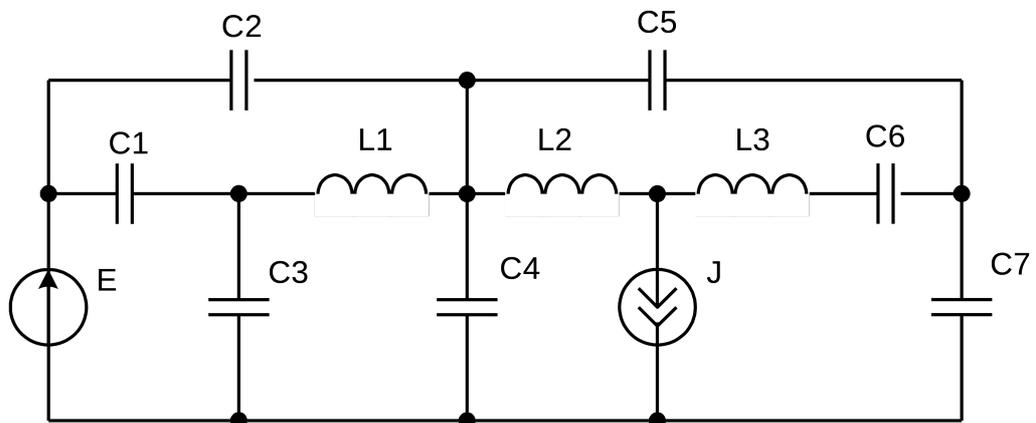


Рис. 2.29. Схема замещения электронной цепи

*Решение.* Для определения числа топологически зависимых емкостей преобразуем схему замещения путем закорачивания всех независимых источников ЭДС и удаления всех остальных ветвей, кроме емкостных:

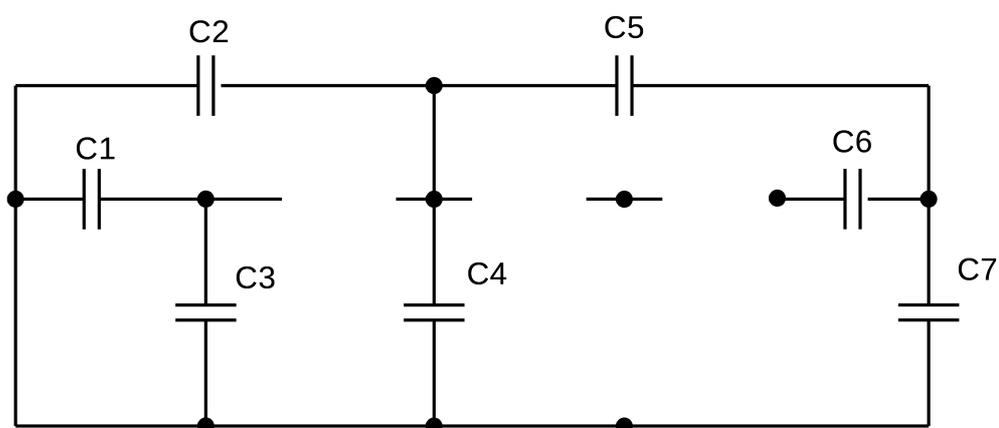


Рис. 2.30. Схема замещения для определения особых циклов

Число топологически зависимых емкостей совпадает с числом  $\sigma_C$  независимых циклов схемы замещения рис. 2.30:

$$\sigma_C = l_C - v_C + n_C = 7 - 6 + 2 = 3.$$

Для определения числа топологически зависимых индуктивностей преобразуем схему замещения путем удаления всех независимых источников тока и закорачивания всех остальных ветвей, кроме индуктивных ветвей:

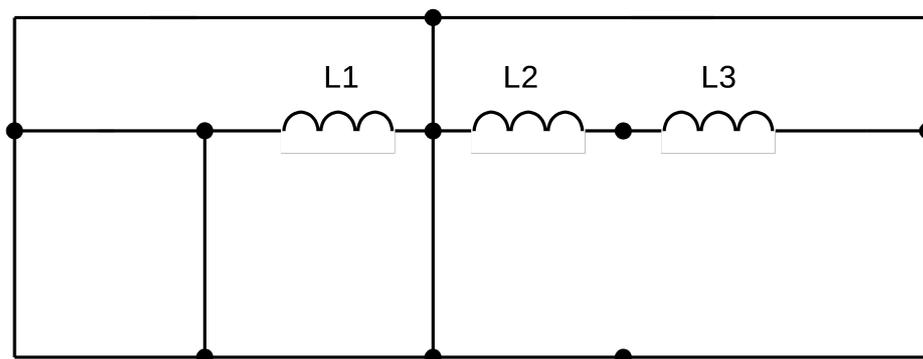


Рис. 2.31. Схема замещения для определения особых сечений

Число топологически зависимых индуктивностей совпадает с числом независимых сечений схемы замещения рис. 2.31:

$$v_L = 2 - 1 = 1,$$

Общее количество топологически зависимых дифференциальных переменных:

$$\mu_0 = \sigma_C + v_L = 3 + 1 = 4,$$

а размерность базиса переменных состояния

$$\mu_{\text{Ain}} = l_C + l_L - \mu_0 = 7 + 3 - 4 = 6.$$

**Задание 33.** Сформируйте математическую модель электронной схемы в базе переменных состояния, направленную на расчет переменных  $u_L(t)$  и  $u_R(t)$ .

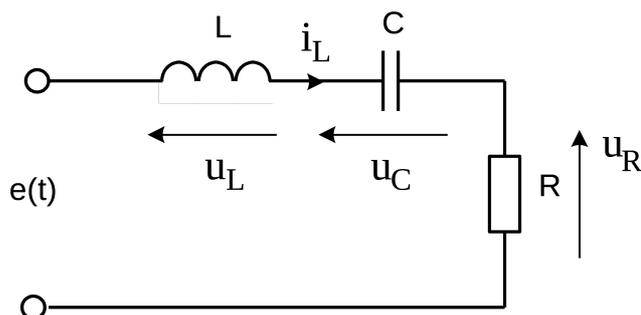


Рис. 2.32. Схема электронной цепи

*Решение.* Для заданной электронной схемы компонентные уравнения имеют вид:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_R(t) = Ri_L(t).$$

Топологическое уравнение представляет собой уравнение непрерывности для напряжений (уравнение второго закона Кирхгофа):

$$u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) = e(t).$$

Подставляя в топологическое уравнение компонентное уравнение  $u_R(t) = Ri_L(t)$  и выражая падение напряжения  $u_L(t)$ , получим:

$$u_L(t) = -Ri_L(t) - u_C(t) + e(t).$$

Используя компонентные уравнения для индуктивности и емкости, запишем уравнения состояния:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}e(t), \\ \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t). \end{cases}$$

Используя компонентное уравнение  $u_R(t) = Ri_L(t)$  и выражение  $u_L(t) = -Ri_L(t) - u_C(t) + e(t)$ , запишем выходные уравнения:

$$\begin{cases} u_L(t) = -Ri_L(t) - u_C(t) + e(t), \\ u_R(t) = Ri_L(t). \end{cases}$$

Уравнения состояния и выходные уравнения представим в матричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= AX(t) + BF(t), \\ Y(t) &= KX(t) + K_f F(t), \end{aligned}$$

где  $x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$ ,  $F(t) = e(t)$ ,  $A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $Y(t) = \begin{bmatrix} u_L(t) \\ u_R(t) \end{bmatrix}$ ,

$$K = \begin{bmatrix} -R & -1 \\ R & 0 \end{bmatrix}, K_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Задание 34.** Запишите выражение для экспоненциальной матрицы

$$\exp(At), \text{ если } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Решение.* Для получения выражения экспоненциальной матрицы используем интерполяционный полином Лагранжа-Сильвестра.

Определим собственные числа (спектр) матрицы  $A$ :

$$\det(A - \lambda \cdot \bar{1}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,$$

следовательно  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -4$ .

Поскольку спектр матрицы  $A$  простой и содержит 2 собственных числа, экспоненциальная матрица выражается соотношением

$$\exp(At) = \sum_{k=1}^2 P_k \exp(\lambda_k t)$$

в котором

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 \cdot \bar{1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-1 - (-4)} \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - (-4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \frac{A - \lambda_1 \cdot \bar{1}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-4 - (-1)} \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Выражение для экспоненциальной матрицы имеет вид:

$$\exp \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \exp(-t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \exp(-4t).$$

**Задание 35.** Найдите аналитическое решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения  $\frac{dx(t)}{dt} = -3x(t) + 2f(t) + \frac{df(t)}{dt}$ , если  $x(0) = 0$ ,  $f(t) = \eta(t)$ .

*Решение.* Для заданных условий  $x(0) = 0$  и  $f(t) = \eta(t)$  аналитическое решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:  $X(t) = A^{-1}[\exp(At) - \bar{1}] \cdot B + [\exp(At)] \cdot B_1$ .

Отдельное дифференциальное уравнение можно рассматривать как частный предельный случай системы, для которой:

$$A = [-3] = -3, \quad A^{-1} = [-3]^{-1} = -\frac{1}{3}, \quad B = [2] = 2, \quad B_1 = [1] = 1, \quad \exp(At) = \exp(-3t),$$

$$\bar{1} = [1] = 1.$$

Таким образом, аналитическое решение заданного дифференциального уравнения:

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot [\exp(-3t) - 1] \cdot 2 + [\exp(-3t)] \cdot 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \exp(-3t).$$

**Задание 36.** Определить комплексную частотную функцию, если математическая модель в базисе переменных состояний имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = -3x(t) + 2f(t) + \frac{df(t)}{dt}, \quad y(t) = 2x(t).$$

*Решение.* Систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в частотной области характеризует матричная комплексная частотная функция:

$$T(j\omega) = K[j\omega \cdot \bar{1} - A]^{-1}[B + j\omega B_1] + K_f + j\omega K_{f1}.$$

Представленное дифференциальное уравнение, рассматриваемое как предельный случай системы, в частотной области характеризуется одной комплексной частотной функцией, для которой:

$$K = [2] = 2, \quad \bar{1} = [1] = 1, \quad A = [-3] = -3, \quad B = [2] = 2, \quad B_1 = [1] = 1, \quad K_f = [0] = 0, \\ K_{f1} = [0] = 0.$$

Таким образом,

$$T(j\omega) = 2 \cdot [j\omega \cdot 1 - (-3)]^{-1} [2 + j\omega \cdot (1)] = 2 \cdot \frac{2 + j\omega}{3 + j\omega}.$$

**Задание 37.** Используя явный метод Эйлера для интегрирования дифференциального уравнения  $\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + 3$ , определить значение  $x_3$ , если  $x_0 = 0$ , а шаг дискретизации  $h = 0,1$ . Ответ округлить до сотых.

*Решение.* Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $\frac{dX(t)}{dt} = G(t, X(t))$  методом Эйлера заключается в последовательном определении значений  $X_{k+1}$  вектора переменных состояния в момент времени  $t_{k+1}$  через значения  $X_k$  вектора переменных состояния в предыдущий момент времени  $t_k$  на основе рекуррентной формулы:

$$X_{k+1} = X_k + hG_k.$$

Для заданного дифференциального уравнения  $G_k = G(t_k, X_k) = -2X_k + 3$

и рекуррентная формула принимает вид:

$$x_{k+1} = x_k + h(-2x_k + 3) = (1 - 2h)x_k + 3h.$$

Используя полученную рекуррентную формулу, определим:

$$x_1 = (1 - 2h)x_0 + 3h = 3h = 0,3,$$

$$x_2 = (1 - 2h)x_1 + 3h = (1 - 0,2) \cdot 0,3 + 0,3 = 0,54,$$

$$x_3 = (1 - 2h)x_2 + 3h = (1 - 0,2) \cdot 0,54 + 0,3 = 0,732 \approx 0,73.$$

**Задание 38.** Определить максимально допустимое значение шага интегрирования дифференциального уравнения  $\frac{dx(t)}{dt} = -3x(t) + 1$  явным методом Эйлера, при котором численная схема остается устойчивой

*Решение.* Условием устойчивости явного метода Эйлера при интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений вида  $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BF(t)$ , является требование  $|1 + h\lambda_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $A$ ;  $n$  – порядок матрицы  $A$ .

Для заданного дифференциального уравнения  $n = 1$ ,  $A = -2$ . Тогда собственное число определяется из уравнения  $\det(A - \lambda \cdot \bar{1}) = |-2 - \lambda| = \lambda + 2 = 0$ , откуда  $\lambda = -2$ .

Условие устойчивости явного метода Эйлера принимает вид  $|1 + h\lambda| = |1 - 3h| < 1$ , то есть  $-1 < 1 - 3h < 1$ , откуда  $0 < h < \frac{2}{3}$ . Таким образом, максимально допустимое значение шага интегрирования  $h = \frac{2}{3}$ .

## 4 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Белецкий А.Ф.** Теория линейных электрических цепей / А.Ф. Белецкий. – М.: Лань, 2009. – 544 с.: ил. – ISBN 978-5-8114-0905-1. эл. адрес: <http://e.lanbook.com/viem/book/710>

2. **Глотов А.Ф.** Математическое моделирование электронных схем: Учебное пособие / А.Ф. Глотов; Томский политехнический университет. – Томск: изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 168 с. **ISBN** 978-5-4387-0005-0

3. **Довгун В.П.** Компьютерное моделирование электронных цепей и устройств: Методические указания по самостоятельной работе / В.П. Довгун, В. Б. Лыкова, П. А. Барыбин. – Красноярск: «Сибирский федеральный университет», 2008. – 75 с. [электронный ресурс, [http://ikit.edu.sfu-kras.ru/files/5/samost\\_work.pdf](http://ikit.edu.sfu-kras.ru/files/5/samost_work.pdf) доступ свободный]

4. **Легостаев Н.С.** Методы анализа и расчета электронных схем: Учеб. пособие / Н.С. Легостаев, К.В. Четвергов. – Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2012. – 230 с.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 210100 **Электроника и микроэлектроника** (квалификация (степень) “бакалавр”): Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 27 декабря 2009 г. № 743.