Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

**Н.С. Легостаев**

# МАТЕРИАЛЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано Сибирским региональным отделением
учебно-методического объединения высших учебных
заведений РФ по образованию в области радиотехники,
электроники, биомедицинской техники и автоматизации
для межвузовского использования в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
210100.62 «Электроника и наноэлектроника»
с профилями «Промышленная электроника»
и «Микроэлектроника и твердотельная электроника»

Томск
Издательство ТУСУРа
2014

УДК 621.315.5/.61(076)
ББК 32.843.я73
Л387

Рецензенты:

**Айзенштат Г.И.**, д-р техн. наук, профессор,
гл. науч. сотрудник ОАО «НИИ полупроводниковых приборов»;

**Анненков Ю.М.**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
электромеханических комплексов и материалов
Национального исследовательского
Томского политехнического университета

**Легостаев, Николай Степанович**

Л387 Материалы электронной техники: учеб.-метод. пособие / Н.С. Легостаев. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2014. – 74 с.

ISBN 978-5-86889-678-1

Содержатся задачи, решение которых позволяет глубже понять физические закономерности, определяющие свойства и поведение проводниковых, полупроводниковых, диэлектрических и магнитных материалов в различных условиях эксплуатации, во взаимосвязи с конкретным применением в элементах и устройствах электронной техники различного функционального назначения. Задачи для самостоятельного решения снабжены ответами в виде общего выражения или конечного результата вычисления. Приведены также решения задач с использованием теоретического материала, недостаточно полно представленного в учебном пособии.

Даны рекомендации по самостоятельному изучению теоретического материала, выполнению контрольных и лабораторных работ.

Для студентов, обучающихся по направлению 210100.62 «Электроника и наноэлектроника» с профилями «Промышленная электроника» и «Микроэлектроника и твердотельная электроника».

УДК 621.315.5/.61(076)
ББК 32.843.я73

ISBN 978-5-86889-678-1

# Оглавление

# Введение

Предметом дисциплины «Материалы электронной техники» являются физические закономерности, определяющие свойства и поведение проводниковых, полупроводниковых, диэлектрических и магнитных материалов в различных условиях их эксплуатации.

Курс «Материалы электронной техники» является элементом модуля «Физические основы электроники», который входит в базовую часть профессионального цикла дисциплин образовательной программы подготовки бакалавров по направлению «Электроника и наноэлектроника».

В результате изучения дисциплины студент должен:

***знать***

– физическую сущность процессов, протекающих в проводниковых, полупроводниковых, диэлектрических и магнитных материалах при их использовании в современных устройствах электронной техники различного функционального назначения;

– методы оценки основных свойств материалов электронной техники;

– физические принципы работы, основные эксплуатационные характеристики и параметры пассивных элементов электронной техники;

– технические характеристики и экономические показатели отечественных и зарубежных разработок в области создания материалов электронной техники;

– основные направления, связанные с внедрением новых материалов и технологий и отражающие требования и тенденции развития электронной техники;

***уметь***

– рассчитывать основные параметры и характеристики, проводить экспериментальные исследования материалов электронной техники;

– выбирать материалы различного функционального назначения с учетом технико-экономических показателей, допустимых нагрузок, влияния внешних факторов;

***владеть***

– методами расчета параметров и основных характеристик материалов электронной техники;

– методиками проведения эксперимента по исследованию характеристик материалов.

Дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин профессионального цикла: «Квантовая и оптическая электроника», «Аналоговая электроника», «Магнитные элементы электронных устройств», «Схемотехника», «Основы проектирования электронной компонентной базы», «Основы преобразовательной техники», «Энергетическая электроника».

# 1 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

## 1.1 Общие свойства и отличительные особенности материалов электронной техники

Необходимо знать классификацию материалов по электрическим и магнитным свойствам. Следует изучить природу электропроводности твердых тел в рамках классической физики и в квантово-механическом представлении. Необходимо знать молекулярно-атомную структуру материала и уметь объяснять индуцированные в материале физические явления и эффекты. Важно знать общие свойства и отличительные особенности металлов, диэлектриков и полупроводников.

## 1.2 Проводниковые материалы

Следует изучить природу электропроводности металлов. Необходимо знать температурную зависимость удельного сопротивления металлов, влияние примесей и дефектов на удельное сопротивление металлов. Важно уяснить физическую сущность скин-эффекта и эффекта близости, знать формулу связи глубины проникновения поля с физико-техническими параметрами материала. Необходимо знать требования к проводниковым материалам и проводниковые материалы высокой проводимости, требования к материалам высокого удельного сопротивления и материалы высокого удельного сопротивления. Следует знать свойства основных проводниковых материалов.

## 1.3 Резисторы

Необходимо знать классификацию дискретных резисторов, основные параметры и характеристики резисторов. Следует обратить внимание на выбор резисторов в зависимости от условий эксплуатации. Рекомендуется особое внимание уделить овладению навыками формирования требований к выбору резисторов с учетом технико-экономических показателей, допустимых нагрузок, влияния внешних факторов.

## 1.4 Диэлектрики

Необходимо знать важнейшие электрические свойства диэлектриков. Следует знать виды электропроводности диэлектриков, частотную зависимость проводимости в соответствии с физической природой носителей заряда, природу поглощения электромагнитной энергии в диэлектрике. Необходимо знать электрофизические характеристики высокочастотных диэлектриков.

## 1.5 Конденсаторы

Следует уяснить связь химического состава и структуры конденсаторных материалов с их диэлектрическими и физико-химическими характеристиками. Необходимо знать виды диэлектрических материалов современной номенклатуры конденсаторов для электронной техники. Особое внимание следует обратить на области номинальных емкостей и напряжений керамических конденсаторов, конденсаторов с органическим диэлектриком и конденсаторов с оксидным диэлектриком. Необходимо знать классификацию конденсаторов, основные параметры и характеристики конденсаторов. Следует обратить внимание на выбор конденсаторов в зависимости от условий эксплуатации. Рекомендуется особое внимание уделить овладению навыками формирования требований к выбору конденсаторов с учетом технико-экономических показателей, допустимых нагрузок, влияния внешних факторов.

## 1.6 Активные диэлектрики и элементы функциональной электроники

Необходимо знать основные эффекты в активных диэлектриках. Особое внимание следует обратить на пьезоэлектрический и пироэлектрический эффекты. Важно знать направления функциональной электроники и элементы типовой модели функциональной электроники.

## 1.7 Магнитные материалы

Необходимо знать классификацию материалов по магнитным свойствам. Следует твердо уяснить природу ферромагнетизма, знать характеристики и параметры ферромагнетиков. Особое внимание следует уделить методике определения потерь в ферромагнетике, которые складываются из потерь на гистерезис, потерь на вихревые токи и потерь вследствие магнитной вязкости. Важно знать зависимость полных потерь в функции частоты и функции магнитной индукции. Необходимо знать магнитомягкие материалы и их разновидности. Особое внимание следует уделить полупроводниковым высокопроницаемым магнитным материалам, магнитодиэлектрикам, аморфным и нанокристаллическим магнитомягким материалам.

## 1.8 Полупроводниковые материалы

Необходимо знать механизм образования зонной структуры полупроводниковых материалов, особенности зонных диаграмм примесных полупроводников, отличие вырожденных полупроводников от невырожденных полупроводников. Необходимо четко представлять, что такое равновесная, неравновесная и избыточная концентрация носителей заряда, знать закон действующих масс и уметь его использовать для определения равновесных концентраций носителей заряда. Необходимо знать природу электропроводности собственных полупроводников и полупроводниковых химических соединений. Особое внимание следует обратить на применение полупроводниковых соединений.

При изучении разделов по магнитным и полупроводниковым материалам, резисторам, конденсаторам настоятельно рекомендуется использовать в качестве дополнительной литературы электронные ресурсы Internet: архив журнала «Силовая электроника» (www.power-e.ru/archive.php); архив журнала «Компоненты и технологии» (www.compitech.ru/html.cgi/arhiv).

# 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

## 2.1 Общие указания по выполнению заданий

Рабочая программа по дисциплине предусматривает выполнение компьютерной контрольной работы.

Контрольная работа содержит 10 заданий по следующим разделам курса:

- физико-химическое строение материалов;
- электропроводность металлов и сплавов;
- поляризованность и электропроводность диэлектриков, диэлектрические потери;
- намагниченность и магнитная проницаемость ферромагнетиков;
- ферромагнетики в переменных магнитных полях;
- собственные и примесные полупроводники;
- электропроводность полупроводников.

Приступая к решению задачи, необходимо установить, какие физические закономерности лежат в ее основе. С помощью формул, выражающих эти закономерности, следует найти решение задачи. Следует стремиться к получению решения в аналитическом виде: сначала необходимо записать исходные формулы, сделать соответствующие преобразования, получить конечные формулы, а затем подставлять в эти формулы числовые значения. Конечные формулы должны выражать искомые величины через величины, заданные в условии задачи. Если решение задачи в общем виде связано с громоздкими преобразованиями, то его целесообразно проводить, применяя числовые расчеты на промежуточных этапах. С целью исключения ошибок рекомендуется все промежуточные вычисления проводить в единицах измерения физических величин СИ.

Полученное решение необходимо всегда проверять каким-либо способом. Для аналитических решений необходимо выполнять проверку на соответствие размерностей.

При получении числового ответа следует обращать внимание на точность окончательного результата, которая не должна превышать точность исходных величин. Вычисления, как правило, достаточно делать с точностью до третьего знака, а в ряде случаев – до второго.

Некоторые задачи можно решить несколькими методами. Очень полезно проверить различные методы решения. Помимо того что это дает дополнительную тренировку, сопоставив решения, можно сделать вывод о том, какие методы решения являются наиболее рациональными. Всегда следует считать лучшим тот метод решения, который проще, то есть требует меньшего числа действий.

При возникновении затруднений в ходе решения задач следует ознакомиться с примерами выполнения типовых заданий по соответствующему разделу дисциплины.

## 2.2 Примеры выполнения типовых заданий контрольной работы

***Задание 1***. Вычислить период кристаллической решетки меди. Определить объем, приходящийся на один атом.

*Решение.* Рентгеновская плотность кристалла связана с периодом кубической решетки соотношением

$$\gamma = \frac{km}{a^3},$$

где $m$ – масса атома; $k$ – число атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку (кратность ячейки).

Масса атома $m = \frac{M}{N_{\text{A}}}$, где $M$ – молярная масса; $N_{\text{A}}$ – число Авогадро. Плотность меди $\gamma = 8{,}92 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, молярная масса меди $M = 63{,}546\ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$, а элементарная ячейка меди представляет собой гранецентрированный куб. В случае гранецентрированного куба $k = 4$.

Тогда $a = \sqrt[3]{\dfrac{kM}{\gamma N_\text{А}}} = \sqrt[3]{\dfrac{4 \cdot 63{,}546}{8{,}92 \cdot 10^3 \;\; \cdot 6{,}022 \cdot 10^{26}}} = 0{,}3617 \cdot 10^{-9}$ м.

На один атом решетки приходится объем

$$V_1 = \frac{a^3}{k} = \frac{\left(0{,}3617 \cdot 10^{-9}\right)^3}{4} = 1{,}18 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

***Задание 2.*** Определить изменение длины свободного пробега электронов при нагревании медного проводника от температуры $T_1 = 293$ К до температуры $T_2 = 1293$ К.

*Решение.* Согласно квантовой теории величина удельного сопротивления металлов связана с длиной свободного пробега электронов соотношением

$$\rho = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{h}{q_e^2 n^{\frac{2}{3}} \lambda},$$

где $q_e$ – заряд электрона; $\lambda$ – длина свободного пробега электрона; $n$ – концентрация свободных электронов; $h$ – постоянная Планка.

Концентрация свободных электронов в меди

$$n = \gamma \frac{N_\text{А}}{M},$$

где $\gamma$ – плотность меди; $N_\text{А}$ – число Авогадро; $M$ – молярная масса меди.

Подставляя выражение для концентрации свободных электронов в выражение для определения величины удельного сопротивления, получаем формулу для нахождения длины свободного пробега электронов в металле:

$$\lambda = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hM^{\frac{2}{3}}}{q_e^2 \left(\gamma N_\text{А}\right)^{\frac{2}{3}} \rho}.$$

Тогда при температуре $T_1 = 293$ К длина свободного пробега электронов составит $\lambda_1 = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hM^{\frac{2}{3}}}{q_e^2 \left(\gamma N_{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}} \rho_1}$, а при температуре $T_2 = 1293$ К длина свободного пробега электронов

$$\lambda_2 = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{hM^{\frac{2}{3}}}{q_e^2 \left(\gamma N_{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}} \rho_2},$$

где $\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \alpha_\rho \left(T_2 - T_1\right)\right)$ – удельное электрическое сопротивление меди при температуре $T_2 = 1293$ К; $\alpha_\rho = 4{,}3 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$ – температурный коэффициент удельного электрического сопротивления меди.

Подставляя числовые значения, находим:

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{8 \cdot 3{,}14}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot \left(63{,}546\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2 \left(8{,}92 \cdot 10^3 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{26}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 17 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 3{,}89 \cdot 10^{-8} \text{ м};$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \alpha_\rho \left(T_2 - T_1\right)\right) = 17 \cdot 10^{-9} \left(1 + 4{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1273 - 273\right)\right) =$$

$$= 90{,}1 \cdot 10^{-9} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{3}{8 \cdot 3{,}14}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \left(63{,}546\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2 \left(8{,}92 \cdot 10^3 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{26}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 90{,}1 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 0{,}73 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

***Задание 3***. Определить, во сколько раз изменится удельная теплопроводность $\lambda_{\text{т}}$ меди при изменении от $T_1 = 293$ К до $T_2 = 493$ К.

*Решение*. Согласно закону Видемана – Франца для металлов отношение коэффициента $\lambda_{\text{т}}$ теплопроводности к удельной электрической проводимости $\sigma$ пропорционально температуре:

$$\frac{\lambda_{\text{т}}}{\sigma} = LT,$$

где $L = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{q_e}\right) \approx 2{,}45 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом·К$^{-2}$ – число Лоренца; $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – удельная электрическая проводимость.

Отсюда следует, что $\lambda_{\text{т}_1}\rho_1 = LT_1$, $\lambda_{\text{т}_2}\rho_2 = LT_2$ или $\frac{\lambda_{\text{т}_1}\rho_1}{T_1} = \frac{\lambda_{\text{т}_2}\rho_2}{T_2}$.

Тогда $\frac{\lambda_{\text{т}_1}}{\lambda_{\text{т}_2}} = \frac{\rho_2 T_1}{\rho_1 T_2} = \frac{\left(1 + \alpha_\rho\left(T_2 - T_1\right)\right)T_1}{T_2}$.

Подставляя числовые значения, находим:

$$\frac{\lambda_{\text{т}_1}}{\lambda_{\text{т}_2}} = \frac{\left(1 + 4{,}3 \cdot 10^{-3}\left(493 - 293\right)\right) \cdot 293}{493} = 1{,}105.$$

***Задание 4.*** Вычислить интервал между соседними энергетическими уровнями свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов в металле $n = 2 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$.

*Решение.* При температуре $T = 0$ К распределение электронов по энергиям описывается выражением

$$dn = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2} m_e^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3}\sqrt{E}\,dE & \text{при } E < E_{\text{F}}(0), \\ 0 & \text{при } E > E_{\text{F}}(0). \end{cases}$$

Для решения воспользуемся этим выражением, переписав его в виде

$$\Delta n = \frac{\sqrt{2} m_e^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \Delta E,$$

где $\Delta E$ – разность энергий между ближайшими энергетическими уровнями; $\Delta n$ – изменение числа электронов при переходе на соседний уровень.

Согласно запрету Паули в каждом состоянии может находиться не более одного электрона, но так как электроны могут различаться проекцией спина $\left( \pm \frac{1}{2} \right)$, то на каждом энергетическом уровне будут находиться по два электрона с различной ориентацией спинов.

Следовательно, $\Delta n = 2$.

Энергия Ферми $E_{\text{F}}(0)$ при температуре $T = 0$ К определяется выражением:

$$E_{\text{F}}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( 3\pi^2 n \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Это соотношение позволяет при известной концентрации $n$ электронов найти энергию Ферми $E_{\text{F}}(0)$ или, наоборот, по известной энергии Ферми найти концентрацию свободных электронов в металле.

Подставляя выражение для $\Delta n$ в выражение для энергии Ферми и учитывая, что $\Delta n = 2$ и $1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, получаем интервал между соседними энергетическими уровнями свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К вблизи уровня Ферми:

$$\Delta E = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_e \left( 3\pi^2 n \right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot 3{,}14^2 \left( 1{,}05 \cdot 10^{-34} \right)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \left( 3 \cdot 3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{28} \right)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= 2{,}846 \cdot 10^{-47} \text{ Дж} = 1{,}78 \cdot 10^{-28} \text{ эВ}.$$

Такая ничтожно малая величина между соседними энергетическими уровнями свободных электронов позволяет считать энергетический спектр свободных электронов в металле квазинепрерывным.

***Задание 5.*** Определить среднее значение энергии свободных электронов в меди вблизи температуры $T = 0$ К.

*Решение.* Среднее значение энергии свободных электронов в металле определяется выражением

$$\langle E \rangle = \frac{\int\limits_0^\infty EF(E)\,dE}{\int\limits_0^\infty F(E)\,dE}.$$

При температуре $T = 0$ К функция $F(E)$ распределения свободных электронов по энергиям определяется выражением

$$dn = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}m_e^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{E}\,dE & \text{при } E < E_\mathrm{F}(0), \\ 0, & \text{при } E > E_\mathrm{F}(0), \end{cases}$$

поэтому верхний предел интегрирования следует заменить на $E_\mathrm{F}(0)$. Интегрируя, получаем

$$\langle E \rangle = \frac{\int\limits_0^{E_\mathrm{F}(0)} E^{\frac{3}{2}}\,dE}{\int\limits_0^{E_\mathrm{F}(0)} \sqrt{E}\,dE} = \frac{3}{5}E_\mathrm{F}(0).$$

Энергия $E_\mathrm{F}(0)$, которую могут иметь электроны в металле при температуре $T = 0$ К, связана с концентрацией свободных электронов соотношением

$$E_\mathrm{F}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Концентрация электронов может быть найдена по формуле

$$n = \gamma \frac{N_\text{A}}{M},$$

где $\gamma$ – плотность меди; $N_\text{A}$ – число Авогадро; $M$ – молярная масса меди.

Тогда формула для определения среднего значения энергии свободных электронов в меди вблизи температуры $T = 0$ К может быть записана в виде

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( 3\pi^2 \frac{\gamma N_\text{A}}{M} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Подставляя числовые значения $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, $N_\text{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $\gamma = 8{,}92 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $M = 63{,}546 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, определим числовое значение $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{\left(1{,}0546 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \left( 3 \cdot 3{,}14^2 \frac{8{,}92 \cdot 10^3 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}}{63{,}546 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 6{,}76 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4{,}22 \text{ эВ}.$$

***Задание 6.*** Вычислить максимальную энергию – энергию Ферми $E_\text{F}(0)$, которую могут иметь свободные электроны в металле (литий Li, натрий Na, калий K, рубидий Rb, цезий Cs, медь Cu, серебро Ag, золото Au) при температуре $T = 0$ К.

*Ответ*: $E_\text{F}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( 3\pi^2 \frac{\gamma N_\text{A}}{M} \right)^{\frac{2}{3}}$; $E_\text{F}^\text{Li}(0) = 4{,}72$ эВ; $E_\text{F}^\text{Na}(0) = 3{,}12$ эВ; $E_\text{F}^\text{K}(0) = 2{,}14$ эВ; $E_\text{F}^\text{Rb}(0) = 1{,}82$ эВ; $E_\text{F}^\text{Cs}(0) = 1{,}53$ эВ; $E_\text{F}^\text{Cu}(0) = 7{,}04$ эВ; $E_\text{F}^\text{Ag}(0) = 5{,}51$ эВ; $E_\text{F}^\text{Au}(0) = 5{,}51$ эВ.

***Задание 7.*** Определить минимальную волну де Бройля для свободных электронов в металле с простой кубической кристаллической решеткой при температуре $T = 0$ К, если на каждый атом кристалла приходится один свободный электрон, а период решетки равен $a$.

*Решение.* Длина $\lambda_{\text{Б}}$ волны де Бройля электрона связана с импульсом $p$ электрона соотношением $\lambda_{\text{Б}} = \dfrac{2\pi\hbar}{p}$. Следовательно, $\lambda_{\text{Б}}^{\min} = \dfrac{2\pi\hbar}{p_F}$, где $p_{\text{F}} = \sqrt{2m_e E_{\text{F}}(0)}$ – импульс Ферми (максимальный импульс, которым может обладать электрон при температуре $T = 0$ K).

Энергия Ферми $E_{\text{F}}(0)$ при температуре $T = 0$ K определяется выражением

$$E_{\text{F}}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

В кристалле с простой кубической решеткой на объем каждой элементарной ячейки приходится один атом и соответственно один свободный электрон. Поэтому концентрация свободных электронов определяется по формуле $n = a^{-3}$.

Тогда минимальная волна де Бройля для свободных электронов в металле с простой кубической кристаллической решеткой при температуре $T = 0$ K определится выражением

$$\lambda_{\text{Б}}^{\min} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e \dfrac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 a^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}}} = 2{,}03\ a.$$

Полученный результат означает, что длина волны де Бройля свободных электронов в металле превышает среднее расстояние между электронами. Это служит еще одним подтверждением, что газ свободных электронов в металле является вырожденным.

***Задание 8.*** Определить среднюю скорость свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ K, если энергия Ферми для этого металла $E_{\text{F}}(0) = 5{,}51$ эВ.

*Решение.* Скорость свободных электронов в металле связана с их кинетической энергией соотношением

$$\upsilon(E)=\sqrt{\frac{2E}{m_e}}=\sqrt{\frac{2}{m_e}}\sqrt{E}\,.$$

Среднее значение любой физической величины $f$, зависящей от энергии $E$, определяется соотношением

$$\langle f\rangle=\frac{\int\limits_0^\infty f(E)F(E)dE}{\int\limits_0^\infty F(E)dE},$$

где $F(E)$ – функция распределения свободных электронов по энергиям.

Полагая $f(E)=\upsilon(E)$, находим:

$$\langle \upsilon\rangle=\frac{\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{m_e}}\sqrt{E}F(E)dE}{\int\limits_0^\infty F(E)dE}.$$

При температуре $T=0$ К верхний предел интегрирования следует заменить на $E_\mathrm{F}(0)$ и тогда

$$\langle \upsilon\rangle=\sqrt{\frac{2}{m_e}}\frac{\int\limits_0^{E_\mathrm{F}(0)}\sqrt{E}\sqrt{E}dE}{\int\limits_0^{E_\mathrm{F}(0)}\sqrt{E}dE}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2E_\mathrm{F}(0)}{m_e}}=\frac{3}{4}\upsilon_\mathrm{F},$$

где $\upsilon_\mathrm{F}$ – скорость Ферми (максимальная скорость электронов в металле при температуре $T=0$ К).

Подставляя числовые значения $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $E_F(0)=$ $=5{,}51$ эВ $=5{,}51\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж, находим среднюю скорость свободных электронов в металле при температуре $T = 0\ \text{К}$, для которого энергия Ферми $E_{\text{F}}(0) = 5{,}51\ \text{эВ}$:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}51 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}044 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

***Задание 9.*** Определить число свободных электронов, приходящихся на один атом калия, если энергия Ферми калия $E_{\text{F}} = 1{,}9\ \text{эВ}$, а его плотность $\gamma = 862\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

*Решение.* Энергия Ферми при достаточно низких температурах слабо зависит от температуры. Поскольку в широком диапазоне температур, вплоть до температуры плавления калия, выполняется условие $kT << E_{\text{F}}(0)$, то с достаточной точностью можно считать, что

$$E_{\text{F}} \approx E_{\text{F}}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Если принять, что на один атом калия приходится $\eta$ свободных электронов, то концентрация $n$ свободных электронов и концентрация $n_{\text{ат}}$ атомов калия будут определяться соотношением $n = \eta n_{\text{ат}}$.

Найдем концентрацию атомов калия $n_{\text{ат}}$. Относительная атомная масса калия $A_r = 39{,}1$, а молярная масса калия $M = 0{,}001 \cdot A_r = 0{,}001 \cdot 39{,}1 = 0{,}0391\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Число молей в единице объема $V$ вещества определяется выражением $V = \frac{\gamma}{M}$, а количество частиц в одном моле – постоянной Авогадро $N_{\text{A}}$. Следовательно, концентрация атомов калия $n_{\text{ат}} = \frac{\gamma}{M} N_{\text{A}}$, а концентрация свободных электронов

$$n = \eta \frac{\gamma}{M} N_{\text{A}}.$$

Подставляя выражение для концентрации свободных электронов в выражение для энергии Ферми, получаем

$$E_{\text{F}} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\eta\frac{\gamma}{M}N_{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Находим выражение для определения числа свободных электронов, приходящихся на один атом калия:

$$\eta = \frac{M}{3\pi^2\gamma N_{\text{A}}}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}E_{\text{F}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя числовые значения $M = 0{,}0391\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, $\gamma = 862\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $N_{\text{A}} = 6{,}022\cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{кг}$, $\hbar = 1{,}0546\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}$, $E_{\text{F}} = 1{,}9\ \text{эВ} = 1{,}9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 3{,}04\cdot 10^{-19}\ \text{Дж}$, находим число $\eta$ свободных электронов, приходящихся на один атом калия:

$$\eta = \frac{0{,}0391}{3\cdot 3{,}14^2\cdot 862\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}}\left(\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{\left(1{,}0546\cdot 10^{-34}\right)^2}\cdot 3{,}04\cdot 10^{-19}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}894.$$

Таким образом, концентрация свободных электронов в металле может быть сравнима с концентрацией атомов.

***Задание 10***. Вычислить длину свободного пробега электронов в меди при $T = 300\ \text{К}$, если ее удельное сопротивление при этой температуре равно $17\cdot 10^{-9}\ \text{Ом}\cdot\text{м}$.

*Ответ:* $\lambda = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{hA^{\frac{2}{3}}}{q_e^2\left(\gamma N_{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}}\rho}$; $\quad \lambda = 3{,}89\cdot 10^{-8}\ \text{м}$.

***Задание 11.*** Определить количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку решетки в кристаллах с простой, объемно-центрированной и гранецентрированной кубической решеткой.

*Решение.* В простой кубической решетке атомы расположены в вершинах куба. В кубической объемно-центрированной решетке атомы расположены в вершинах куба, а один атом – в центре его объема. В кубической гранецентрированной решетке атомы расположены в вершинах куба и в центре каждой грани.

Оперируя с элементарной ячейкой, необходимо иметь в виду, что в реальном кристалле такая ячейка окружена со всех сторон другими ячейками и поэтому не все атомы, относящиеся к рассматриваемой ячейке, принадлежат только этой ячейке.

На простую кубическую решетку приходится один атом как сумма от долей атомов, находящихся в вершинах куба: $n = \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8 = 1$.

На объемно-центрированную кубическую решетку приходятся два атома: один в центре и один как сумма от долей атомов, находящихся в вершинах куба: $n = 1 + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8 = 2$.

На гранецентрированную кубическую решетку приходятся четыре атома: один как сумма от долей атомов, находящихся в вершинах куба, и три атома как сумма от долей атомов, находящихся в центре каждой грани: $n = \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = 4$.

Напомним*:* количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку решетки, называют базисом решетки; координационное число $k$ показывает количество атомов, находящихся на наиболее близком и равном расстоянии от любого выбранного атома *в решетке* (для простой кубической решетки и для объемно-центрированной кубической решетки $k = 8$; для гранецентрированной кубической решетки и для гексагональной плотно упакованной решетки $k = 12$).

***Задание 12.*** Определить коэффициент компактности в кристаллах с объемно-центрированной кубической решеткой.

*Решение.* Коэффициент компактности решетки равен отношению суммарного объема атомов, входящих в решетку, к объему решетки:

$$\eta = \frac{4\pi R^3 n}{3V},$$

где $R$ – радиус атома (иона); $n$ – базис решетки; $V$ – объем элементарной ячейки.

Определим период кристаллической решетки (длину ребра элементарной кристаллической решетки), учитывая, что атомы объемно-центрированной кубической решетки соприкасаются по диагонали $d$, длина которой равна 4 атомным радиусам: $d = 4R$.

Длина диагонали куба определяется выражением $d = a\sqrt{3}$, где $a$ – длина ребра куба. Тогда $a\sqrt{3} = 4R$, откуда длина ребра куба $a = \frac{4R}{\sqrt{3}}$, а объем элементарной ячейки $V = \left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Для объемно-центрированной кубической решетки базис решетки $n = 2$.

Тогда коэффициент компактности объемно-центрированной кубической решетки

$$\eta_{\text{о.ц.к}} = \frac{4\pi R^3 n}{3\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\pi n\left(\sqrt{3}\right)^3}{48} = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3}{48} = 0{,}68.$$

***Задание 13.*** Определить коэффициенты компактности в кристаллах с простой и гранецентрированной кубической решеткой.

*Ответ.* Коэффициент компактности для кристаллов с простой кубической решеткой $\eta_{\text{к}} = \frac{4\pi R^3 n}{3\left(2R\right)^3} = 0{,}52$.

Коэффициент компактности для кристаллов с гранецентрированной кубической решеткой $\eta_{\text{г.ц.к}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0{,}74$.

***Задание 14.*** В проводнике сечением 1 мм$^2$ протекает ток силой 1 А. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов в направлении электрического поля, если в 1 м$^3$ проводника содержится $10^{29}$ электронов проводимости.

*Решение.* Плотность тока определяется выражением $j = nq_e\upsilon$, где $n$ – концентрация электронов; $q_e$ – заряд электрона; $\upsilon$ – скорость упорядоченного движения электронов в направлении поля. Плотность тока $j$ связана с силой тока $I$ соотношением $j = \dfrac{I}{S}$, где $S$ – площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно, средняя скорость упорядоченного движения электронов в направлении электрического поля:

$$\upsilon = \frac{I}{nq_eS} = \frac{1}{10^{29}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 10^{-6}} = 62{,}5\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

***Задание 15***. Определить температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_l$ и удлинение проволоки из нихрома, если известно, что при изменении температуры от 293 до 1273 К электрическое сопротивление проволоки изменяется от 50 до 56,6 Ом. Длина проволоки в холодном состоянии $l = 50$ м. Температурный коэффициент удельного сопротивления нихрома принять равным $15\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

*Решение.* Температурный коэффициент сопротивления проволоки

$$\alpha_R = \frac{\Delta R}{R_0\cdot\Delta T} = \frac{R_1 - R_0}{R_0\left(T_1 - T_0\right)} = \frac{56{,}6 - 50{,}0}{50{,}0\left(1273 - 293\right)} = 13{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}.$$

Воспользуемся известной формулой, связывающей температурный коэффициент удельного сопротивления $\alpha_\rho$, температурный коэффициент сопротивления $\alpha_R$ и температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_l$:

$$\alpha_\rho = \alpha_R + \alpha_l.$$

Тогда

$$\alpha_l = \alpha_\rho - \alpha_R = 15 \cdot 10^{-5} - 13{,}5 \cdot 10^{-5} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}.$$

Удлинение проволоки

$$\Delta l = \alpha_l l \cdot \Delta T = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 50{,}0 \cdot \left(1273 - 293\right) = 0{,}735\ \text{м}.$$

***Задание 16.*** Сопротивление проволоки при температуре $T_2 = 1279$ К в 3 раза больше, чем при температуре $T_1 = 293$ К. Найти температурный коэффициент удельного сопротивления материала проволоки.

*Решение.* Сопротивление проволоки при температуре $T_1$ определяется выражением $R_1 = R_0\left(1 + \alpha_\rho T_1\right)$, где $R_0$ – сопротивление проволоки при температуре $T_0$, например при $T_0 = 273$ К; $\alpha_\rho$ – температурный коэффициент удельного сопротивления материала проволоки. Сопротивление проволоки при температуре $T_2$ будет $R_2 = R_0\left(1 + \alpha_\rho T_2\right)$. Тогда $\dfrac{R_2}{R_1} = n = \dfrac{1 + \alpha_\rho T_2}{1 + \alpha_\rho T_1}$, откуда температурный коэффициент удельного сопротивления $\alpha_\rho = \dfrac{n - 1}{T_2 - nT_1} =$

$$= \frac{3 - 1}{1279 - 3 \cdot 293} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}.$$

***Задание 17.*** Определить, во сколько раз сопротивление $R_\sim$ медного провода круглого сечения диаметром $d = 1$ мм на частоте $f = 1$ МГц больше сопротивления $R_0$ этого провода постоянному электрическому току.

*Решение.* Глубина $\Delta$ проникновения электромагнитного поля в проводник связана с физическими параметрами материала проводника соотношением $\Delta = \sqrt{\dfrac{\rho}{\pi\mu_0\mu f}}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная; $\mu = 1$ – магнитная проницаемость меди (медь является диамагнетиком); $f$ – частота переменного тока; $\rho = 17 \cdot 10^{-9}$ Ом·м – удельное сопротивление меди. Тогда для меди на частоте $f = 1$ МГц глубина проникновения электромагнитного поля $\Delta = \sqrt{\dfrac{17 \cdot 10^{-9}}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10^{6}}} = 6{,}57 \cdot 10^{-5}$ м.

Поскольку $\Delta \ll d$, имеет место сильно выраженный поверхностный эффект. В случае сильно выраженного поверхностного эффекта коэффициент увеличения сопротивления провода круглого сечения определяется выражением

$$K_R = \frac{d}{4\Delta} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}} = 3{,}8.$$

***Задание 18.*** Вычислить глубину $\Delta_{f_1}$ проникновения электромагнитного поля в медный проводник на частоте $f_1 = 400$ Гц и глубину $\Delta_{f_2}$ проникновения электромагнитного поля в медный проводник на частоте $f_2 = 100 \cdot 10^3$ Гц.

*Ответ*: $\Delta_{f_1} = 3{,}283 \cdot 10^{-3}$ м; $\Delta_{f_2} = 20{,}76 \cdot 10^{-3}$ м.

***Задание 19.*** Удельное сопротивление меди, содержащей 0,3 ат.% олова при температуре $T = 300$ К, составляет $0{,}0258 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Определить отношение $\beta = \dfrac{\rho_{300\,\text{К}}}{\rho_{4{,}2\,\text{К}}}$ удельных сопротивлений меди при температуре $T_1 = 300$ К и $T_2 = 4{,}2$ К.

*Решение.* Согласно правилу Маттисена удельное сопротивление реальных металлов представляет собой сумму двух составляющих:

$$\rho = \rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ост}},$$

где $\rho_т$ – тепловая составляющая удельного электрического сопротивления, обусловленная рассеянием электронов при тепловых колебаниях узлов кристаллической решетки; $\rho_{ост}$ – остаточное удельное электрическое сопротивление, связанное с рассеянием электронов на неоднородностях структуры.

При температуре $T_1 = 300$ К тепловая составляющая $\rho_т = = 0{,}0168 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ м. Вблизи температуры $T = 0$ К удельное электрическое сопротивление реального металлического проводника равно остаточному удельному сопротивлению.

Тогда $\beta = \dfrac{\rho_{300\,К}}{\rho_{4,2\,К}} = \dfrac{\rho_{300\,К}}{\rho_{ост}} = \dfrac{\rho_{300\,К}}{\rho_{300\,К} - \rho_т} = \dfrac{0{,}0258}{0{,}0258 - 0{,}0168} = 2{,}87$.

***Задание 20.*** Удельные электрические сопротивления чистой меди при температуре $T_1 = 293$ К и при температуре $T_2 = 373$ К составляют $\rho_1 = 0{,}0168 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ м и $\rho_2 = 0{,}0226 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ м соответственно. Полагая, что в этом диапазоне температур зависимость $\rho = f(T)$ близка к линейной, определить значение температурного коэффициента удельного электрического сопротивления $\alpha_\rho$.

*Решение.* В диапазоне температур, где зависимость $\rho = f(T)$ близка к линейной, величина удельного электрического сопротивления рассчитывается по формуле

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha_\rho (T - T_0)\right],$$

где $\rho_0$ – удельное электрическое сопротивление при начальной температуре, например при $T_0 = 273$ К.

Тогда при температуре $T_1 = 293$ К удельное электрическое сопротивление $\rho_1 = \rho_0 \left[1 + \alpha_\rho (T_1 - T_0)\right]$, а при температуре $T_2 = 373$ К удельное электрическое сопротивление $\rho_2 = = \rho_0 \left[1 + \alpha_\rho (T_2 - T_0)\right]$.

Используя выражение для удельного электрического сопротивления $\rho_1$ при температуре $T_1 = 293$ К и выражение для удельного электрического сопротивления $\rho_2$ при температуре $T_2 = 373$ К, можно записать

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 + \alpha_\rho \left(T_1 - T_0\right)}{1 + \alpha_\rho \left(T_2 - T_0\right)},$$

откуда

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \left(T_2 - T_0\right) - \rho_2 \left(T_1 - T_0\right)}.$$

Подставляя числовые значения, получим значение температурного коэффициента удельного электрического сопротивления $\alpha_\rho$:

$$\alpha_\rho = \frac{0,0226 - 0,0168}{0,0168\left(373 - 273\right) - 0,0226\left(293 - 273\right)} = 4,72 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}.$$

***Задание 21***. Имеются проводниковые материалы, прошедшие одинаковую технологическую обработку. Химический состав первого материала Cu + 2 ат. % Zn, а состав второго материала – Cu + 0,5 ат. % As. Определить, какой из материалов имеет более высокую удельную проводимость.

*Решение.* Согласно правилу Линде, изменение остаточного удельного сопротивления на 1 ат. % примеси составляет $\Delta\rho_{\text{ост}} = b\left(\Delta Z\right)^2$, где $b$ – константа, зависящая от природы металла и периода, который занимает в периодической системе элементов атом примеси; $\Delta Z$ – разность валентностей металла-растворителя (меди) и атома примеси. Константа $b$ одинакова для атомов примесей одного периода периодической системы элементов, например для цинка и мышьяка. Так как медь одновалентна, то при введении цинка $\Delta Z = 1$, а при введении мышьяка $\Delta Z = 4$. Следует принять во внимание, что остаточное удельное сопротивление линейно зависит от концентрации $x$ атомов примеси. Таким образом, $\rho = \rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ост}} = \rho_{\text{т}} + b\left(\Delta Z\right)^2 x$, откуда $\rho_2 - \rho_1 = = b\left(\Delta Z_1\right)^2 x_{\text{As}} - b\left(\Delta Z_2\right)^2 x_{\text{Zn}}$. Подставляя числовые значения, получаем:

$$\rho_2 - \rho_1 = b(4)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} - b(1)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}06b.$$

Таким образом, первый материал обладает меньшим удельным сопротивлением, то есть имеет более высокую удельную проводимость.

***Задание 22.*** Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T_0 = 0$ К. Энергию Ферми принять равной 1,0 эВ.

*Ответ*: $n = 4{,}47 \cdot 10^{27}$ м$^{-3}$.

***Задание 23.*** Определить отношение концентраций свободных электронов в литии и цезии $\frac{n_{\mathrm{Li}}}{n_{\mathrm{Cs}}}$ при температуре $T_0 = 0$ К, если известно, что уровень Ферми лития $E_{\mathrm{F}}^{\mathrm{Li}} = 4{,}72$ эВ, а уровень Ферми цезия $E_{\mathrm{F}}^{\mathrm{Cs}} = 1{,}53$ эВ.

*Ответ*: $\frac{n_{\mathrm{Li}}}{n_{\mathrm{Cs}}} = 5{,}41$.

***Задание 24.*** Определить число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия, если энергия Ферми натрия $E_{\mathrm{F}} = 3{,}12$ эВ, а плотность натрия $\gamma = 970\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

*Ответ*: $\eta = 0{,}9$.

***Задание 25.*** Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом алюминия, больше числа свободных электронов, приходящихся на один атом меди? Уровень Ферми алюминия $E_{\mathrm{F}}^{\mathrm{Al}} = 11{,}7$ эВ, уровень Ферми меди $E_{\mathrm{F}}^{\mathrm{Cu}} = 7{,}0$ эВ.

*Ответ*: Число свободных электронов, приходящихся на один атом алюминия, больше числа свободных электронов, приходящихся на один атом меди, в 3 раза.

***Задание 26.*** Определить максимальную скорость $V_{\max}$ электронов в металле при температуре $T_0 = 0$ К, если уровень Ферми $E_{\mathrm{F}} = 5{,}0$ эВ.

*Ответ*: $V_{\max} = 1{,}32 \cdot 10^6 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

***Задание 27.*** Определить суммарную кинетическую энергию свободных электронов золота, полагая, что на каждый атом приходится один свободный электрон.

*Ответ*: $E = 341{,}2 \cdot 10^3 \ \dfrac{\text{Дж}}{\text{см}^3}$.

***Задание 28***. Вычислить поляризованность монокристалла каменной соли, полагая, что смещение ионов под действием электрического поля от положения равновесия составляет 1 % расстояния между ближайшими соседними ионами. Элементарная ячейка кристалла имеет форму куба, расстояние между соседними ионами $a = 0{,}28 \cdot 10^{-9}$ м. Определить напряженность электрического поля, воздействующего на монокристалл каменной соли, если ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 5{,}65$. Вычислить коэффициент $k_{\text{упр}}$ упругой связи ионов в кристалле, полагая, что напряженность внутреннего электрического поля равна напряженности внешнего электрического поля.

*Решение.* Поляризованность $P$ диэлектрика определяется как отношение электрического момента $dp$ элемента диэлектрика к объему $dV$ этого диэлектрика: $P = \dfrac{dp}{dV}$. Если выбрать $dV = a^3$, то $dp = q \cdot \Delta x$, где $q$ – заряд иона, равный заряду электрона $q_e$; $\Delta x$ – смещение ионов под действием электрического поля.

Тогда $P = \dfrac{q_e \cdot \Delta x}{a^3} = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}28 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-2}}{\left(0{,}28 \cdot 10^{-9}\right)^3} = 0{,}0204 \ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}}$.

Для большинства диэлектриков связь поляризованности $P$ диэлектрика и напряженности $E$ электрического поля можно считать линейной:

$$P = \varepsilon_0 \left(\varepsilon - 1\right) E .$$

Откуда $E = \dfrac{P}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon - 1\right)} = \dfrac{0{,}0204}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(5{,}65 - 1\right)} = 495{,}7 \cdot 10^6 \ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Так как смещению ионов под действием электрического поля препятствуют силы упругой связи, то в состоянии равновесия $qE = k_{\text{упр}} \Delta x$.

Отсюда $k_{\text{упр}} = \dfrac{qE}{\Delta x} = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 495{,}7 \cdot 10^6}{0{,}28 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-2}} = 28{,}33 \ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

***Задание 29.*** Композиционный керамический материал изготовлен на основе двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 40$ и $\varepsilon_2 = 80$. Предполагая хаотическое распределение компонентов, определить объемные концентрации компонентов и диэлектрическую проницаемость композиционного диэлектрика, если температурные коэффициенты диэлектрической проницаемости диэлектриков $\alpha_{\varepsilon_1} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$, $\alpha_{\varepsilon 2} = -15 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$, а температурный коэффициент диэлектрической проницаемости композиционного керамического материала $\alpha_\varepsilon = 0\ \text{К}^{-1}$.

*Решение.* Диэлектрическую проницаемость $\varepsilon$ сложных диэлектриков, представляющих собой смесь химически не взаимодействующих друг с другом компонентов с различными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, можно в первом приближении (при небольшом различии $\varepsilon$ компонентов) определить на основании уравнения Лихтенеккера.

Если оба компонента распределены хаотически, то уравнение Лихтенеккера имеет вид

$$\ln\varepsilon = \theta_1 \cdot \ln\varepsilon_1 + \theta_2 \cdot \ln\varepsilon_2 ,$$

где $\theta_1$ – объемная концентрация диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$; $\theta_2$ – объемная концентрация диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$; $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

Температурный коэффициент диэлектрической проницаемости сложного диэлектрика можно определить дифференцированием уравнения Лихтенеккера по температуре: $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{\theta_1}{\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dT} + \frac{\theta_2}{\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{dT}$ или $\alpha_\varepsilon = \theta_1\alpha_{\varepsilon_1} + \theta_2\alpha_{\varepsilon_2}$.

Решая систему уравнений $0 = \theta_1\alpha_{\varepsilon_1} + \theta_2\alpha_{\varepsilon_2}$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$, находим:

объемную концентрацию диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$

$$\theta_1 = \frac{\alpha_{\varepsilon_2}}{\alpha_{\varepsilon_2} - \alpha_{\varepsilon_1}} = \frac{-15\cdot 10^{-4}}{-15\cdot 10^{-4} - 2\cdot 10^{-4}} = 0{,}882;$$

объемную концентрацию диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$

$$\theta_2 = 1 - \theta_1 = 1 - 0{,}882 = 0{,}118;$$

диэлектрическую проницаемость $\varepsilon$ композиционного диэлектрика

$$\varepsilon = e^{\left(\theta_1\cdot\ln\varepsilon_1 + \theta_2\cdot\ln\varepsilon_2\right)} = 2{,}72^{\left(0{,}882\cdot\ln 40 + 0{,}118\cdot\ln 80\right)} = 43{,}53.$$

***Задание 30.*** Между плоскими электродами площадью $S = 2\cdot 10^{-4}$ м$^2$ размещены соединенные последовательно две пластины из различных диэлектрических материалов. Параметры одного из диэлектриков: диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 2$, удельное электрическое сопротивление $\rho_1 = 10^6$ Ом$\cdot$м, толщина $d_1 = 0{,}5\cdot 10^{-2}$ м. Параметры второго диэлектрика: диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = 3$, удельное электрическое сопротивление $\rho_2 = 10^8$ Ом$\cdot$м, толщина $d_2 = 2\cdot 10^{-2}$ м. В момент времени $t = 0$ к электродам подключается постоянное напряжение $U_= = 1{,}6\cdot 10^3$ В. Определить напряженность электрического поля в диэлектриках в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_\infty \to \infty$. Определить напряженность электрического поля в диэлектриках при $t_\infty \to \infty$, если к электродам приложено переменное напряжение $U_\sim = 16$ В частотой $f = 5 \cdot 10^6$ Гц.

*Решение.* При постоянном напряжении в момент времени $t_0 = 0$ напряженность электрического поля в обоих диэлектриках $E_{1=} = E_{2=} = 0$, так как поляризация в них еще не произошла.

В общем случае распределение напряжения между слоями диэлектриков определяется модулями полных сопротивлений слоев:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\left(\sqrt{\left(X_{C_1}^{-1}\right)^2 + \frac{1}{R_1^2}}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\left(X_{C_2}^{-1}\right)^2 + \frac{1}{R_2^2}}\right)^{-1}} = \frac{\sqrt{\left(X_{C_2}^{-1}\right)^2 + \frac{1}{R_2^2}}}{\sqrt{\left(X_{C_1}^{-1}\right)^2 + \frac{1}{R_1^2}}},$$

где $R_1, R_2$ – активные сопротивления слоев слоистого диэлектрика; $X_{C_1}, X_{C_2}$ – емкостные сопротивления слоев слоистого диэлектрика.

При $t_\infty \to \infty$ распределение постоянного напряжения между пластинами диэлектриков определяется их активными сопротивлениями $R_1$ и $R_2$: $\frac{U_{1=}}{U_{2=}} = \frac{R_1}{R_2}$. В случае плоского образца материала диэлектрика, расположенного в однородном электрическом поле, объемное электрическое сопротивление $R$ образца рассчитывается по формуле

$$R = \rho \frac{d}{S},$$

где $\rho$ – удельное объемное электрическое сопротивление, Ом$\cdot$м; $d$ – толщина образца, м; $S$ – площадь электрода, м$^2$.

Тогда с учетом равенства $U_= = U_{1=} + U_{2_=}$ получим

$$\frac{U_{1=}}{U_{2_=}} = \frac{U_{1_=}}{U_= - U_{1=}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1 d_1}{\rho_2 d_2} = \frac{10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 0,25 \cdot 10^{-2}.$$

Находим падение напряжения $U_{1=}$ в слое диэлектрика толщиной $d_1$:

$$U_{1=} = \frac{0,25 \cdot 10^{-2} U_{=}}{1 + 0,25 \cdot 10^{-2}} = \frac{0,25 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{3}}{1 + 0,25 \cdot 10^{-2}} = 3,99 \text{ В}.$$

Падение напряжения $U_{2=}$ в слое диэлектрика толщиной $d_2$

$$U_{2=} = U_{=} - U_{1=} = 1,6 \cdot 10^{3} - 3,99 = 1,596 \cdot 10^{3} \text{ В}.$$

Определим напряженности электрического поля в каждом из диэлектриков:

$$E_{1=} = \frac{U_{1=}}{d_1} = \frac{3,99}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 798 \ \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_{2=} = \frac{U_{2=}}{d_2} = \frac{1,596 \cdot 10^{3}}{2 \cdot 10^{-2}} = 79,8 \cdot 10^{3} \ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Определим емкостные сопротивления слоев диэлектрика:

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{d_1}{2\pi f \, \varepsilon_0 \varepsilon S} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{6} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 4,498 \cdot 10^{4} \text{ Ом};$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{d_2}{2\pi f \, \varepsilon_0 \varepsilon S} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{6} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 11,995 \cdot 10^{4} \text{ Ом}.$$

Определим объемные сопротивления слоев диэлектриков:

$$R_1 = \rho_1 \frac{d_1}{S} = 10^{6} \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 25 \cdot 10^{6} \text{ Ом};$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{d_2}{S} = 10^{8} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^{10} \text{ Ом}.$$

Так как $X_{C_1} \ll R_1$ и $X_{C_2} \ll R_2$, то $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_{C_1}}{X_{C_2}}$, и тогда

$$\frac{U_{1\sim}}{U_{2\sim}} = \frac{U_{1\sim}}{U_{\sim} - U_{1\sim}} = \frac{X_{C_1}}{X_{C_2}} = \frac{4,498 \cdot 10^{4}}{11,995 \cdot 10^{4}} = 0,375,$$

откуда

$$U_{1\sim} = \frac{0{,}375U_{\sim}}{1+0{,}375} = \frac{0{,}37516}{1+0{,}375} = 4{,}36\ \text{В};$$

$$U_{2\sim} = U_{\sim} - U_{1\sim} = 16 - 4{,}36 = 11{,}64\ \text{В}.$$

Теперь можем определить напряженности электрического поля в диэлектриках при переменном напряжении $U_{\sim} = 16$ В частотой $f = 5\cdot 10^6$ Гц:

$$E_{1\sim} = \frac{U_{1\sim}}{d_1} = \frac{4{,}36}{0{,}5\cdot 10^{-2}} = 872\ \frac{\text{В}}{\text{м}};\quad E_{2\sim} = \frac{U_{2\sim}}{d_2} = \frac{11{,}64}{2\cdot 10^{-2}} = 582\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

***Задание 31.*** При изменении температуры от $T_1 = 333$ К до $T_2 = 400$ К удельное электрическое сопротивление фарфора уменьшается от значения $\rho_1 = 10^{13}$ Ом·м до значения $\rho_2 = 10^{11}$ Ом·м. Определить температурный коэффициент удельного электрического сопротивления $\alpha_\rho$ и удельное электрическое сопротивление $\rho$ фарфора при температуре $T_3 = 293$ К, полагая коэффициент $\alpha_\rho$ постоянным в рассматриваемом диапазоне температур.

*Решение.* При рассмотрении зависимости удельного электрического сопротивления $\rho$ от температуры можно использовать приближенную формулу вида $\rho = \rho_0 \exp\left[\alpha_\rho\left(T - T_0\right)\right]$, где $\rho_0$ – удельное объемное электрическое сопротивление при температуре $T = T_0$, например при температуре $T_0 = 273$ К; $\alpha_\rho$ – температурный коэффициент удельного электрического сопротивления.

Тогда при температуре $T_1 = 333$ К удельное электрическое сопротивление фарфора $\rho_1 = \rho_0 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_1 - T_0\right)\right]$, а при температуре $T_2 = 400$ К – $\rho_2 = \rho_0 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_2 - T_0\right)\right]$.

Следовательно, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{\rho_0 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_2 - T_0\right)\right]}{\rho_0 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_1 - T_0\right)\right]} = \exp\left[\alpha_\rho\left(T_2 - T_1\right)\right]$,

откуда получим выражение для определения удельного электрического сопротивления $\alpha_\rho = \dfrac{1}{T_2 - T_1} \ln \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$.

Подставляя числовые значения, получаем значение температурного коэффициента удельного электрического сопротивления фарфора:

$$\alpha_\rho = \frac{1}{400 - 333} \ln \frac{10^{11}}{10^{13}} = -0,0687 \ \text{К}^{-1}.$$

Определим удельное электрическое сопротивление $\rho_3$ фарфора при температуре $T_3 = 293$ К:

$$\rho_3 = \rho_1 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_3 - T_1\right)\right] =$$

$$= 10^{13} \exp\left[-0,0687\left(293 - 333\right)\right] = 1,56 \cdot 10^{14} \ \text{Ом} \cdot \text{м}$$

или

$$\rho_3 = \rho_2 \exp\left[\alpha_\rho\left(T_3 - T_2\right)\right] =$$

$$= 10^{11} \exp\left[-0,0687\left(293 - 400\right)\right] = 1,56 \cdot 10^{14} \ \text{Ом} \cdot \text{м}$$

***Задание 32.*** При температуре $T_1 = 293$ К тангенс угла диэлектрических потерь ультрафарфора $\mathrm{tg}\delta_{T_1} = 5 \cdot 10^{-4}$, а при температуре $T_2 = 373$ К тангенс угла диэлектрических потерь $\mathrm{tg}\delta_{T_2} = 10 \cdot 10^{-4}$. Определить $\mathrm{tg}\delta_{T_3}$ ультрафарфора при температуре $T_3 = 473$ К. Изменением диэлектрической проницаемости $\varepsilon$ ультрафарфора в рассматриваемом диапазоне температур пренебречь.

*Решение.* Потери в ультрафарфоре обусловлены сквозной электропроводностью, поэтому тангенс угла диэлектрических потерь возрастает с температурой по экспоненциальному закону: $\mathrm{tg}\delta_T = \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T - T_0\right)\right]$, где $\mathrm{tg}\delta_{T_0}$ – тангенс угла диэлектрических потерь при температуре $T_0$, например при $T_0 = 273$ К; $\alpha_{\mathrm{tg}\delta}$ – температурный коэффициент $\mathrm{tg}\delta$.

Температурный коэффициент угла диэлектрических потерь $\alpha_{\mathrm{tg}\delta}$ найдем из выражения

$$\alpha_{\mathrm{tg}\delta} = \frac{\ln\left(\mathrm{tg}\delta_{T_2}\right) - \ln\left(\mathrm{tg}\delta_{T_1}\right)}{T_2 - T_1} = \frac{\ln\left(10 \cdot 10^{-4}\right) - \ln\left(5 \cdot 10^{-4}\right)}{373 - 293} = 8,66 \cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}.$$

Тангенс угла диэлектрических потерь ультрафарфора при температуре $T_3 = 473$ К:

$$\mathrm{tg}\delta_{T_3} = \mathrm{tg}\delta_{T_1} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T_3 - T_1\right)\right] =$$
$$= 5 \cdot 10^{-4} \exp\left[8,66 \cdot 10^{-3}\left(473 - 293\right)\right] = 23,76 \cdot 10^{-4}.$$

***Задание 33.*** Между латунными электродами площадью $S$ помещена керамическая пластина толщиной $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м, диэлектрическая проницаемость керамической пластины $\varepsilon = 7$, тангенс угла диэлектрических потерь при температуре $T_0 = 293$ К $\mathrm{tg}\delta_{T_0} = 2 \cdot 10^{-4}$, температурный коэффициент угла диэлектрических потерь $\alpha_{\mathrm{tg}\delta} = 5 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Определить допустимое напряжение $U$ между электродами на частоте $f = 5 \cdot 10^{6}$ Гц, если температура нагрева керамической пластины в электрическом поле не превышает $T_1 = 373$ К. Коэффициент теплоотдачи от диэлектрика во внешнюю среду $\sigma = 10 \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, температура окружающей среды $T_{\text{окр}} = 303$ К.

*Решение.* В керамических материалах с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon < 10$ преобладающими являются потери сквозной электропроводности. Диэлектрические потери (электрическую мощность, затрачиваемую на нагрев диэлектрика, находящегося в электрическом поле) можно рассчитать по формуле

$$P = U^2 \omega C\, \mathrm{tg}\delta_T,$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота; $C$ – электрическая емкость; $\mathrm{tg}\delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь.

Поскольку потери в керамической пластине обусловлены сквозной электропроводностью, то тангенс угла диэлектрических потерь возрастает с температурой по экспоненциальному закону:

$$\mathrm{tg}\delta_T = \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T - T_0\right)\right],$$

где $\mathrm{tg}\delta_{T_0}$ – тангенс угла диэлектрических потерь при температуре $T_0$; $\alpha_{\mathrm{tg}\delta}$ – температурный коэффициент $\mathrm{tg}\delta$.

Поскольку $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, $\omega = 2\pi f$ и $\mathrm{tg}\delta_T = \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T - T_0\right)\right]$, диэлектрические потери в керамической пластине при температуре $T_1 = 373$ К рассчитываются по формуле

$$P = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon S U^2 f}{d} \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T_1 - T_0\right)\right].$$

Мощность, отводимая от диэлектрика, при температуре нагрева керамической пластины $T_1 = 373$ К и температуре окружающей среды $T_{\text{окр}} = 303$ К определяется выражением

$$P_{\text{отв}} = 2\sigma S\left(T_1 - T_{\text{окр}}\right).$$

В термодинамическом равновесии $P = P_{\text{отв}}$:

$\dfrac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon S U^2 f}{d} \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T_1 - T_0\right)\right] = 2\sigma S\left(T_1 - T_{\text{окр}}\right)$, откуда допустимое напряжение $U$ между электродами на частоте $f$

$$U = \sqrt{\frac{\sigma d\left(T_1 - T_{\text{окр}}\right)}{\pi\varepsilon_0 \varepsilon f\, \mathrm{tg}\delta_{T_0} \exp\left[\alpha_{\mathrm{tg}\delta}\left(T_1 - T_0\right)\right]}}.$$

Подставляя числовые значения $\sigma = 10\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $T_1 = 373$ К, $T_{\text{окр}} = 303$ К, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$, $\varepsilon = 7$, $f = 5 \cdot 10^6$ Гц, $\mathrm{tg}\delta_{T_0} = 2 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{\mathrm{tg}\delta} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}$, $T_0 = 293$ К, находим

$$U=\sqrt{\frac{10\cdot 5\cdot 10^{-3}\left(373-303\right)}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 7\cdot 5\cdot 10^{6}\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot \exp\left[5\cdot 10^{-3}\left(373-293\right)\right]}}=$$

$$=3{,}47\cdot 10^{3}\ \text{В}.$$

***Задание 34.*** Спонтанная поляризованность монокристаллов титаната бария при комнатной температуре равна 0,25 Кл/м$^2$. Предполагая, что причиной возникновения спонтанной поляризации является только смещение иона титана из центра элементарной кубической ячейки, определить это смещение. Период идентичности $a$ решетки принять равным $0{,}4\cdot 10^{-9}$ м.

*Решение.* Поляризованность есть электрический момент единицы объема: $P=\dfrac{q\cdot \Delta x}{V_0}$, где $q$ – заряд иона титана; $\Delta x$ – смещение иона под действием электрического поля; $V_0$ – объем элементарной ячейки.

Заряд иона титана $Ti^{4+}$ $q=4\,q_e=41{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Объем элементарной ячейки $V_0=a^3$.

Тогда $\Delta x=\dfrac{PV_0}{q}=\dfrac{0{,}25\left(0{,}4\cdot 10^{-9}\right)^3}{4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}=0{,}25\cdot 10^{-9}$ м.

***Задание 35.*** В пространстве между обкладками двухслойного конденсатора находится пленка полиэтилена и пропитанная конденсаторная бумага одинаковой толщины $d_1=d_2=20\cdot 10^{-6}$ м. Определить напряженности электрического поля $E_1$, $E_2$ и падения напряжения $U_1$, $U_2$ в каждом слое двухслойного конденсатора. Известны диэлектрические проницаемости ε и удельные объемные сопротивления ρ этих материалов: полиэтилена – $\varepsilon_1=2{,}3$; $\rho_1=10^{14}$ Ом·м; конденсаторной бумаги – $\varepsilon_2=4{,}0$; $\rho_2=10^{8}$ Ом·м. Расчет провести для постоянного напряжения 100 В и переменного напряжения амплитудой 100 В.

*Решение.* Если $E_1$ и $E_2$ – напряженности электрического поля, $U_1$ и $U_2$ – падения потенциала в каждом слое, то на переменном напряжении справедливо соотношение $\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2}$, где $C_1$ – емкость конденсатора с диэлектриком из полиэтилена; $C_2$ – емкость конденсатора с диэлектриком из конденсаторной бумаги. Очевидно также, что $U=U_1+U_2$.

После преобразования имеем:

$$U_1=\frac{\varepsilon_2 d_1 U}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}=\frac{4\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 100}{2{,}3\cdot 20\cdot 10^{-6}+4\cdot 20\cdot 10^{-6}}=63{,}49\ \text{В};$$

$$U_2=\frac{\varepsilon_1 d_2 U}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}=\frac{2{,}3\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 100}{2{,}3\cdot 20\cdot 10^{-6}+4\cdot 20\cdot 10^{-6}}=36{,}51\ \text{В}$$

или $U_2=U-U_1=100-63{,}49=36{,}51\ \text{В}$;

$$E_1=\frac{U_1}{d_1}=\frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}=\frac{4\cdot 100}{2{,}3\cdot 20\cdot 10^{-6}+4\cdot 20\cdot 10^{-6}}=3{,}17\cdot 10^{6}\ \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2=\frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}=\frac{2{,}3\cdot 100}{2{,}3\cdot 20\cdot 10^{-6}+4\cdot 20\cdot 10^{-6}}=1{,}83\cdot 10^{6}\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

На постоянном напряжении справедливо отношение $\frac{U_1}{U_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{\rho_1 d_1}{\rho_2 d_2}$, где $R_1$ – сопротивление слоя полиэтилена; $R_2$ – сопротивление слоя конденсаторной бумаги.

После преобразования имеем:

$$U_1=\frac{\rho_1 d_1 U}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}=\frac{10^{14}\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 100}{10^{14}\cdot 20\cdot 10^{-6}+10^{8}\cdot 20\cdot 10^{-6}}\to 100\ \text{В};$$

$$U_2=\frac{\rho_2 d_2 U}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}=\frac{10^{8}\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 100}{10^{14}\cdot 20\cdot 10^{-6}+10^{8}\cdot 20\cdot 10^{-6}}\to 0\ \text{В};$$

$$E_1=\frac{U_1}{d_1}=\frac{\rho_1 U}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}=\frac{10^{14}\cdot 100}{10^{14}\cdot 20\cdot 10^{-6}+10^{8}\cdot 20\cdot 10^{-6}}=5\cdot 10^{6}\ \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{\rho_2 U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} = \frac{10^8 \cdot 100}{10^{14} \cdot 20 \cdot 10^{-6} + 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 5\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

***Задание 36.*** В комбинированном пленочном конденсаторе спиральной конструкции для получения высокой температурной стабильности емкости совместно используют диэлектрические пленки двух различных полимеров, имеющих разные знаки температурного коэффициента диэлектрической проницаемости $\alpha_\varepsilon$. Одна из пленок полистирольная, другая – поликарбонатная. Пленки различной толщины. Пробивное напряжение $U_{\text{пр}}$ конденсатора должно быть не менее 1000 В. Определить толщину каждой пленки, при которой температурный коэффициент емкости $TKE$ близок нулю. Определить тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ с учетом потерь только в диэлектрических пленках. Параметры диэлектрических материалов при температуре $293$ К:

полистирол – $\varepsilon_1 = 2{,}5 - 2{,}6$; $\alpha_{\varepsilon_1} = -(150 - 200) \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $E_{\text{пр}1} = (20 - 110) \cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$; $\text{tg}\delta_1 = (2 - 4) \cdot 10^{-4}$;

поликарбонат – $\varepsilon_2 = 3{,}0$; $\alpha_{\varepsilon_2} = +(50 - 100) \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $E_{\text{пр}_2} = (30 - 150) \cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$; $\text{tg}\delta_2 = (2 - 60) \cdot 10^{-3}$.

*Решение.* Полагаем, что конструкция конденсатора представляет собой две тонкие диэлектрические ленты длиной $L$, на каждую из которых с одной стороны нанесен металлический слой толщиной $\delta$. В таком комбинированном пленочном конденсаторе емкости двух диэлектрических слоев включены параллельно, поэтому эквивалентная емкость конденсатора $C = C_1 + C_2$, где $C_1$ – емкость конденсатора с диэлектриком из полистирола; $C_2$ – емкость конденсатора с диэлектриком из поликарбоната.

Для комбинированного пленочного конденсатора температурный коэффициент емкости определяется выражением

$$TKE = \frac{1}{C}\frac{dC}{dT} = \frac{1}{C}\left(\frac{dC_1}{dT} + \frac{dC_2}{dT}\right) = \frac{C_1}{C} \cdot TKE_1 + \frac{C_2}{C} \cdot TKE_2,$$

где $TKE_1 = \frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}$ – температурный коэффициент конденсатора с диэлектриком из полистирола; $TKE_2 = \frac{1}{C_2}\frac{dC_2}{dT}$ – температурный коэффициент конденсатора с диэлектриком из поликарбоната.

Полагая, что температурные изменения емкостей диэлектрических лент обусловлены в основном температурными изменениями диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, для конденсатора с температурной компенсацией $(TKE = 0)$ можем записать уравнение

$$\frac{C_1}{C}\alpha_{\varepsilon_1} + \frac{C_2}{C}\alpha_{\varepsilon_2} = 0,$$

где $\alpha_{\varepsilon_1}$ – температурный коэффициент диэлектрической проницаемости полистирола; $\alpha_{\varepsilon_2}$ – температурный коэффициент диэлектрической проницаемости поликарбоната.

С учетом знаков $\alpha_{\varepsilon_1}$ и $\alpha_{\varepsilon_2}$ выражение для конденсатора с температурной компенсацией можно представить в виде

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\left|\alpha_{\varepsilon_2}\right|}{\left|\alpha_{\varepsilon_1}\right|} = \frac{d_2}{d_1},$$

где $d_1$ – толщина пленки из полистирола; $d_2$ – толщина пленки из поликарбоната.

Принимая $\alpha_{\varepsilon_1} = -150 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\alpha_{\varepsilon_2} = +50 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$, получаем

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\left|+50 \cdot 10^{-6}\right|}{\left|-150 \cdot 10^{-6}\right|} = \frac{1}{3}.$$

Так как напряжения на диэлектрических пленках одинаковы, то напряженность электрического поля в ленте из поликарбоната в три раза превышает напряженность электрического поля в ленте из полистирола. Принимая значение $E_{пр1} = 50 \cdot 10^6\ \frac{В}{м}$, получаем толщину $d_1$ пленки из полистирола и толщину $d_2$ пленки из поликарбоната:

$$d_1 = \frac{U_{\text{пр}}}{E_{\text{пр}_1}} = \frac{10^3}{50 \cdot 10^6} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \ d_2 = \frac{d_1}{3} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{3} = 6,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

При этом напряженность электрического поля в поликарбонате $E_2 = \frac{U_{\text{пр}}}{d_2} = \frac{10^3}{6,67 \cdot 10^{-6}} = 150 \text{ В}$, что меньше электрической прочности поликарбоната $E_{\text{пр}_2} = \left(30 - 150\right) \cdot 10^6 \ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta$ определим, используя параллельную эквивалентную схему диэлектрика с потерями и учитывая потери только в диэлектрических пленках. Тогда можно записать

$$\text{tg}\delta = \frac{1}{\omega C R} = \frac{R_1 + R_2}{\omega\left(C_1 + C_2\right) R_1 R_2},$$

где $R_1$ – объемное сопротивление пленки из полистирола; $R_2$ – объемное сопротивление пленки из поликарбоната; $\omega$ – круговая частота.

Объемные сопротивления пленок могут быть найдены из выражений

$$\text{tg}\delta_1 = \frac{1}{\omega C_1 R_1}; \quad \text{tg}\delta_2 = \frac{1}{\omega C_2 R_2}.$$

Выражая объемные сопротивления $R_1, R_2$, получаем формулу для определения тангенса угла диэлектрических потерь:

$$\text{tg}\delta = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\text{tg}\delta_1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\text{tg}\delta_2 = \frac{\varepsilon_1 d_2 \text{tg}\delta_1 + \varepsilon_2 d_1 \text{tg}\delta_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}.$$

Принимая $\varepsilon_1 = 2,5$, $\text{tg}\delta_1 = 3 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 3,0$, $\text{tg}\delta_2 = 40 \cdot 10^{-3}$, определяем значение тангенса угла диэлектрических потерь:

$$\text{tg}\delta = \frac{2,5 \cdot 6,67 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 6,67 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 3,14 \cdot 10^{-2}.$$

***Задание 37.*** На пластину $x$-среза пьезоэлектрического кварца толщиной $h = 10^{-3}$ м вдоль оси $x$ воздействует механическое напряжение $\sigma_1 = 10^5\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Определить разность потенциалов между противоположными плоскостями пластины, если в направлении оси $x$ пьезомодуль продольного пьезоэффекта $d_{11} = 2{,}3 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{Н}}$. Диэлектрическая проницаемость кварца $\varepsilon = 4{,}6$.

*Решение.* Согласно уравнению прямого пьезоэффекта в тензорной форме поляризованность $P_1 = d_{11}\sigma_1$, где $d_{11}$– пьезомодуль вдоль оси $x$; $\sigma_1$ – механическое напряжение вдоль оси $x$.

Для плоского однородного диэлектрика при равномерном механическом усилии заряд, возникающий на грани пьезоэлектрического диэлектрика, определяется выражением $q = P_1 S$, где $S$ – площадь грани пьезоэлектрического диэлектрика.

Разность потенциалов между плоскими гранями $U = \dfrac{q}{C}$, где $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h}$ – электрическая емкость.

Тогда разность потенциалов между противоположными плоскостями пьезоэлектрического кварца

$$U = \frac{d_{11}\sigma_1 h}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}6} = 5{,}65 \text{ В}.$$

***Задание 38***. Какой состав неорганического стекла характеризуется минимальным значением удельного объемного сопротивления: $100\ \%SiO_2$; $90\ \%SiO_2 + 10\ \%K_2O$; $90\ \%SiO_2 + 5\ \%Na_2O + 5\ \%K_2O$; $90\ \%SiO_2 + 10\ \%Na_2O$?

*Ответ*: состав $90\ \%SiO_2 + 10\ \%Na_2O$ неорганического стекла характеризуется минимальным значением удельного объемного сопротивления.

***Задание 39.*** Какой состав неорганического стекла характеризуется максимальным значением $\mathrm{tg}\delta$: $100\ \%\mathrm{SiO_2}$; $90\ \%\mathrm{SiO_2} +$ $+10\ \%\mathrm{K_2O}$; $90\ \%\mathrm{SiO_2} + 5\ \%\mathrm{Na_2O} + 5\ \%\mathrm{K_2O}$; $90\ \%\mathrm{SiO_2} + 10\ \%\mathrm{Na_2O}$; $85\ \%\mathrm{SiO_2} + 10\ \%\mathrm{Na_2O} + 5\ \%\mathrm{BaO}$?

*Ответ*: состав $90\ \%\mathrm{SiO_2} + 10\ \%\mathrm{Na_2O}$ неорганического стекла характеризуется максимальным значением $\mathrm{tg}\delta$.

***Задание 40.*** При каком максимальном напряжении $U_{\max}$ может работать слюдяной конденсатор емкостью $C = 1$ нФ с площадью обкладок $S = 6 \cdot 10^{-4}$ м$^2$, если он должен иметь четырехкратный запас по электрической прочности. Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$, электрическая прочность слюды $E_{\text{пр}} = 100 \cdot 10^6\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

*Ответ*: $U_{\max} = 930$ В.

***Задание 41.*** На верхнюю и нижнюю грани кубика из пьезоэлектрического материала действуют силы, сжимающие кубик. При этом на верхней грани кубика возникает положительный заряд, а на нижней грани – отрицательный заряд. При приложении к этим граням растягивающих сил знак заряда на гранях меняется на противоположный. На боковых гранях заряды при этом не образуются. Электрические заряды каких знаков возникнут на верхней и нижней гранях, если сжимающие силы приложить к боковым граням?

*Ответ*: При сжатии боковых граней кубика расстояние между верхней и нижней гранями кубика увеличится (деформация растяжения). В результате на верхней грани кубика возникнет отрицательный заряд, а на нижней грани кубика – положительный заряд.

***Задание 42.*** Определить изменение поляризованности $\Delta P$ для ниобата лития при изменении температуры на величину $\Delta T = 10$ К. Пироэлектрический коэффициент ниобата лития $p = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$.

*Ответ*: $\Delta P = p \cdot \Delta T$; $\Delta P = 2 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.

***Задание 43.*** Определить намагниченность $J_м$ и магнитную индукцию $B$ в медном проводе при воздействии на него однородного магнитного поля напряженностью $H = 10^3 \ \frac{А}{м}$. Диамагнитная восприимчивость меди $\chi_м = -9,5 \cdot 10^{-6}$.

*Решение.* Суммарная магнитная индукция материала определяется алгебраической суммой магнитной индукции внешнего и собственного магнитных полей: $B = \mu_0 H + \mu_0 J_м = \mu_0 H\left(1 + \chi_м\right)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{Гн}{м}$ – магнитная постоянная.

Подставляя числовые значения, находим: намагниченность медного провода $J_м = \chi_м H = -9,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 = -9,5 \cdot 10^{-3} \ \frac{А}{м}$; магнитную индукцию в медном проводе $B = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \times \times\left(1 - 9,5 \cdot 10^{-6}\right) = 1,26 \cdot 10^{-3}$ Тл.

***Задание 44.*** Магнитная индукция насыщения химически чистого железа $B_s = 2,2$ Тл. Определить магнитный момент, приходящийся на один атом железа (в магнетонах Бора), учитывая, что элементарная ячейка кристаллической решетки железа представляет собой объемно-центрированный куб с ребром $a = 0,286 \cdot 10^{-9}$ м.

*Решение.* Суммарная магнитная индукция материала определяется алгебраической суммой магнитной индукции внешнего и собственного магнитных полей: $B = \mu_0 H + \mu_0 J_м$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ e^{i\theta} \ \frac{Гн}{м}$ – магнитная постоянная; $H$ – напряженность внешнего магнитного поля, $\frac{А}{м}$; $J_м$ – намагниченность (магнитный момент единицы объема вещества), $\frac{А}{м}$.

При магнитном насыщении ферромагнетиков $H << J_м$, поэтому можно записать $J_м = \frac{B_s}{\mu_0}$. Число атомов железа в единице элементарного объема $N = \dfrac{K}{a^3}$, где $K$ – кратность элементарной ячейки (число атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку). В случае объемно-центрированного куба $K = 2$.

Магнитный момент, приходящийся на один атом вещества, определяется по формуле

$$M = \frac{J_{\text{м}}}{\mu_{\text{B}} N} = \frac{B_s a^3}{\mu_0 K \mu_{\text{B}}},$$

где $\mu_{\text{B}} = 9,274 \cdot 10^{-24}$ Дж $\cdot$ Тл$^{-1}$ – магнетон Бора.

Подставляя числовые значения, получаем магнитный момент, приходящийся на один атом железа (в магнетонах Бора):

$$M = \frac{2,2\left(0,286 \cdot 10^{-9}\right)^{\cdot 3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 9,274 \cdot 10^{-24}} = 2,21.$$

Полученный результат показывает, что в кристаллической решетке железа число некомпенсированных спинов в расчете на один атом меньше, чем в свободном атоме железа, магнитный момент которого $M_{\text{Fe}} = 4\mu_{\text{B}}$.

***Задание 45.*** Определить температуру Кюри $\Theta$, если из экспериментальных данных следует, что при температуре $T_1 = 973$ К намагниченность насыщения $J_{\text{м}S1}$ чистого железа составляет 0,55 намагниченности насыщения $J_{\text{м}0}$ при температуре $T_0 = 0$ К $\left(J_{\text{м}S1} = 0,55 J_{\text{м}0}\right)$, а при температуре $T_2 = 1023$ К намагниченность насыщения $J_{\text{м}S2}$ составляет 0,296 намагниченности насыщения $J_{\text{м}0}$ $\left(J_{\text{м}S2} = 0,296 J_{\text{м}0}\right)$.

*Решение.* Намагниченность насыщения резко падает по мере приближения температуры $T$ к температуре Кюри $\Theta$, где выполняется соотношение

$$\frac{J_{\text{м}S}}{J_{\text{м}0}} = \alpha\sqrt{1 - \frac{T}{\Theta}},$$

где $\alpha$ – константа для данного материала.

Температуру Кюри принято определять пересечением линейного продолжения наиболее крутого участка спада кривой намагниченности с осью температур. Для экстраполяции экспериментальных данных используем формулы

$$\frac{J_{\text{м}S1}}{J_{\text{м}_0}} = 0,55 = \alpha\sqrt{1-\frac{T_1}{\Theta}}; \qquad \frac{J_{\text{м}S2}}{J_{\text{м}_0}} = 0,296 = \alpha\sqrt{1-\frac{T_2}{\Theta}}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{0,55}{0,296} = \sqrt{1-\dfrac{T_1}{\Theta}}\left(\sqrt{1-\dfrac{T_2}{\Theta}}\right)^{-1}$ и

$$\Theta = \frac{0,55^2 T_2 - 0,296^2 T_1}{0,55^2 - 0,296^2} = \frac{0,55^2 \cdot 1023 - 0,296^2 \cdot 973}{0,55^2 - 0,296^2} = 1043\ \text{К}.$$

***Задание 46***. Магнитная восприимчивость $\chi_{\text{м}_1}$ никеля при температуре $T_1 = 673$ К равна $1,25 \cdot 10^{-3}$, а при температуре $T_2 = 1073$ К магнитная восприимчивость никеля $\chi_{\text{м}_2} = 1,14 \cdot 10^{-4}$. Определить температуру Кюри $\Theta$ и магнитную восприимчивость $\chi_{\text{м}_3}$ никеля при температуре $T_3 = 873$ К.

*Решение.* Из данных задания следует, что температура Кюри меньше 673 К, так как при температуре Кюри магнитная восприимчивость $\chi_\text{м}$ ферромагнетика становится примерно равной нулю. Выше температуры Кюри $\Theta$ изменение магнитной восприимчивости подчиняется закону Кюри – Вейсса:

$$\chi_\text{м} = \frac{C}{T-\Theta},$$

где $C$ – постоянная Кюри – Вейсса.

Используя числовые значения магнитных восприимчивостей, определим температуру Кюри:

$$\Theta = \frac{\chi_{\text{м}_1} T_1 - \chi_{\text{м}_2} T_2}{\chi_{\text{м}_1} - \chi_{\text{м}_2}} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 673 - 1,14 \cdot 10^{-4} \cdot 1073}{1,25 \cdot 10^{-3} - 1,14 \cdot 10^{-4}} = 632,86\ \text{К}.$$

Определим постоянную Кюри – Вейсса:

$$C=\chi_{м_1}\left(T_1-\Theta\right)=1{,}25\cdot10^{-3}\left(673-632{,}86\right)=50{,}175\cdot10^{-3}$$

или

$$C=\chi_{м_2}\left(T_2-\Theta\right)=1{,}14\cdot10^{-4}\left(1073-632{,}86\right)=50{,}175\cdot10^{-3}.$$

Зная температуру Кюри $\Theta$ и постоянную $C$ Кюри – Вейсса, определим магнитную восприимчивость $\chi_{м_3}$ никеля при температуре $T_3=873$ К:

$$\chi_{м_3}=\frac{C}{T_3-\Theta}=\frac{50{,}175\cdot10^{-3}}{873-632{,}86}=0{,}209\cdot10^{-3}.$$

***Задание 47.*** В образце из магнитного материала суммарные удельные магнитные потери на гистерезис и вихревые токи при частотах $f_1=10^3$ Гц и $f_2=2\cdot10^3$ Гц составляют соответственно $p_1=2\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ и $p_2=6\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ (при неизменной максимальной магнитной индукции в ферромагнетике). Рассчитать магнитные потери на вихревые токи в образце на частоте $f_2=2\cdot10^3$ Гц.

*Решение.* Мощность, то есть энергия расходуемая в единицу времени, обусловленная потерями на вихревые токи, определяется эмпирической формулой $P_в=\xi B_m^2 f^2 V$, где $\xi$ – коэффициент, пропорциональный удельной проводимости магнитного материала и зависящий от геометрической формы и размеров поперечного сечения намагничиваемого образца; $B_m$ – максимальная магнитная индукция, достигаемая в одном цикле перемагничивания; $f$ – частота перемагничивания; $V$ – объем образца.

Мощность, обусловленная потерями на гистерезис:

$$P_г=\eta B_m^n f V,$$

где $\eta$ – коэффициент, зависящий от свойств магнитного материала; $n$ – показатель степени, принимающий значения от 1,6 до 2,0 в зависимости от значения $B_m$.

Суммарные удельные магнитные потери за один цикл перемагничивания линейно зависят от частоты:

$$p = p_{\text{г}} + p_{\text{в}} = \frac{P_{\text{г}}}{Vf} + \frac{P_{\text{в}}}{Vf} = \eta B_m^n + \xi B_m^2 f\,.$$

Используя исходные данные $f_1 = 10^3$ Гц, $p_1 = 2\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ и $f_2 = 2\cdot 10^3$ Гц, $p_2 = 6\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$, получим уравнения, определяющие суммарные удельные магнитные потери за один цикл перемагничивания для частот $f_1$ и $f_2$:

$$\eta B_m^n + \xi B_m^2 f_1 = \frac{p_1}{f_1};\quad \eta B_m^n + \xi B_m^2 f_2 = \frac{p_2}{f_2}$$

или

$$\eta B_m^n + \xi B_m^2 \cdot 10^3 = \frac{2}{10^3};\quad \eta B_m^n + \xi B_m^2 \cdot 2\cdot 10^3 = \frac{6}{2\cdot 10^3}.$$

Вычитая из одного уравнения другое, получаем $\xi\, B_m^2 = 10^{-6}$.

Тогда на частоте $f_2 = 2\cdot 10^3$ Гц удельные магнитные потери на вихревые токи в образце

$$p_{\text{в}} = \xi B_m^2 f_2^2 = 10^{-6}\left(2\cdot 10^3\right)^2 = 4\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}.$$

***Задание 48.*** В ферромагнетике на частоте $f_1 = 50$ Гц удельные потери на гистерезис при индукции магнитного поля $B_{m_1} = 0{,}1$ Тл и $B_{m_2} = 0{,}5$ Тл составляют $p_{\text{г}_1} = 0{,}15\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ и $p_{\text{г}_2} = 1{,}97\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ соответственно. Определить удельные потери $p_{\text{г}_3}$ на гистерезис на частоте $f_2 = 400$ Гц при индукции магнитного поля $B_{m_3} = 0{,}6$ Тл.

*Решение.* Потери на гистерезис в единице объема ферромагнетика определяются выражением

$$p_{\text{г}} = \eta B_m^n f\,,$$

где $\eta$ – коэффициент, зависящий от свойств магнитного материала; $B_m$ – максимальная магнитная индукция, достигаемая в одном цикле перемагничивания; $f$ – частота перемагничивания.

Тогда на частоте $f_1$

$$\frac{p_{\text{г}_2}}{p_{\text{г}_1}} = \frac{\eta B_{m_2}^n f_1}{\eta B_{m_1}^n f_1} = \left(\frac{B_{m_2}}{B_{m_1}}\right)^n,$$

откуда $n = \dfrac{\lg\left(\dfrac{p_{\text{г}_2}}{p_{\text{г}_1}}\right)}{\lg\left(\dfrac{B_{m_2}}{B_{m_1}}\right)} = \dfrac{\lg\left(\dfrac{1,97}{0,15}\right)}{\lg\left(\dfrac{0,5}{0,1}\right)} = 1,6.$

Определим коэффициент $\eta$, учитывая, что он не зависит от частоты и магнитной индукции:

$$\eta = \frac{p_{\text{г}_1}}{B_{m_1}^n f_1} = \frac{0,15}{(0,1)^{1,6}\cdot 50} = 0,12\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{Тл}}$$

или

$$\eta = \frac{p_{\text{г}_2}}{B_{m_2}^n f_1} = \frac{1,97}{(0,5)^{1,6}\cdot 50} = 0,12\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{Тл}}.$$

Поскольку коэффициент $n$ также не зависит от частоты и магнитной индукции, то удельные потери $p_{\text{г}_3}$ на гистерезис на частоте $f_2 = 400$ Гц:

$$p_{\text{г}_3} = \eta B_{m_3}^n f_2 = 0,12\cdot 0,6^{1,6}\cdot 400 = 21,2\ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}.$$

***Задание 49.*** В слабых магнитных полях петля гистерезиса приближенно описывается эмпирической формулой Рэлея

$$B = \mu_0\left[\left(\mu_{\text{нач}} + \beta H_m\right)H \pm \frac{\beta}{2}\left(H_m^2 - H^2\right)\right],$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная; $\mu_{\text{нач}}$ – начальная магнитная проницаемость; $\beta$ – эмпирическая постоянная; $H_m$ – амплитуда напряженности магнитного поля.

Знак «–» в формуле Рэлея соответствует интервалу возрастания напряженности магнитного поля $H$, знак «+» соответствует интервалу уменьшения $H$.

Пользуясь формулой Рэлея, определить потери на гистерезис в кольцевом магнитопроводе с площадью поперечного сечения $S = 25 \cdot 10^{-6}$ м$^2$ и средней длиной силовой линии магнитной индукции $l_{\text{ср}} = 75 \cdot 10^{-3}$ м при воздействии на магнитопровод переменного магнитного поля частотой $f = 50$ Гц и амплитудой напряженности магнитного поля $H_m = 20\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$. Эмпирическая постоянная $\beta = 200\ \dfrac{\text{м}}{\text{А}}$.

*Решение.* Потери на гистерезис за один цикл перемагничивания, отнесенные к единице объема магнитопровода, определяются площадью статической петли гистерезиса:

$$w_{\text{г}} = \int\limits_{-H_m}^{+H_m} \left(B_{\downarrow} - B_{\uparrow}\right) dH = \int\limits_{-H_m}^{+H_m} \left[ \mu_0 \left( \left(\mu_{\text{нач}} + \beta H_m\right) + \frac{\beta}{2}\left(H_m^2 - H^2\right) \right) \right] dH -$$

$$- \int\limits_{-H_m}^{+H_m} \left[ \mu_0 \left( \left(\mu_{\text{нач}} + \beta H_m\right) + \frac{\beta}{2}\left(H_m^2 - H^2\right) \right) dH \right] =$$

$$= \int\limits_{-H_m}^{+H_m} \mu_0 \beta \left(H_m^2 - H^2\right) dH = \frac{4}{3} \mu_0 \beta H_m^3.$$

Тогда активная мощность, выделяющаяся в магнитопроводе за счет потерь на гистерезис при циклическом перемагничивании с частотой $f$:

$$P_{\text{г}} = w_{\text{г}} V f = \frac{4}{3} \mu_0 \beta H_m^3 S l_{\text{ср}} f.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$P_{\text{г}} = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 20^3 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 75 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 251 \cdot 10^{-6}\ \text{Вт}.$$

***Задание 50.*** В магнитопроводе трансформатора, собранного из листов электротехнической стали толщиной $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, на частоте $f = 50$ Гц при амплитуде индукции магнитного поля $B_{m_1} = 0,8$ Тл потери на вихревые токи составляют $P_{в_1} = 2,4$ Вт. Определить потери на вихревые токи, если магнитопровод той же формы и тех же геометрических размеров будет собран из листов электротехнической стали той же марки толщиной $h_2 = 0,35 \cdot 10^{-3}$ м.

*Решение.* Мощность, расходуемая на вихревые токи в единице массы, связана с толщиной листа $h$ соотношением

$$p_{в} = 1,64 \frac{B_m^2 f^2 h^2}{\gamma\rho},$$

где $B_m$ – амплитуда индукции магнитного поля; $f$ – частота; $h$ – толщина листа; $\gamma$ – плотность материала магнитопровода; $\rho$ – удельное электрическое сопротивление материала магнитопровода.

При толщине листов $h_1$ потери на вихревые токи определяются выражением

$$P_{в_1} = 1,64 \frac{B_{m_1}^2 f^2 h_1^2 M}{\gamma\rho},$$

где $M$ – масса магнитопровода трансформатора.

При толщине листов $h_2$ потери на вихревые токи определяются выражением

$$P_{в_2} = 1,64 \frac{B_{m_1}^2 f^2 h_2^2 M}{\gamma\rho}.$$

Тогда

$$\frac{P_{в_2}}{P_{в_1}} = \frac{1,64\, B_{m_1}^2 f^2 h_2^2 M}{\gamma\,\rho} \left( \frac{1,64\, B_{m_1}^2 f^2 h_1^2 M}{\gamma\,\rho} \right)^{-1} = \frac{h_2^2}{h_1^2},$$

откуда

$$P_{в_2} = P_{в_1} \frac{h_2^2}{h_1^2} = 2,4 \frac{\left(0,35 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(0,5 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 1,176 \text{ Вт} \cdot$$

***Задание 51.*** Магнитопровод из ферромагнетика с длиной средней линии $l_м = 125 \cdot 10^{-3}$ м имеет немагнитный зазор $\delta = 10^{-3}$ м. На магнитопроводе расположена обмотка с числом витков $w = 500$. При протекании в обмотке тока силой $I = 0,2$ А в зазоре создается магнитная индукция $B_\delta = 0,1$ Тл. Определить магнитную проницаемость $\mu$ ферромагнетика.

*Решение*. В соответствии с законом полного тока

$$H_м\, l_м + H_\delta\, \delta = wI,$$

где $H_м$ – напряженность магнитного поля в материале магнитопровода; $H_\delta$ – напряженность магнитного поля в зазоре.

Так как силовые линии магнитной индукции непрерывны, то индукция $B_м$ магнитного поля в материале магнитопровода равна индукции $B_\delta$ магнитного поля в зазоре: $B_м = B_\delta$.

Поскольку $B_м = \mu_0 \mu H_м$ и $B_\delta = \mu_0 H_\delta$, то $\dfrac{B_м l_м}{\mu_0 \mu} + \dfrac{B_\delta \delta}{\mu_0} = wI$, откуда получаем выражение для определения магнитной проницаемости ферромагнетика:

$$\mu = \frac{B_м l_м}{\mu_0 wI - B_\delta \delta} = \frac{0,1 \cdot 125 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0,2 - 0,1 \cdot 10^{-3}} = 488.$$

***Задание 52.*** Требуется получить напряженность магнитного поля $H = 10^3\ \dfrac{А}{м}$ в соленоиде длиной $l = 20 \cdot 10^{-2}$ м и диаметром $D = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Найти число ампер-витков $Iw$, необходимое для этого соленоида, и разность потенциалов $U$, которую надо приложить к концам обмотки из медной проволоки диаметром $d = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

*Решение.* Напряженность магнитного поля в соленоиде определяется выражением $H = \dfrac{w}{l} I$, откуда число ампер-витков $wI = Hl = 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 200$ А $\cdot$ виток.

Разность потенциалов $U$ определяется согласно закону Ома выражением $U = RI$. Учитывая, что $R = \rho\frac{l}{S}$, $l = \pi D w$, $S = \frac{\pi d}{4}$ и $wI = Hl$, выражение для нахождения разности потенциалов $U$, которую необходимо приложить к концам обмотки соленоида, запишется в виде

$$U = \frac{4Hl\rho D}{d^2},$$

где $\rho$ – удельное электрическое сопротивление меди.

Подставляя числовые значения, находим величину разности потенциалов:

$$U = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2} 17 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\left(0,5 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 2,72 \text{ В}.$$

***Задание 53.*** Определить изменение индуктивности катушки, выполненной на кольцевом магнитопроводе из феррита марки 1000НМ, при напряженности магнитного поля $H = 10\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$, если в магнитопроводе сделать немагнитный зазор $\delta = 0,01 \cdot 10^{-3}$ м. Средний диаметр кольцевого магнитопровода $D_{\text{ср}} = 40 \cdot 10^{-3}$ м.

*Решение.* В соответствии с законом полного тока в отсутствие немагнитного зазора $Hl_{\text{ср}} = Iw,$ а при наличии немагнитного зазора $H_{\text{м}} l_{\text{м}} + H_\delta \delta = wI,$ где $H$ – напряженность магнитного поля, создаваемого током силой $I$, протекающим по обмотке катушки индуктивности с числом витков $w$; $H_{\text{м}}$ – напряженность магнитного поля в магнитопроводе; $H_\delta$ – напряженность магнитного поля в зазоре; $l_{\text{ср}} = \pi D_{\text{ср}}$ – длина средней силовой линии магнитного поля в магнитопроводе без зазора; $l_{\text{м}}$ – длина средней силовой линии магнитного поля в материале магнитопровода с зазором; $\delta$ – длина немагнитного зазора.

Тогда $Hl_{\text{ср}} = H_{\text{м}} l_{\text{м}} + H_\delta \delta$, откуда $H = \frac{H_{\text{м}} l_{\text{м}}}{l_{\text{ср}}} + \frac{H_\delta \delta}{l_{\text{ср}}}$.

Учитывая, что напряженность $H_\delta$ магнитного поля в зазоре связана с индукцией $B$ магнитного поля соотношением $H_\delta = \frac{B}{\mu_0}$, выражение для напряженности магнитного поля, создаваемого током силой $I$, представим в виде

$$H = \frac{H_{\text{м}} l_{\text{м}}}{l_{\text{ср}}} + \frac{B\delta}{\mu_0 l_{\text{ср}}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная.

Так как при наличии в магнитопроводе немагнитного зазора $l_{\text{ср}} = l_{\text{м}} + \delta$, то $l_{\text{м}} = l_{\text{ср}} - \delta$.

Тогда $H = \frac{H_{\text{м}}}{l_{\text{ср}}}\left(l_{\text{ср}} - \delta\right) + \frac{B\delta}{\mu_0 l_{\text{ср}}} = H_{\text{м}} - \frac{H_{\text{м}}\delta}{l_{\text{ср}}} + \frac{B\delta}{\mu_0 l_{\text{ср}}}$.

Поскольку $\delta << l_{\text{м}}$, то $H \approx H_{\text{м}} + \frac{B\delta}{\mu_0 l_{\text{ср}}}$.

Таким образом, для магнитопровода с немагнитным зазором при каждом выбранном значении магнитной индукции $B$ напряженность $H$ внешнего магнитного поля возрастает на величину $\frac{B\delta}{\mu_0 l_{\text{ср}}}$, а это значит, что при наличии немагнитного зазора уменьшается магнитная индукция в материале магнитопровода при заданной напряженности магнитного поля, что приводит к снижению магнитной проницаемости $\mu$ магнитопровода.

Индуктивность катушки определяется выражением

$$L = \frac{\mu_0 \mu w^2 S}{l},$$

где $\mu$ – магнитная проницаемость материала магнитопровода; $w$ – число витков; $S$ – площадь поперечного сечения катушки; $l$ – средняя длина силовой линии магнитной индукции внутри кольцевого магнитопровода.

Тогда

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\mu_0\mu_1 w^2 S}{l}\left(\frac{\mu_0\mu_2 w^2 S}{l}\right)^{-1}=\frac{\mu_1}{\mu_2},$$

где $L_1$ – индуктивность катушки, выполненной на магнитопроводе без зазора; $L_2$ – индуктивность катушки, выполненной на магнитопроводе с зазором; $\mu_1$ – магнитная проницаемость магнитопровода без зазора; $\mu_2$ – магнитная проницаемость магнитопровода с немагнитным зазором.

Определим магнитную проницаемость $\mu_1=\dfrac{B}{\mu_0 H}$ магнитопровода без зазора.

Из кривой намагничивания $B=f\left(H\right)$ феррита марки 10000НМ при напряженности магнитного поля $H=10\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$ определяем, что индукция магнитного поля $B=0,22$ Тл. Тогда $\mu_1=\dfrac{B}{\mu_0 H}=$ $=\dfrac{0,22}{4\cdot 3,14\cdot 10^{-7}\cdot 10}=17,516\cdot 10^3$.

Определим значение напряженности магнитного поля в магнитопроводе с зазором при магнитной индукции $B=0,22$ Тл:

$$H\approx H_{\text{м}}+\frac{B\delta}{\mu_0\pi D_{\text{ср}}}\approx 10+\frac{0,22\cdot 0,01\cdot 10^{-3}}{4\cdot 3,14\cdot 10^{-7}\cdot 3,14\cdot 40\cdot 10^{-3}}=23,95\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Учитывая, что $B=\mu_0\mu_2 H$, находим магнитную проницаемость $\mu_2$ магнитопровода с зазором:

$$\mu_2=\frac{B}{\mu_0 H}=\frac{0,22}{4\cdot 3,14\cdot 10^{-7}\cdot 23,95}=7,314\cdot 10^3.$$

Таким образом, $\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=\dfrac{17,516\cdot 10^3}{7,314\cdot 10^3}=2,39$, то есть даже небольшой немагнитный промежуток (зазор) в магнитопроводе из ферромагнетика существенно снижает индуктивность катушки.

***Задание 54.*** Найти концентрацию основных и неосновных носителей заряда в арсениде галлия GaAs, легированном донорной примесью до концентрации $N_{\text{Д}} = 10^{17}\,\text{см}^{-3}$.

*Решение.* В диапазоне рабочих температур все донорные атомы являются ионизированными, а равновесная концентрация $n_n$ свободных электронов с достаточной степенью точности определяется концентрацией $N_{\text{Д}}$ донорной примеси и не зависит от температуры:

$$n_n = N_{\text{Д}}.$$

Тогда концентрация основных носителей заряда в арсениде галлия GaAs, легированном донорной примесью до концентрации $N_{\text{Д}} = 10^{17}\,\text{см}^{-3}$, будет $n_n = 10^{17}\ \text{см}^{-3}$.

Концентрацию $p_n$ неосновных носителей заряда (дырок) можно найти, используя закон действующих масс:

$$p_n = \frac{n_i^2}{N_{\text{Д}}} = \frac{\left(1{,}1 \cdot 10^7\right)^2}{10^{17}} = 1{,}21 \cdot 10^{-3}\ \text{см}^{-3},$$

где $n_i = 1{,}1 \cdot 10^7\ \text{см}^{-3}$ – собственная концентрация электронов в арсениде галлия [1].

***Задание 55.*** Найти положение уровня Ферми $E_{\text{F}}$ в кремнии марки КЭФ 0,3/0,1 при температуре $T = 300\ \text{К}$.

*Решение.* Из маркировки монокристаллического кремния КЭФ 0,3/0,1 следует: кремний электронного типа проводимости, легированный фосфором, удельное электрическое сопротивление $\rho = 0{,}3\ \text{Ом} \cdot \text{см}$, диффузионная длина неосновных носителей заряда $L_p = 0{,}1\ \text{мм}$.

В легированном полупроводнике $n_0 >> n_i$, и положение уровня Ферми $E_{\text{F}}$ можно определить по формуле

$$E_{\text{F}} = \frac{kT}{q_e} \ln\left(\frac{n_0}{n_i}\right).$$

Концентрацию $n_0$ основных носителей заряда найдем, зная величину удельного электрического сопротивления $\rho = 0,3\ \text{Ом} \cdot \text{см}$, как

$$n_0 = \frac{1}{q_e \mu_n \rho},$$

где $\mu_n$ – подвижность электронов.

Для кремния при температуре $T = 300\ \text{К}$ подвижность электронов $\mu_n = 1500\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, собственная концентрация носителей $n_i = 1,6 \cdot 10^{10}$.

Тогда положение уровня Ферми $E_\text{F}$ в кремнии марки КЭФ 0,3/0,1 при температуре $T = 300$ К

$$E_\text{F} = \frac{kT}{q_e} \ln\left(\frac{1}{q_e \mu_n \rho n_i}\right) =$$

$$= \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \ln\left(\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1500 \cdot 0,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{10}}\right) = 0,354\ \text{эВ}.$$

***Задание 56.*** Найти удельное сопротивление $\rho_n$ электронного кремния Si с легирующей примесью $N_\text{Д} = 10^{16}\ \text{см}^{-3}$ при температуре $T = 300\ \text{К}$.

*Решение.* Величину удельного сопротивления получим из соотношения

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q_e\left(\mu_n n_n + \mu_p p_n\right)},$$

где $\sigma$ – удельная электрическая проводимость; $q_e$ – заряд электрона; $\mu_n$, $\mu_p$ – подвижность электронов и дырок соответственно; $n_n$ – концентрация электронов в полупроводнике $n$-типа; $p_n$ – концентрация дырок в полупроводнике $n$-типа.

При температуре $T = 300$ К все донорные атомы являются ионизированными, собственной концентрацией свободных носителей заряда можно пренебречь, а условием электрической нейтральности будет $n_n = N_Д$.

Тогда

$$\rho_n = \frac{1}{q_e \mu_n N_Д}.$$

Для кремния при температуре $T = 300$ К подвижность электронов $\mu_n = 1500\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

Подставляя числовые значения, находим величину удельного сопротивления $\rho_n$ электронного кремния Si с легирующей примесью $N_Д = 10^{16}$ см$^{-3}$ при температуре $T = 300$ К:

$$\rho_n = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1500 \cdot 10^{16}} = 0{,}417\ \text{Ом} \cdot \text{см}.$$

***Задание 57.*** Рассчитать собственное удельное сопротивление $\rho_i$ монокристалла арсенида галлия GaAs при температуре $T = 300$ К.

*Решение*. Величина собственного удельного сопротивления полупроводника находится по формуле

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q_e n_i \left(\mu_n + \mu_p\right)},$$

где $n_i$ – собственная концентрация электронов.

Для арсенида галлия при температуре $T = 300$ К собственная концентрация $n_i = 1{,}1 \cdot 10^7$ см$^{-3}$, подвижность электронов $\mu_n = 8500\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, подвижность дырок $\mu_p = 400\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. Тогда собственное удельное сопротивление монокристалла арсенида галлия GaAs при температуре $T = 300$ К

$$\rho_i = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}1 \cdot 10^7 \left(8500 + 400\right)} = 6{,}38 \cdot 10^7\ \text{Ом} \cdot \text{см}.$$

***Задание 58.*** Определить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при температуре $T = 300$ К, если ширина запрещенной зоны кремния $\Delta E_g = 1{,}12$ эВ, а эффективные массы дырок валентной зоны и электронов зоны проводимости соответственно равны $m_p^* = 0{,}56 m_e$ и $m_n^* = 1{,}05 m_e$.

*Решение.* Собственная концентрация носителей заряда в полупроводнике определяется выражением

$$n_i = 2\sqrt{N_c N_\upsilon} \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right),$$

где $N_c$ – эффективная плотность энергетических уровней электронов в зоне проводимости; $N_\upsilon$ – эффективная плотность энергетических уровней дырок в валентной зоне.

Эффективная плотность $N_\upsilon$ энергетических уровней дырок в валентной зоне и эффективная плотность $N_c$ энергетических уровней электронов в зоне проводимости определяются выражениями

$$N_\upsilon = \left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad N_c = \left(\frac{m_n^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка, деленная на $2\pi$.

Подставляя числовые значения, находим

$$N_\upsilon = \left(\frac{0{,}56 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 3{,}14\left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 5{,}319 \cdot 10^{24} \ \text{м}^{-3};$$

$$N_c = \left(\frac{1{,}05 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-34} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 3{,}14\left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 13{,}66 \cdot 10^{24} \ \text{м}^{-3}.$$

Тогда собственная концентрация носителей заряда в кремнии при температуре $T = 300$ К

$$n_i = 2\sqrt{13{,}66 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}319 \cdot 10^{24}} \exp\left(-\frac{1{,}12}{2 \cdot 8{,}617 \cdot 10^{-5} \cdot 300}\right) = 6{,}66 \cdot 10^{15} \ \text{м}^{-3}.$$

***Задание 59.*** Удельное сопротивление собственного германия при температуре $T = 300$ К $\rho = 0,43$ Ом$\cdot$м. Подвижность электронов и дырок в германии равны соответственно $0,39\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$ и $0,19\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$. Определить собственную концентрацию электронов и дырок.

*Решение.* Удельная проводимость полупроводника определяется соотношением

$$\sigma = q_e\left(p\mu_p + n\mu_n\right),$$

где $n$ – концентрация электронов; $p$ – концентрация дырок; $\mu_n$, $\mu_p$ – подвижности электронов и дырок соответственно; $q_e$ – заряд электрона.

Для собственного полупроводника $p = n = n_i$, где $n_i$ – собственная концентрация электронов и дырок. Поэтому собственная удельная проводимость $\sigma_i$ выражается формулой $\sigma_i = \dfrac{1}{\rho_i} = q_e n_i\left(\mu_n + \mu_p\right)$, откуда

$$n_i = \frac{1}{\rho_i q_e(\mu_n + \mu_p)} = \frac{1}{0,43\cdot 1,602\cdot 10^{-19}(0,39+0,19)} = 2,5\cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}.$$

***Задание 60.*** Образец германия легирован примесью атомов сурьмы так, что один атом примеси приходится на $2\cdot 10^6$ атомов германия. Определить: а) концентрацию электронов и дырок при температуре $T = 300$ К (предположить, что при этой температуре все атомы сурьмы ионизированы и концентрация атомов германия $N = 4,4\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$); б) удельное сопротивление легированного германия; в) коэффициенты диффузии электронов и дырок в германии при данной температуре.

*Решение.* Концентрация донорных примесей определяется выражением

$$N_{Д} = \frac{N}{2 \cdot 10^{6}} = \frac{4,4 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 10^{6}} = 2,2 \cdot 10^{22}\ \text{м}^{-3}.$$

Собственная концентрация $n_i = 2,5 \cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}$ (см. решение задания 59).

Следовательно, концентрация дырок

$$p \approx \frac{n_i^2}{N_{Д}} = \frac{\left(2,5 \cdot 10^{19}\right)^2}{2,2 \cdot 10^{22}} = 2,84 \cdot 10^{16}\ \text{м}^{-3}.$$

Удельное сопротивление легированного полупроводника $n$-типа

$$\rho_n \approx \frac{1}{N_{Д} q_e \mu_n} = \frac{1}{2,2 \cdot 10^{22} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39} = 7,3 \cdot 10^{-4}\ \ \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Определим коэффициенты диффузии электронов и дырок в германии при температуре $T = 300\ \text{К}$.

Соотношение Эйнштейна между подвижностью $\mu$ и коэффициентом диффузии $D$ имеет вид $D = \dfrac{kT\mu}{q_e}$, где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – абсолютная температура.

Для электронов коэффициент диффузии

$$D_n = \frac{kT\mu_n}{q_e} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0,39}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 10,0 \cdot 10^{-3}\ \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Для дырок коэффициент диффузии

$$D_p = \frac{kT\mu_p}{q_e} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0,19}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 4,9 \cdot 10^{-3}\ \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

***Задание 61.*** Дан образец легированного кремния $n$-типа длиной 10 мм, шириной 2 мм и толщиной 1 мм. Подвижности электронов и дырок равны соответственно $0,12\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и $0,05\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, концентрация собственных носителей заряда $n_i = 1,5 \cdot 10^{16}\ \text{м}^{-3}$. Определить:

а) концентрацию примеси в образце, если сопротивление образца $R$ =150 Ом; б) отношение дырочной удельной проводимости к электронной проводимости.

*Решение.* Определим удельное сопротивление материала, для чего воспользуемся известной формулой $R = \rho \frac{l}{S}$, откуда

$$\rho = R\frac{S}{l} = \frac{150 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,03 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Удельное сопротивление примесного кремния определяется выражением

$$\rho = \left[ q_e \left( n_n \mu_n + p_n \mu_p \right) \right]^{-1},$$

где $q_e$ – заряд электрона; $n_n$ – число свободных электронов; $\mu_n$ – подвижность электронов; $p_n$ – число дырок; $\mu_p$ – подвижность дырок.

Подставив числовые данные из условия задачи, получим уравнение вида

$$0,03 = \left[ 1,6 \cdot 10^{-19} \left( n_n \cdot 0,12 + p_n \cdot 0,05 \right) \right]^{-1}$$

или

$$0,12 n_n + 0,05 p_n = 2,08 \cdot 10^{20}.$$

Поскольку $n_n p_n = n_i^2$, то

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{\left(1,5 \cdot 10^{16}\right)^2}{n_n}.$$

Тогда получим

$$0,12 n_n + 0,05 \frac{\left(1,5 \cdot 10^{16}\right)^2}{n_n} = 2,08 \cdot 10^{20}$$

или

$$0,12 n_n^2 + 0,05 \left(1,5 \cdot 10^{16}\right)^2 - 2,08 \cdot 10^{20} = 0.$$

Отсюда

$$n_n = \frac{2{,}08\cdot 10^{20} + \sqrt{\left(2{,}08\cdot 10^{20}\right) - 4\cdot 0{,}12\cdot 0{,}05\cdot\left(1{,}5\cdot 10^{16}\right)^2}}{2\cdot 0{,}12} =$$

$$= 1{,}73\cdot 10^{21}\ \text{м}^{-3}.$$

Такое же значение имеет и концентрация доноров $N_{\text{Д}}$.

Найдем отношение дырочной удельной проводимости к электронной проводимости.

Дырочная и электронная удельные проводимости определяются выражениями

$$\sigma_p = q_e p_n \mu_p; \quad \sigma_n = q_e n_n \mu_n.$$

Тогда

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_n} = \frac{q_e p_n \mu_p}{q_e n_n \mu_n} = \frac{p_n \mu_p}{n_n \mu_n} = \frac{n_i^2 \mu_p}{n_n^2 \mu_n} = \frac{\left(1{,}5\cdot 10^{16}\right)^2 \mu_p}{n_n^2 \mu_n}.$$

Следовательно, $\dfrac{\sigma_p}{\sigma_n} = \dfrac{2{,}25\cdot 10^{32}\cdot 0{,}05}{\left(1{,}73\cdot 10^{21}\right)^2\cdot 0{,}12} = 3{,}1\cdot 10^{-11}$.

***Задание 62.*** В собственном германии концентрация атомов равна $4{,}5\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. При температуре $T$ = 300 К один из каждых $2\cdot 10^9$ атомов ионизирован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре равны соответственно $0{,}39\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$ и $0{,}19\ \dfrac{\text{м}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$. Определить: а) удельную проводимость собственного германия; б) удельную проводимость германия при температуре $T = 300$ К, легированного элементом V группы, если на каждые $10^8$ атомов германия приходится один атом примеси.

*Решение.* Найдем концентрацию собственных носителей заряда $n_i$ в германии при температуре $T = 300$ К:

$$n_i = \frac{4{,}5\cdot 10^{28}}{2\cdot 10^9} = 2{,}25\cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}.$$

Удельная проводимость собственного германия

$$\sigma_i = n_i q_e(\mu_n + \mu_p) = 2{,}25 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}(0{,}39 + 0{,}19) = 2{,}09\ \frac{\text{См}}{\text{м}},$$

где $n_i$ – концентрация собственных носителей заряда; $\mu_n$ – подвижность электронов; $\mu_p$ – подвижность дырок.

Собственный полупроводник, легированный элементом V группы, является материалом $n$-типа. Определим концентрацию доноров:

$$N_{\text{Д}} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{28}}{10^8} = 4{,}5 \cdot 10^{20}\ \text{м}^{-3}.$$

Вычислим удельную проводимость полупроводника $n$-типа:

$$\sigma_n \approx q_e\left(N_{\text{Д}}\mu_n + \frac{n_i^2\mu_p}{N_{\text{Д}}}\right) \approx$$

$$\approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\frac{4{,}5^2 \cdot 10^{40} \cdot 0{,}39 + 2{,}25^2 \cdot 10^{38} \cdot 0{,}19}{4{,}5 \cdot 10^{20}} = 28\ \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

***Задание 63.*** Полупроводник в условиях равновесия имеет концентрацию дырок $p = 10^{20}\ \text{м}^{-3}$ и концентрацию электронов $n = 2 \cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}$. Определить: а) полную концентрацию примесей; б) тип доминирующей примеси; в) собственную концентрацию носителей заряда.

*Решение.* В условиях равновесия существует компенсация зарядов: $n + N_{\text{А}} = p + N_{\text{Д}}$, где $N_{\text{А}}$ и $N_{\text{Д}}$ – концентрации акцепторов и доноров соответственно, и предполагается, что все примеси ионизированы.

Полная концентрация примесей

$$N = N_{\text{А}} - N_{\text{Д}} = p - n = 10^{20} - 2 \cdot 10^{19} = 8 \cdot 10^{19}\ \text{м}^{-3}.$$

Значение $N_{\text{А}} - N_{\text{Д}}$ положительно, следовательно, акцепторы присутствуют в большинстве и компенсированный материал $p$-типа.

Определим собственную концентрацию $n_i$:

$$n_i^2 = np = 10^{20} \cdot 2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-6},$$

откуда $n_i = 4{,}5 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

***Задание 64.*** Напряженность электрического поля в кристалле собственного кремния $E$=500 В/м, а подвижность электронов $\mu_n$ и дырок $\mu_p$ соответственно равны 0,14 $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и 0,05 $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. Концентрация собственных носителей $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$. Определить: а) скорость дрейфа электронов $\upsilon_n$ и дырок $\upsilon_p$; б) удельное сопротивление кремния $\rho_i$; в) полный дрейфовый ток $I$, если площадь поперечного сечения $S = 3 \cdot 10^{-6}$ м$^2$.

*Решение.* Скорость дрейфа электронов определяется выражением

$$\upsilon_n = \mu_n E = 0{,}14 \cdot 500 = 70 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость дрейфа дырок

$$\upsilon_p = \mu_p E = 0{,}05 \cdot 500 = 25 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Удельное сопротивление собственного кремния

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{n_i q_e (\mu_n + \mu_p)} =$$

$$= \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{16} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} (0{,}14 + 0{,}05)} = 2{,}2 \cdot 10^3 \ \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Полный дрейфовый ток в собственном полупроводнике

$$I = n_i q_e E \left(\mu_n + \mu_p\right) S =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{16} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 0{,}19 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 0{,}684 \ \text{мкА}.$$

***Задание 65.*** Вычислить диффузионную длину электронов в германии $p$-типа и дырок в германии $n$-типа, если время жизни неосновных носителей заряда $\tau_n = \tau_p = 10^{-4}$ с, коэффициент диффузии германия $p$-типа $D_n = 99 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ и германия $n$-типа $D_p = 47 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

*Решение.* Из выражения $D_n \tau_n = L_n^2$ находим диффузионную длину электронов:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = \sqrt{99 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}} = 0{,}99 \text{ мм.}$$

Диффузионная длина дырок

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{47 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}} = 0{,}69 \text{ мм.}$$

***Задание 66.*** В приближении модели водородоподобного атома определить отношение энергии ионизации доноров в арсениде галлия к энергии ионизации доноров в кремнии $\frac{\Delta E_n^{\text{GaAs}}}{\Delta E_n^{\text{Si}}}$, если эффективные массы электронов в кремнии $\left(m_n^*\right)_{\text{Si}} = 1{,}08 m_e$, в арсениде галлия $\left(m_n^*\right)_{\text{GaAs}} = 0{,}068 m_e$. Диэлектрические проницаемости кремния $\varepsilon_{\text{Si}} = 11{,}8$, арсенида галлия $\varepsilon_{\text{GaAs}} = 13{,}2$.

*Ответ*: $\frac{\Delta E_n^{\text{GaAs}}}{\Delta E_n^{\text{Si}}} = \frac{\left(m_n^*\right)_{\text{GaAs}} \varepsilon_{\text{Si}}^2}{\left(m_n^*\right)_{\text{Si}} \varepsilon_{\text{GaAs}}^2} = 0{,}0503.$

***Задание 67.*** Монокристалл германия Ge, ширина запрещенной зоны в котором равна 0,72 эВ, нагревают от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 288$ К. Во сколько раз возрастет его удельная проводимость?

*Ответ*: Удельная проводимость возрастет в 1,5 раза.

***Задание 68.*** Определить ширину запрещенной зоны монокристалла кремния, если при нагревании от температуры $T_1 = 273$ К до температуры $T_2 = 283$ К его удельная проводимость возрастает в 2,28 раза.

*Ответ*: $\Delta E_g = 1{,}1$ эВ.

***Задание 69.*** Сопротивление кристалла сульфида свинца PbS при температуре $T_1 = 293$ К равно $10^4$ Ом. Определить сопротивление кристалла сульфида свинца при температуре $T_2 = 353$ К. Энергия активации 2 эВ.

*Ответ:* $R = 2{,}45 \cdot 10^2$ Ом.

# 3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Рабочая программа по дисциплине предполагает выполнение двух виртуальных лабораторных работ.

Для выполнения лабораторных работ к конфигурации компьютерной техники предъявляются следующие системные требования:

- минимальные: процессор Pentium 2 – 333MHz, ОЗУ 32 MB, видеокарта с 8 MB памяти, 10 MB свободного места на HDD, операционная система Windows98\2000\XP, монитор диагональю 15 дюймов с разрешением 1024x768 или 800x600;
- рекомендуемые: процессор Pentium 3 – 500 MHz, ОЗУ 128 MB, видеокарта с 32 MB памяти, 10 MB свободного места на HDD, операционная система Windows98\2000\XP, монитор диагональю 17 дюймов с разрешением 1024x768.

Лабораторная работа № 1 предусматривает измерение удельного сопротивления и определение температурного коэффициента удельного сопротивления металлов.

Лабораторная работа № 2 предусматривает определение ширины запрещенной зоны полупроводника.

Описание виртуального лабораторного комплекса, программа работ и требования к оформлению отчета приведены в виртуальной среде выполнения лабораторных работ.

## Рекомендуемая литература


1. Легостаев Н.С. Материалы электронной техники: учеб. пособие / Н.С. Легостаев. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2014. – 205 с.

2. Поплавко Ю.М. Физика активных диэлектриков: учеб. пособие / Ю.М. Поплавко, Л.П. Переверзева, И.П. Раевский ; под ред. проф. В.П. Сахненко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. – 480 с. – ISBN 978-5-9275-0636-1.

3. Стародубцев Ю.Н. Магнитомягкие материалы. Энциклопедический словарь-справочник / Ю.Н. Стародубцев. – М.: Техносфера, 2011. – 664 с.

4. Воронков Э.Н. Твердотельная электроника. Практикум: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Э.Н. Воронков. – М.: Академия, 2010. – 128 с. – ISBN 978-5-7695-4218-3.

5. Сорокин В.С. Материалы и элементы электронной техники. В 2 т. Т. 1. Проводники, полупроводники, диэлектрики: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / В.С. Сорокин, Б.Л. Антипов, Н.П. Лазарева. – М.: Академия, 2006. – 448 с.

6. Сорокин В.С. Материалы и элементы электронной техники. В 2 т. Т. 2. Активные диэлектрики, магнитные материалы, элементы электронной техники: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / В.С. Сорокин, Б.Л. Антипов, Н.П. Лазарева. – М.: Академия, 2006. – 384 с.

7. Антипов Б.Л. Материалы электронной техники: задачи и вопросы / Б.Л. Антипов, В.С. Сорокин, В.А. Терехов ; под ред. В.А. Терехова. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 208 с. – ISBN 5-8114-0410-7.

8. Каталог научно-производственного предприятия ГАММАМЕТ, 2010.

9. Аморфные и нанокристаллические сплавы. Технический бюллетень научно-производственной фирмы MELTA Ltd.

10. ГОСТ 21427.4-78. Лента электротехническая холоднокатаная анизотропная.

11. ГОСТ 28883-90 (МЭК 62 – 74). Коды для маркировки резисторов и конденсаторов.

12. ГОСТ 28884-90. Ряды предпочтительных значений для резисторов и конденсаторов.

13. ГОСТ 22622-77. Материалы полупроводниковые. Термины и определения основных электрофизических параметров.

14. Архив журнала «Силовая электроника». – URL: www.power-e.ru/archive.php.

15. Архив журнала «Компоненты и технологии». – URL: www.compitech.ru/html.cgi/arhiv.

## Приложение А
## Универсальные физические постоянные

| Название | Обозна-чение | Числовое значение |
|---|---|---|
| Число молекул в киломоле вещества (число Авогадро) | $N_А$ | $6,022 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$ |
| Постоянная Больцмана | $k$ | $1,38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К} = 8,617 \cdot 10^{-5}\ \frac{эВ}{К}$ |
| Атомная единица массы | а.е.м. | $1,660 \cdot 10^{-27}$ кг |
| Масса покоя электрона | $m_e$ | $9,1095 \cdot 10^{-31}$ кг $= 5,486 \cdot 10^{-4}$ а.е.м. |
| Масса покоя протона | $m_p$ | $1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг $= 1,007276 \cdot 10^{-4}$ а.е.м. |
| Заряд электрона | $q_e$ | $1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл |
| Электрическая постоянная | $\varepsilon_0$ | $8,8542 \cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$ |
| Магнитная постоянная | $\mu_0$ | $12,5664 \cdot 10^{-7}\ \frac{Гн}{м}$ |
| Магнетон Бора | $\mu_В$ | $9,274 \cdot 10^{-24}\ \frac{Дж}{Тл}$ |
| Постоянная Планка | $h$ | $6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с $= 4,14 \cdot 10^{-15}\ \frac{эВ}{К}$ |
| Постоянная Планка, деленная на $2\pi$ | $\hbar$ | $1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с |

# Приложение Б
# Марки выпускаемых промышленностью сердечников

Таблица Б.1 – Марки материалов магнитомягких Mn-Zn-ферритов для слабых магнитных полей

| Диапазон рабочих частот | Производители сердечников | | |
|---|---|---|---|
| | Ферроприбор | Epcos | Samwha |
| До 0,45 МГц | 10000НМ | T38 | SM100 |
| До 2 МГц | 4000НМ | N30 | SM50 |
| | 6000НМ | T35 | SM70 |
| | 6000НМ1 | T37 | – |
| До 3 МГц | 1500НМ3 | N49 | – |
| | 2000НМ1 | N49 | SM19 |
| Слабые поля $H \leq 8\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$; средние поля $8\ \frac{\text{А}}{\text{м}} \leq H \leq 16\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$; сильные поля $H \geq 16 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ | | | |

Таблица Б.2 – Марки материалов магнитомягких Mn-Zn-ферритов для сильных магнитных полей

| Диапазон рабочих частот | Производители сердечников | | |
|---|---|---|---|
| | Ферроприбор | Epcos | Samwha |
| До 100 кГц | 2500НМС2 | N27 | – |
| | 2500НМС5 | N67 | PL7 |
| | 2500НМС7 | N87 | PL9 |
| | 2500НМС9 | N97 | PL11 |
| До 16 кГц | 3000НМС | N41 | – |
| Слабые поля $H \leq 8\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$; средние поля $8\ \frac{\text{А}}{\text{м}} \leq H \leq 16\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$; сильные поля $H \geq 16\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$ | | | |

Учебное издание

**Легостаев** Николай Степанович

**МАТЕРИАЛЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ**

Учебно-методическое пособие

Корректор Л.И. Кирпиченко
Компьютерная верстка Г.В. Черновой

Подписано в печать 24.07.2014. Формат 60×84/16.
Усл.-печ. л. 4,42. Тираж 100 экз. Заказ 436.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.
Тел. (3822) 533018.