Томский межвузовский центр
дистанционного образования

Ю.П. Акулиничев

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Часть 1

Учебное методическое пособие

ТОМСК – 2005

Корректор: Воронина М.А.

Акулиничев Ю.П.
Теория электрической связи. Часть 1: Учебное методическое пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2005. – 57 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПРОГРАММА КУРСА «ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ»

для студентов специальностей: 071700 «Физика и техника оптической связи», 201100 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение»
Курс – 4,5. Семестр – 7,8,9

Общий объем – 154 часа, из них:
Лекции – 78 часов (7,8 сем.).
Практические занятия – 38 часов (7,8 сем.).
Лабораторные занятия – 18 часов (8 сем.).
Курсовой проект – 20 часов (9 сем.).

Распределение числа часов по семестрам: 7 сем. – 4 час./нед., 8 сем. – 3 час./нед., 9 сем. – 1 час./нед.

Контрольные и самостоятельные работы: 2 работы в 7 сем., 2 работы в 8 сем.

Экзамен – в 7 и 8 семестрах, зачет – в 7 и 8 семестрах.

Часть 1 (7 семестр)

1.1 Введение – 3 часа.

Информация и сигнал как ее материальный носитель. Сообщение и информация. Случайный характер сообщений и сигналов. Примеры: речевые (телефонные), вещательные, телевизионные, телеграфные сигналы, сигналы передачи данных.

Системы передачи, хранения и распределения информации. Структурная схема системы передачи информации (СПИ). Сообщения и сигналы, преобразования сигналов в процессе передачи. Линия связи с помехами, функции передатчика и приемника. Количество и качество: скорость передачи и помехоустойчивость СПИ. Статистический анализ и синтез СПИ.

Системы распределения информации. Многоканальная связь и многостанционный доступ.

1.2 Математические модели сигналов и помех – 6 часов.

Цифровые сигналы. Символ, алфавит, основание кода. Вероятностное описание последовательности символов. Цепь Маркова. Примеры цифровых сигналов.

Дискретные сигналы. Последовательность гауссовских случайных величин.

Непрерывные сигналы. Основные параметры: длительность, ширина спектра и динамический диапазон. Стационарный гауссовский случайный процесс, числовые характеристики. Белый шум. Случайное поле. Примеры непрерывных сигналов.

Аддитивные и мультипликативные помехи. Канал многолучевого распространения волн как фильтр со случайно изменяющимися параметрами.

1.3 Преобразование сигналов в каналах связи – 9 часов.

Кодирование и декодирование цифровых сигналов. Основные задачи кодирования: сокращение избыточности, повышение помехоустойчивости, скрытности, криптоустойчивости.

Квантование во времени непрерывных сигналов. Теорема отсчетов. Восстановление непрерывного сигнала из дискретного, ошибки квантования.

АЦП и ЦАП. Основные характеристики, ошибки квантования, компрессия сигнала.

Модуляция несущей аналоговым сигналом: АМ, АМ с подавленной несущей, однополосная АМ, ЧМ. Спектры модулированных сигналов и полоса частот, требуемая для передачи.

Модуляция импульсной несущей дискретным сигналом: АИМ, ШИМ, ВИМ. Спектры модулированных сигналов и полоса частот, требуемая для передачи.

Способы модуляции в цифровых СПИ: АМ, ЧМ, ФМ, ОФМ. Многопозиционные методы модуляции. Векторное представление сигналов. Спектры модулированных сигналов, межсимвольная интерференция.

Элементарные преобразователи цифровых сигналов: регистр сдвига, сумматор по модулю 2, мультиплексор и демультиплексор, модуляторы, когерентный детектор и согласованный фильтр, цифровой фильтр.

Геометрическое представление сигналов и помех: энергии сигналов и расстояние между ними, независимость и ортогональность сигналов.

1.4 Помехоустойчивое и криптоустойчивое кодирование в цифровых системах передачи информации – 18 час.

Принципы помехоустойчивого кодирования. Блочные корректирующие коды. Обнаружение и исправление ошибок. Кодовое расстояние. Систематические линейные коды, порождающие матрицы. Декодирование линейных кодов. Проверочные матрицы. Коды Хемминга, Рида–Малера.

Циклические коды. Порождающий полином. Способы кодирования циклических кодов. Декодирование при обнаружении и исправлении ошибок. Коды БЧХ.

Сверточные коды (СК). Структура и основные характеристики СК. Пороговое декодирование. Декодирование по методу Витерби.

Кодирование в каналах с памятью. Группирование ошибок, перемежение символов при кодировании, применение циклических и сверточных кодов.

Предельные возможности помехоустойчивого кодирования. Системы с информационной и решающей обратной связью. Помехоустойчивость систем с обратной связью (ОС).

Модель и основные понятия секретной связи. Асимметричная и симметричная криптографические системы. Общая концепция криптографии с открытыми ключами. Двухключевая теоретико-числовая криптосистема RSA.

1.5 Основы теории информации – 10 часов.

Собственная информация, энтропия. Избыточность и ее роль. Кодирование в цифровых каналах без помех. Коды Шеннона–Фано, Хафмана, Лемпела–Зива.

Цифровые каналы с помехами. Взаимная информация. Скорость создания и скорость передачи информации. Пропускная способность канала связи, определение. Пропускная способность двоичного симметричного канала. Теоремы Шеннона о кодировании в дискретном канале с помехами.

Взаимная информация в непрерывных сигналах. Дифференциальная энтропия.

Пропускная способность непрерывного канала с аддитивным белым гауссовским шумом, формула Шеннона. Возможность обмена полосы пропускания на мощность сигнала.

2 УПРАЖНЕНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

2.1 Математические модели сигналов

Пример 1. Случайная величина X – число бросаний монеты до первого выпадания герба. Найти:

а) ряд распределения случайной величины X,

б) математическое ожидание X,

в) математическое ожидание двоичного логарифма вероятности X.

Решение. Возможные значения случайной величины X равны 1, 2, 3,... . Для осуществления события $x = n$ необходимо, чтобы в первых $n-1$ бросаниях выпадали решетки, а в n-м бросании выпал орел, поэтому $p(x = n) = (1/2)^n$ по формуле умножения вероятностей независимых событий. Ряд распределения дан в табл. 1.

Таблица 1

x_j	1	2	3	4	…
$p(x_j)$	1/2	1/4	1/8	1/16	…

Математическое ожидание числа бросаний вычислим по формуле (1.2) [1], положив

$$\varphi(x) = x, \quad m = \infty,$$

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p(x_j) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-0,5}\right)^2 = 2.$$

Математическое ожидание двоичного логарифма вероятности X также вычисляем по формуле (1.2) [1], положив $\varphi(x) = \log_2 p(x)$, т. е.

$$\mathrm{M}[\log_2 p(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \log_2 p(x_j) p(x_j) =$$

$$= \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\log_2 \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + \ldots = -1\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{8} - \ldots = -2.$$

Пример 2. По двоичному каналу связи с помехами (рис. 1) передаются сообщения x_1 и x_2 с априорными вероятностями $p(x_1)=0,4$ и $p(x_2)=0,6$. Влияние помех описывается переходными вероятностями:

$$p(y_1/x_1)=0,75, \qquad p(y_2/x_1)=0,25,$$
$$p(y_1/x_2)=0,5, \qquad p(y_2/x_2)=0,5.$$

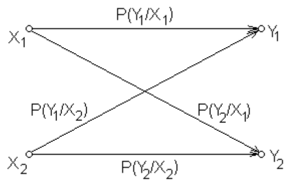

Рис. 1

Найти: а) безусловные вероятности сигналов на выходе канала;

б) наиболее вероятное значение X, если $y=y_1$;

в) наиболее вероятное значение X, если $y=y_2$.

Решение. Совместные вероятности сообщения X и сигнала Y вычисляем по формуле умножения вероятностей (1.8) [1]:

$$p(x_1,y_1)=p(x_1)p(y_1/x_1)=$$
$$=0,4\cdot 0,75=0,3,$$
$$p(x_1,y_2)=0,4\cdot 0,25=0,1, \qquad p(x_2,y_1)=0,6\cdot 0,5=0,3,$$
$$p(x_2,y_2)=0,6\cdot 0,5=0,3.$$

Безусловные вероятности сигналов на выходе канала вычислим по формуле полной вероятности (1.7) [1]:

$$p(y_1)=p(x_1,y_1)+p(x_2,y_1)=0,3+0,3=0,6,$$
$$p(y_2)=p(x_1,y_2)+p(x_2,y_2)=0,1+0,3=0,4=1-p(y_1).$$

Условные вероятности сообщений на входе находим по формуле Байеса (1.9) [1]:

$$p(x_1/y_1)=\frac{p(x_1,y_1)}{p(y_1)}=\frac{0,3}{0,6}=0,5,$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{0,3}{0,6}=0,5=1-p(x_1/y_1),$$

$$p(x_1 / y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25\,,$$

$$p(x_2 / y_2) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75 = 1 - p(x_1 / y_2)\,.$$

Сравнив $p(x_1 / y_2)$ и $p(x_2 / y_2)$, видим, что если принят сигнал y_2, то более вероятно, что было передано сообщение x_2. Сигнал y_1 мог быть с одинаковой вероятностью вызван сообщениями x_1 и x_2.

Пример 3. Сигнал $Y(t)$ на выходе непрерывного канала связи выражается через входной сигнал $X(t)$ соотношением $Y(t) = X(t) + Z(t)$, где $Z(t)$ – аддитивный нормальный стационарный белый шум с односторонней спектральной плотностью $N_0 = 10^{-18}$ В/Гц, ограниченный полосой от 0 до $F_B = 10$ МГц. Суммарная мощность составляющих в спектре сигнала $X(t)$, лежащих вне указанной полосы, пренебрежимо мала.

Осуществить квантование по времени сигнала $Y(t)$ на интервале от 0 до $T = 10^{-4}$ секунды. Для конкретной реализации входного сигнала (в вольтах)

$$x(t) = \frac{10^{-6}}{1 + 10^5 \cdot (t - 5 \cdot 10^{-5})^2}$$

найти для квантованного сигнала:

а) вектор условных математических ожиданий;

б) условную корреляционную матрицу;

в) условную плотность вероятности квантованного сигнала на выходе.

Решение. Чтобы осуществить квантование непрерывного по времени сигнала $Y(t)$, необходимо взять его отсчеты $Y^{(1)}, Y^{(2)}, ..., Y^{(n)}$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, ..., n$, где $T/\Delta t \le n < T/\Delta t + 1$.

Верхняя граничная частота суммы сигнала с шумом равна F_B, поэтому шаг квантования определяется в соответствии с теоремой Котельникова:

$$\Delta t = \frac{1}{2F_B} = \frac{1}{2\cdot 10^7}\ \text{с} = 0,05\ \text{мкс}.$$

Требуемое число отсчетов равно $n = 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^7 = 2000$.

Каждый отсчет сигнала $Y^{(k)} = Y(t_k)$ является суммой двух величин

$$Y^{(k)} = X^{(k)} + Z^{(k)},$$

где $X^{(k)} = X(t_k)$ – отсчет сообщения;

$Z^{(k)} = Z(t_k)$ – отсчет шума.

Вектор условных математических ожиданий сигнала состоит из следующих элементов:

$$m^{(k)} = \mathrm{M}\left[Y^{(k)} / x^{(k)}\right] = x^{(k)} + \mathrm{M}\left[Z^{(k)}\right] = x^{(k)} =$$

$$= \frac{10^{-6}}{1+10^5\cdot(5\cdot 10^{-8}k - 5\cdot 10^{-5})^2}$$

и определяется только передаваемым сообщением, так как математическое ожидание белого шума $Z(t)$ равно нулю.

Условная корреляционная матрица **B** сигнала $Y(t)$ при фиксированном $x(t)$ состоит из следующих элементов:

$$B^{(kj)} = \mathrm{M}\left\{\left[Y^{(k)} - m^{(k)}\right]\cdot\left[Y^{(j)} - m^{(j)}\right]\right\} = \mathrm{M}\left[Z^{(k)}Z^{(j)}\right]$$

и равна корреляционной матрице отсчетов шума. Элементы этой матрицы есть отсчеты корреляционной функции шума:

$$B^{(kj)} = B(t_k, t_j).$$

Шум стационарен, поэтому его корреляционная функция зависит от разности аргументов $\tau = t_1 - t_2$ и может быть найдена по теореме Винера–Хинчина (1.21) [1]:

$$B(\tau) = \int_0^\infty G(f)\cos 2\pi f\tau\cdot df,$$

где $G(f)$ – спектр плотности мощности шума.

По условию задачи, он равномерен в полосе $0\ldots F_B$,

$$G(f)=\begin{bmatrix} N_0, & 0\le f\le F_B, \\ 0, & f>F_B. \end{bmatrix}$$

Находим выражение для корреляционной функции:

$$B(\tau)=N_0\int_0^{F_B}\cos 2\pi f\tau\cdot df=N_0\frac{\sin 2\pi F_B\tau}{2\pi\tau}.$$

Поскольку $\Delta t=1/(2F_B)$, то

$$B(\tau)=N_0F_B\frac{\sin\pi\tau/\Delta t}{\pi\tau/\Delta t}.$$

Отсюда видно, что $B(\tau)=0$ при $\tau=\Delta t;2\Delta t;3\Delta t,...,$ т.е. отсчеты $Z^{(1)},...,Z^{(n)}$, взятые с шагом квантования Δt, некоррелированы. Таким образом, в корреляционной матрице отсчетов сигнала не равны нулю будут только элементы, стоящие на главной диагонали,

$$B^{(kk)}=B(0)=N_0F_B=10^{-11},$$

численно равные дисперсии этих отсчетов (вольт^2).

Условная плотность вероятности квантованного сигнала есть совместная плотность вероятности системы n некоррелированных (следовательно, и независимых) нормальных случайных величин:

$$W\left[y^{(1)},...,y^{(n)}/x(t)\right]=\prod_{k=1}^{n}W\left[y^{(k)}/x^{(k)}\right]=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi B^{(kk)}}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2B^{(kk)}}(y^{(k)}-x^{(k)})^2\right]=$$

$$=\frac{1}{(2\pi N_0F_B)^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2N_0F_B}\sum_{k=1}^{n}(y^{(k)}-x^{(k)})^2\right].$$

Пример 4. Доказать, что для любой положительной случайной величины X (имеющей только положительные возможные значения) при $a>1$ справедливо неравенство Иенсена:

$$\mathrm{M}\left[\log_a X\right]\le\log_a\mathrm{M}\left[X\right].$$

Доказать, что для любой системы случайных величин $Q, L, ..., Z$ и любой функции φ, таких, что $\varphi(Q, L, ..., Z) > 0$ при всех возможных значениях системы, справедливо аналогичное неравенство:

$$\mathrm{M}\left[\log_a \varphi(Q, L, ..., Z)\right] \le \log_a \mathrm{M}\left[\varphi(Q, L, ..., Z)\right].$$

Найти необходимые и достаточные условия, при которых неравенства обращаются в равенства.

Решение. Сначала убедимся, что непрерывная функция $y = \log_a x$ является строго выпуклой вверх, т.е. ее вторая производная отрицательна при любых $x > 0$.

Действительно,

$$y' = \frac{1}{x \ln a}, \quad y'' = -\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{при } a > 1.$$

Следовательно, график функции $y = \log_a x$ лежит ниже касательной, проведенной в любой точке $x_0 > 0$ (рис. 2):

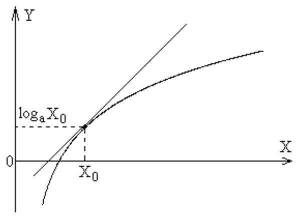

Рис. 2

$$y = \log_a x \le \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a}(x - x_0),$$

причем знак равенства выполняется только в точке касания $x = x_0$.

Предположим, что X – положительная случайная величина, тогда полученное неравенство справедливо для любого из ее возможных значений и, следовательно, при усреднении обеих частей знак неравенства сохранится:

$$\mathrm{M}\left[\log_a X\right] \le \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a}\left\{\mathrm{M}\left[X\right] - x_0\right\}.$$

Выбрав абсциссу точки касания $x_0 = \mathrm{M}\left[X\right]$, получим окончательно

$$\mathrm{M}\left[\log_a X\right] \le \log_a \mathrm{M}\left[X\right].$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все возможные значения случайной величины

$X = x_0 = \mathrm{M}\left[X\right]$, т.е. если величина X не случайна.

Пусть случайная величина X получена в результате функционального преобразования системы случайных величин $X = \varphi(Q, L, ..., Z) > 0$, тогда в силу доказанного неравенства имеем

$$\mathrm{M}\left[\log_a \varphi(Q, L, ..., Z)\right] \le \log_a \mathrm{M}\left[\varphi(Q, L, ..., Z)\right].$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда величина $X = \varphi(Q, L, ..., Z)$ не случайна.

2.2 Собственная информация. Взаимная информация

Пример 5. На экране индикатора РЛС, представляющего поле с 10 вертикальными и 10 горизонтальными полосами, появляется изображение объекта в виде яркостной отметки. Все положения объекта равновероятны.

Определить количество информации, содержащееся в сообщениях:

а) объект находится в 46-м квадрате экрана;

б) объект находится в 5-й горизонтальной строке экрана;

в) объект находится в 6-м вертикальном столбце и 3-й горизонтальной строке экрана.

Решение. а) Пусть x_{46} – сообщение о том, что объект находится в 46-м квадрате экрана.

Собственная информация в этом сообщении по формуле (4.2) [1] равна $I(x_{46}) = -\log_2 p(x_{46})$. Безусловная вероятность сообщения – объект находится в 46-квадрате экрана – равна $p(x_{46}) = m/n$, где n – общее число возможных исходов (квадратов поля), m – число исходов, благоприятствующих событию x_{46}.

По условию задачи $n = 100$ квадратов, а $m = 1$. Тогда

$$p(x_{46}) = 0,01 \text{ и } I(x_{46}) = -\log 0,01 = \log_2 100 = 6,6439 \text{ бит}.$$

б) Вероятность события y_5 – объект находится в 5-й горизонтальной строке экрана – по аналогии с рассмотренным случаем а) определится $p(y_5) = m/n = 10/100 = 0,1$ и собственная информация

$$I(y_5) = -\log_2 0,1 = \log_2 10 = 3,3219 \text{ бит.}$$

в) Вероятность события $z_{6,3}$ – объект находится в 6-м вертикальном столбце и 3-й горизонтальной строке – равна

$p(z_{6,3}) = m/n = 0,01$, следовательно,

$$I(z_{6,3}) = -\log_2 0,01 = 6,6439 \text{ бит.}$$

Пример 6. Рассматривается ансамбль сообщений, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

x_j	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$p(x_j)$	1/2	1/4	1/8	1/32	1/32	1/32	1/32
Кодовое слово	001	010	100	011	101	110	111

Сообщение x_4 поступает в кодер. Вычислить дополнительную информацию об этом сообщении, доставляемую каждым последующим символом на выходе кодера.

Решение. На вход кодера поступает одно из сообщений $x_0,...,x_6$, а кодер порождает соответствующие таблице двоичные символы. Так, сообщению x_4 соответствует на выходе кодовое слово 101. Символы на выходе кодера появляются последовательно, т.е. первый символ 1, второй 0 и третий 1. Первый символ кодового слова содержит некоторую информацию относительно того, какое сообщение поступает на вход кодера. Так, первый символ 1 показывает, что на входе могли быть сообщения x_2, x_4, x_5 или x_6. Второй символ 0 сужает выбор – теперь на входе возможно одно из двух сообщений: x_2 или x_4. И, наконец, последний, третий символ 1 однозначно определяет переданное сообщение.

По формуле (4.19) [1] взаимная информация, содержащаяся в первом кодовом символе 1 относительно сообщения x_4, равна

$$I(x_4;1) = \log \frac{p(x_4/1)}{p(x_4)}.$$

Обратная вероятность $p(x_4/1)$ может быть найдена по формуле Байеса (1.9) [1]:

$$p(x_4/1) = \frac{p(x_4)p(1/x_4)}{\sum_{j=1}^{6} p(1/x_j)p(x_j)},$$

где $p(1/x_j) = \begin{cases} 1, & j = 2,4,5,6, \\ 0, & j = 0,1,3, \end{cases}$

т.е. условная вероятность $p(1/x_j) = 0$ для гипотез, при которых первый кодовый символ есть 0, и $p(1/x_j) = 1$ для гипотез, при которых первый кодовый символ 1. В знаменателе формулы Байеса таким образом учитываются те гипотезы, при которых возможно появление 1 на первом месте.

Итак,

$$p(x_4/1) = \frac{1/32}{1/8 + 3 \cdot 1/32} = \frac{1}{7},$$

$$p(x_4/10) = \frac{1/32}{1/8 + 1/32} = \frac{1}{5}, \quad p(x_4/101) = \frac{1/32}{1/32} = 1,$$

а взаимная информация, содержащаяся в первом кодовом символе 1 относительно сообщения x_4, равна

$$I(x_4;1) = \log \frac{p(x_4/1)}{p(x_4)} = \log_2 \frac{1/7}{1/32} = \log_2 32 - \log_2 7 = 2{,}1926 \text{ бит}.$$

Информация, содержащаяся во втором кодовом символе 0 при условии, что первый кодовый символ был 1, есть

$$I(x_4;0/1) = \log \frac{p(x_4/10)}{p(x_4/1)} = \log_2 \frac{1/5}{1/7} = 0{,}4854 \text{ бит}.$$

Информация, содержащаяся в третьем кодовом символе 1 при условии, что ему предшествовали 10, есть

$$I(x_4;1/10)=\log_2\frac{p(x_4/101)}{p(x_4/10)}=\log_2\frac{1}{1/5}=2{,}3219\text{ бит.}$$

Так как сообщения x_j и кодовые слова однозначно связаны, то

$$I(x_4)=I(x_4;1)+I(x_4;0/1)+I(x_4;1/10).$$

Действительно, $I(x_4)=-\log_2 p(x_4)=\log_2 32=5$ бит, и это совпадает с приведенной суммой.

Пример 7. По дискретному каналу передаются сообщения x_1 или x_2. Вследствие действия шумов на выходе появляется один из сигналов y_1, y_2, y_3. Вероятности совместного появления $p(x_j;y_k)$ заданы табл. 3.

Таблица 3

x_j	y_k		
	y_1	y_2	y_3
x_1	1/4	1/16	1/8
x_2	1/8	3/16	1/4

Вычислить взаимные информации $I(x_2;y_2)$, $I(x_1;y_3)$.

Решение. Дискретный канал с шумом удобно изображать в виде графа (рис. 3).

Определим взаимную информацию по формуле (4.19) [1]:

$$I(x_1;y_3)=\log\frac{p(x_1/y_3)}{p(x_1)}$$

или в силу свойства симметрии

$$I(x_1;y_3)=I(y_3;x_1)=\log\frac{p(y_3/x_1)}{p(y_3)}.$$

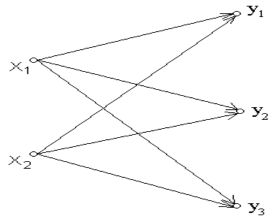

Рис. 3

Условные и безусловные вероятности найдем, воспользовавшись таблицей. По формуле (1.7) [1]:

$$p(x_1)=p(x_1,y_1)+p(x_1,y_2)+p(x_1,y_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16};$$

$$p(x_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{9}{16};\ p(y_1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8};$$

$$p(y_2)=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{1}{4};\ p(y_3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

Используя формулы (1.9), (1.10) [1], найдем условные вероятности:

$$p(y_2/x_2)=\frac{p(x_2,y_2)}{p(x_2)}=\frac{3/16}{9/16}=\frac{1}{3},$$

$$p(x_1/y_3)=\frac{p(x_1,y_3)}{p(y_3)}=\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}.$$

Тогда количество взаимной информации по формуле (4.19) [1]:

$$I(x_2;y_2)=\log_2\frac{p(y_2/x_2)}{p(y_2)}=\log_2\frac{1/3}{1/4}=0{,}415\text{ бит}.$$

$$I(x_1;y_3)=\log_2\frac{p(x_1/y_3)}{p(x_1)}=\log_2\frac{1/3}{7/16}=-0{,}3923\text{ бит}.$$

Мы получили $I(x_1;y_3)<0$, так как $p(x_1/y_3)<p(x_1)$.

Пример 8. Производится стрельба по двум мишеням, по одной сделано 2 выстрела, по второй – 3. Вероятности попадания при одном выстреле соответственно равны 1/2 и 1/3. Исход стрельбы (число попаданий) по какой мишени является более определенным?

Решение. Исход стрельбы определяется числом попаданий в мишень, которое подчинено биномиальному закону распределения $p(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$,

где $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Составляем ряд распределения для числа попаданий в первую мишень при n=2 и p=1/2 (табл. 4) и вторую мишень при n=3 и p=1/3 (табл. 5).

Таблица 4

m	0	1	2
$p(x=m)$	1/4	1/2	1/4

Таблица 5

m	0	1	2	3
$p(x=m)$	8/27	4/9	2/9	1/27

Мерой неопределенности исхода стрельбы служит энтропия числа попаданий. Энтропия числа попаданий при стрельбе по первой мишени (4.6) [1]:

$$H_1(X) = -\sum_{j=1}^{n_1} p(x_j)\log p(x_j) = -\left[2\cdot\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right] = 1{,}5 \text{ бит.}$$

Аналогично для второй мишени имеем

$$H_2(X) = -\left[\frac{8}{27}\log_2\frac{8}{27}+\frac{4}{9}\log_2\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\log_2\frac{2}{9}+\frac{1}{27}\log_2\frac{1}{27}\right] = 1{,}7 \text{ бит,}$$

т.е. исход стрельбы по второй мишени обладает большей неопределенностью.

Пример 9. Источник сообщений вырабатывает ансамбль символов

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}05 \end{Bmatrix}.$$

Символы в последовательности независимы.

Вычислить энтропию источника и определить избыточность.

Решение. Энтропия источника для случая неравновероятных и независимых сообщений определяется формулой (4.6) [1]:

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{m} p(x_j)\log p(x_j) = -[0{,}4\cdot\log 0{,}4 + 0{,}2\cdot\log 0{,}2 +$$

$$+0{,}15\cdot\log 0{,}15 + 2\cdot 0{,}1\cdot\log 0{,}1 + 0{,}05\cdot\log 0{,}05] = 2{,}2842 \text{ бит.}$$

Избыточность за счет неоптимальности (неравновероятности) распределения сообщений в источнике определяется формулой (4.12) [1]: $R = 1 - H/H_{max}$, где $H_{max} = \log m$ по формуле (2.2.3).

Отсюда $R = 1 - 2{,}2842/\log 6 = 0{,}1164.$

Пример 10. Алфавит источника состоит из трех букв: x_1, x_2, x_3.

Определить энтропию на 1 букву текста $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ для следующих случаев:

а) буквы алфавита неравновероятны: $p(x_1) = 0{,}5$, $p(x_2) = p(x_3) = 0{,}25$, а символы в последовательности на выходе источника статистически зависимы. Условные вероятности

Таблица 6

i – индекс предыдущей буквы	j – индекс последующей буквы		
	1	2	3
1	0,4	0,2	0,4
2	0	0,6	0,4
3	0,3	0	0,7

$p(x_j^{(2)}/x_i^{(1)})$ заданы в табл. 6;

б) вероятности букв те же, что и в п. а), но символы независимы;

в) символы в последовательности независимы, вероятности букв одинаковы.

Вычислить избыточность источников для случаев а) и б).

Решение. а) В случае неравновероятных и зависимых сообщений энтропия текста по формуле (4.10) [1]:

$$H(X^{(1)}X^{(2)}) = H(X^{(1)}) + H(X^{(2)}/X^{(1)}),$$

где $H(X^{(1)}) = -\sum_{j=1}^{m} p(x_j)\log p(x_j) = 1{,}5$ бит,

а условная энтропия равна:

$$H(X^{(2)}/X^{(1)}) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i^{(1)})p(x_j^{(2)}/x_i^{(1)})\log p(x_j^{(2)}/x_i^{(1)}) =$$

$$= -\{p(x_1^{(1)})[p(x_1^{(2)}/x_1^{(1)})\log p(x_1^{(2)}/x_1^{(1)}) + p(x_2^{(2)}/x_1^{(1)})\log p(x_2^{(2)}/x_1^{(1)}) +$$

$$+ p(x_3^{(2)}/x_1^{(1)})\log p(x_3^{(2)}/x_1^{(1)})] + p(x_2^{(1)})[p(x_1^{(2)}/x_2^{(1)})\log p(x_1^{(2)}/x_2^{(1)}) +$$

$$+ p(x_2^{(2)}/x_2^{(1)})\log p(x_2^{(2)}/x_2^{(1)}) + p(x_3^{(2)}/x_2^{(1)})\log p(x_3^{(2)}/x_2^{(1)})] +$$

$$+ p(x_3^{(1)})[p(x_1^{(2)}/x_3^{(1)})\log p(x_1^{(2)}/x_3^{(1)}) + p(x_2^{(2)}/x_3^{(1)})\log p(x_2^{(2)}/x_3^{(1)}) +$$

$$+ p(x_3^{(2)}/x_3^{(1)})\log p(x_3^{(2)}/x_3^{(1)})]\} = -\{\frac{1}{2}[0{,}4\cdot\log_2 0{,}4 + 0{,}2\cdot\log_2 0{,}2 +$$

$$+0{,}4\cdot\log_2 0{,}4] + \frac{1}{4}[0 + 0{,}6\cdot\log_2 0{,}6 + 0{,}4\cdot\log_2 0{,}4] + \frac{1}{4}[0{,}3\cdot\log_2 0{,}3 +$$

$$+0{,}7\cdot\log_2 0{,}7]\} \approx 1{,}224 \text{ бит.}$$

Энтропия на один символ:

$$H_1(X^{(1)}, X^{(2)}) = [H(X^{(1)}) + H(X^{(2)}/X^{(1)})]/2 = 1{,}362 \text{ бит/симв.}$$

б) При неравновероятных, но зависимых сообщениях энтропия вычисляется по формуле (4.6) [1]:

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{n} p(x_j)\log p(x_j) = -\left[\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right] = 1,5\,\frac{\text{бит}}{\text{симв}}.$$

Избыточность, обусловленная статистической зависимостью

$$R_1 = 1 - H_1(X)/H(X) = 1 - 1,362/1,5 = 0,092.$$

в) В случае равновероятных и независимых сообщений энтропия по формуле (4.7) [1]:

$$H_{max}(X) = \log_2 m = \log_2 3 = 1,585 \text{ бит}.$$

Избыточность, обусловленная неоптимальностью распределения вероятности:

$$R_2 = 1 - H(X)/H_{max}(X) = 1 - 1,5/1,585 = 0,054.$$

Полная избыточность (за счет неоптимальности распределения и наличия статистических взаимосвязей)

$$R = 1 - H_1(X)/H_{max}(X) = 0,141.$$

Пример 11. Вычислить для конкретного канала, заданного в примере 7, средние количества информации.

$$I(X;y_1), \qquad I(x_1;Y), \qquad I(X;Y).$$

Решение. а) Средняя взаимная информация в реализации сигнала на выходе y_1 относительно случайной величины X на входе канала определяется формулой:

$$I(X;y_1) = \sum_{j=1}^{n} p(x_j/y_1)\log\frac{p(x_j/y_1)}{p(x_j)} =$$

$$= p(x_1/y_1)\log\frac{p(x_1/y_1)}{p(x_1)} + p(x_2/y_1)\log\frac{p(x_2/y_1)}{p(x_2)}.$$

Из примера 7 известны вероятности:

$$p(x_1) = 7/16, \quad p(x_2) = 9/16,$$

$$p(y_1) = 3/8, \quad p(y_2) = 1/4, \quad p(y_3) = 3/8.$$

Определим условные вероятности:

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1,y_1)}{p(y_1)} = \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3},$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{p(x_2,y_1)}{p(y_1)}=\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}.$$

Средняя информация:

$$I(X;y_1)=\frac{2}{3}\log_2\frac{2/3}{3/8}+\frac{1}{3}\log_2\frac{1/3}{3/8}=0,4967\text{ бит.}$$

б) Средняя взаимная информация в выходной величине Y относительно реализации случайной величины на входе x_1 определяется формулой:

$$I(x_1;Y)=\sum_{k=1}^{m}p(y_k/x_1)\log\frac{p(y_k/x_1)}{p(y_k)}=p(y_1/x_1)\log\frac{p(y_1/x_1)}{p(y_1)}+$$

$$+p(y_2/x_1)\log\frac{p(y_2/x_1)}{p(y_2)}+p(y_3/x_1)\log\frac{p(y_3/x_1)}{p(y_3)}.$$

Определяем условные вероятности:

$$p(y_1/x_1)=\frac{p(x_1,y_1)}{p(x_1)}=\frac{1/4}{7/16}=\frac{4}{7},$$

$$p(y_2/x_1)=\frac{p(x_1,y_2)}{p(x_1)}=\frac{1/16}{7/16}=\frac{1}{7},$$

$$p(y_3/x_1)=\frac{p(x_1,y_3)}{p(x_1)}=\frac{1/8}{7/16}=\frac{2}{7}.$$

Условная средняя взаимная информация равна:

$$I(x_1;Y)=\frac{4}{7}\log_2\frac{4/7}{3/8}+\frac{1}{7}\log_2\frac{1/7}{1/4}+\frac{2}{7}\log_2\frac{2/7}{3/8}=0,1198\text{ бит.}$$

в) Средняя взаимная информация между случайной величиной Y на выходе канала и случайной величиной X на входе определяется формулой (4.23) [1]:

$$I(X;Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}p(x_j)p(y_k/x_j)\log\frac{p(y_k/x_j)}{p(y_k)}.$$

Воспользовавшись результатами вычислений $I(x_1;Y)$, получим для средней взаимной информации:

$$I(X;Y)=\mathrm{M}\left[I(x_j;Y)\right]=\sum_{j=1}^{n}p(x_j)I(x_j;Y)=$$

$$=p(x_1)\Big[p(y_1/x_1)\log\frac{p(y_1/x_1)}{p(y_1)}+$$

$$+p(y_2/x_1)\log\frac{p(y_2/x_1)}{p(y_2)}+p(y_3/x_1)\log\frac{p(y_3/x_1)}{p(y_3)}\Big]+$$

$$+p(x_2)\Big[p(y_1/x_2)\log\frac{p(y_1/x_2)}{p(y_1)}+$$

$$+p(y_2/x_2)\log\frac{p(y_2/x_2)}{p(y_2)}+p(y_3/x_2)\log\frac{p(y_3/x_2)}{p(y_3)}\Big]=$$

$$=\frac{7}{16}\left[\frac{4}{7}\log_2\frac{4/7}{3/8}+\frac{1}{7}\log_2\frac{1/7}{1/4}+\frac{2}{7}\log_2\frac{2/7}{3/8}\right]+$$

$$+\frac{9}{16}\left[\frac{2}{9}\log_2\frac{2/9}{3/8}+\frac{1}{3}\log_2\frac{1/3}{1/4}+\frac{4}{9}\log_2\frac{4/9}{3/8}\right]=0,0972\text{ бит.}$$

Пример 12. Эргодический источник имеет алфавит, состоящий из 8 букв. Средние частоты повторения букв одинаковы. При передаче по каналу с шумом в среднем половина всех букв принимается правильно, в другой половине случаев имеют место ошибки, при этом любая буква переходит в любую другую с одинаковой вероятностью. Какова средняя информация в принятой букве относительно переданной?

Решение. Обозначим

$$X=\begin{Bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_8\\ p(x_1) & p(x_2) & p(x_3) & \dots & p(x_8)\end{Bmatrix} -$$

ансамбль переданных букв,

$$Y=\begin{Bmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_8\\ p(y_1) & p(y_2) & p(y_3) & \dots & p(y_8)\end{Bmatrix} -$$

ансамбль принятых букв.

Так как для эргодической последовательности средние по времени частоты повторения букв совпадают с вероятностями, то по условию задачи вероятности появления букв на входе канала $p(x_j) = 1/n = 1/8$.

Ищем условные вероятности $p(y_k / x_j)$. Поскольку половина всех букв принимается правильно, то $p(y_k / x_j) = 1/2$ при $k = j$.

Другая половина случаев есть ошибочный прием, причем по условию задачи все возможные ошибки равновероятны. Число возможных переходов (ошибок) равно 7. Тогда вероятность ошибки $p(y_k / x_j) = 0{,}5 \cdot 1/7 = 1/14$ при $k \neq j$.

Вероятности появления букв на выходе найдем по (1.7) [1]:

$$p(y_k) = \sum_{j=1}^{8} p(x_j) p(y_k / x_j) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{8}$$ для любого κ.

Этот же результат следует непосредственно из того факта, что рассматриваемый канал – симметричный (набор вероятностей ошибок одинаков для любого X), тогда при равномерном распределении на входе распределение на выходе также равномерно.

Среднюю взаимную информацию находим по формуле (4.23) [1]:

$$I(X;Y) = \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{8} p(x_j) p(y_k / x_j) \log \frac{p(y_k / x_j)}{p(y_k)} =$$

$$= p(x_1)\left[p(y_1 / x_1) \log \frac{p(y_1 / x_1)}{p(y_1)} + p(y_2 / x_1) \log \frac{p(y_2 / x_1)}{p(y_2)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + p(y_8 / x_1) \log \frac{p(y_8 / x_1)}{p(y_8)} \right] + p(x_2)[\cdot] + \ldots + p(x_8)[\cdot].$$

Выражения в квадратных скобках, коротко обозначенные как $[\cdot]$, численно равны, поэтому

$$I(X;Y)=[\cdot][p(x_1)+p(x_2)+...+p(x_8)]=[\cdot]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1/2}{1/8}+7\cdot\frac{1}{14}\log\frac{1/14}{1/8}\right]=0,5963\text{ бит.}$$

Пример 13. Сообщение X есть стационарная последовательность независимых символов, имеющих ряд распределения:

x_j	x_1	x_2	x_3
$p(x_j)$	0,2	0,1	0,7

Сигнал Y является последовательностью двоичных символов, связанных с сообщением следующим неудачным образом: $x_1\to 00$, $x_2\to 00$, $x_3\to 1$.

Определить: а) средние безусловную и условную энтропии, приходящиеся на 1 символ сообщения;

б) средние безусловную и условную энтропии, приходящиеся на 1 символ сигнала;

в) среднюю взаимную информацию в расчете на 1 символ сообщения.

Решение. Символы в последовательности на выходе источника независимы, поэтому из (4.30) [1]:

$$H\left[X(t)\right]=H_1\left[X(t)\right]=H\left[X\right]=$$

$$=-0,2\cdot\log 0,2-0,1\cdot\log 0,1-0,7\cdot\log 0,7=1,1568\text{ бит/симв.}$$

Обозначив y_1=00, y_2=1, вычислим условные и безусловные вероятности сигнала:

$$p(y_1/x_1)=p(y_1/x_2)=1,\quad p(y_1/x_3)=0,$$

$$p(y_2/x_1)=p(y_2/x_2)=0,\quad p(y_2/x_3)=1,$$

$$p(y_1)=p(x_1)\,p(y_1/x_1)+p(x_2)\,p(y_1/x_2)+$$

$$+p(x_3)\,p(y_1/x_3)=0,2+0,1=0,3,$$

$$p(y_2)=0,7.$$

Энтропия случайной величины Y равна:

$$H(Y)=-0,3\cdot\log 0,3-0,7\cdot\log 0,7=0,8813\text{ бит},$$

а условная энтропия $H(Y/X)$=0, так как сигнал однозначно определяется сообщением.

Взаимная информация

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=0,8813\text{ бит}.$$

Условная энтропия сообщения

$$H(X/Y)=H(X)-I(X;Y)=1{,}1568-0{,}8813=0{,}2755\text{ бит}.$$

Итак, получаем, что условная энтропия сообщения равна 0,2755 бит/симв, а взаимная информация в расчете на 1 символ сообщения равна 0,8813 бит/симв.

Среднее количество символов сигнала, приходящихся на 1 символ сообщения, равно

$$L=\sum_{j=1}^{3}p(x_j)l_j=0{,}2\cdot 2+0{,}1\cdot 2+0{,}7\cdot 1=1{,}3\text{ симв},$$

где l_j – длина кодового слова, соответствующего x_j.

Энтропия последовательности *Y(t)* равна

$$H\left[Y(t)\right]=H(Y)/L=0{,}8813/1{,}3=0{,}6779\text{ бит/симв},$$

а условная энтропия равна нулю.

Пример 14. Вольтметром измеряется напряжение в электрической сети. Ошибка измерения не зависит от истинного значения напряжения и распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 2 В. Истинное значение напряжения в сети также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 220 В и СКО, равным 10 В.

Найти:

а) зависимость величины получаемой информации от показаний прибора,

б) среднюю величину получаемой информации.

Решение. Введем обозначения:

X – напряжение в сети,

V – ошибка измерения,

Y = X + V – показание прибора.

Из условия задачи записываем плотности вероятностей:

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

$$W\left(y/x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\exp\left[-\frac{\left(y-x\right)^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Безусловную плотность вероятности величины Y можно найти по формуле полной вероятности, но проще поступить следующим образом. Показание прибора Y есть сумма двух независимых нормальных случайных величин и, следовательно, Y также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$m_y = m_x + m_v = m_x = 220$ В

и дисперсией

$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_v^2 = 104$ В^2.

Итак,

$$W\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left[-\frac{\left(y-m_x\right)^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

Условную плотность вероятности x находим по формуле Байеса:

$$W\left(x/y\right)=\frac{W\left(y/x\right)W\left(x\right)}{W\left(y\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_y}{\sqrt{2\pi}\sigma_v\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(y-x\right)^2}{\sigma_v^2}+\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\sigma_x^2}-\frac{\left(y-m_x\right)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}.$$

В выражении, стоящем под знаком экспоненты, осуществляем возведение в квадрат и затем группируем члены, содержащие x^2 и x. В итоге убеждаемся, что условное распределение величины x также нормально:

$$W\ \left(x/y\ \right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left\{-\frac{\left[x-S\left(y\right)\right]^2}{2\delta^2}\right\},$$

где $S\left(y\right)=m_x+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\left(y-m_x\right)$ – условное математическое ожидание X,

$$\delta^2 = \frac{\sigma_x^2 \sigma_v^2}{\sigma_y^2}$$ – условная дисперсия X.

Для ответа на вопрос п. а) следует по формуле (3.1.2) вычислить величину средней взаимной информации между ансамблем X и реализацией y:

$$I(X;y) = \mathrm{M}\left[\ln\frac{W(X/y)}{W(X)}\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left\{\ln\frac{\sigma_x}{\delta} - \frac{\left[X - S(y)\right]^2}{2\delta^2} + \frac{(X - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}.$$

Находим квадраты разностей и выносим за знак математического ожидания слагаемые и множители, не зависящие от x. Далее учитываем, что вычисляются условные математические ожидания при конкретном значении y, поэтому

$$\mathrm{M}[X] = S(y), \quad \mathrm{M}\left[X^2\right] = S^2(y) + \delta^2.$$

В итоге получаем

$$I(X;y) = \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\left[\left(\frac{y - m_x}{\sigma_y}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{104}{4} + \frac{100}{2\cdot 104}\left[\frac{(y-220)^2}{104} - 1\right] =$$

$$= 1{,}629 + 0{,}4801\left[\frac{(y-220)^2}{104} - 1\right] \text{ нат.}$$

Таким образом, искомая зависимость есть параболическая функция разности $y - m_x$, причем наименьшее количество информации, равное 1,1482 нат, доставляет наиболее вероятное показание прибора $y = m_x = 220\ B$.

Для ответа на вопрос п. б) необходимо найти среднюю величину взаимной информации между ансамблями X и Y. Вычисляем безусловное математическое ожидание величины $I(X;\ y)$.

При этом учитываем, что $\mathrm{M}\left[\left(Y-m_x\right)^2\right]=\sigma_y^2$, и получаем

$$I\left(X;Y\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2}=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_v^2}\right)=1,629 \text{ нат.}$$

Обратите внимание, что в среднем количество получаемой информации в данном примере зависит только от отношения «сигнал/ошибка» σ_x / σ_v .

Пример 15. Положительная непрерывная случайная величина X распределена по экспоненциальному закону с математическим ожиданием m_x=3. Вычислить значение дифференциальной энтропии величины X.

Решение. Заданный закон распределения имеет вид

$$W\left(x\right)=\frac{1}{m_x}\exp\left(-\frac{x}{m_x}\right) \quad ,x\geq 0.$$

Дифференциальная энтропия непрерывной случайной величины X определяется формулой (4.40) [1]

$$H\left(X\right)=\mathrm{M}\left[-\log W\left(x\right)\right]=\mathrm{M}\left[-\log\frac{1}{m_x}\exp\left(-\frac{x}{m_x}\right)\right]=$$

$$=\log m_x+\frac{\log e}{m_x}\mathrm{M}\left(X\right)=\log m_x+\frac{\log e}{m_x}m_x=\log\left(em_x\right).$$

Подставляя m_x = 3, получим

$$H\left(X\right)=\log\left(2,7183\cdot 3\right)=3,0277 \text{ бит}.$$

2.3 Кодирование

Пример 16. Закодировать сообщения источника, приведенные в табл 7, двоичным кодом Хафмана. Оценить эффективность полученного кода.

Таблица 7

u_k	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$p(u_k)$	0,1	0,2	0,25	0,05	0,25	0,15

Решение. В соответствии с алгоритмом построения кода Хафмана делаем последовательно следующие шаги:

1) располагаем сообщения источника в порядке убывания вероятностей;

2) образуем вспомогательный алфавит, объединяя наиболее маловероятные буквы u_1 и u_4 (m_0=2), тогда вероятность новой буквы равна $p_1=p(u_1)+p(u_4)=0{,}1+0{,}05=0{,}15$. Оставляем эту букву на месте, так как $p_1=p(u_6)$;

3) объединяем первую вспомогательную букву и букву u_6, тогда вероятность второй вспомогательной буквы равна $p_2=p_1+p(u_6)=0{,}15+0{,}15=0{,}3$; перемещаем ее вверх в соответствии с этой вероятностью;

4) объединение продолжаем до тех пор, пока в ансамбле не останется единственное сообщение с вероятностью единица.

Построение кода Хафмана приведено на рис. 4.

Комби-нация	u_j
10	u_3
01	u_5
00	u_2
111	u_6
1101	u_1
1100	u_4

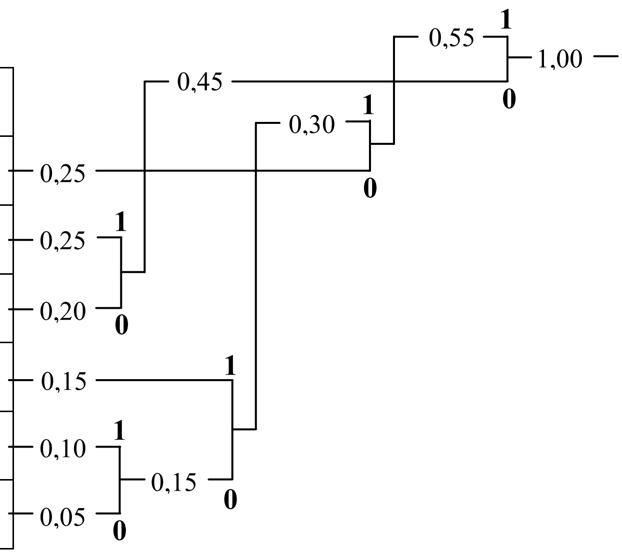

Рис. 4

Сообщения источника являются теперь концевыми узлами кодового дерева. Приписав концевым узлам значения символов 1 и 0, записываем кодовые обозначения, пользуясь следующим правилом: чтобы получить кодовое слово, соответствующее сообщению u_4, проследим переход u_4 в группировку с наибольшей вероятностью, кодовые символы записываем справа налево (от младшего разряда к старшему), получим 1100.

Для сообщения u_1 – 1101 и т.д. (см. рис. 4).

Оценим эффективность полученного кода.

Энтропия источника сообщений:

$$H(U) = -\sum_{k=1}^{6} p(u_k)\log p(u_k) =$$

$$= 2\eta(0,25) + \eta(0,2) + \eta(0,15) + \eta(0,1) + \eta(0,05) = 2,4232 \text{ бит}$$

на одну букву на выходе источника.

Средняя длина кодового слова (формула (4.14) [1]):

$$L = \sum_{k=1}^{6} l_k p(u_k) = 2\cdot 0,25 + 2\cdot 0,25 +$$

$$+ 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,15 + 4\cdot 0,1 + 4\cdot 0,05 = 2,45 \text{ дв. симв/букву.}$$

Для оценки эффективности кода используем коэффициент эффективности $\gamma = H(U)/\left(L\log m\right)$.

Для оптимального двоичного кода $H(U) = L$ и $\gamma = 1$.

Полученный нами код имеет $\gamma = 2,4232/2,45 = 0,9891$, избыточность R=0,0109, т.е. код близок к оптимальному.

Пример 17. Сообщение источника X составляется из статистически независимых букв, извлекаемых из алфавита A, B, C с вероятностями 0,7; 0,2; 0,1. Произвести двоичное кодирование по методу Шеннона–Фано отдельных букв и двухбуквенных блоков. Сравнить коды по их эффективности.

Решение. Производим побуквенное кодирование методом Шеннона–Фано.

1) Располагаем буквы алфавита источника в порядке убывания вероятностей.

2) Делим алфавит источника на две (m=2) примерно равновероятные группы. Всем сообщениям верхней группы (буква A) приписываем в качестве первого кодового символа 1, всем сообщениям нижней группы приписываем символ 0.

3) Производим второе разбиение на две группы (буквы B и C) и снова букве в верхней группе (B) приписываем символ 1, а в нижней (C) в качестве второго символа кодового слова приписываем 0. Так как в каждой группе оказалось по одной букве, кодирование заканчиваем. Результат приведен в табл. 8.

Таблица 8

x_j	$p(x_j)$	Разбиения	Кодовое слово
A	0,7	———	1
B	0,2	—	01
C	0,1		00

Оценим эффективность полученного кода. Энтропия источника

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{s} p(x_k)\log_2 p(x_k) =$$

$$= \eta(0,7) + \eta(0,2) + \eta(0,1) = 1{,}1568 \text{ бит/букву.}$$

Средняя длина кодового слова:

$$L = \sum_{k=1}^{s} l_k p(x_k) = 0,7\cdot 1 + 0,2\cdot 2 + 0,1\cdot 2 = 1,3 \text{ бит/букву.}$$

Видим, что $L>H(X)$, и коэффициент эффективности:

$\gamma_1 = 1{,}1568/1{,}3 = 0{,}8898$, а избыточность R_1=0,1102.

Покажем, что кодирование блоками по 2 буквы (k=2) увеличивает эффективность кода. Строим вспомогательный алфавит из $N=3^2$ блоков. Вероятности блоков находим по формуле (1.8) [1], считая буквы исходного алфавита независимыми. Располагаем блоки в порядке убывания вероятностей и осуществляем кодирование методом Шеннона–Фано. Все полученные двухбуквенные блоки, вероятности их и соответствующие кодовые обозначения сведены в табл. 9.

При блоковом кодировании средняя длина кодового слова на одну букву

$$L_2 = L/2 = 0{,}5(1\cdot 0{,}49 + 3\cdot 2\cdot 0{,}14 + 4\cdot 2\cdot 0{,}07 + 4\cdot 0{,}04 +$$
$$+ 5\cdot 0{,}02 + 6\cdot 0{,}02 + 6\cdot 0{,}01) = 1{,}165 \text{ бит/букву.}$$

При этом коэффициент эффективности

$$\gamma_2 = H(X)/L_2 = 1{,}1568/1{,}165 = 0{,}9955.$$

Избыточность при двухбуквенном кодировании R_2=0,0045.

Получили $\gamma_2 > \gamma_1$, $R_2 \ll R_1$, что и требовалось показать.

Пример 18. Способ кодирования задан кодовой таблицей

a₁ = 0000000
a₂ = 0110111
a₃ = 1011010
a₄ = 1101100.

а) составить матрицу расстояний d_{ij} $(i, j = 1,2,3,4)$;

б) найти кодовое расстояние;

в) определить кратности обнаруживаемых и исправляемых ошибок;

г) определить избыточность кода, полагая буквы источника равновероятными.

Таблица 9

Двухбуквенные блоки	Вероятности	Разбиения	Кодовые слова
AA	0,49		1
AB	0,14		0 1 1
BA	0,14		0 1 0
AC	0,07		0 0 1 1
CA	00,7		0 0 1 0
BB	0,04		0 0 0 1
BC	0,02		0 0 0 0 1
CB	0,02		0 0 0 0 0 1
CC	0,01		0 0 0 0 0 0

Решение. а) Матрицу расстояний записываем в виде таблицы (табл. 10).

Таблица 10

	i			
j	1	2	3	4
1	0	5	4	4
2	5	0	5	5
3	4	5	0	4
4	4	5	4	0

б) По табл. 10 находим кодовое расстояние $d_{код} = \min d_{ij} = 4, \quad i \neq j.$

в) Кратность обнаруживаемых ошибок определяется по формуле (3.5) [1], откуда $q_{о} \leq 3$.

Кратность исправляемых ошибок находим по формуле (3.6) [1] $q_{и} \leq 1{,}5$.

Следовательно, приведенный код позволяет обнаруживать всевозможные однократные, двукратные и трехкратные ошибки и исправлять любые однократные ошибки.

г) Избыточность кода находим из следующих соображений. Для передачи равновероятных сигналов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ достаточно передавать кодовые слова 00, 10, 01 и 11 соответственно. Такой код не имеет избыточности, но не позволяет обнаруживать и, тем более, исправлять ошибки. Для обнаружения и исправления ошибок введены пять избыточных символов, т.е. количественно избыточность равна $R = (7-2)/7 = 71\%$.

Пример 19. Линейный блочный (5,2)-код задан производящей матрицей **G** в систематической (канонической) форме:

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10110 \\ 01011 \end{Vmatrix}$$

Пусть принят вектор **b**=00110 и известно, что возможны только одиночные ошибки.

Произвести декодирование следующими методами:

а) по минимуму расстояния;

б) вычислением синдрома.

Решение. Если производящая матрица записана в каноническом виде, это значит, что она состоит из двух блоков: диагональной матрицы размера $k \times k$, состоящей из единиц, и прямоугольной матрицы размера $r \times k$. В этом случае первые k символов в любом кодовом слове являются информационными.

Проверочная матрица **H** также может быть записана в каноническом виде и состоит из двух блоков. Первый блок есть прямоугольная матрица размера $k \times r$, полученная транспонированием второго блока матрицы **G**. В качестве второго блока матрицы **H** записывают диагональную матрицу размера $r \times r$, состоящую из единиц.

Для заданного кода получаем

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Убедимся, что полученная таким образом матрица **H** удовлетворяет соотношению (3.18) [1]. Действительно,

$$\mathbf{h}_1\mathbf{g}_1 = (10100) \cdot (10110) = 0,$$
$$\mathbf{h}_1\mathbf{g}_2 = (10100) \cdot (01011) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{h}_3\mathbf{g}_2 = (01001) \cdot (01011) = 0,$$

т.е. все 6 элементов матрицы $\mathbf{GH}^\mathbf{T}$ равны нулю.

Построим кодовую таблицу, воспользовавшись правилом образования кодовых слов по формуле (3.21) [1]:

$\mathbf{a}_1$=00000, $\mathbf{a}_2$=10110, $\mathbf{a}_3$=01011, $\mathbf{a}_4$=11101=$\mathbf{a}_2$+$\mathbf{a}_3$.

Всего кодовая таблица содержит $2^k = 4$ вектора.

Из кодовой таблицы определяем величину кодового расстояния $d_{код} = 3$.

Следовательно, рассматриваемый код обнаруживает однократные и двукратные ошибки и исправляет однократные.

Декодируем принятый вектор **b** = 00110.

а) Метод декодирования по минимуму расстояния заключается в том, что, вычислив расстояния вектора **b** относительно всех векторов $\mathbf{a_i}$ кодовой таблицы, отождествляем принятый вектор с тем, расстояние до которого минимально. Расстояния d_{ib} приведены в табл. 11.

Таблица 11

$\mathbf{a_i}$	00000	10110	01011	11101
d_{ib}	2	1	3	4

По величине $d_{ib\ min}$=1 решаем, что передавался вектор $\mathbf{a_2}$=10110, следовательно, ошибка в первом символе кодового слова, а информационная последовательность имеет вид **x** = 10.

б) Метод декодирования с помощью вычисления синдрома включает следующие операции:

1) По формуле (3.17) [1] заранее устанавливаем однозначную связь между векторами однократных ошибок **e** и соответствующими им синдромами. Все возможные векторы $\mathbf{c = eH^T}$ приведены в табл. 12.

Таблица 12

e	c
00001	001
00010	010
00100	100
01000	011
10000	110

2) Вычисляем синдром для принятого слова **b** по формуле (3.16) [1] $\mathbf{c}=\mathbf{bH^T}$:

c_1=(00110)(10100)=1, c_2=(00110)(11010)=1, c_3=(00110)(01001)=0,

т.е. вектор **c** = 110. Синдром не равен нулю, следовательно, есть ошибка.

Вектору **c** = 110 в табл. 12 соответствует вектор ошибки в первом символе **e**=10000. Декодируем, суммируя принятый вектор с вектором ошибки $\mathbf{\breve{a}} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{e} = 00110 \oplus 10000 = 10110$.

Итак, получили тот же результат: передавался вектор $\mathbf{a_2}$=10110, соответствующий информационной последовательности **x**=10.

Пример 20. Для кода, заданного в примере 19, составить схему кодирующего устройства.

Решение. Обозначим буквами $a_1,...,a_5$ символы на выходе кодера, причем a_1 и a_2 есть информационные символы, поступающие на его вход, а символы a_3, a_4 и a_5 образуются в кодере.

Из соотношения (3.22) [1] получаем

$$a_3 = a_1, \qquad a_4 = a_1 + a_2, \qquad a_5 = a_2.$$

Один из вариантов схемы кодера, определяемой этими соотношениями, показан на рис. 5.

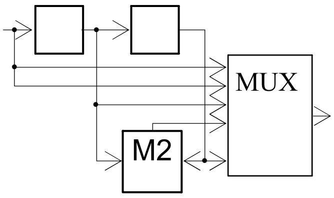

Рис. 5

Кодирующее устройство работает следующим образом. В течение первых двух шагов двухразрядный регистр сдвига заполняется информационными символами a_1 и a_2, а в течение следующих трех тактов его состояние сохраняется неизменным. Одновременно с заполнением регистра начинается переключение мультиплексора (переключателя) MUX. Таким образом формируются 5 символов кодового слова, удовлетворяющих требуемым соотношениям.

Пример 21. Построить код Хэмминга, имеющий параметры: $d_{код}$=3, r=3.

Решение. Построение кода начинаем с проверочной матрицы. В качестве семи столбцов проверочной матрицы **H** выбираем всевозможные 3-разрядные двоичные числа, исключая число нуль. Проверочная матрица имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{Vmatrix}.$$

Чтобы определить места проверочных и информационных символов, матрицу **H** представляем в каноническом виде

$$\mathbf{H_0} = \|\mathbf{Q}, \mathbf{I}\|, \text{ где } \mathbf{I} \text{ – единичная матрица.}$$

Для этого достаточно в матрице **H** выбрать столбцы, содержащие по одной единице, и перенести их в правую часть. Тогда получим

$$\mathbf{H}_0 = \begin{Vmatrix} 0111000 \\ 1011010 \\ 1101001 \end{Vmatrix}.$$

Из формулы (4.3.5) получаем следующие соотношения для символов a_1, ..., a_7 кодового слова:

$$a_5 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4, \qquad a_6 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4, \qquad a_7 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4.$$

Пользуясь этими соотношениями, составляем кодовую таблицу

$$0000 \to 0000000, \quad 0001 \to 0001111, ..., 1111 \to 1111111.$$

Пример 22. Для кода Хэмминга, определяемого проверочной матрицей **H**, построенного в примере 21, декодировать принятый вектор 1011001.

Решение. Для принятого вектора **b**=1011001 по формуле (3.16) [1] вычисляем синдром:

$$c_1 = (1011001)\cdot(0001111) = 0, \quad c_2 = (1011001)\cdot(0110011) = 0,$$

$$c_3 = (1011001)\cdot(1010101) = 1, \quad \text{в итоге} \quad \mathbf{c} = 001.$$

Синдром **c**≠0, т.е. имеет место ошибка. В случае одиночной ошибки (и только лишь) вычисленное значение синдрома всегда совпадает с одним из столбцов матрицы **H**, причем номер столбца указывает номер искаженного символа. Видим, что ошибка произошла в первом символе и передавался вектор $\mathbf{a} = 0011001$.

Пример 23. Производится кодирование линейным блочным кодом (15,15–r). Найти минимальное количество проверочных символов r, при котором код был бы способен исправлять любые однократные, двукратные и трехкратные ошибки.

Решение. Поскольку в кодовой комбинации n=15 символов, то количество всевозможных однократных ошибок (q=1) равно $n = C_n^1$. Количество различных двукратных и трехкратных ошибок равно числу сочетаний C_n^2 и C_n^3 соответственно. Тогда суммарное количество всевозможных ошибок при q≤3 равно:

$$N_e = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 15 + \frac{14 \cdot 15}{2} + \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} = 575.$$

Чтобы любая из этих ошибок могла быть исправлена, нужно, чтобы разным ошибкам соответствовали различные значения синдрома **c**. Вектор **c** состоит из *r* двоичных символов, тогда максимальное количество различных ненулевых комбинаций равно $N_r = 2^r - 1$ (нулевая комбинация **c=0** соответствует отсутствию ошибок). Отсюда получаем $N_e \leq N_r$ (это ограничение называется пределом Хэмминга), то есть

$$r \geq \log_2(N_e + 1) = \log_2 576 = 9{,}17.$$

Таким образом, для исправления всех упомянутых ошибок необходимо, чтобы передаваемые комбинации содержали не менее 10 проверочных символов, т.е. k=5.

Пример 24. Для кодирования применяется (15,5)-код БЧХ с кодовым расстоянием $d_{код}$=7, способный исправить все ошибки до трехкратных включительно.

Битовая вероятность ошибки в канале передачи p=10^{-4}, ошибки независимы. Определить вероятность ошибки при декодировании кодовой комбинации и битовую вероятность ошибки на выходе декодера.

Решение. Вероятность ошибки при декодировании кодовой комбинации определим по формуле (3.59) [1]:

$$P_{ош} = P(4) + \ldots + P(15) \approx P(4) =$$

$$= \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 10^{-16} (1 - 10^{-4})^{11} = 1{,}363 \cdot 10^{-13}.$$

Битовую вероятность ошибки на выходе декодера определим по формуле (3.60) [1] $p_b = 6{,}36 \cdot 10^{-14}$, то есть, одна ошибка приходится в среднем на $1{,}57 \cdot 10^{13}$ бит.

2.4 Другие меры информации

Пример 25. Случайная величина Y имеет нормальное распределение с известным среднеквадратическим отклонением σ. Вычислить I(1:2), I(2:1), J(1,2) для следующих гипотез о математическом ожидании этой величины:

H$_1$: m=m_1,

H$_2$: m=m_2.

Решение. Запишем плотности вероятности случайной величины Y, соответствующие каждой из гипотез:

$$W_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m_1)^2],$$

$$W_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m_2)^2].$$

По формуле (4.43) [1] находим информацию для различения в пользу H$_1$ против H$_2$, содержащуюся в выборочном значении y (в этой задаче удобнее использовать натуральные единицы информации):

$$I(1:2;y) = \frac{1}{2\sigma^2}[(y-m_2)^2-(y-m_1)^2] =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}[2y(m_1-m_2)+m_2{}^2-m_1{}^2].$$

По формуле (4.44) [1] находим среднюю информацию для различения в пользу H$_1$ против H$_2$:

$$I(1:2) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}_1}\left\{\frac{1}{2\sigma^2}[2Y(m_1-m_2)+m_2{}^2-m_1{}^2]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left\{2(m_1-m_2)\cdot \mathrm{M}_{\mathrm{H}_1}[Y]+m_2{}^2-m_1{}^2\right\}.$$

Далее учтем, что при гипотезе H$_1$ математическое ожидание $\mathrm{M}_{\mathrm{H}_1}(Y)=m_1$, и получим окончательно

$$I(1:2) = \frac{1}{2\sigma^2}[2(m_1-m_2)m_1+m_2{}^2-m_1{}^2] = \frac{(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2}.$$

По формулам (4.45) и (4.46) [1] находим

$$I(2:1) = \mathrm{M}_{\mathrm{H}_2}\left\{\frac{1}{2\sigma^2}[2Y(m_2-m_1)+m_1{}^2-m_2{}^2]\right\} = \frac{(m_1-m_2)^2}{2\sigma^2},$$

$$J(1;2) = I(1:2)+I(2:1) = \frac{(m_1-m_2)^2}{\sigma^2}.$$

Таким образом, средняя информация для различения гипотез H_1, и H_2 в данной задаче пропорциональна квадрату расстояния между математическими ожиданиями сигнала Y и обратно пропорциональна его дисперсии.

Пример 26. Случайная величина Y имеет экспоненциальное распределение:

$$W(y/x) = \frac{1}{x}\exp(-\frac{y}{x}), \quad y \ge 0.$$

а) Найти максимально правдоподобную оценку математического ожидания m этой случайной величины.

б) Найти статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсию) этой оценки.

д) Найти информацию Фишера и по неравенству Рао–Крамера проверить сделанное заключение об эффективности оценки.

Решение. Запишем уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln W(y/x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\ln x - \frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{x} + y\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(y-x) = 0.$$

Отсюда $\hat{x}(y) = y$, т.е. максимально правдоподобная оценка математического ожидания равна наблюдаемому выборочному значению y.

Далее находим математическое ожидание оценки

$$m(x) = \int_0^\infty y\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{y}{x}\right)dy = x.$$

Таким образом, оценка $\hat{x}(y)$ является несмещенной.

Дисперсию оценки вычисляем по

$$D(x) = \int_0^\infty [y-x]^2\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{y}{x}\right)dy = x^2.$$

Информацию Фишера находим по формуле (4.48) [1]:

$$I_F(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{y}{x}\right)\left[\frac{1}{x^2}(y-x)\right]^2 dy = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Видим, что неравенство Рао–Крамера (4.49) [1] обращается в равенство, следовательно, оценка эффективна. Лучшей оценки, т.е. обладающей меньшей дисперсией при отсутствии систематической ошибки, не существует.

3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ №1 И №2

Каждое из заданий представить в виде отдельной брошюры. Все расчеты сопровождать подробными пояснениями вплоть до подстановки численных значений. После завершения всех вычислений по каждой из задач результаты округляются до двух знаков после десятичной точки и приводятся в виде таблицы в том же порядке, как они даны в задании. Последнее (дополнительное) значение в таблице ответов – это сумма (S) всех приведенных в ней значений (контрольная сумма).

Номер варианта (N) студенты выбирают по формуле

$$\mathrm{N} = (50 \cdot P)\mathrm{div}100\,,$$

где P – значение двух последних цифр пароля студента (00,…,99),

div100 – целочисленное деление на 100.

3.1 Контрольная работа №1

1) Вероятностное описание символа

Для дискретной случайной величины X, принимающей одно из трех значений x_j с вероятностями p_j, записать ряд распределения и функцию распределения, привести соответствующие графики и найти следующие числовые характеристики: математическое ожидание и СКО, математическое ожидание модуля X, $\mathrm{M}[X^2]$, $\mathrm{M}[p(X)]$, $\mathrm{M}[(p(X))^{-1}]$, энтропию $\mathrm{M}[-\log_2 p(X)]$.

N	x_j			p_j		
1	–7	–3	3	0.41	0.40	0.19
2	–5	–2	8	0.34	0.15	0.51
3	–8	2	10	0.44	0.11	0.45
4	–8	2	4	0.20	0.27	0.53
5	–9	–1	9	0.40	0.21	0.39
6	–5	3	5	0.26	0.44	0.30
7	–8	2	9	0.15	0.45	0.40
8	–10	–2	6	0.31	0.35	0.34
9	–4	0	7	0.21	0.29	0.50
10	–3	2	4	0.31	0.32	0.37
11	–8	3	8	0.44	0.10	0.46

N	x_j			p_j		
12	–6	2	4	0.42	0.48	0.10
13	–8	3	4	0.49	0.31	0.20
14	–7	–2	4	0.71	0.21	0.08
15	–7	2	5	0.15	0.19	0.66
16	–5	0	9	0.13	0.19	0.68
17	–6	2	5	0.43	0.32	0.25
18	–8	–3	6	0.14	0.42	0.44
19	–8	–2	4	0.39	0.31	0.30
20	–4	–2	7	0.29	0.34	0.37
21	–7	2	5	0.38	0.26	0.36
22	–5	3	9	0.18	0.50	0.32
23	–5	–2	3	0.34	0.31	0.35
24	–5	3	8	0.24	0.41	0.35
25	–6	1	7	0.08	0.47	0.45
26	–8	1	5	0.03	0.64	0.33
27	–7	–1	6	0.32	0.40	0.28
28	–7	–3	7	0.44	0.31	0.25
29	–7	–1	3	0.27	0.12	0.61
30	–4	1	7	0.21	0.72	0.07
31	–6	–1	10	0.07	0.09	0.84
32	–4	1	6	0.44	0.21	0.35
33	–7	2	9	0.89	0.02	0.09
34	–6	–1	9	0.29	0.41	0.30
35	–8	2	5	0.58	0.03	0.39
36	–4	–3	4	0.23	0.60	0.17
37	–8	–3	7	0.35	0.32	0.33
38	–10	–1	7	0.31	0.18	0.51
39	–7	1	6	0.31	0.56	0.13
40	–4	2	9	0.11	0.51	0.38
41	–4	3	10	0.45	0.21	0.34
42	–9	0	3	0.29	0.65	0.06
43	–7	–2	5	0.29	0.36	0.35
44	–5	1	9	0.20	0.42	0.38
45	–4	0	4	0.41	0.21	0.38
46	–8	–1	5	0.08	0.63	0.29
47	–5	–3	6	0.09	0.16	0.75

N	x_j			p_j		
48	–9	–2	5	0.33	0.36	0.31
49	–8	–1	8	0.15	0.07	0.78
50	–4	–3	7	0.40	0.17	0.43

Форма таблицы ответов:
N=28

m_x	σ_x	M[|X|]	M[X^2]	M[$p(X)$]
2.25	6.32	5.28	12.84	1.33

M[$(p(X))^{-1}$]	M[$-\log_2 p(X)$]	S
–0.33	–1.00	18.35

2) Вероятностное описание двух символов

Два символа X и Y имеют возможные значения x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно. Задана матрица совместных вероятностей с элементами $p_{j,k}=p(x_j,y_k)$. Найти: ряд распределения случайной величины X, повторить то же при каждом из условий $Y=y_1$ и $Y=y_2$, а также m_x, σ_x, энтропию системы M[$-\log_2 p(X,Y)$].

N	x_1	x_2	$p_{1,1}$	$p_{2,1}$	$p_{1,2}$	$p_{2,2}$
1	4	8	0.11	0.36	0.31	0.22
2	3	5	0.17	0.28	0.45	0.10
3	0	7	0.25	0.27	0.22	0.26
4	4	8	0.30	0.29	0.14	0.27
5	2	5	0.21	0.20	0.25	0.34
6	1	7	0.28	0.27	0.23	0.22
7	1	7	0.36	0.10	0.28	0.26
8	2	8	0.24	0.21	0.17	0.38
9	2	9	0.33	0.11	0.19	0.37
10	3	5	0.18	0.27	0.20	0.35
11	4	7	0.01	0.18	0.38	0.43
12	0	7	0.24	0.27	0.34	0.15
13	0	9	0.38	0.20	0.37	0.05
14	2	8	0.65	0.13	0.10	0.12
15	4	8	0.21	0.26	0.24	0.29
16	4	8	0.44	0.10	0.18	0.28
17	3	8	0.59	0.25	0.09	0.07

N	x_1	x_2	$p_{1,1}$	$p_{2,1}$	$p_{1,2}$	$p_{2,2}$
18	0	7	0.44	0.02	0.25	0.29
19	4	9	0.24	0.18	0.29	0.29
20	4	9	0.21	0.32	0.12	0.35
21	3	9	0.22	0.21	0.27	0.30
22	1	9	0.41	0.36	0.18	0.05
23	4	8	0.02	0.45	0.11	0.42
24	3	6	0.14	0.32	0.39	0.15
25	4	9	0.57	0.08	0.11	0.24
26	0	9	0.28	0.28	0.31	0.13
27	2	7	0.12	0.42	0.41	0.05
28	1	10	0.10	0.21	0.41	0.28
29	3	6	0.20	0.38	0.33	0.09
30	1	9	0.11	0.36	0.27	0.26
31	2	6	0.33	0.07	0.17	0.43
32	1	10	0.07	0.47	0.26	0.20
33	0	6	0.22	0.33	0.10	0.35
34	0	8	0.20	0.29	0.19	0.32
35	2	5	0.22	0.34	0.06	0.38
36	3	8	0.21	0.14	0.09	0.56
37	3	5	0.11	0.26	0.20	0.43
38	1	9	0.10	0.25	0.34	0.31
39	0	9	0.45	0.09	0.03	0.43
40	4	6	0.29	0.25	0.21	0.25
41	3	9	0.29	0.16	0.37	0.18
42	4	10	0.27	0.21	0.27	0.25
43	2	7	0.04	0.39	0.29	0.28
44	2	5	0.02	0.38	0.31	0.29
45	4	5	0.19	0.13	0.32	0.36
46	3	6	0.24	0.17	0.21	0.38
47	0	5	0.30	0.23	0.11	0.36
48	3	10	0.14	0.37	0.09	0.40
49	2	6	0.11	0.15	0.47	0.27
50	3	5	0.34	0.05	0.24	0.37

Форма таблицы ответов:

N=28

$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_1/y_1)$	$p(x_2/y_1)$	$p(x_1/y_2)$	$p(x_2/y_2)$
–2.25	6.32	5.28	12.84	1.33	–0.33

m_x	σ_x	$M[-\log_2 p(X,Y)]$	S
1.00	4.24	–25.14	18.35

3) Аналого-цифровое преобразование непрерывных сигналов

m-разрядный АЦП рассчитан на входные напряжения в интервале (U_{min}, U_{max}) и проводит квантование во времени с шагом Δt=1. Записать последовательность, состоящую из 5 двоичных комбинаций на выходе АЦП, если на вход поступает сигнал $U(t)=u_0+u_1t+u_2t^2$, для $0 \le t \le 4$. Найти среднеквадратическую величину ошибки квантования по уровню для данного сигнала σ и затем ее теоретическое значение $\sigma_o=\Delta u/(\sqrt{12})$, где Δu – шаг квантования по уровню.

Полученные двоичные комбинации представить в форме целых неотрицательных десятичных чисел $Z_0,Z_1,\ldots,Z_4$, например: 00011010=26.

N	m	U_{min}	U_{max}	u_0	u_1	u_2
1	7	–0.13	53.09	–0.1	–2.5	3.9
2	9	–8.65	6.40	–2.5	9.8	–2.7
3	9	–7.59	6.40	–5.7	7.9	–1.3
4	4	–112.08	–4.14	–4.2	–6.4	–3.4
5	6	–236.27	–9.36	–9.5	–4.0	–9.5
6	6	4.62	72.38	6.9	2.5	3.4
7	5	–0.67	92.88	–0.5	3.8	4.8
8	4	–141.36	1.02	1.0	–2.4	–6.1
9	7	–210.31	–8.27	–8.4	–3.4	–8.5
10	6	0.00	73.49	0.0	5.7	3.1
11	9	–36.74	2.13	–1.6	7.1	–3.4
12	4	–11.58	18.37	–8.7	0.3	1.6
13	7	5.55	117.24	8.3	–5.6	8.1
14	4	1.34	110.04	2.0	2.6	6.0
15	7	–134.84	1.52	1.5	3.5	–7.3

N	m	U_{min}	U_{max}	u_0	u_1	u_2
16	4	–157.07	–9.06	–9.2	–2.0	–6.3
17	9	–42.46	–6.89	–9.5	5.2	–2.7
18	4	–75.34	2.23	1.4	5.9	–5.1
19	8	–23.03	–3.25	–3.3	–1.1	–0.6
20	9	–123.53	0.41	0.4	–0.9	–5.6
21	8	–131.78	5.48	5.4	–1.7	–6.1
22	7	–192.61	–0.69	–0.7	–9.6	–6.6
23	5	6.62	53.09	9.9	7.0	0.9
24	7	2.47	71.56	3.7	1.9	3.7
25	9	4.88	122.32	7.3	–1.3	7.4
26	7	–9.72	113.18	–7.3	–3.1	8.2
27	9	–33.41	–1.08	–1.1	–9.6	0.9
28	4	–63.63	7.21	6.2	5.7	–4.8
29	5	–173.84	–4.92	–5.0	5.0	–9.1
30	9	1.81	24.36	9.2	–9.9	3.4
31	9	–102.49	–1.77	–1.8	–8.0	–2.7
32	7	4.21	75.52	6.4	–5.8	5.7
33	4	–2.13	4.87	4.8	–2.0	0.1
34	6	–5.32	124.25	–4.0	7.6	6.0
35	6	–2.13	151.86	–1.6	1.4	9.1
36	4	–76.01	0.10	0.1	–9.1	–1.3
37	4	–5.99	141.20	–4.5	1.5	8.6
38	8	–2.66	98.67	–2.0	2.8	5.5
39	5	–108.75	–3.25	–3.3	–7.6	–3.0
40	9	–3.99	11.57	–3.0	8.0	–1.1
41	5	–152.68	4.57	4.5	–2.6	–6.8
42	4	–9.85	74.10	–7.4	–1.5	5.4
43	5	–168.38	–0.10	–0.1	–7.6	–6.0
44	4	6.09	47.00	9.1	7.3	0.5
45	7	–236.54	–1.28	–1.3	–8.5	–8.9
46	6	–8.39	84.15	–6.3	–5.7	7.0
47	4	–153.08	1.02	1.0	6.2	–8.8
48	4	–8.79	86.28	–6.6	–6.7	7.4
49	6	–213.64	–4.83	–4.9	–7.7	–7.8
50	4	6.62	133.49	9.9	6.8	5.9

Форма таблицы ответов:
N=28

Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
25	32	28	184	133

σ	σ_o	S
0.33	1.05	218.35

3.2 Контрольная работа №2

4) Нормальные случайные величины

Система случайных величин $X,У$ имеет нормальное распределение $W(x,y)$, которое характеризуется вектором-строкой математических ожиданий $\mathbf{a}=(m_x,m_y)$ и ковариационной матрицей $\mathbf{R}$. Найти: σ_x, σ_y, коэффициент ковариации r, значение условного СКО $\sigma_x(y_o)$, величину средней взаимной информации $I = \mathbf{M}\left[\log_2 \frac{W(X/Y)}{W(X)}\right]$, $x_{mp}(y_o)$ – наиболее вероятное значение x при заданном y_o.

N	m_x	m_y	R_{11}	R_{22}	R_{12}	y_o
1	–9.97	–7.05	4.42	6.14	0.43	–6.86
2	–6.13	–7.17	5.82	0.82	–1.91	–6.83
3	1.70	3.86	6.32	6.57	0.31	4.65
4	–2.99	–1.47	5.09	1.14	–1.91	0.42
5	6.46	9.33	6.99	2.35	3.11	9.93
6	–6.52	–6.93	1.98	9.21	–2.96	–3.01
7	4.21	6.43	1.87	6.66	2.99	11.12
8	–3.92	–6.17	4.63	4.98	–4.26	–2.06
9	–8.17	6.34	1.07	5.02	–0.74	7.02
10	–7.05	–6.89	1.03	5.14	–0.46	–4.31
11	9.77	4.64	9.32	6.91	7.02	9.60
12	–7.62	–4.41	8.96	6.10	0.50	–1.55
13	–9.82	3.64	2.35	0.16	0.23	3.84
14	0.63	4.44	4.17	1.10	–1.01	5.17
15	2.04	–7.54	6.32	8.65	0.37	–2.86

N	m_x	m_y	R_{11}	R_{22}	R_{12}	y_o
16	–6.68	6.69	4.57	7.50	–1.16	7.08
17	–0.98	0.34	6.02	3.86	0.81	2.66
18	–8.86	–1.48	8.56	5.57	2.49	–0.55
19	5.67	8.99	6.29	9.56	–0.98	12.97
20	0.40	0.99	5.70	1.85	–3.14	2.63
21	7.52	–0.57	1.92	1.40	0.33	0.47
22	9.12	6.94	5.60	9.52	1.10	9.39
23	0.79	–0.88	2.50	0.38	–0.53	–0.15
24	–0.76	9.66	6.09	0.65	–1.93	11.19
25	7.24	4.78	5.89	1.40	–2.35	5.71
26	5.59	–6.08	5.00	8.66	4.58	–4.99
27	9.94	6.79	7.43	7.24	4.47	9.88
28	2.23	0.02	6.24	0.25	0.47	0.65
29	–4.68	–9.45	8.06	7.11	0.45	–9.19
30	6.80	1.45	5.80	2.25	–2.53	2.23
31	–2.48	0.63	9.12	1.77	1.79	3.01
32	3.54	6.86	7.30	3.48	–4.63	9.58
33	–9.82	3.15	6.71	3.74	1.42	4.67
34	–4.48	6.84	3.22	8.04	–4.13	11.97
35	1.76	–7.80	3.13	5.31	3.58	–6.01
36	6.75	–3.72	1.17	8.00	–1.35	–1.72
37	–0.30	–4.28	8.53	1.53	3.41	–2.44
38	4.87	–7.19	1.63	4.08	–1.05	–4.20
39	–0.84	6.69	0.89	1.45	–0.29	7.17
40	4.89	2.00	6.45	0.76	–1.22	3.19
41	1.98	–4.95	5.50	5.78	–2.87	–3.18
42	4.70	–9.97	4.15	5.53	3.78	–9.46
43	1.45	6.12	4.71	3.18	3.05	6.84
44	–6.97	–5.79	1.61	8.10	–2.97	–2.06
45	–1.50	1.06	7.41	2.91	–2.99	3.41
46	0.34	–7.72	8.28	8.96	4.66	–7.24
47	5.03	5.04	8.75	7.46	–4.58	5.19
48	–6.62	0.87	3.07	3.68	–3.27	2.05
49	–0.16	–1.27	1.36	2.36	–1.36	–0.83
50	4.00	3.92	7.87	2.37	–1.60	4.13

Форма таблицы ответов:
N=28

σ_x	σ_y	r	$\sigma_x(y_o)$
25	32	28	184

I	$x_{mp}(y_o)$	S
133	0.33	218.35

5) Корректирующие коды

Строки производящей матрицы линейного блочного (n,3)-кода – это три n-разрядные комбинации (младший разряд – справа), которые в двоичной форме представляют десятичные числа g_0, g_1, g_2. Найти: кодовое расстояние $d_{код}$, максимальные кратности гарантированно обнаруживаемых $q_о$ и исправляемых $q_и$ ошибок. Закодировать двоичную комбинацию, соответствующую десятичному числу *in*, затем двоичную комбинацию на выходе кодера представить в форме десятичного числа *out*.

Примечание: верхняя строка производящей матрицы g_0 соответствует младшему разряду комбинации на входе кодера.

N	n	in	g_0	g_1	g_2
1	11	1	793	1261	1689
2	11	6	823	1528	1613
3	11	3	909	1342	1888
4	8	4	99	143	223
5	8	2	103	179	255
6	10	7	407	641	883
7	11	5	641	1398	1856
8	11	2	796	1252	2045
9	9	2	150	298	467
10	8	6	107	159	243
11	8	3	88	180	249
12	9	2	221	378	430
13	9	2	186	367	389
14	10	7	298	541	798
15	10	1	443	683	975
16	11	2	616	1222	1833
17	10	1	353	542	779
18	12	5	1025	2484	3544

N	n	in	g_0	g_1	g_2
19	11	3	798	1496	1974
20	8	1	111	144	242
21	12	5	1558	2769	3821
22	9	5	230	306	390
23	8	4	112	137	234
24	9	1	230	381	421
25	8	2	70	137	211
26	12	7	1857	2967	3347
27	10	1	479	728	778
28	11	5	742	1481	1815
29	12	7	2047	2936	3222
30	10	3	505	695	933
31	11	5	575	1216	2004
32	10	6	370	570	808
33	10	7	449	566	965
34	11	7	948	1299	1981
35	8	4	87	130	217
36	9	3	153	272	498
37	11	3	798	1240	1978
38	12	1	1722	3029	3879
39	11	6	581	1034	1919
40	12	1	1810	2694	3770
41	10	5	324	677	835
42	11	2	692	1267	1742
43	8	1	102	155	216
44	11	1	954	1382	1844
45	12	5	1411	3007	4059
46	11	7	720	1279	1983
47	11	4	813	1167	1983
48	9	2	238	280	497
49	11	5	542	1155	1595
50	11	1	537	1196	1799

Форма таблицы ответов:

N=28

$d_{код}$	$q_о$	$q_и$	*out*	S
5	3	8	184	218

6) Линейные блочные коды

Двоичные комбинации, соответствующие пяти десятичным числам (*n, in,* g_0, g_1, g_2) из задачи 5, считать строками проверочной матрицы **H** кода (*n,n*–5).

Определить: способен ли этот код обнаружить любую однократную ошибку (d=1, если способен, d=0 в противном случае); способен ли этот код исправить любую однократную ошибку (c=1, если способен, c=0 в противном случае).

Форма таблицы ответов:

N=28

d	c	S
1	1	2

7) Неравенство Хэмминга для линейного блочного кода	N	*n*	*k*	*p*
Требуется построить линейный блочный (*n,k*)-код. Определить теоретический предел для этого кода – найти максимальную кратность исправляемых ошибок $q_и$. Определить вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации $P_{ош}$, если ошибки в отдельных символах в канале передачи происходят с вероятностью *p*, а ошибки в разных символах независимы. В ответе для величины $P_{ош}$ оставить 6 знаков после десятичной точки.	1	32	19	0.129
	2	38	11	0.085
	3	34	14	0.196
	4	48	13	0.181
	5	45	11	0.192
	6	44	25	0.056
	7	46	23	0.084
	8	48	21	0.072
	9	48	23	0.038
	10	23	13	0.148
	11	34	10	0.141
	12	20	9	0.021
	13	33	18	0.129
	14	24	11	0.072
	15	26	12	0.154
	16	43	18	0.184
	17	39	19	0.129
	18	43	8	0.161
	19	45	22	0.118
	20	34	12	0.091
	21	22	10	0.038

7) Неравенство Хэмминга для линейного блочного кода	N	*n*	*k*	*p*
	22	30	6	0.025
	23	32	20	0.067
	24	28	13	0.061
	25	42	12	0.175
	26	21	14	0.029
	27	30	8	0.030
	28	24	5	0.035
	29	23	6	0.193
	30	25	7	0.178
	31	27	15	0.093
	32	30	6	0.139
	33	39	7	0.190
	34	47	18	0.020
	35	23	12	0.029
	36	36	13	0.096
	37	46	12	0.129
	38	46	11	0.095
	39	31	18	0.132
	40	40	22	0.021
	41	28	16	0.091
	42	49	20	0.077
	43	37	16	0.174
	44	23	7	0.056
	45	38	9	0.104
	46	30	8	0.098
	47	34	11	0.095
	48	48	11	0.124
	49	49	14	0.081
	50	35	8	0.191

Форма таблицы ответов:
N=28

$q_и$	$P_{ош}$	S
5	0.000124	5.000124

4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО КУРСУ

1. В чем разница понятий «информация» и «сигнал»?
2. Приведите примеры радиоэлектронных устройств, предназначенных не для передачи информации.
3. Назовите два основных признака того, что сигнал не несет информации.
4. Почему для математического описания сигналов используют вероятностные модели?
5. Может ли детерминированный сигнал переносить информацию?
6. Какие случайные события (величины) называются независимыми?
7. Что нужно задать для полного вероятностного описания: одного символа? последовательности символов? последовательности отсчетов сигнала? непрерывной случайной функции?
8. Из каких соображений выбирается шаг квантования непрерывного сигнала: по времени? по напряжению?
9. Опишите этапы аналого-цифрового преобразования непрерывного сигнала.
10. Опишите этапы цифро-аналогового преобразования.
11. Изобразите обобщенную модель системы передачи информации. Опишите функции кодера и декодера.
12. Назовите способы манипуляции гармонической несущей. Чем обусловлен выбор того или иного способа?
13. Каковы недостатки многопозиционных методов манипуляции гармонической несущей?
14. В чем отличие аддитивной помехи от мультипликативной? Приведите примеры каналов связи с такими помехами.
15. Что такое собственная информация и энтропия дискретной случайной величины?
16. Дайте определение взаимной информации переданного и принятого символов. Как влияет на ее величину интенсивность помех в канале связи?
17. От чего зависит пропускная способность непрерывного канала связи с аддитивным белым шумом?
18. Что такое избыточность сигнала? В каких случаях она полезна, а когда нет?

19. Когда полезно применять кодирование с малой избыточностью?

20. Какой смысл вкладывают в понятия: «кодирование источника»? «канальное кодирование»?

21. Каково значение минимально-возможной средней длины кодовой комбинации?

22. Всегда ли удается закодировать сигнал так, чтобы избыточность на выходе кодера была нулевой?

23. Когда полезно кодировать блоки букв, а не отдельные буквы?

24. Какой способ разделения кодовых комбинаций применяется в кодах, обладающих малой избыточностью?

25. В чем заключается главный недостаток кодов Хафмана и Шеннона–Фано?

26. Откуда берется кодовая таблица, используемая при кодировании кодом Лемпела–Зива?

27. Чем определяется корректирующая способность кода? Поясните на примере.

28. Какие коды называются корректирующими?

29. Что значит «обнаружить ошибки» при декодировании кодовой комбинации?

30. Что значит «исправить ошибки» при декодировании кодовой комбинации?

31. Каков характерный признак, позволяющий отличить кодовую таблицу линейного блочного кода от кодовых таблиц других кодов?

32. Что такое проверочная матрица линейного блочного кода? Как она используется при обнаружении ошибок в принятой комбинации?

33. Каков характерный признак, позволяющий отличить кодовую таблицу циклического кода от кодовых таблиц других кодов?

34. Чему равно количество комбинации в кодовой таблице линейного блочного кода?

35. Почему в проверочной матрице не может быть нулевых столбцов? строк?

36. Какой смысл имеют строки проверочной матрицы?

37. По каким признакам можно определить, что провероч-

ная матрица принадлежит коду, способному исправить любую одиночную ошибку?

38. Чем обусловлена популярность циклических кодов? Из каких логических элементов состоят кодер и декодер?

39. В чем заключается фундаментальное свойство комбинаций циклического кода?

40. Поясните суть декодирования по минимуму расстояния.

41. Почему декодирование по минимуму расстояния применяется редко?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Акулиничев Ю.П. Теория электрической связи. Часть 1: Учебное пособие. – Томск, ТМЦДО, 2005 – 127 с.
2. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
3. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. – М.: Сов. радио, 1974.
4. Зюко А.Г, Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1997. – 432 с.
5. Зюко А.Г. и др. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1980 (и последующие издания). – 288 с.
6. Тарасенко Ф.П. Введение в курс теории информации. – Томск: ТГУ, 1963.

Дополнительная

7. Харкевич А.А. Борьба с помехами. – М.: Наука, 1965.
8. Хэмминг Р.В. Теория кодирования и теория информации. – М: Радио и связь, 1983. – 176 с.
9. Кульбак С. Теория информации и статистика. – М.: Наука, 1967.
10. Клюев Л.Л. Теория электрической связи.– Мн.: Дизайн ПРО, 1998.– 336 с.
11. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. Сб. задач и упражнений. Учебное пособие для втузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.
12. Орлов В.А., Филиппов Л.И. Теория информации в упражнениях и задачах. Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1976. – 136 с.
13. Цимбал В.П. Задачник по теории информации и кодированию. – Киев: Вища школа, 1976. – 276 с.
14. Лосев Ю.И., Плотников Н.Д. Основы теории передачи данных. Сборник задач. – Киев: Вища школа, 1977. – 160 с.
15. Акулиничев Ю.П., Дроздова В.И. Сборник задач по теории информации. – Томск: ТГУ, 1976. – 146 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений вспомогательной функции $\eta(p) = -p\log_2 p$

p	$h(p)$	p	$h(p)$	p	$h(p)$	p	$h(p)$
0,00	0,0000						
0,01	0,0664	0,26	0,5053	0,51	0,4954	0,76	0,3009
0,02	0,1129	0,27	0,5100	0,52	0,4906	0,77	0,2903
0,03	0,1518	0,28	0,5142	0,53	0,4854	0,78	0,2796
0,04	0,1858	0,29	0,5179	0,54	0,4800	0,79	0,2687
0,05	0,2161	0,30	0,5211	0,55	0,4744	0,80	0,2575
0,06	0,2435	0,31	0,5238	0,56	0,4684	0,81	0,2462
0,07	0,2686	0,32	0,5260	0,57	0,4623	0,82	0,2348
0,08	0,2915	0,33	0,5278	0,58	0,4558	0,83	0,2231
0,09	0,3127	0,34	0,5292	0,59	0,4491	0,84	0,2113
0,10	0,3322	0,35	0,5301	0,60	0,4422	0,85	0,1993
0,11	0,3503	0,36	0,5306	0,61	0,4350	0,86	0,1871
0,12	0,3671	0,37	0,5307	0,62	0,4276	0,87	0,1748
0,13	0,3826	0,38	0,5305	0,63	0,4199	0,88	0,1623
0,14	0,3971	0,39	0,5298	0,64	0,4121	0,89	0,1496
0,15	0,4105	0,40	0,5288	0,65	0,4040	0,90	0,1368
0,16	0,4230	0,41	0,5274	0,66	0,3956	0,91	0,1238
0,17	0,4346	0,42	0,5256	0,67	0,3871	0,92	0,1107
0,18	0,4453	0,43	0,5236	0,68	0,3783	0,93	0,0974
0,19	0,4552	0,44	0,5211	0,69	0,3694	0,94	0,0839
0,20	0,4644	0,45	0,5184	0,70	0,3602	0,95	0,0703
0,21	0,4728	0,46	0,5153	0,71	0,3508	0,96	0,0565
0,22	0,4806	0,47	0,5120	0,72	0,3412	0,97	0,0426
0,23	0,4877	0,48	0,5083	0,73	0,3314	0,98	0,0286
0,24	0,4941	0,49	0,5043	0,74	0,3215	0,99	0,0144
0,25	0,5000	0,50	0,5000	0,75	0,3113	1,00	0,0000

Приложение 2

Значения двоичных логарифмов целых чисел от 1 до 100

n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$
1	0,00000	26	4,70044	51	5,67243	76	6,24793
2	1,00000	27	4,75489	52	5,70044	77	6,26679
3	1,58496	28	4,80735	53	5,72792	78	6,28540
4	2,00000	29	4,85798	54	5,75489	79	6,30378
5	2,32193	30	4,90689	55	5,78136	80	6,32193
6	2,58496	31	4,95420	56	5,80735	81	6,33985
7	2,80735	32	5,00000	57	5,83289	82	6,35755
8	3,00000	33	5,04439	58	5,85798	83	6,37504
9	3,16993	34	5,08746	59	5,88264	84	6,39232
10	3,32193	35	5,12928	60	5,90689	85	6,40939
11	3,45943	36	5,16993	61	5,93074	86	6,42626
12	3,58496	37	5,20945	62	5,95420	87	6,44294
13	3,70044	38	5,24793	63	5,97728	88	6,45943
14	3,80735	39	5,28540	64	6,00000	89	6,47573
15	3,90689	40	5,32193	65	6,02237	90	6,49185
16	4,00000	41	5,35755	66	6,04439	91	6,50779
17	4,08746	42	5,39232	67	6,06609	92	6,52356
18	4,16993	43	5,42626	68	6,08746	93	6,53916
19	4,24793	44	5,45943	69	6,10852	94	6,55459
20	4,32193	45	5,49185	70	6,12928	95	6,56986
21	4,39232	46	5,52356	71	6,14975	96	6,58496
22	4,45943	47	5,55459	72	6,16993	97	6,59991
23	4,52356	48	5,58496	73	6,18982	98	6,61471
24	4,58496	49	5,61471	74	6,20945	99	6,62936
25	4,64386	50	5,64386	75	6,22882	100	6,64386

$\log_2 10^k = 3{,}32193k$.