Министерство образования и науки Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

Ф. А. Красина

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования для межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент»

Томск
2015

УДК 336:519.6(075.8)
ББК 65.261я73
К780

Рецензенты:
Цибульникова В. Ю., директор Обособленного подразделения автономной некоммерческой организации «Международная академия биржевой торговли» в г. Томске;
Земцова Л. В., канд. экон. наук, доцент кафедры экономики ТУСУР

Красина Ф. А.
К780 Финансовые вычисления : учебное пособие / Ф. А. Красина. — Томск: факультет дистанционного обучения ТУСУРа, 2015. — 190 с.

Учебное пособие содержит последовательное изложение методов количественного анализа финансовых и кредитных операций. Подробно изложены различные методы начисления процентов; обобщающие характеристики потоков платежей; методики определения эффективности финансовых операций; способы учета инфляции и налогообложения в принятии финансовых решений.

В пособии приведены примеры решения типовых задач и задания на контрольные работы.

Пособие предназначено студентам экономических специальностей факультета дистанционного обучения ТУСУРа.

УДК 336:519.6(075.8)
ББК 65.261я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, в связи с возрождением в России рыночных отношений, вновь стали необходимыми пособия по количественному анализу различных операций: коммерческих, финансовых и экономических.

Финансы являются одной из основных, базовых составляющих коммерческого дела. Финансовые вычисления ведут свое начало с момента появления товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний финансовые вычисления выделились в XIX веке под названием «коммерческая арифметика». До начала XX века «коммерческая арифметик» включала процентные, вексельные вычисления, финансовые операции по вкладам и ссудам, операции с ценными бумагами. В процессе развития рыночных отношений коммерческая арифметика преобразовалась в «финансовую арифметику», а затем и в «финансовую математику».

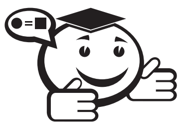
Финансовая математика базируется на таких основных концепциях, как временная ценность денежных ресурсов и денежные потоки. С точки зрения бизнеса и прикладных экономических дисциплин решать грамотно финансовые задачи не так просто и очевидно, поэтому появление отдельной учебной дисциплины «финансовые вычисления» в программе подготовки экономистов и менеджеров целесообразно. О целесообразности учебной дисциплины «финансовые вычисления» говорит и появление в России так называемых «обманутых вкладчиков». Среди обманутых вкладчиков были люди с высшим и специальным образованием, кандидаты и доктора наук, руководители предприятий с большим практическим опытом работы. Но ни высокий образовательный уровень, ни наличие большого жизненного опыта не смогли обезопасить от весьма ощутимых проигрышей в этой специфической сфере фондового рынка. Основной причиной послужила профессиональная непригодность этой группы людей к работе на финансовом рынке. Таким образом, в ярко иллюстрированных вариантах была показана необходимость в квалифицированном проведении количественного финансового анализа для обоснованного принятия решений в операциях на фондовом рынке.

Целью учебного пособия является изложение основополагающих понятий и моделей финансовых операций, необходимых для решения учебных и практических задач; предоставление экономисту и менеджеру аналитических инструментов для оценки принимаемых финансовых и управленческих решений, лучшего понимания мотивов поведения фирм и механизмов функционирования рынка капитала.

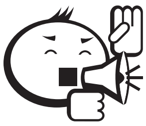
Учебное пособие состоит из пяти разделов и содержит материал по основным разделам финансовых вычислений. В каждом разделе даны необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, и типовые примеры. Решения более сложных задач по каждой теме и контрольная работа по курсу приведены в учебно-методическом пособии.

Соглашения, принятые в книге

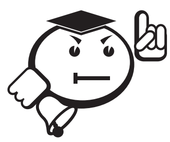
Для улучшения восприятия материала в данной книге используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.

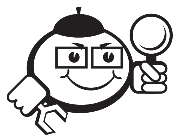


Эта пиктограмма означает внимание. Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор здесь может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



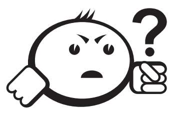
В блоке «На заметку» автор может указать дополнительные сведения или другой взгляд на изучаемый предмет, чтобы помочь читателю лучше понять основные идеи.

Эта пиктограмма означает замечание/положение. Данный блок состоит из *Названия замечания/положения* (Слова Замечание/Положение и Номера замечания/положения) и Текста замечания/положения.



Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Контрольные вопросы по лекции

РАЗДЕЛ I

Конспект лекций

Лекция 1

ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1 Логика финансовых операций в рыночной экономике

Переход к рыночной экономике сопровождается появлением некоторых видов деятельности, имеющих для финансового менеджера принципиально новый характер. К их числу относится задача эффективного вложения денежных средств. В условиях централизованно планируемой экономики на уровне обычного предприятия такой задачи практически не существовало по следующим причинам:

1) отсутствие у юридических лиц крупных свободных денежных средств. Сумма наличных денег лимитировалась. В течение года предприятие могло распоряжаться имеющимися на расчетном счете денежными средствами, но остаток средств изымался в бюджет в конце отчетного периода. Таким образом, предприятие не могло накапливать денежные средства для дальнейших планируемых расходов;
2) отсутствие возможностей использования свободных средств. Практически единственным путем использования свободных денег являлось размещение под проценты в Сберегательном банке. При этом обеспечивалась сохранность средств, но их прирост был незначительным.

В последнее время ситуация резко изменилась, а именно:

1) отменено нормативное регулирование размера оборотных средств, что автоматически исключило один из основных регуляторов величины финансовых ресурсов на предприятии;
2) введение новых форм собственности сделало невозможным изъятие остатка денежных средств в бюджет, вследствие чего у предприятий появились свободные денежные средства;

3) появились новые возможности приложения капитала (вложение в коммерческие банки, участие в различных проектах, приобретение ценных бумаг и т. д.) вследствие изменения инвестиционной политики государства;
4) хранение и накопление денежных средств стало невыгодным вследствие финансовой нестабильности и инфляции.

Таким образом, деньги приобретают еще одну объективную характеристику — временную ценность. Денежные ресурсы, как и любой другой вид активов, должны обращаться как можно быстрее. Временная ценность рассматривается в двух аспектах:

1) Обесценивание денежной наличности с течением времени.

Пример

Пусть предприятие располагает свободными денежными средствами в размере 1,5 млн руб., а инфляция составляет 20% в год (т. е. цены за год увеличиваются в 1,2 раза). Это означает, что в следующем году покупательная способность имеющейся суммы денежных средств уменьшится и в ценах текущего дня составит 1,25 млн руб.

2) Возможность обращения денежных средств.

Пример

Предположим, Вы можете продать участок земли. Вам предлагают два варианта оплаты: 100 тыс. руб. по истечении двух лет или по 50 тыс. руб. в конце первого и второго года. Очевидно, что второй вариант более выгоден, так как сумма, полученная в конце первого года, может быть пущена в оборот и принесет дополнительные доходы. При изменении условий задачи (40 тыс. руб. — в конце первого года и 60 тыс. руб. — в конце второго года) предпочтительность того или иного варианта становится не столь очевидной.

Сопоставление сегодняшних затрат и будущих доходов — неотъемлемая часть процесса управления деятельностью предприятия. Необходимо сравнивать затраты денежных средств, которые нужно сделать сейчас для поддержки производственного процесса, с будущими доходами, являющимися результатом данного процесса. Для сравнения сегодняшних и будущих денежных потоков следует привести их к одному моменту времени. Процесс движения денежных потоков от настоящего к будущему называется *наращением*, процесс движения денежных средств от будущего к настоящему — *дисконтированием*. При наращении определяется будущая стоимость денежных средств, при дисконтировании — текущая (сегодняшняя, дисконтированная) стоимость. При расчетах будущей и текущей стоимостей используется понятие процента.

Процент — плата, взимаемая за заем некоторой суммы денег.

Процентная ставка — плата, выраженная как процент от общей суммы, кредитуемой на определенный период, обычно на год.

Считается, что ставка процента должна отражать доход, который мог бы быть получен при инвестировании средств в наилучший из возможных альтернативных проектов.

На практике при проведении финансовых расчетов с процентами могут использоваться разные способы начисления процентов и разные виды ставок (рис. 1.1).

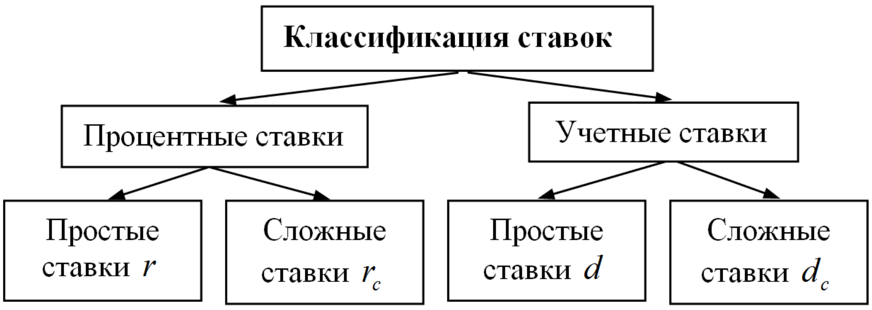


Рис. 1.1 – Классификация ставок

Ставка характеризует эффективность финансовой операции, заключающейся в том, что некоторую сумму дают в долг, с тем чтобы через некоторое время получить большую сумму F.

Эффективность сделки может быть определена с помощью абсолютного показателя прироста (FP) либо с помощью какого-либо относительного показателя. В зависимости от выбранной базовой величины получаем следующие показатели:

1) темп прироста — $r = (F - P)/P$;
2) темп снижени — $r = (F - P)/F$.

Темп прироста имеет названия:«процентная ставка», «норма прибыли», «доходность»; темп снижения — «учетная ставка», «дисконт».

Темп прироста и темп снижения связаны между собой следующими соотношениями:

- $r = \dfrac{d}{(1-d)}$;
- $d = r(1+r)$, причем $r > d$.

Существуют два способа начисления процентов [3]:

1) *декурсивный способ начисления (процентная ставка)*. Проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Величина ссудного процента — это выраженный в процентах темп прироста;
2) *антисипативный (предварительный) способ начисления процентов* определяется как выраженный в процентах темп снижения. При антисипативном способе начисления проценты начисляются в начальный момент времени, поэтому заемщик получает на руки сумму за вычетом процентных денег.

При обоих способах начисления процентов ставки могут быть *простыми*, если они применяются к одной и той же денежной сумме в течение всего периода начислений, и *сложными*, если по прошествии каждого интервала начисления они применяются к сумме долга и сумме начисленных за предыдущие интервалы процентов.

Для решения задач, связанных с проблемами денежного обращения, разработаны удобные модели и алгоритмы, которые рассматриваются в данном разделе.

1.2 Простые ставки

1.2.1 Простые ссудные ставки

Схема начисления простых процентов предполагает неизменность базовой основы, с которой производится начисление. При наличии исходной суммы P и простой годовой ставки ссудного процента r вложенная сумма ежегодно увеличивается на величину $P \cdot r$, а размер этой суммы F через n лет составит:

$$F(n) = P + P \cdot r + \dots + P \cdot r = P \cdot (1 + n \cdot r). \tag{1.1}$$

Величина, показывающая во сколько раз наращенная сумма F больше исходной суммы P, называется *множителем наращения* K_n.

Величина начисленных процентов, показывающая, на сколько выросла первоначальная сумма, называется *процентные деньги*

$$I = F - P = P \cdot n \cdot r.$$

В случае простых ссудных ставок приращение капитала пропорционально сроку ссуды и ставке.

Ставка r задается в процентах, в формуле (1.1) ставка выражается в десятичных дробях.

Пример 1.1

Найти величину процентных денег и возвращаемую сумму при взятом кредите в 200 тыс. руб. на 3 года. Ставка по кредиту 15% годовых.

Решение:

По формуле $I = Pnr$ при $P = 200; n = 3; r = 0{,}15$

$$I = 200 \cdot 3 \cdot 0{,}15 = 90$$

Сумма процентных денег равна 90 тыс. руб.

$$F = 200 + 90 = 290$$

Возвращаемая сумма равна 290 тыс. руб.

. . . .

В формуле (1.1) размерности r и n должны быть согласованы: если период начисления процентов измеряется в годах, то задается годовая ставка.

В практической деятельности ссуды часто выдают на период, меньший одного года, тогда в расчетах используют промежуточную процентную ставку, которая равна доле годовой ставки, пропорциональной доле временного интервала в году:

$$F = P \cdot (1 + t \cdot r/T)\,, \tag{1.2}$$

где t — продолжительность финансовой операции, дней; T — количество дней в году; r/T — промежуточная процентная ставка.

День выдачи и день погашения ссуды считаются за один день, а продолжительность периода предоставления ссуды может определяться двумя способами:

1) точный способ, в котором используются специальные таблицы (прил. Б), где каждому дню года соответствует свой порядковый номер. Точное число дней ссуды определяется следующим образом:

точное число дней предоставления ссуды	=	порядковый номер дня окончания займа	–	порядковый номер первого дня предоставления займа

2) приближенный способ, в котором рассчитывается приблизительное число дней ссуды, когда продолжительность полного месяца принимается равной 30 дням.

Результат финансовой операции может определяться тремя различными способами:

1) обыкновенный процент с точным числом дней ссуды ($T = 360$ дней);
2) обыкновенный процент с приближенным числом дней ссуды ($T = 360$ дней);
3) точный процент с точным числом дней ссуды. Точный процент получают, когда за временную базу берут фактическое число дней в году (365 или 366), в квартале (от 89 до 92), в месяце (от 28 до 31) и точное число дней ссуды.

Пример 1.2

Ссуда на 3000 долл. предоставлена 16 января. Условия погашения: через 9 месяцев под 25% годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов.

Решение:

Для определения наращения капитала по простой ставке ссудного процента воспользуемся формулой (1.2):

а) используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам, получим:

$$t = 289 - 16 = 273 \text{ дней};\quad F = 3000(1 + 0{,}25 \cdot 273/360) = 3568{,}75 \text{ долл.};$$

б) используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, получим:

$$t = 9 \cdot 30 = 270 \text{ дней};\quad F = 3000(1 + 0{,}25 \cdot 270/360) = 3562{,}5 \text{ долл.};$$

в) используя точный процент с точным числом дней, получим:

$$t = 273 \text{ дней};\quad F = 3000(1 + 0{,}25 \cdot 273/365) = 3560{,}96 \text{ долл.};$$

Для определения современной стоимости получаемой в будущем суммы используется *метод математического дисконтирования*. Операция дисконтирования производится по формуле:

$$F = \frac{P}{(1 + n \cdot r)}. \tag{1.3}$$

Финансовое соглашение может предусматривать не только постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (переменную) ставку. Например, наличие инфляции вынуждает постоянно изменять процентную ставку.

Если на последовательных интервалах начисления, продолжительность которых составляет $n_1, n_2, \ldots$, применяются соответствующие им ставки процентов $r_1, r_2, \ldots$, то наращенная сумма составит:

- в конце первого интервала $F_1 = r_1 \cdot n_1$;
- в конце второго интервала $F_2 = F_1 \cdot r_2 \cdot n_2 = P(1 + n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2)$.

При N интервалах начисления наращенная сумма составит

$$F = P \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot r_i\right). \tag{1.4}$$

Множитель наращения K_n определяется по формуле

$$K_n = \frac{F}{P} = 1 + \sum n_i \cdot r_i. \tag{1.5}$$

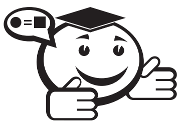
Обозначим

$$\bar{r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i r_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} n_i r_i, \tag{1.6}$$

тогда формула (1.4) примет вид $F = P(1 + n\bar{r})$, т. е на весь период можно установить среднюю ставку $\bar{r}$ и для вычисления наращенной суммы использовать формулу (1.1).

1.2.2 Простые учетные ставки

При антисипативном способе начисления процентов сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из суммы, получаемой по прошествии интервала начисления (то есть из наращенной суммы). Эта сумма и считается величиной получаемого кредита (ссуды). Так как проценты в данном случае начисляются в начале каждого интервала начисления, заемщик получает сумму кредита за вычетом процентных денег. Такая операция называется *дисконтированием по учетной ставке или коммерческим (банковским) учетом*.



Дисконт — это доход, полученный по учетной ставке, то есть разница между размером предоставляемого кредита и непосредственно выдаваемой суммой.

Введем обозначения для нижеприведенных формул:

d — простая годовая учетная ставка;

P — сумма, получаемая заемщиком;

F — сумма, подлежащая возврату.

Для расчета показателей, используемых при предоставлении кредита, используются следующие формулы:

а) для определения суммы, получаемой заемщиком:

- в конце первого интервала: $P_1 = F - d \cdot F$;
- в конце второго интервала: $P_2 = F - d \cdot F = F(1 - 2 \cdot d)$;
- на весь период кредитования:

$$P_n = F \cdot (1 - n \cdot d)\,; \tag{1.7}$$

б) для определения наращенной суммы:

$$F = P/(1 - n \cdot d)\,; \tag{1.8}$$

в) для определения суммы, получаемой заемщиком при периоде начисления, не равном году:

$$P_n = F \cdot (1 - d \cdot t/T)\,; \tag{1.9}$$

г) для определения наращенной суммы при периоде начисления, не равном году:

$$F = P_n / (1 - n \cdot d) = P_n / (1 - d \cdot t/T)\,; \qquad (1.10)$$

д) для определения наращенной суммы при использовании разных ставок на разных интервалах начисления:

$$F = P \Big/ \left(1 - \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot d_i\right). \qquad (1.11)$$

Банковский учет применяется в операциях по учету векселей. Банк покупает вексель у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю в конце срока (меньшей номинальной стоимости векселя).

Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Операция банковского дисконтирования по учетной ставке имеет смысл, если $(1 - nd) > 0 \Rightarrow nd < 1 \Rightarrow n < 1/d$.

Пример 1.3

За вексель, учтенный за 5 лет до срока погашения по учетной ставке 14% годовых, заплачено 4000 руб. Определить номинальную стоимость векселя.

Решение:

По формуле (1.8) получаем $F = 400/(1 - 0{,}14 \cdot 5) = 13333$ руб.

Математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское — для банка. В таблице 1.1 приведены значения дисконтированной суммы по ссудной и учетной ставкам 10% годовых при $F = 100$ ед. Значения дисконтированной суммы вычисляются по соответствующим формулам:

$$P_r = F/(1 + nr), \quad P_d = F(1 - nd).$$

Таблица 1.1 – Дисконтирование по ссудной и учетной ставкам

n	0,5	1	2	3	4	5
$P_r,\ r = 0{,}1$	95,24	90,91	83,33	76,92	71,43	66,67
$P_d,\ d = 0{,}1$	95,00	90,00	80,00	70,00	60,00	50,00

Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка. В таблице 1.2 приведены значения наращенной суммы по ссудной и учетной ставках 10% годовых при $P = 100$ ед. Значения наращенной суммы вычисляются по соответствующим формулам:

$$F_r = P(1 + nr), \quad F_d = P/(1 - nd).$$

Таблица 1.2 – Наращение по ссудной и учетной ставках

n	0,5	1	2	3	4	5
$F_r,\ r = 0{,}1$	105	110	120	130	140	150
$F_d,\ d = 0{,}1$	105,26	111,11	125,00	142,86	166,67	200,00

1.3 Сложные ставки

1.3.1 Сложные ссудные ставки

Для пояснения разницы между простыми и сложными процентами рассмотрим ситуацию: клиент положил в банк на несколько лет сумму, равную P, под простые проценты по ставке r, причем счет можно закрыть в любое время. Если клиент закроет счет через 2 года, то на руки он получит сумму $F1 = P(1 + 2r)$. Но клиент может поступить таким образом: через год закрыть счет, получить на руки сумму $F = P(1 + r)$, а затем положить эту сумму еще раз на год, осуществив операцию реинвестирования. Такое действие позволит ему в конце второго года получить $F2 = F \cdot (1 + r) = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$.

Величина $F2 > F1$ на величину $Pr^2 = (Pr)r$, которая представляет собой проценты на начисленные проценты. Ясно, что клиенту выгодно каждый раз переоформлять счет, поэтому с целью предотвращения такого рода действий банки в некоторых случаях используют сложные проценты.

В схеме сложных процентов очередной годовой доход исчисляется не с исходной, а с общей суммы, включающей начисленные проценты. Происходит капитализация процентов, т. е. база, с которой они начисляются, все время возрастает. Размер возвращаемой суммы рассчитывается по формулам:

- через 1 год: $F_1 = P + P \cdot r = P \cdot (1 + r)$;
- через 2 года: $F_2 = F_1 + F_1 \cdot r = F_1 \cdot (1 + r) = P(1 + r)^2$;

  ...
- через n лет:

$$F_n = P \cdot (1 + r)^n. \tag{1.12}$$

Величина начисленных процентов составит: $I = F - P = P \cdot \left[(1 + r)^n - (1 + nr)\right]$.

Часть из них получена за счет начисления процентов на основную часть долга: Pnr.

Оставшаяся часть получена за счет начисления процентов на проценты:

$$I_p = P \cdot \left[(1 + r)^n - 1\right] - Pnr = P\left[(1 + r)^n - (1 + nr)\right].$$

Вычислить наращенную сумму для заданных процентной ставки и количества лет можно при помощи финансовых таблиц, в которых протабулировано значение мультиплицирующего множителя (см. прил. А). Мультиплицирующий множитель для сложной процентной ставки равен $(1+r)^n$ и имеет специальное обозначение $FM1(r, n)$.

На рис. 1.2 приведен график зависимости множителя наращения от срока финансовой операции при $r = 10\%$.

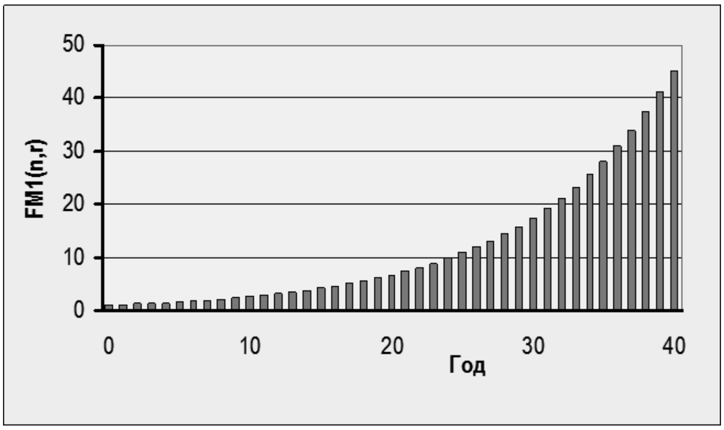
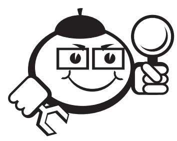


Рис. 1.2 – Зависимость множителя наращения от срока финансовой операции

Для примерного расчета количества лет, необходимых для увеличения денежной суммы в два раза при условии, что весь процент остается на депозите, применяется *правило 72*, использующее число 72. Чтобы рассчитать этот срок, нужно разделить 72 на ставку процента, выраженную целым числом. Это правило достаточно хорошо срабатывает при ставке от 3 до 18% ($72/3 = 24$ года; $72/4 = 18$ лет; $72/12 = 6$ лет).

Правило 72 действует также и в обратном направлении. Если известно, что за шесть лет 10000 руб. превратились в 20000 руб., то сложная годовая ставка составляет примерно 12%. Если же 10000 руб. удвоились за 10 лет, то ставка равна примерно 7,2%.



Пример 1.4

Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Решение:

Необходимо решить неравенство

$$(1+0{,}8) \geqslant 2; \quad n \geqslant Ln(2)/Ln(1{,}08); \quad n \geqslant 9.$$

Решая пример по правилу 72, получим: $72/8 = 9$.

Определить приведенную стоимость для заданных процентной ставки и количества лет можно по формуле

$$P = F_n/(1 + r)^n. \tag{1.13}$$

Величина $1/(1+r)^n$ называется коэффициентом дисконтирования или дисконтирующим множителем и обозначается $FM2(r, n)$. Его значение также занесено в финансовые таблицы (см. прил. А).

Наращенная сумма при различных ставках сложных процентов на разных интервалах исчисления ($n_1, n_2, \ldots$ — продолжительность интервалов начисления в годах; $r_1, r_2, \ldots$ — годовые ставки процентов, соответствующие этим интервалам) составит:

- в конце первого интервала: $F_1 = P \cdot (1 + r_1)^{n_1}$;
- в конце второго интервала: $F_2 = P(1 + r_2)^{n_1}(1 + r_2)^{n_2}$;
- в конце последнего интервала:

$$F_n = P \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i)^{n_i}. \tag{1.14}$$

В случае получения краткосрочных ссуд со сроком погашения до одного года в качестве показателя продолжительности срока ссуды n берется величина, равная удельному весу длины подпериода (день, месяц, квартал, полугодие) в общем периоде (год). Длина различных подпериодов в расчетах округляется: месяц — 30 дней, квартал — 90 дней, полугодие — 180 дней, год — 360 дней.

Пример 1.5

Рассчитать наращенную сумму с исходной суммы 2000 руб. при помещении ее в банк на условиях начисления простых и сложных процентов с годовой ставкой 20% и периодами наращения: 90 дней, 180 дней, 1 год, 5 лет, 10 лет.

Решение:

Результаты расчета представлены в таблице 1.3.

Таким образом, если денежные средства размещены в банке на срок менее 1 года, то выгоднее использовать схему простых процентов; при размещении средств на срок более 1 года выгоднее схема сложных процентов.

В общем виде можно записать:

- $(1 + nr) > (1 + r)^n$, при $n >$ года;
- $(1 + nr) < (1 + r)^n$, при $n <$ года.

Таблица 1.3

Схема начисления	Наращенная сумма по периодам наращения, тыс. руб.				
	90 дней, $n = 1/4$	180 дней, $n = 1/2$	1 год, $n = 1$	5 лет, $n = 5$	10 лет, $n = 10$
Простые проценты	2,1	2,2	2,4	4	6
Сложные проценты	2,093	2,1908	2,4	4,976	12,394

Часто на практике оговаривается величина годового процента и количество периодов начисления процентов. Тогда расчет наращенной суммы ведется по формуле сложных процентов

$$F(n) = P \cdot (1 + r/m)^{nm}, \tag{1.15}$$

где r — объявленная годовая ставка; m — количество начислений в году; n — количество лет.

Пример 1.6

В банк вложены деньги в сумме 5000 руб. на 2 года с полугодовым начислением процентов по ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму при полугодовом и поквартальном начислении сложных процентов.

Решение:

При полугодовом начислении процентов наращение происходит 4 раза по ставке 10%, а наращенная сумма составит:

$$F = 5000 \cdot 1{,}4641 = 7320{,}5 \text{ руб.}$$

Если проценты начисляются ежеквартально, то наращение происходит 8 раз по ставке 5%, а наращенная сумма составит:

$$F = 5000 \cdot 1{,}4774 = 7387{,}3 \text{ руб.}$$

Таким образом, чем чаще идет начисление по схеме сложных процентов, тем больше накопленная сумма. Заметим, что при начислениях по схеме простых процентов частота начислений не играет роли, так как наращение всегда происходит от исходной суммы.

Если контракт заключается на период, не равный целому числу лет, проценты могут начисляться двумя способами:

1) по схеме сложных процентов

$$F(n) = P \cdot (1 + r)^{w+f}, \tag{1.16}$$

где f — дробная часть года; w — целое число лет;

2) по смешанной схеме (сложные проценты для целого числа лет и простые проценты для дробной части года):

$$F(n) = P \cdot (1 + r)^w \cdot (1 + f \cdot r). \qquad (1.17)$$

Так как $f < 1$, то $(1 + f \cdot r) > (1 + r)$, поэтому наращенная сумма будет больше при использовании смешанной схемы.

1.3.2 Сложная учетная ставка

При использовании сложной годовой учетной ставки для определения параметров финансовой сделки используем следующие формулы:

1) для определения суммы, получаемой заемщиком:
   - в конце первого интервала: $P_1 = F - d \cdot F = F \cdot (1 - d)$;
   - в конце второго интервала: $P_2 = P_1 - P_1 \cdot d = F \cdot (1 - d) - F \cdot (1 - d) \cdot d = F \cdot (1 - d)^2$;
   - через n лет:

$$P_n = F \cdot (1 - d)^n; \qquad (1.18)$$

2) для определения наращенной суммы:

$$F = P/(1 - d)^n. \qquad (1.19)$$

Учет по сложной ставке может выполняться при любых ставках и сроках, т. к. всегда верно: $(1 - d)^n > 0$.

Наращение сумм по сложной учетной ставке и сложной ссудной ставке происходит с разной скоростью (рис. 1.3): скорость выше при применении сложной учетной ставки.

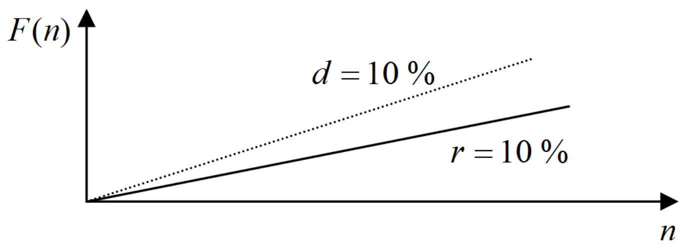


Рис. 1.3 – Наращенная сумма при начислении сложных процентов

Пример 1.7

Первоначальная сумма долга равняется 10 млн руб. Определить величину наращенной суммы при использовании декурсивного и антисипативного начисления процентов, если годовая ставка равна 20% годовых, срок начисления процентов — 3 года.

Решение:

Используя формулы (1.1) и (1.9), получим:

$$F1 = 10 \cdot (1 + 0{,}2)^3 = 17{,}28 \text{ млн руб.};$$
$$F2 = 10/(1 - 0{,}2)^3 = 19{,}53 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, разница составляет $2{,}25$ млн руб.

Так как при $d < 1$ выполняется условие $(1 - d)^n > (1 - nd)$, то для должника выгоднее наращение по сложной учетной ставке, чем наращение по простой учетной ставке.

. . . .

Пример 1.8

Рассчитать дисконтированную сумму при учете 1 млн руб. по простой и сложной учетным ставкам, если годовая учетная ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года, 3 года, 5 лет. Каждый год считать равным 360 дням.

Решение:

Применяя формулу (1.9) для простой учетной ставки и формулу (1.18) для сложной учетной ставки при $F = 1$ млн руб., $d = 0{,}18$ и различных n, получим следующие результаты, приведенные в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Способ дисконтирования	**Наращенная сумма по периодам наращения, тыс. руб.**						
	30 дней, $n = 1/12$	90 дней, $n = 1/4$	180 дней, $n = 1/2$	1 год, $n = 1$	2 года, $n = 2$	3 года, $n = 3$	5 лет, $n = 5$
Простые проценты	0,985	0,955	0,91	0,82	0,64	0,46	0,1
Сложные проценты	0,984	0,952	0,905	0,82	0,67	0,55	0,37

. . . .

При начислении процентов m раз за период наращенная сумма определяется по формуле

$$F = \frac{P}{(1 - d/m)^{mn}}. \tag{1.20}$$

Если период начисления не является целым числом, тогда формула примет вид

$$F = P(1 - d)^w \cdot (1 - f \cdot d), \tag{1.21}$$

где w — целое число лет; f — дробная часть года.

Предположим, что ставка сложных процентов будет разной на разных интервалах начисления. Пусть $n_1, n_2, \ldots$ — продолжительность интервалов начисления в годах; $d_1, d_2, \ldots$ — годовые учетные ставки процентов, соответствующие этим интервалам, тогда наращенная сумма определяется по формуле

$$F = \frac{P}{\prod_{i=1}^{k} (1 - d_i)^{n_i}}. \quad (1.22)$$

Сравнение скорости наращения по ссудным и учетным ставкам

Приращение капитала при сложной учетной ставке

$$D = F - P = P \cdot \left[1 - \frac{1}{(1-d)^n}\right]$$

не пропорционально ни сроку n, ни ставке d; для любого $i < 1$ справедливо неравенство $\frac{1}{1-i} > 1 + i$, поэтому наращение сумм по сложной учетной ставке и сложной ссудной ставке происходит с разной скоростью.

Скорость наращения выше при применении сложной учетной ставки (рис. 1.4).

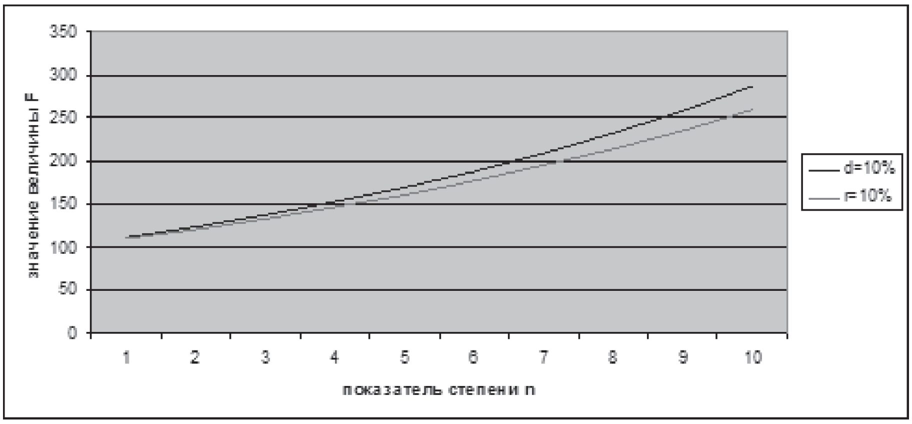


Рис. 1.4 – График наращенной суммы в 100 единиц. Наращение по ссудной и учетным ставкам.

1.4 Непрерывные ставки

Ранее рассмотренные процентные начисления называются дискретными, так как они производятся за фиксированный промежуток времени. Уменьшая период начисления, а также увеличивая частоту начисления процентов и переходя к пределу в формуле (1.12) при частоте начисления процентов, можно перейти к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально:

$$F = \lim_{m \to \infty} P \cdot (1 + r/m)^{n \cdot m} = P \cdot e^{r \cdot n}.$$

Непрерывную ставку начисления процента обозначают δ и называют *силой роста*. Формула для нахождения наращенной суммы за n лет примет вид

$$F = P \cdot e^{\delta n}. \tag{1.23}$$

Этой формулой пользуются и при n, не равном целому числу лет.

Для непрерывного начисления процентов по сложной учетной ставке наращенная сумма вычисляется по формуле

$$F = \frac{P}{\lim(1 - d/n)^{m \cdot n}} = P \cdot e^{\delta n}. \tag{1.24}$$

Формула (1.23) совпадает с формулой (1.24), т. к. при уменьшении интервала начисления процентов исчезает различие между антисипативным и декурсивным способами начисления процентов: начало и конец периода перестают различаться.

Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных финансовых задач, например при обосновании выбора инвестиционных решений. Оценивая работу финансового учреждения за период, в котором платежи поступают многократно, целесообразно также применять непрерывное начисление процентов.

Бывают ситуации, когда непрерывное начисление процентов применяется непосредственно при работе с клиентами. В начале 70-х годов в США ставка процентных выплат по займам и депозитам со сроком от 6 до 10 лет была ограничена величиной 7,75% годовых, но не ограничивалось количество начислений процентов в течение года. Этим и воспользовались банки для привлечения вкладчиков, и некоторые из них стали применять непрерывное начисление процентов при годовой ставке 7,75%. По существу эти банки установили годовую ставку, равную силе роста, т. е. $r = e^{0,0775} - 1 = 0,0806 = 8,06\%$.

Пример 1.9

Рассчитать накопленную сумму, если на вклад в 2 млн руб. в течение 5 лет начисляются непрерывные проценты с силой роста 10%.

Решение:

По формуле (1.23) получаем:

$$F = 2000000 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3\,297\,744,25.$$

Через 5 лет на счете накопится $3\,297\,744,25$ руб.

Дисконтирующий множитель на основе силы роста определяется по формуле

$$P = F/e^{\delta n} = F \cdot e^{-\delta n}. \tag{1.25}$$

Пример 1.10

Определить современную стоимость платежа в 5 млн руб., если срок поступления платежа наступит через 5 лет, сила роста — 12%.

Решение:

По формуле (1.25)

$$P = 5 \cdot e^{-5 \cdot 0{,}12} = 2{,}744.$$

Современная стоимость платежа равна $2{,}744$ руб.

Дискретные и непрерывные ставки находятся в функциональной зависимости. Из равенства множителей наращения получаем:

$$(1 + r)^n = e^{\delta n};$$
$$\delta = Ln(1 + r);$$
$$r = e^{\delta} - 1.$$

В подразделах 1.2–1.4 рассмотрены различные способы начисления процентов. В заключение приведем таблицу, в которой наглядно представлены результаты вычисления наращенной суммы при различных способах начисления процентов и одинаковых начальных условиях: P = 1000 ед.; ставка — 10% годовых (табл. 1.5).

Таблица 1.5 – Формулы для расчета величины наращенной суммы

Используемые формулы	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
$F = P(1 + n \cdot r)$	1100	1300	1500
$F = P(1 - n \cdot d)$	1111	1429	2000
$F = P(1 + r)^n$	1100	1331	1610
$F = P/(1 - d)^n$	1111	1372	1694
$F = P \cdot e^{\delta n}$	1106	1350	1649

1.5 Эквивалентные и эффективные ставки

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки. Две ставки называются *эквивалентными*, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются. Для нахождения эквивалентных процентных ставок используют *уравнения эквивалентности*. Принцип составления данных уравнений заключается в следующем: выбирается величина, которую можно рассчитать при использовании различных процентных ставок (обычно это наращенная сумма F); на основе равенства двух выражений для данной величины составляется уравнение эквивалентности. Из полученного уравнения путем преобразований получается соотношение, выражающее зависимость между процентными ставками различного вида.

Для вычисления наращенных сумм при использовании разных ставок используются следующие ранее выведенные формулы (см. подразд. 1.2–1.4):

$$F = P \cdot (1 + r \cdot n); \quad F = P \cdot (1 + r_c)^n;$$
$$F = P/(1 - d \cdot n); \quad F = P/(1 - d_c)^n;$$

где r — простая ссудная ставка; r_c — сложная ссудная ставка; d — простая учетная ставка; d_c — сложная учетная ставка; n — период начисления в годах.

Составляя различные уравнения эквивалентности, получаем некоторые соотношения для эквивалентных ставок:

$$\begin{aligned} r &= d/(1 - n \cdot d), & d &= r/(1 + r \cdot n); \\ r &= \left[(1 + r_c)^n - 1\right]/n, & r_c &= (1 + r \cdot n)^{1/n} - 1; \\ r_c &= d_c/(1 - d_c), & d_c &= r_c/(1 + r); \\ d &= \left[1 - (1 - d_c)^n\right]/n, & d_c &= 1 - (1 - n \cdot d)^{1/n}. \end{aligned}$$

В табл. 1.6 приведены зависимости между эквивалентными учетными и ссудными ставками.

Таблица 1.6 – Эквивалентность учетных и ссудных ставок

d, %	5	10	15	20	25	30	40	50
r, %	5,25	11,11	17,65	26	33,33	42,86	66,67	100

Пример 1.11

Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8% годовых. Определить эквивалентную простую ставку при сроке ссуды 5 лет, 180 дней, 365 дней.

Решение:

Используя приведенные выше уравнения эквивалентности, получим:

1) $r = \left((1 + 0{,}08)^5 - 1\right)/5 = 0{,}09 = 9\%$;
2) $r = \left((1 + 0{,}08)^{180/360} - 1\right)/(180/360) = 0{,}078 = 7{,}8$;
3) при сроке 365 дней величина сложной и эквивалентной ей простой ставки совпадают.

Пример 1.12

Вексель учитывается за 180 дней до срока погашения по простой учетной ставке 10% годовых. Какова доходность этой операции для банка, выраженная по сложной учетной ставке?

Решение:

Используя приведенные выше уравнения эквивалентности, получим:

$$d_c = 1 - (1 - 0{,}1 \cdot 180/360)^{1/0{,}5} = 0{,}0975 = 9{,}75\%.$$

Уравнения эквивалентности также используются при решении задач, связанных с заменой или объединением платежей. На практике часто возникают ситуации, когда участники сделки вынуждены изменять условия ранее заключенного финансового соглашения. Например, должник просит изменить срок платежа на более отдаленный либо изменить сумму платежа. В результате изменений условий контракта ни один из его участников не должен терпеть убытков, поэтому в таких ситуациях также составляется уравнение эквивалентности. Согласно уравнению эквивалентности сумма нового и старого платежей приводится к одному моменту времени. Из полученного уравнения определяется величина нового платежа при известном сроке либо срок нового платежа при его заданной величине. Для краткосрочных контрактов процесс приведения осуществляется, как правило, на основе простых ставок.

Пример 1.13

Согласно новому финансовому соглашению платеж в 100000 руб. со сроком уплаты через 1 год заменяется платежом со сроками уплаты через полгода и через два года. Определить величину нового платежа, если используется простая ставка 20% годовых.

Решение:

1) Так как срок нового платежа меньше года, то его величина — это дисконтированная стоимость 100000 руб., срок дисконтирования — 0,5 года, поэтому величина нового платежа равна:

$$100000/(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 90909 \text{ руб.}$$

2) Так как срок нового платежа больше года, то его величина — это будущая стоимость 100000 руб., наращение происходит один год по ставке 20% годовых, поэтому величина нового платежа равна:

$$100000 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}2) = 120000 \text{ руб.}$$

Пример 1.14

Найти величину нового срока, если платеж в 100000 руб. с уплатой через 250 дней заменяется платежом в 95000 руб. Используется простая ставка 10% годовых.

Решение:

Так как сумма нового платежа меньше 100000 руб., поэтому новый срок должен быть также меньше 250 дней.

Графически это можно показать следующим образом:

Рис. 1.5

Будем приводить потоки платежей по новому и старому контракту к моменту времени 250 дней. Тогда на сумму в 80000 руб. должны начисляться простые проценты по ставке 10% в течение $(250-x)$ дней и наращенная сумма должна равняться 100000 руб. Составляем уравнение эквивалентности $95000\cdot\big(1+0{,}1\cdot(250)/360)\big) = 100000$, из которого $x = 60{,}5$ дней.

Проверим этот результат. Получив через $60{,}5$ дней 95000 руб. и вложив их в банк на срок $(250 - 60{,}5)$ дней, получим

$$95000\cdot\big(1+(25060{,}5)\cdot 0{,}1)\big) = 100000 \text{ руб.}$$

Заметим, что платеж в 100000 руб. нельзя заменить любым меньшим по величине платежом. Величина нового платежа не может быть меньше, чем сумма 100000 руб., приведенная к начальному моменту времени, т. е. меньше, чем $100000/(1 + 0{,}1\cdot 250/360) = 93500$ руб.

При консолидации платежей (в случаях и сложных, и простых процентов) возникают две задачи: либо определение величины консолидированного платежа при известном сроке, когда этот платеж должен быть сделан; либо определение срока известного консолидированного платежа. Обе задачи решаются с использованием уравнения эквивалентности контрактов. Два контракта считаются эквивалентными, если потоки платежей по этим контрактам, приведенные к одному моменту времени, одинаковы.

Пример 1.15

Два векселя номинальной стоимостью 20000 руб. и 30000 руб. и сроком погашения 1 июня и 1 сентября заменяются одним с продлением срока погашения до

1 октября. При объединении используется простая учетная ставка 10% годовых. Определить номинальную стоимость нового векселя.

Решение:

Поскольку срок погашения нового векселя позже, чем сроки погашения объединяемых векселей, то на сумму 20000 руб. в течение 122 дней (с 1 июня по 1 октября) происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10%; на сумму 30000 руб. в течение 30 дней (с 1 сентября по 1 октября) также происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10% годовых. Поэтому номинальная стоимость нового векселя равна:

$$F = 20000 \cdot (1 - 122/360)^{-1} + 30000 \cdot (1 - 30/360)^{-1} = 62979{,}4 \text{ руб.}$$

Пример 1.16

Платежи в 300000 руб., 400000 руб. и 400000 руб. должны быть внесены через три месяца, полгода и 9 месяцев соответственно. Достигнуто соглашение о замене этих платежей на один, равный им по сумме. Определить срок нового платежа, если используется простая ставка 15% годовых.

Решение:

Для определения срока нового платежа необходимо привести три платежа к начальному моменту времени, просуммировать эти значения, полученную сумму приравнять к величине нового платежа и из этого равенства определить срок нового платежа. Получаем:

$$300000/(1 + 0{,}15 \cdot 90/360) + 400000/(1 + 0{,}15 \cdot 180/360) + 400000/(0{,}15 + 270/360) = \\ = 1100000/(1 + 0{,}15 \cdot /360),$$

где x — срок консолидированного платежа. Решая полученное уравнение, найдем, что $x = 186{,}2$.

Значит, срок уплаты нового платежа составляет 186 дней.

Уравнение эквивалентности используют и при вычислении так называемой эффективной ставки. Именно *эффективная ставка* характеризует реальную доходность финансовой операции, в то время как в контрактах обычно оговаривается годовая номинальная ставка. Меняя частоту начисления процентов, можно существенно влиять на доходность операции. В частности, оговоренная в контракте номинальная ставка в r% может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, в контракте клиента с банком указано, что банк начисляет проценты по ставке 18% годовых. Если сложные проценты начисляются один раз в конце года, реальная доходность этой сделки составляет 18%. Если же банк начисляет сложные проценты ежемесячно, реальная доходность сделки составляет 19,5%.

Для определения реальной доходности финансовой операции общая постановка задачи обычно формулируется так: задается исходная сумма P, номинальная годовая процентная ставка r, число начислений сложных процентов m. Для этого набора данных вычисляется наращенная величина $F(n)$. Требуется найти такую годовую ставку $r(e)$, называемую *эффективной*, при которой при однократном начислении процентов получится такая же наращенная сумма: то есть схемы $\{P, F(n), r, m > 1\}$ и $\{P, F(1), r(e), m = 1\}$ должны быть равносильными. На основании формулы (1.15) при $n = 1$ и определения эффективной ставки можно составить уравнение эквивалентности

$$F(n) = P \cdot (1 + r/m)^m = P \cdot \big(1 + r(e)\big),$$

согласно которому годовая эффективная ставка определяется по формуле

$$r(e) = (1 + r/m)^m - 1. \tag{1.26}$$

Из формулы (1.26) следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений и с ростом числа начислений сложных процентов m она увеличивается. Для каждой номинальной ставки можно найти соответствующую ей эффективную ставку. Именно эффективная ставка может использоваться для определения реальной доходности финансовой операции.

Пример 1.17

Клиент положил деньги в банк, ежемесячно начисляющий сложные проценты по ставке 16% годовых. Определить реальную доходность этой финансовой операции.

Решение:

Для решения задачи найдем эффективную ставку, соответствующую заданной номинальной ставке 16% годовых, начисляемой ежемесячно. По формуле (1.26) получаем

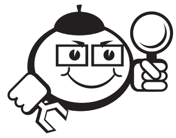
$$r(e) = 1{,}172 = 17{,}2\%.$$

Реальная доходность этой финансовой операции равна $17{,}2\%$.

Из формулы (1.26) можно вывести формулу для вычисления номинальной ставки r, если в контракте указана эффективная ставка $r(e)$:

$$r = m\Big[\big(1 + r(e)\big)^{1/m} - 1\Big]. \tag{1.27}$$

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления процентов и неодинаковыми ставками.



Пример 1.18

Компания может получить кредит на следующих условиях:

1) *ежемесячное начисление процента из расчета 26% годовых;*
2) *полугодовое начисление процента из расчета 27% годовых.*

Определить, какой вариант предпочтительнее для компании.

Решение:

Вычислим эффективные ставки для обозначенных условий. Определим, какой процент от кредита компании придется вернуть. По формуле (1.26) получим:

1) $r(e) = (1 + 0{,}26/12)^{12} - 1 = 0{,}2933 = 29{,}3\%$;
2) $r(e) = (1 + 0{,}27/2)^{2} - 1 = 0{,}2882 = 28{,}2\%$.

Таким образом, при первом варианте компании придется выплатить банку $29{,}3\%$ годовых, а при втором — $28{,}8\%$ годовых. Поэтому второй вариант более выгоден компании, а первый — банку. Принятие решения не зависит от суммы кредита, так как критерием выбора является эффективная ставка, а ее расчет не зависит от величины .

Пусть $r(m)$ — размер номинальной ставки при m начислениях в году. Эквивалентная замена номинальной ставки имеет место в том случае, если

$$\left(1 + r_1(m1)/m1\right)^{m1} = \left(1 + r_2(m2)/m2\right)^{m2};$$

$$r_2(m2) = m2\cdot\left[\left(1 + r_1(m1)/m1\right)^{m1/m2} - 1\right].$$

Эффективная учетная ставка вычисляется из уравнения эквивалентности

$$P = F \cdot \left(1 - d(e)\right) = F \cdot (1 - d/m)^{m},$$

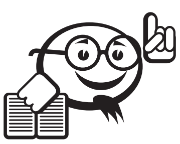
откуда эффективная ставка определяется по формуле

$$d(e) = 1 - (1 - d/m)^{m}. \qquad (1.28)$$

Из формулы (1.28) можно вывести формулу для вычисления номинальной ставки r, если в контракте указана эффективная ставка $d(e)$:

$$d = m \cdot \left(1 - \left(1 - d(e)\right)\right)^{1/m}. \qquad (1.29)$$

Остановимся на некоторых особенностях вышеизложенного материала.



Замечание 1. Рассмотренная выше эффективная годовая процентная ставка является частным случаем эквивалентности ставок.

Замечание 2. Эквивалентность ссудных и учетных процентных ставок никогда не зависит от первоначальной суммы.

Замечание 3. Эквивалентность процентных ставок всегда зависит от продолжительности периода начисления, за исключением эффективной ставки.

1.6 Учет инфляции в принятии финансовых решений

Инфляция характеризуется обесцениванием национальной валюты и общим повышением цен в стране. Рассмотрим механизм влияния инфляции на результат финансовых операций и приведем некоторые расчеты [4].

Обозначим через F_α — сумму, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы F при отсутствии инфляции. Например, если платье стоило 1 тыс. рублей, а через год стоимость платья увеличилась до 1200 руб., то $F = 1000$; $F_\alpha = 1200$. Очевидно, что $F_\alpha > F$.

Разницу между величинами F_α и F обозначим ΔF, т. е. $\Delta F = F_\alpha - F$.

Относительная величина $(F_\alpha - F)/F$ называется темпом инфляции и обозначается через α, т. е. $\alpha = (F_\alpha - F)/F$.

Отношение $(F_\alpha - F)/F$ выраженное в процентах, называется уровнем инфляции.

Величину F_α можно выразить через α следующим образом:

$$F_\alpha = F \cdot \alpha + F = F(1 + \alpha). \tag{1.30}$$

Из (1.30) следует, что $\dfrac{F_\alpha}{F} = (1 + \alpha)$.

Величину $(1+\alpha)$, показывающую, во сколько раз в среднем выросли цены (то есть во сколько раз $F_\alpha > F$), называют индексом инфляции $I_и$.

Из определения индекса инфляции следует, что $I_и = (1 + \alpha)$.

Очевидно, что инфляция уменьшает реальную ставку процента. Пусть α — годовой уровень инфляции. Это значит, что через год сумма F_α^1 будет больше суммы F в $(1+\alpha)$ раз. Еще через год сумма F_α^2 будет больше суммы F_α^1 в $(1+\alpha)$ раз, то есть больше суммы F в $(1+\alpha)^2$ раз. Через n лет сумма F_α^n вырастет по отношению к сумме F в $(1+\alpha)^n$ раз. Поэтому через n лет индекс инфляции $I_и = (1+\alpha)^n$. Инфляционный рост суммы F при годовом уровне инфляции α есть то же самое, что и наращение суммы F по сложной годовой ставке процентов α.

Пример 1.19

Предположим, что цены каждый месяц растут на 2%. В таких случаях банки и финансовые компании принимают годовой уровень инфляции, равным 24% $(2\% \cdot 12$ мес.) и привлекают клиентов вкладывать средства, к примеру под 25% годовых, гарантируя при этом сохранение средств клиента. Между тем если уровень инфляции составляет 2% в месяц, это значит, что за месяц цены вырастают в $(1+0{,}02) = 1{,}02$ раза, а за год — в $1{,}268$ $(1{,}02^{12})$ раза. Значит, годовой темп инфляции составляет: $1{,}268 - 1 = 0{,}268$; т. е. годовой уровень инфляции достигает $26{,}8\%$. После такого расчета процентная ставка 25% годовых теряет свою инвестиционную привлекательность и может рассматриваться только как способ уменьшения потери от инфляции.

Рассмотрим различные случаи задания уровня инфляции. Количество лет n в общем случае может быть не целым числом.

Если известен годовой уровень инфляции α, то за период в n лет индекс инфляции составит следующую величину:

$$I_и = (1+\alpha)^{n_a} \cdot (1 + n_b\alpha),$$

где $n = n_a + n_b$, n_a — целое число лет, n_b — оставшаяся нецелая часть года.

Формула записана по аналогии со схемой сложных процентов (формула (1.17)).

В некоторых случаях может быть задан уровень инфляции α_m за короткий (меньше года) интервал. Тогда за период, составляющий n таких интервалов, индекс инфляции будет определяться по формуле

$$I_и = (1+\alpha_m)^m.$$

Формула записана по аналогии с формулой начисления сложных процентов с внутригодовыми начислениями (формула (1.12)).

Применим рассмотренные выше варианты начисления процентов в условиях инфляции.

Если в обычных условиях первоначальная (исходная) сумма P при заданной ставке процентов превращается за определенный период в сумму F, то в условиях инфляции она должна превратиться в сумму F_α, что требует другой процентной ставки. Назовем эту ставку ставкой процентов, учитывающей инфляцию.

Введем следующие обозначения:

r_α — ставка простого ссудного процента, учитывающая инфляцию;

d_α — ставка простого учетного процента, учитывающая инфляцию;

$r_{c\alpha}$ — ставка сложного ссудного процента, учитывающая инфляцию;

$d_{c\alpha}$ — ставка сложного учетного процента, учитывающая инфляцию.

Зададим годовой уровень инфляции α и простую годовую ставку ссудного процента r. Тогда наращенная сумма F (без учета инфляции) через один год в соответствии с формулой наращения простыми ссудными процентами равна $F = P \cdot (1+r)$.

Наращенная сумма F_α (с учетом инфляции) через один год в соответствии с формулой наращения простыми ссудными процентами равна $F\alpha = P(1 + r_\alpha)$.

Учитывая, что по формуле (1.30) $F_\alpha = F \cdot (1+r)$, запишем $F_\alpha = P(1+r) \cdot (1+\alpha)$.

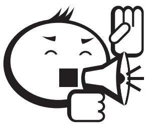
Составим уравнение эквивалентности

$$P \cdot (1 + r_\alpha) = P \cdot (1 + r) \cdot (1 + \alpha).$$

Из этого уравнения получаем выражение для величины r_α:

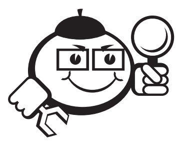
$$r_\alpha = r + \alpha + r \cdot \alpha. \tag{1.31}$$

Формула (1.31) называется формулой Фишера, в которой сумма $(\alpha + r \cdot \alpha)$ является величиной, которую необходимо прибавить к реальной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. Эта величина называется *инфляционной премией*.



Формула Фишера определяет значение годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции.

Зная формулу Фишера, можно избежать одной распространенной ошибки, рассмотренной в примере ниже.



Пример 1.20

Часто для подсчета процентной ставки, учитывающей инфляцию, к величине номинальной ставки просто прибавляют величину темпа инфляции, т. е. если $r = 25\%$, $\alpha = 15\%$, то за процентную ставку, учитывающую инфляцию, принимается сумма, определяемая следующим образом:

$$r = 25\% + 15\% = 40\%.$$

Но нужно помнить, что еще существует произведение $r \cdot \alpha$, величина которого тем больше, чем больше r и α. В данном примере это произведение составляет: $0{,}15 \cdot 0{,}25 = 0{,}0375 = 3{,}75\%$.

Если речь идет о миллионах рублей, то каждый процент — это сотни тысяч рублей, поэтому не следует пренебрегать даже таким небольшим процентом.

Рассмотрим различные случаи начисления процентов с учетом инфляции, при этом будем пользоваться значением индекса инфляции за весь период. Для простых ставок за n лет по формуле (1.1) получим: $F_\alpha = P \cdot (1 + n \cdot r_\alpha)$.

В то же время должно выполняться равенство

$$F_\alpha = P \cdot (1 + n \cdot r) \cdot I_и.$$

Решая уравнение эквивалентности, получим

$$r_\alpha = \left[(1 + nr) \cdot I_и - 1\right]/n. \tag{1.32}$$

Для простых учетных ставок получаем

$$d_\alpha = (I_и - 1 + nd)/(n \cdot I_и). \tag{1.33}$$

Для случая сложных процентов

$$r_{c\alpha} = (1 + r_c)\sqrt[n]{I_и} - 1. \tag{1.34}$$

Если начисление процентов происходит m раз в году:

$$r_{c\alpha} = m \cdot \left\{(1 + r_c/m)\sqrt[m \cdot n]{I_и} - 1\right\}. \tag{1.35}$$

Формулы для вычисления сложных учетных ставок:

1) учитывающих инфляцию, если начисление процентов происходит один раз в год:

$$d_{c\alpha} = 1 - (1 - d_c)/\sqrt[n]{I_и}; \tag{1.36}$$

2) учитывающих инфляцию, если начисление процентов происходит m раз в год:

$$d_{c\alpha} = m \cdot \left\{1 - (1 - d_c/m)/\sqrt[n \cdot m]{I_и}\right\}. \tag{1.37}$$

Используя полученные формулы, можно находить процентную ставку, компенсирующую потери от инфляции, когда заданы обычная процентная ставка и уровень инфляции в течение рассматриваемого периода. Эти формулы можно преобразовывать и получать выражения для любых величин. Например, из формулы (1.32) можно получить формулу, позволяющую определить реальную доходность финансовой операции, когда задан уровень инфляции и простая ставка процентов, учитывающая инфляцию:

$$r = (n \cdot r_\alpha \alpha + 1 - I_и)/n \cdot I_и. \tag{1.38}$$

Из формулы (1.34) получаем аналогичную формулу для случая сложных процентов

$$r_c = (1 + r_{c\alpha})/\sqrt[n]{I_и} - 1. \tag{1.39}$$

Подставляя в полученную формулу вместо $I_и$ величину $(1 + r_\alpha)^n$, получим:

$$r_c = (1 + r_{c\alpha})/(1 + \alpha) - 1. \tag{1.40}$$

Формула (1.40) имеет следующий экономический смысл:

1) если $r_{c\alpha} = \alpha$, т. е. доходность и уровень инфляции равны, то $r_c = 0 \Rightarrow$ наращения не происходит и доход поглощается инфляцией;
2) если $r_{c\alpha} < \alpha$, то $r_c < 0 \Rightarrow$ операция приносит убытки;
3) если $r_{c\alpha} > \alpha$, то $r_c > 0 \Rightarrow$ происходит реальный рост вложенного капитала.

Пример 1.21

На сумму 50 тыс. руб. в течение трех месяцев начислялись простые проценты по ставке 4% годовых. За каждый месяц цены росли соответственно на 1,5%, 1,2% и 1%. Найти наращенную сумму с учетом инфляции и величину процентной ставки, обеспечивающей такой же доход в условиях инфляции.

Решение:

Индексы цен за каждый квартал равны соответственно $1{,}015$; $1{,}012$; $1{,}01$, тогда за квартал ($0{,}25$ часть года) индекс цен равен

$$I^{(0{,}25)} = 1{,}015 \cdot 1{,}012 \cdot 1{,}01 = 1{,}037452.$$

Наращенная сумма с учетом инфляции равна

$$\frac{F}{I_{\text{и}}} = \frac{50(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}04)}{1{,}037452} = 48{,}67696.$$

Величину процентной ставки находим по формуле (1.32)

$$r_\alpha = \left[(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) \cdot 1{,}037452 - 1\right] / \, 0{,}25 = 0{,}191305 = 19{,}14\%.$$

В условиях инфляции простая ставка $19{,}14\%$ годовых обеспечит реальное наращение капитала за квартал по ставке 4% годовых.

1.7 Учет налогообложения в принятии финансовых решений

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции.

Введем обозначения:

t — ставка налога на проценты;

T — общая сумма налога;

F — наращенная сумма до выплаты налога на проценты;

F_t — наращенная сумма после выплаты налога на проценты;

P — вложенная сумма;

n — продолжительность финансовой операции.

Пусть r — простые ссудные проценты. Величина начисленных процентов равна Pnr. Сумма налога на начисленные проценты $= Pnrt$.

$$F_t = F - T = P(1 + nr) - Pnrt = P\big[(1 + nr) - nrt\big] = P\big[(1 + r(1 - t)n\big]$$

Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки: вместо ставки r применяется ставка $(1 - t)r$.

Пусть r — сложные ссудные проценты. Рассмотрим различные способы начисления налогов на полученные проценты.

1) Налог на проценты начисляется в конце финансовой операции

$$T1 = (F - P)t = P\big[(1 + r)n - 1\big]t;$$
$$T2 = \sum_{t=1}^{n} T_t = \sum_{t=1}^{n} P(1 + r)^{t-1}tr = Prt\sum_{t=1}^{n}(1 + r)^{t-1};$$
$$F_t = F - T1 = P(1 + r)n - P\big[(1 + r)n - 1\big]t = P(1 + r)n - P(1 + r)nt + Pt =$$
$$= P\big[(1 + r)n(1 - t) + t\big].$$

2) Налог на проценты начисляется каждый год. Налог на проценты за каждый год равен:

$$T_t = (Ft - Ft - 1)t = \big[P(1 + r)t - P(1 + r)t - 1\big]t = P(1 + r)^{t-1}\big[(1 + r) - 1\big]t =$$
$$= P(1 + r)^{t-1}rt.$$

Сумма налога за весь период финансовой операции

$$T2 = \sum_{t=1}^{n} T_t = \sum_{t=1}^{n} P(1 + r)^{t-1}tr = Prt\sum_{t=1}^{n}(1 + r)^{t-1}.$$

Под знаком суммы имеем геометрическую прогрессию с первым членом $b = 1$ и знаменателем $q = (1 + r)$ Поэтому:

$$T2 = Prt\left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right] = P\big[(1 + r)^n - 1\big]t = T1.$$

Сумма налога не зависит от способа его исчисления. Важно ВРЕМЯ уплаты налога.

Пример 1.22

Вклад в размере 1 млн руб. помещен на 3 года в банк под 12% годовых. Ставка налога на проценты равна 15%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты при начислении на вклад простых и сложных процентов.

Решение:

1) Начисление простых процентов:

   а) через 3 года сумма вклада $F = 1000(1 + 0{,}12 \cdot 3) = 1360$;

   б) с учетом налога на проценты $F_t = 1000\big[1 + 3 \cdot (1 - 0{,}15) \cdot 0{,}12\big] = 1306$.

2) Начисление сложных процентов:

   а) наращенная сумма без учета налога на проценты $F = 1000(1 + 0{,}12)3 = 1404{,}928$;

   б) общая сумма налога на проценты $T = 1000(1 + 0{,}12)3 \cdot 0{,}15 = 60{,}7398$;

   в) при последовательной выплате налога:

   - налог за первый год $T1 = 1000 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}15 = 18$;
   - налог за второй год $T2 = 1000 \cdot (1 + 0{,}12) \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}15 = 20{,}16$;
   - налог за третий год $T3 = 1000 \cdot (1 + 0{,}12)2 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}15 = 22{,}5792$;
   - общая сумма налога на проценты $T = T1 + T2 + T3 = 60{,}7398$.

. . . .

1.8 Конвертация валюты и наращение процентов

При возможности обмена рублевых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от размещения имеющихся денежных средств в депозиты при конвертации и без конвертации.

Возможны следующие варианты для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без нее:

Без конверсии	СКВ ⇒ СКВ
С конверсией	СКВ ⇒ Руб. ⇒ Руб. ⇒ СКВ
Без конверсии	Руб. ⇒ Руб.
С конверсией	Руб. ⇒ СКВ ⇒ СКВ ⇒ Руб.

В операциях наращения с конверсией валют существует два источника дохода — изменение курса и наращение процентов. Необходимо учитывать, что двойное конвертирование валюты в начале и в конце операции может быть при неблагоприятных условиях убыточным. Рассмотрим операции наращения и конвертации валюты и рассчитаем реальную доходность финансовых операций.

Введем обозначения:

P_{v} — сумма депозита в СКВ;
P_r — сумма депозита в рублях;
F_{v} — наращенная сумма в СКВ;
F_r — наращенная сумма в рублях;
K_0 — курс обмена СКВ в начале операции;
K_1 — курс обмена СКВ в конце операции;
n — срок депозита;
i — ставка наращения по депозитам в рублях;
j — ставка наращения по депозитам в валюте.

1.8.1 Вариант СКВ ⇒ Руб. ⇒ Руб. ⇒ СКВ.

Операция предполагает следующие этапы: обмен валюты на рубли; наращение по рублевому депозиту; обмен рублей на валюту. Конечная сумма операции в валюте рассчитывается по формуле:

$$F_{\text{v}} = P_{\text{v}} K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}. \tag{1.41}$$

Множитель наращения M_{v} с учетом двойного конвертирования рассчитывается по формуле:

$$M_{\text{v}} = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{1 + ni}{K_1/K_0}. \tag{1.42}$$

С ростом ставки наращения множитель M_{v} увеличивается, а рост конечного курса обмена множитель M_{v} уменьшает.

Пример 1.23

Определить, на какой депозит выгоднее поместить 1 тыс. долларов — рублевый или валютный при следующих условиях: курс продажи долларов на начало срока депозита — 30,08 руб.; курс покупки долларов на конец финансовой операции — 30,45 руб. Срок депозита — полгода. Процентные ставки по рублевым депозитам — 9% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте — 5% годовых.

Решение:

По формуле (1.41) определим конечную сумму операции при помещении денежных средств на рублевый депозит:

$$F_{\text{v}} = 1000 \cdot 30{,}08 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}09) \cdot \frac{1}{30{,}45} = 1032{,}30 \text{ долл.}$$

Конечная сумма операции при помещении денежных средств на валютный депозит:

$$F_{\text{v}} = 1000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) = 1025 \text{ долл.}$$

Рассмотрим доходность финансовой операции, связанной с конвертацией валют. Будем измерять доходность в виде простой ставки ссудного процента. Тогда доходность финансовой операции можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{F_{\text{v}} - P_{\text{v}}}{P_{\text{v}} \cdot n}.$$

Подставим в эту формулу значение F_{v} из формулы (1.41)

$$r = \left[\frac{K_0}{K_1} \cdot (1 + ni) - 1\right] / n = \frac{M - 1}{n}.$$

Получаем, что эффективность финансовой операции линейно зависит от соотношения величин K_0 и K_1.

Введем величину $k = \dfrac{K_1}{K_0}$, которая характеризует отношение последнего и первого курсов валют.

С ростом значения величины k эффективность финансовой операции падает.

При $k = 1$ эффективность операции $r = i$.

При $k > 1$ эффективность операции $r < i$.

При $k < 1$ эффективность операции $r > i$.

1.8.2 Вариант Руб. ⇒ СКВ ⇒ СКВ ⇒ Руб.

Операция предполагает следующие этапы: обмен рублей на валюту, депозит в валюте, обмен валюты на рубли. Конечная сумма операции в рублях рассчитывается по формуле:

$$F_r = \frac{P_r}{K_0} \cdot (1 + nj) \cdot K_1 = P_r(1 + nj) \cdot \frac{K_1}{K_0}. \tag{1.43}$$

Множитель наращения ${}_r$ с учетом двойного конвертирования рассчитывается по формуле:

$$M_r = (1 + nj) \cdot \frac{K_1}{K_0}.$$

С ростом ставки наращения множитель M_r увеличивается, а рост начального курса обмена множитель M_r уменьшает.

Пример 1.24

Определить, на какой депозит выгоднее поместить 1 млн рублей — рублевый или валютный при следующих условиях: курс покупки долларов на начало срока депозита — 30,28 руб.; курс продажи долларов на конец финансовой операции — 30,00 руб. Срок депозита — полгода. Процентные ставки по рублевым депозитам — 9% годовых, процентные ставки по депозитам в валюте — 5% годовых.

Решение:

По формуле (1.43) определим конечную сумму операции при помещении денежных средств на рублевый депозит:

$$F_r = 1000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) \cdot \frac{30{,}00}{30{,}28} = 1015{,}52 \text{ руб.}$$

Конечная сумма операции при помещении денежных средств на валютный депозит:

$$F_r = 1000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}09) = 1045 \text{ руб.}$$

Рассмотрим доходность финансовой операции, связанной с конвертацией валют. Будем измерять доходность в виде простой ставки ссудного процента. Тогда доходность финансовой операции можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{F_r - P_r}{P_r \cdot n}.$$

Подставим в эту формулу значение F_r из формулы (1.43):

$$r = \left[\frac{K_1}{K_0} \cdot (1 + nj) - 1\right] / n.$$

Получаем, что эффективность финансовой операции линейно зависит от соотношения величин K_0 и K_1.

Введем величину $k = \dfrac{K_1}{K_0}$, которая характеризует отношение последнего и первого курсов валют.

С ростом значения величины k эффективность финансовой операции падает.

При $k = 1$ эффективность операции $r = j$.

При $k > 1$ эффективность операции $r > j$.

При $k < 1$ эффективность операции $r < j$.

При $k = 1/(1 + nj)$ эффективность операции $r = 0$.

Контрольные вопросы по лекции 1

1) Как связаны между собой наращение простыми процентами и арифметическая прогрессия?
2) В чем заключается различие между точным и приближенным процентами?
3) В каких случаях применяется операция банковского дисконтирования?
4) Верно ли, что по простой учетной ставке вексель можно учесть за любое время до срока погашения?
5) В чем различие между антисипативным и декурсивным способами начисления процентов?
6) Чему равен множитель наращения при начислении процентов по сложной ссудной ставке?
7) Как соотносятся между собой наращенные суммы при начислении простых и сложных ссудных процентов?
8) Верно ли, что начисление сложных процентов по ставке 12% годовых эквивалентно начислению сложных процентов по ставке 1% в месяц?
9) Чему равен множитель дисконтирования при использовании сложных процентов?
10) Как пользоваться финансовыми таблицами при вычислении наращенной и приведенной стоимости?

11) Может ли учет по сложной учетной ставке привести к отрицательным значениям?
12) Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операций дисконтирования по сложной учетной ставке?
13) Какая ставка называется эффективной? От каких параметров она зависит?
14) Как изменяется эффективная ставка с ростом количества начислений сложных процентов в году?
15) В каком случае эффективная ссудная ставка совпадает с номинальной?
16) Какие ставки называются эквивалентными?
17) Что означает консолидация платежей?
18) Верно ли утверждение: при сравнении платежей их приведение к одному моменту времени может осуществляться как путем наращения, так и путем дисконтирования?
19) Какие контракты являются эквивалентными?
20) Какие задачи могут возникать при консолидации платежей?
21) Почему в условиях инфляции необходимо различать номинальную и реальную процентную ставки?
22) Может ли реальная процентная ставка быть отрицательной?
23) Верно ли следующее утверждение: при наращении сложными процентами величина налога на проценты не зависит от времени уплаты налога — ежегодно или в конце финансовой операции?

Лекция 2

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

2.1 Виды денежных потоков

Любая финансовая операция может быть полностью описана посредством порождаемых ею денежных потоков. Понятие денежного потока является фундаментальным в финансовом менеджменте.

Денежный поток — это распределенная во времени последовательность выплат и поступлений денежных средств, генерируемая некоторым активом или инвестиционным проектом.

Денежный поток обладает рядом характеристик, наиболее важными из которых являются размер отдельного платежа (элемента потока), время осуществления, периодичность и т. д. Получаемые платежи или поступления называют *притоками денежных средств*, выплачиваемые — *оттоками*. Размеры выплат и поступлений могут быть известны с той или иной степенью достоверности. Чем более достоверны суммы платежей, тем меньше риск, связанный с финансовой операцией.

Момент поступлений/оттоков денежных средств называется временным интервалом.

Если число временных интервалов денежного потока ограничено, денежный поток называется *срочным*, неограниченные по времени денежные потоки называются *вечными*. Денежный поток, в котором поступления происходят в начале каждого временного периода, называется *потоком пренумерандо*; поток, поступления которого происходят в конце периода,— *потоком постнумерандо*. Графически вышеназванные денежные потоки представлены на рис. 2.1.

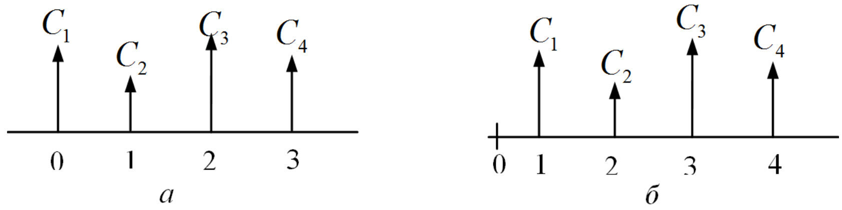


Рис. 2.1 – Денежные потоки пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

Временной интервал денежного потока называют *базовым периодом*. Денежный поток с равными по величине временными интервалами называется *финансовой рентой (аннуитетом)*.

Аннуитет называется *постоянным (fixed annuity)*, если все денежные поступления равны между собой ($1 = 2 = \cdots = C_n = A$). В зависимости от характера денежных поступлений (в начале или конце периода) выделяют виды аннуитетов (рис. 2.2).

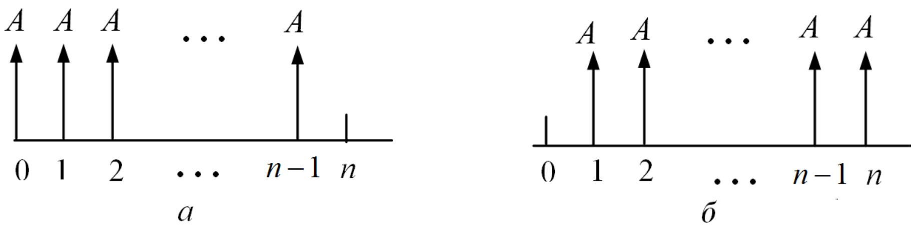
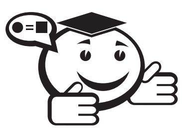


Рис. 2.2 – Виды постоянных аннуитетов: пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

Классификация денежных потоков может проводиться по различным признакам, представленным в табл. 2.1.

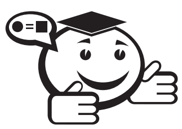
Оценка денежного потока может выполняться в рамках решения двух задач — прямой и обратной.



Прямая задача — это суммарная оценка наращенного денежного потока с позиции будущей стоимости.

Если денежный поток представляет собой регулярные начисления процентов на вложенный капитал по схеме сложных процентов, то в основе оценки наращенного денежного потока лежит формула нахождения будущей стоимости

$$F_n = P \cdot (1 + r)^n.$$



Обратная задача предполагает суммарную оценку дисконтированного денежного потока.

Так как отдельные элементы денежного потока генерируются в различные временные интервалы, а деньги имеют временную стоимость, непосредственное их суммирование невозможно. Приведение денежного потока к одному моменту времени осуществляется по формуле нахождения приведенной стоимости $P = F_n/(1+r)^n$. Результатом расчета будет общая стоимость приведенного денежного потока.

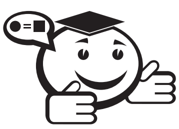
В обеих задачах оценки денежного потока предполагается капитализация процентов, поэтому при вычислениях используется схема сложных процентов.

Таблица 2.1 – Классификация денежных потоков

Признак	**Виды денежных потоков**
Распределение во времени	Дискретные Непрерывные
Продолжительность базового периода	Одинаковая (аннуитет) Произвольная
Момент выплаты внутри базового периода	Поток пренумерандо Поток постнумерандо Выплаты в произвольные моменты
Количество платежей	Разовые Срочные Вечные
Величина платежей	Постоянная Переменная С закономерными изменениями
Вероятность выплат	Детерминированные Условные Стохастические
Знак элемента потока	Стандартные (расходные платежи предшествуют доходным) Нестандартные

2.2 Оценка денежного потока постнумерандо

Оценка денежного потока постнумерандо предполагает решение прямой задачи (определение стоимости данного потока с позиций будущего) и обратной задачи (оценка с позиции начального момента).



Прямая задача оценки потока постнумерандо представляет собой оценку денежного потока $C_1, C_2, \ldots, C_n$, период которого совпадает с базовым периодом начисления процентов по ставке r на конец периода n, когда реализуется схема наращения (рис. 2.3).

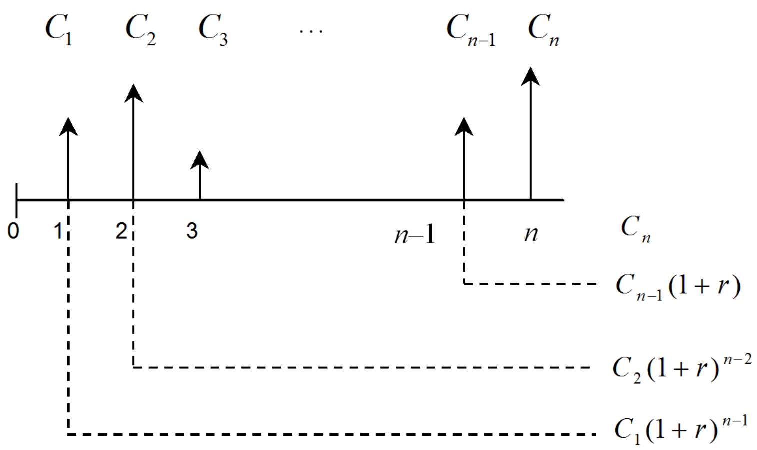


Рис. 2.3 – Логика решения прямой задачи для потока постнумерандо

На первое денежное поступление C_1 начисляются сложные проценты за $n-1$ период, и оно в конце n-го периода станет равным $C_1(1+r)^{n-1}$. На второе денежное поступление C_2 начисляются сложные проценты за $n-2$ периода, и оно станет равным $C_2(1+r)^{n-2}$ и т. д. На предпоследнее денежное поступление C_{n-1} проценты начисляются за один период, и оно будет в конце n-го периода равно $C_{n-1}(1+r)$. Естественно, на денежный поток C_n проценты не начисляются.

Следовательно, наращенный денежный поток для исходного потока постнумерандо имеет вид

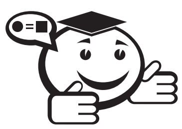
$$C_1(1+r)^{n-1},\, C_2(1+r)^{n-2},\, \ldots,\, C_{n-1}(1+r),\, C_n$$

и будущая стоимость FV_{pst} исходного денежного потока постнумерандо может быть оценена как сумма наращенных поступлений, т. е. получаем формулу

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+r)^{n-k}. \tag{2.1}$$

Используя обозначение множителя наращения, получаем формулу

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k FM1(r, n-k). \tag{2.2}$$



Обратная задача подразумевает оценку с позиции текущего момента, т. е. на момент начала первого периода.

В этом случае реализуется схема дисконтирования, и расчеты необходимо вести по приведенному потоку, все элементы которого с помощью дисконтных множителей приведены к настоящему моменту времени. Элементы приведенного денежного потока уже можно суммировать; их сумма характеризует приведенную, или текущую, стоимость потока, которую при необходимости можно сравнивать с величиной первоначальной инвестиции. Схема дисконтирования для исходного потока представлена на рис. 2.4.

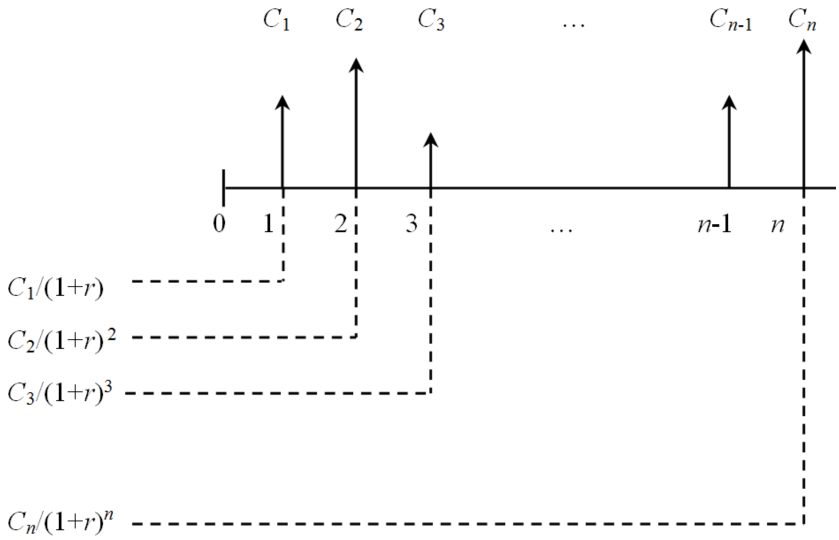


Рис. 2.4 – Логика решения обратной задачи для потока постнумерандо

Таким образом, приведенный денежный поток для исходного потока постнумерандо имеет вид

$$\frac{C_1}{1+r}, \frac{C_2}{(1+r)^2}, \ldots, \frac{C_n}{(1+r)^n}.$$

Приведенная стоимость денежного потока (аннуитета) постнумерандо PV_{pst} в общем случае может быть рассчитана по формуле

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}. \quad (2.3)$$

Если использовать дисконтный множитель, то формулу (2.3) можно переписать в следующем виде:

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k FM2(r,k). \quad (2.4)$$

Пример 2.1

Рассчитать приведенную стоимость аннуитета постнумерандо в тыс. руб. (10, 15, 18, 25), если процентная ставка r составляет 10% и период равен одному году.

Решение:

Расчеты приведем в таблице 2.2.

Оценку приведенной стоимости аннуитета можно рассматривать с точки зрения ситуации, когда платежи $C_1, C_2, \ldots, C_n$, выплачиваемые соответственно в конце первого, второго и n-го периодов, заменяются одним платежом PV_{pst} с выплатой в начальный момент времени.

Таблица 2.2

Год	**Денежный поток, тыс. руб**	**Дисконтный множитель при** r = 10%	**Приведенный поток, тыс. руб.**
1	10	0,909091	9,09
2	15	0,826446	12,39
3	18	0,751315	13,52
4	25	0,683013	17,07
Итого	68		52,08

Формулу (2.3) можно получить, не указывая явным образом приведенный денежный поток, а осуществляя приведение величины PV_{pst} к настоящему моменту времени:

$$PV_{pst} = \frac{PV_{pst}}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n}\sum_{k=1}^{n} C_k(1+r)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{(1+r)^k}.$$

2.3 Оценка денежного потока пренумерандо

Логика оценки потока пренумерандо аналогична вышеописанной логике оценки потока постнумерандо. Некоторое расхождение в вычислительных формулах объясняется сдвигом элементов потока к началу соответствующих подынтервалов. Для *прямой задачи* схема наращения показана на рис. 2.5.

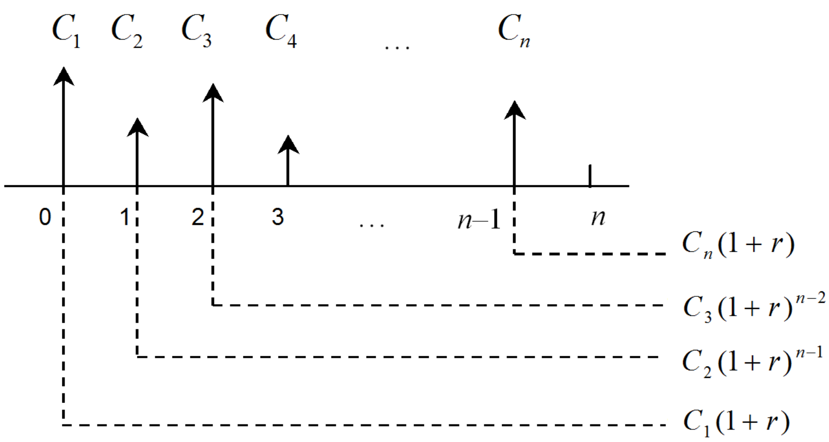


Рис. 2.5 – Логика решения прямой задачи для потока пренумерандо

Наращенный денежный поток имеет вид

$$C_1(1+r)^n, C_2(1+r)^{n-1}, \ldots, C_n(1+r);$$

будущая стоимость исходного денежного потока пренумерандо FV_{pre} может быть рассчитана по формуле

$$PV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} C_k (1 + r)^{n-k+1}. \tag{2.5}$$

Очевидно, что будущая стоимость потока постнумерандо в $(1 + r)$ больше будущей стоимости потока пренумерандо:

$$FV_{pre} = FV_{pst}^{a}(1 + r).$$

Для *обратной задачи* схема дисконтирования представлена на рис.2.6.

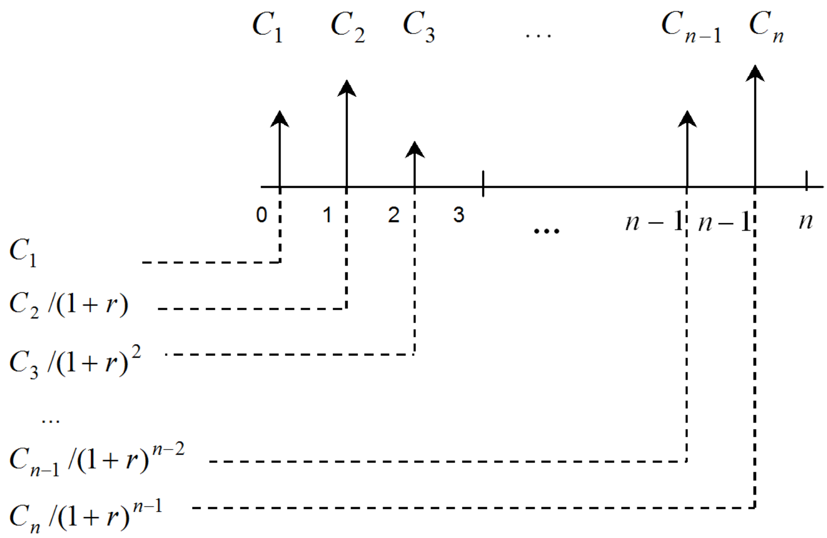


Рис. 2.6 – Логика решения обратной задачи для потока пренумерандо

Приведенный денежный поток для исходного потока пренумерандо имеет вид

$$C_1 \frac{C_2}{1 + r}, \frac{C_3}{(1 + r)^2}, \ldots, \frac{C_n}{(1 + r)^{n-1}}.$$

Следовательно, приведенная стоимость потока пренумерандо PV_{pre} может быть рассчитана по формуле

$$PV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1 + r)^{k-1}} = (1 + r) \sum_{k=1}^{n} C_k FM2(r, k). \tag{2.6}$$

Очевидно, что приведенная стоимость определяется по формуле

$$PV_{pre} = PV_{pst}^{a}(1 + r). \tag{2.7}$$

Пример 2.2

Рассчитать приведенную стоимость аннуитета пренумерандо в тыс. руб. (10, 15, 18, 25), если процентная ставка r равна 10% и период равен одному году.

Таблица 2.3

Год	**Денежный поток, тыс. руб**	**Дисконтный множитель при** $r = 10\%$	**Приведенный поток, тыс. руб.**
1	10	1	10
2	15	0,909091	13,63
3	18	0,826446	14,87
4	25	0,751315	18,78
Итого	68		57,29

Решение:

Расчеты приведем в таблице 2.3.

В примере 2.1 определена стоимость данного аннуитета при условии, что это аннуитет постнумерандо. Тогда можно вычислить стоимость аннуитета пренумерандо по формуле (2.7):

$$PV_{pre} = 44{,}97 \cdot 1{,}12 = 50{,}37 \text{ тыс.руб.}$$

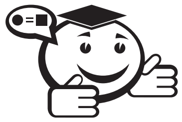
. . . .

2.4 Оценка постоянного аннуитета

2.4.1 Оценка постоянного аннуитета постнумерандо

Прямая задача оценки постоянного аннуитета при заданных величинах регулярного поступления и процентной ставке r предполагает оценку будущей стоимости аннуитета. Прямая задача решается по формуле (2.1), в которой все поступления $C_1, C_2, \ldots, C_n$ равны по величине A. Тогда формула (2.1) примет вид

$$FV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r, n). \tag{2.8}$$



. . . .

Входящий в формулу множитель $FM3(r, n)$ называется коэффициентом наращения ренты (аннуитета) и представляет собой сумму n первых членов геометрической прогрессии, начинающейся с $a = 1$ и имеющей знаменатель $q = 1 + r$.

. . . .

Таким образом,

$$FM3(r, n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что

$$FM3(r,\, n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r} = \frac{FM1(r,\, n) - 1}{FM3(r,\, n) - 1}.$$

Экономический смысл множителя $FM3(r,n)$ заключается в следующем: он показывает, чему будет равна суммарная величина срочного аннуитета в одну денежную единицу (например, в один рубль) к концу срока его действия.

Предполагается, что производится лишь начисление денежных сумм, а их изъятие может быть сделано по окончании срока действия аннуитета. Множитель $FM3(r,\, n)$ часто используется в финансовых вычислениях. Его значения зависят лишь от процентной ставки r и срока n действия аннуитета, причем с увеличением каждого из этих параметров величина $FM3(r,\, n)$ возрастает. Значения множителя для различных сочетаний r и n можно табулировать (см. прил. А). Заметим, что при выводе формулы (2.9) использовалось выражение процентной ставки r в десятичных дробях, однако в прил. А значения r даны в процентах.

Из (2.8) следует, что множитель показывает, во сколько раз наращенная сумма аннуитета больше величины денежного поступления A. В связи с этим множитель $FM3(r,\, n)$ называют также *коэффициентом аккумуляции вкладов*.

Формула (2.8) охватывает и «пограничные» случаи. Так, при одном денежном поступлении $(n = 1)$ $FM3(r,\, n) = 1$ и $FV^a_{pst} = A$. При $r = 0$ (не происходит никаких начислений) из формулы (2.9) получаем $FV^a_{pst} = nA$, т. е. денежные поступления просто суммируются. Естественно, эти результаты следуют и просто из здравого смысла. Иногда для удобства написания формул рассматривают и случай $n = 0$ (денежные поступления отсутствуют) и полагают $FM3(r,\, n) = 0$.

Пример 2.3

Предлагается сдать в аренду участок на три года, выбрав один из двух вариантов оплаты аренды: 1) 10 тыс. руб. в конце каждого года; 2) 35 тыс. руб. в конце трехлетнего периода. Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 10% годовых по вкладам?

Решение:

Первый вариант оплаты как раз и представляет собой аннуитет постнумерандо при $n = 3$ и $A = 10$ тыс. руб. В этом случае имеется возможность ежегодного получения арендного платежа и инвестирования полученных сумм как минимум на условиях 10% годовых (например, вложение в банк). К концу трехлетнего периода накопленная сумма может быть рассчитана в соответствии со схемой, аналогичной схеме, представленной на рис. 2.3:

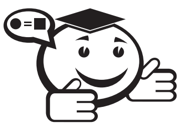
$$FV^a_{pst} = A \cdot FM3(20\%,\, 3) = 10 \cdot 3{,}640 \text{ тыс. руб.}$$

Расчет показывает, что первый вариант более выгоден.

В формуле (2.8) переменная n означает число периодов, а r — ставка за период. Период необязательно должен быть равен одному году. Так, если в качестве периода понимать один квартал, то r является сложной ставкой за один квартал.

Обратная задача оценки постоянного аннуитета. Общая формула для оценки текущей стоимости срочного аннуитета постнумерандо PV^a_{pst} выводится из основной формулы (2.3) и имеет вид

$$PV_{pst} = A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r, n). \tag{2.10}$$



. . . .

Множитель $FM4(r, n)$ называется коэффициентом дисконтирования ренты (аннуитета) и как сумма членов геометрической прогрессии равен величине

$$FM4(r, n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = (1+r)^{-n} FM3(r, n). \tag{2.11}$$

. . . .

Экономический смысл дисконтного множителя $FM4(r, n)$ заключается в следующем: он показывает, чему равна с позиции текущего момента стоимость аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере одной денежной единицы (например, один рубль), продолжающегося n равных периодов с заданной процентной ставкой r. Значения этого множителя также табулированы (см. прил. А), и, как для других множителей, процентная ставка r в таблице дана в процентах.

Легко убедиться, что при одном денежном поступлении $FM4(r, n) = \dfrac{1}{1+r}$ и, следовательно, $PV^a_{pst} = \dfrac{A}{1+r}$. Так как $FM4(0, n)$, то при $r = 0$ справедливо $PV^a_{pst} = nA$. Отсюда следует очевидное и с финансовой точки зрения утверждение: $PV^a_{pst} = FV^a_{pst}$ при $r = 0$. В случае отсутствия денежных поступлений $(n = 0)$ полагают $FM4(r, 0) = 0$.

Дисконтный множитель $FM4(r, n)$ полезно интерпретировать и как величину капитала, который можно поместить в банк под сложную процентную ставку r и обеспечить регулярные выплаты в размере одной денежной единицы в течение n периодов (выплаты производятся в конце каждого периода). Действительно, к концу первого периода величина $FM4(r, n)$ станет равной

$$FM4(r, n) \cdot (1+r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} \cdot (1+r) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^k} = 1 + FM4(r, n-1).$$

В конце первого периода одна денежная единица будет выплачена и останется капитал $FM4(r, n-1)$, который в конце второго периода станет равным

$$FM4(r, n-1) \cdot (1+r) = 1 + FM4(r, n-2).$$

После выплаты денежной единицы останется капитал $FM4(r,\, n-2)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, убеждаемся, что в конце $(n1)$-го периода будем иметь капитал, равный $FM4\big(r,\, n-(n-2)\big)\cdot(1+r) = 1+FM4\big(r,\, n-(n-1)\big) =$ $= FM4(r,\, 1)$. После выплаты одной денежной единицы капитал $FM4(r,\, 1) = \dfrac{1}{1+r}$, очевидно, обеспечит выплату последней денежной единицы в конце n-го периода. Например, поскольку $FM4(15\%,\, 7) = 4{,}1604$, то, поместив 4 руб. 16 коп. под сложную процентную ставку 15%, можно обеспечить выплаты по 1 руб. в конце каждого года в течение 7 лет.

Пример 2.4

Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 16% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 10 тыс. руб., исчерпав счет полностью?

Решение:

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо при $A = 10$ тыс. руб., $n = 6$, $r = 16\%$. По формуле (2.10) находим приведенную стоимость

$$PV = 10\cdot FM4(10\%,\, 6) = 10\cdot 4{,}355 = 49 = 40{,}355 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.5

Стоит ли покупать за 5000 руб. ценную бумагу, приносящую ежегодный доход в 1000 руб. в течение 8 лет, если банковская ставка по вкладам составляет 12% годовых?

Решение:

Доход, получаемый в течение 8 лет, представляет собой аннуитет постнумерандо с $A = 1000$, $n = 8$, $r = 12\%$. Для ответа на вопрос, стоит ли приобретать ценную бумагу за 5000 руб., необходимо найти приведенную стоимость данного аннуитета и сравнить ее с величиной 5000. Используя финансовые таблицы, получаем

$$PV_{pst} = 1000\cdot FM4(12\%,\, 8) = 5335.$$

Таким образом, ценную бумагу стоит приобретать за 5000 руб.

2.4.2 Оценка постоянного аннуитета пренумерандо

Соответствующие расчетные формулы для наращенных сумм FV^{a}_{pre} аннуитета пренумерандо можно легко вывести из формул для вычисления наращенной суммы аннуитета постнумерандо. Поскольку денежные поступления в аннуитете пренумерандо происходят в начале каждого периода, то этот аннуитет отличается от аннуитета постнумерандо количеством периодов начисления процентов.

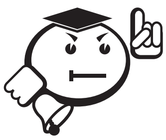
Например, для срочного аннуитета пренумерандо с регулярными денежными поступлениями, равными A, и процентной ставкой r наращенный денежный поток имеет вид

$$\frac{A}{(1+r)^n}, \frac{A}{(1+r)^{n-1}}, \dots, \frac{A}{(1+r)^2}, \frac{A}{(1+r)},$$

следовательно, учитывая выражение (2.8), найдем будущую стоимость постоянного аннуитета пренумерандо:

$$FV_{pre} = A \cdot FM3(r, n) \cdot (1+r) = FV_{pst} \cdot (1+r), \tag{2.12}$$

т. е. наращенная сумма (будущая стоимость) аннуитета пренумерандо больше в $(1+$ $+\,r)$ раз наращенной суммы аннуитета постнумерандо.



Финансовый смысл этого неравенства очевиден: для получателя денежные поступления пренумерандо выгоднее, так как они начинаются на период раньше, чем постнумерандо, т. е. подтверждается временная ценность денег: деньги «сейчас» предпочтительнее, чем «потом».

Для расчетов приведенной стоимости аннуитета пренумерандо запишем приведенный денежный поток:

$$\frac{A}{(1+r)^n}, \frac{A}{(1+r)^{n-1}}, \dots, \frac{A}{(1+r)^2}, \frac{A}{(1+r)}.$$

Поэтому, учитывая (2.3), приведенная стоимость постоянного аннуитета пренумерандо определяется по формуле

$$PV^a_{pre} = PV^a_{pst} \cdot (1+r) = A \cdot FM4(r, n) \cdot (1+r). \tag{2.13}$$

Ясно, что $PV^a_{pre} > PV^a_{pst}$. Из приведенных формул понятно, почему в финансовых таблицах не уточняется, какая схема подразумевается в финансовой сделке постнумерандо или пренумерандо; содержание финансовой таблицы инвариантно к этому фактору. Однако при применении расчетных формул или финансовых таблиц необходимо строго следить за схемой поступления денежных платежей.

Пример 2.6

Ежегодно в начале года в банк делается очередной взнос в размере 100 тыс. руб. Банк начисляет сложные проценты по ставке 20% годовых. Какая сумма будет на счете по истечении трех лет?

Решение:

Поступления в банк являются аннуитетом пренумерандо, будущую стоимость которого и предлагается оценить. В соответствии с формулой (2.12)

$$FV_{pre} = 100 \cdot (1 + 0{,}2) \cdot FM3(20\%,\ 3) = 100 \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}640 = 430{,}68.$$

Через 3 года на счете накопится $430{,}68$ тыс. руб.

Многие практические задачи могут быть решены различными способами в зависимости от того, какой денежный поток выделен аналитиком. Очевидно, что ответ задачи не зависит от способа ее решения.

Пример 2.7

Вам предложено инвестировать 100 тыс.долл. на срок пять лет при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 20 тыс. долл). По истечении пяти лет выплачивается дополнительное вознаграждение в размере 30 тыс. долл. Принимать ли это предложение, если можно «безопасно» депонировать деньги в банк из расчета 12% годовых?

Решение:

Для принятия решения необходимо рассчитать и сравнить две суммы. При депонировании денег в банк к концу пятилетнего периода на счете будет сумма:

$$F1 = P \cdot (1 + r)5 = 100 \cdot (1 + 0{,}12)5 = 176{,}23.$$

В отношении альтернативного варианта, предусматривающего возмещение вложенной суммы частями, предполагается, что ежегодные поступления в размере 20 тыс. руб. можно немедленно пускать в оборот, получая дополнительные доходы. Если нет других альтернатив по эффективному использованию этих сумм, их можно депонировать в банк. Денежный поток в этом случае можно представить следующим образом:

1) срочный аннуитет постнумерандо с $A = 0$, $n = 5$, $r = 20\%$ и единовременное получение суммы в 30 тыс.

$$FV1 = 20 \cdot FM3(12\%,\ 5) + 30 = 20 \cdot 6{,}3528 + 30 = 157{,}056;$$

2) срочный аннуитет пренумерандо с $A = 20$, $n = 4$, $r = 20\%$ и единовременное получение сумм в 20 и 30 тыс. руб.

$$FV2 = 20 \cdot FM3(12\%,\ 4) \cdot 1{,}2 + 30 = 20 \cdot 4{,}7793 \cdot 1{,}12 + 50 = 157{,}056.$$

Оба варианта привели к одинаковому ответу. Таким образом, общая сумма капитала к концу пятилетнего периода будет складываться из доходов от депонирования денег в банке (107.056 тыс. руб.), возврата доли от участия в венчурном проекте за последний год (20 тыс. руб.) и единовременного вознаграждения (30 тыс. руб.). Общая сумма составит, следовательно, 157.056 тыс. руб. Предложение экономически нецелесообразно.

Контрольные вопросы по лекции 2

1) Дайте определение денежного потока.
2) Дайте определения основных характеристик денежного потока.
3) Назовите критерии классификации денежных потоков и виды денежных потоков по каждому из критериев.
4) Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
5) Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.
6) Объясните логику решения прямой задачи оценки денежного потока.
7) Объясните логику решения обратной задачи оценки денежного потока.
8) Верно ли утверждение: наращенная сумма денежного потока пренумерандо больше, чем наращенная сумма потока постнумерандо (при условии что потоки пренумерандо и постнумерандо имеют одинаковые характеристики)?
9) Верно ли утверждение: приведенная стоимость денежного потока пренумерандо больше, чем приведенная стоимость потока постнумерандо (при условии что потоки пренумерандо и постнумерандо имеют одинаковые характеристики)?

Лекция 3

ОСОБЕННОСТИ ПОСТОЯННЫХ АННУИТЕТОВ

3.1 Прямая задача

Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока.

Аннуитет — однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы.

Постоянный аннуитет имеет дополнительное ограничение, его элементы одинаковы по величине.

Ускоренные методы оценки денежных потоков основаны на применении мультиплицирующих и дисконтирующих множителей, которые табулированы в специальных финансовых таблицах. Таблицы инвариантны по отношению к виду потока — постнумерандо или пренумерандо; оценки для потока пренумерандо отличаются от соответствующих оценок для потока постнумерандо на величину множителя $(1 + r)$, где r — ставка в долях единицы.

В финансовой математике разработаны универсальные формулы, позволяющие делать расчеты несовпадениях моментов поступления аннуитетных платежей и начисления процентов.

Оценка будущей стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$FV_{pst} = A \sum_{k=1}^{n} (1 + r)^{n-k} = A \cdot FM3(r, n); \tag{3.1}$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} = A\cdot FM4(r,\, n); \tag{3.2}$$

$$FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Выведем формулы для определения будущей и приведенной стоимости аннуитета с начислением процентов m раз в течение базового периода.

Если r является процентной ставкой (в десятичных дробях) за базовый период, а начисление сложных процентов происходит m раз в течение этого периода, то наращенный денежный поток внутри каждого базового периода, начиная с последнего денежного поступления, имеет вид:

$$A,\, A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m},\, A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m},\, \ldots,\, A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(n-1)m}.$$

Получили геометрическую прогрессию, первый член которой равен A и знаменатель $q = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$. Следовательно, сумма n первых членов этой прогрессии равна:

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1} = A\frac{\dfrac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1}{r/m}}{\dfrac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1}{r/m}} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m},\, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},\, m\right)}. \tag{3.3}$$

Таким образом, если в течение базового периода на денежные поступления m раз начисляются сложные проценты по ставке r, то будущую стоимость такого аннуитета можно найти по формуле (3.3).

Пусть в течение базового периода денежные поступления происходят раз за период и один раз в конце периода начисляются сложные проценты по сложной ставке r. Определим сумму, которая накопится к концу любого периода.

На последнее $(p-e)$ поступление проценты не начисляются, и оно остается равным . На предпоследнее $\big((p-1)-e\big)$ поступление начисляются сложные проценты за $(1/p)$-ю часть периода, и оно будет равно $A(1+r)^{1/p}$.

На $\big((p-2)-e\big)$ поступление начисляются сложные проценты за $(2/p)$-ю часть периода, и оно будет равно $A(1+r)^{2/p}$ и т. д. до первого включительно, которое будет равно $A(1+r)^{(p-1)/p}$. Полученная последовательность величин представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом A, знаменателем $(1+r)^{1/p}$ и числом членов, равным p, поэтому сумма этих величин равна:

$$A\frac{(1+r)^{p\cdot 1/p}-1}{(1+r)^{1/p}-1}=A\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}.$$

Таким образом, можно считать, что имеем аннуитет, в котором денежные поступления равны величине $A\dfrac{r}{(1+r)^{1/p}-1}$ и происходят в конце каждого базового периода начисления процентов. Поэтому:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}FM3(r,\,n).$$

Учитывая явный вид $FM3(r,\,n)$, можно написать

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{FM3(r,\,n)}{FM3(r,\,1/p)}. \qquad (3.4)$$

Заметим, что, поскольку $\dfrac{1}{p}<1$, значения $FM3(r,\,1/p)$ в приложениях не указываются. Однако эти значения нетрудно вычислить с помощью электронных таблиц или калькулятора.

Рассмотрим самую общую ситуацию, когда в течение базового периода денежные поступления происходят p раз и проценты начисляются m раз за период.

Определяем вначале сумму, образовавшуюся в конце любого периода. Последнее $p-e$ поступление в периоде остается равным A. Предпоследнее $(p-1)-e$ поступление после начисления сложных процентов составит $A(1+r/m)^{m/p}$, $(p-2)-e$ поступление — $A(1+r/m)^{2m/p}$ и т. д. до первого, которое станет равным $A(1+r/m)^{(p-1)m/p}$. Находим сумму полученных величин:

$$A\frac{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mp/p}-1}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m/p}-1}=A\frac{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m}-1}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m/p}-1}=A\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,m\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,\dfrac{m}{p}\right)}.$$

Считая, что есть аннуитет с денежными поступлениями, равными полученной сумме, воспользуемся формулой (3.3):

$$FV_{pst}^{a}==A\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,m\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,\dfrac{m}{p}\right)}\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,m\right)}=A\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,\dfrac{m}{p}\right)} \qquad (3.5)$$

Пример 3.1

Вы планируете сдать квартиру в аренду на три года. Арендная плата будет поступать в конце каждого полугодия в сумме 5 тыс. у. е. Поступающие суммы вы будете вносить в банк на депозит под 20% годовых, при этом возможно: 1) ежегодное; 2) полугодовое; 3) ежеквартальное начисление процентов. Оценить, какой из вариантов депозита выгоднее.

Решение:

1) используем формулу (3.4) при $n = 3$, $r = 20$, $p = 2$ получим:

$$FV_1 = 5 \cdot \frac{FM3(20\%,\, 3)}{FM3\left(20\%,\, \dfrac{1}{2}\right)} = 5 \cdot \frac{3{,}640}{0{,}477} = 38{,}155.$$

Так как значения $FM3\left(20\%,\, \dfrac{1}{2}\right)$ в таблице нет, то его вычисляем непосредственно по формуле

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r};$$

2) используем формулу (3.1), считая периодом полугодие. Тогда $n = 3 \cdot 2 = 6$, $r = 20\%/2 = 10$

$$FV_2 = 5 \cdot FM3(10\%,\, 6) = 5 \cdot 7{,}716 = 38{,}58.$$

3) используем формулу (3.5), при $n = 3$, $r = 20\%$, $m = 4$, $p = 2$:

$$FV_3 = 5 \cdot \frac{FM3(5\%,\, 12)}{FM3(5\%,\, 2)} = 5 \cdot \frac{15{,}917}{2{,}05} = 38{,}822.$$

Сравним полученные результаты: $FV1 < FV2 < FV3$, т. е. будущие стоимости увеличиваются с ростом количества начисления процентов на депозите.

3.2 Обратная задача

Выводы формул для нахождения приведенных стоимостей аннуитетов аналогичны выводам формул для нахождения наращенных сумм. Получающиеся при рассуждениях денежные потоки будут представлять собой геометрические прогрессии, знаменателями которых будут соответствующие дисконтные множители. Так, для постоянного аннуитета постнумерандо с начислением сложных процентов m раз за базовый период, приведенный денежный поток имеет вид

$$\frac{A}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m}},\ \frac{A}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{2m}},\ \ldots,\ \frac{A}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{nm}},$$

следовательно, сумма этих величин (приведенная стоимость аннуитета) равна:

$$PV_{pst}^{a}=\frac{A}{(1+r/m)^m}\cdot\frac{\dfrac{1}{\left((1+r/m)^m\right)^n}-1}{\dfrac{1}{(1+r/m)^m}-1}=A\cdot\frac{FM4\left(\dfrac{r}{m},\,mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,m\right)}. \tag{3.6}$$

Для p-срочных аннуитетов с начислением сложных процентов соответственно один раз за базовый период и m раз за базовый период можно получить

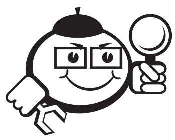
$$PV_{pst}^{a}=A\cdot\frac{FM4\,(r,\,n)}{FM3\left(r,\,\dfrac{1}{p}\right)}; \tag{3.7}$$

$$PV_{pst}^{a}=A\cdot\frac{FM4\left(\dfrac{r}{m},\,mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m},\,\dfrac{m}{p}\right)}. \tag{3.8}$$

Оценки постоянного аннуитета пренумерандо вычисляют по формулам:

$$FV_{pre}=FV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}=FV_{pst}\cdot FM1\left(\frac{r}{m},\,\frac{m}{p}\right); \tag{3.9}$$

$$PV_{pre}=PV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}=PV_{pst}\cdot FM1\left(\frac{r}{m},\,\frac{m}{p}\right). \tag{3.10}$$



Пример 3.2

Страховая компания, заключив на 4 года договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 20 млн руб. в конце каждого полугодия. Эти взносы компания помещает в банк под 12% годовых. Найти приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если проценты начисляются: 1) раз в полгода, 2) ежемесячно.

Решение:

Для решения задачи необходимо использовать формулу (3.8).

1) $n=4$, $r=12\%$, $m=2$, $p=2$;

$$FV_{pst}^{a}=20\cdot\frac{FM4(6\%,\,8)}{FM3(6\%,\,1)}=20\cdot FM4(6\%,\,8)=20\cdot 6{,}2098=124{,}196.$$

Приведенная стоимость договора составит $124{,}196$ млн руб.

2) $n = 4$, $r = 12\%$, $m = 12$, $p = 2$;

$$FV_{pst}^{a} = 20 \cdot \frac{FM4(1\%,\, 48)}{FM3(1\%,\, 6)} = 20 \cdot \frac{37{,}9740}{6{,}1520} = 123{,}453.$$

Приведенная стоимость договора составит 123,453 млн руб.

. . . .

3.3 Отсроченный аннуитет

Рассмотрим обобщение аннуитета, когда первый из потока платежей начинает поступать через h периодов. Такой аннуитет называется *отсроченным*.

Пусть, например, платежи поступают в течение n периодов и сложные проценты по ставке r начисляются один раз в конце базового периода, совпадающего с периодом аннуитета (рис. 3.1).

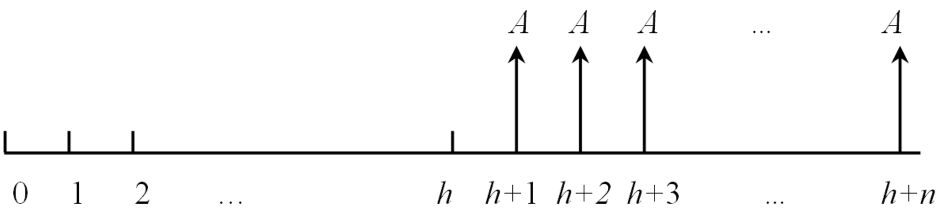


Рис. 3.1 – Отсроченный аннуитет постнумерандо

Стоимость этого аннуитета на начало периода, когда поступает первый платеж, находим по формуле (3.1) и затем, осуществляя учет полученной величины за h периодов, определяем приведенную стоимость отсроченного аннуитета на начальный момент времени:

$$PV_{pst} = A \cdot FM2(r,\, h) \cdot FM4(r,\, n). \tag{3.11}$$

В этой формуле h не обязательно должно быть целым числом.

Если h — целое число, то:

$$PV_{pst} = A \cdot FM4(r,\, n + h) - A \cdot FM4(r,\, h), \tag{3.12}$$

т. е. приведенная стоимость отсроченного аннуитета представляет собой разность приведенных стоимостей аннуитетов.

. . . . **Пример 3.3** . . . .

Банк предлагает ренту постнумерандо на 10 лет с ежеквартальной выплатой 100 долл. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной. По какой цене можно приобрести такую ренту, если выплаты начнут *осуществляться: а) немедленно; б) через 2 года; в) через 3,5 года, а процентная ставка равна 2, 4, 12% годовых?*

Решение:

Определим приведенную стоимость ренты во всех случаях. Считаем, что число периодов $n = 10 \cdot 4 = 40$. Тогда ставка за период будет соответственно 0,5, 1, 3%. В случае а) пользуемся формулой (3.2), определяя $FM4(r, n)$ либо по таблице, либо непосредственно по формуле. В случаях б) и в) полагаем $h = 2 \cdot 4 = 8$ и $A = 3{,}5 \cdot 4 = 14$ и пользуемся (3.7) или (3.8). Например, по (3.7):

$$\frac{FM4(1\%, 40)}{1{,}01^8} = 30{,}3223.$$

Если же воспользоваться формулой (3.8), то:

$$\frac{FM4(1\%, 40)}{1{,}01^8} = FM4(1\%, 48) - FM4(1\%, 8) = 37{,}9740 - 7{,}6517 = 30{,}3223.$$

Результаты расчетов для наглядности представим в виде таблицы:

Таблица 3.1

h	r		
	0,5%	1%	3%
0	36,1722	32,8347	23,1148
8	34,7573	30,3223	18,2470
14	33,7326	28,5650	15,2815

Из таблицы 3.1 видно, что с ростом процентной ставки и срока, после которого начнутся выплаты, приведенная стоимость уменьшается. В частности, если выплаты начнутся через 3,5 года и процентная ставка составит 12% годовых, то ренту можно приобрести за $1528{,}15$ долл. (или, конечно, дешевле).

. . . .

3.4 Определение параметров аннуитета

Для нахождения будущей стоимости FV_{pst} аннуитета самого общего вида необходимо знание значений пяти параметров: A, r, n, m, p. Однако при заключении некоторого контракта его конечная стоимость может быть уже задана, а надо определить, например, величину A разовых денежных поступлений. В этом случае из (3.5) при заданных значениях остальных параметров легко получить:

$$A = FV^a_{pst}\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m}, \dfrac{m}{p}\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, mn\right)}. \tag{3.13}$$

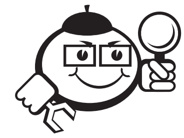
Если же известна приведенная стоимость контракта, тогда

$$A = PV_{pst}\frac{FM3\left(\dfrac{r}{m}, \dfrac{m}{p}\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, mn\right)}. \tag{3.14}$$

Если известны будущая стоимость FV_{pst} аннуитета, величина A разового годового платежа и процентная ставка r, формула для расчета срока аннуитета:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{FV_{pst}}{A}r + 1\right)}{\ln(1 + r)}. \tag{3.15}$$

Аналогичным образом можно получить формулы для определения сроков постоянных аннуитетов других видов. Расчет процентной ставки при известных остальных параметрах аннуитета требует применения интерполяционных формул.



Пример 3.4

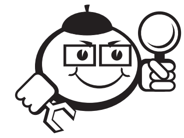
Некоторое предприятие хочет создать фонд в размере 200 млн руб. С этой целью в конце каждого года предприятие предполагает вносить по 50 млн руб. в банк под 18% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда.

Решение:

Используем формулу (3.5) при FV = 200; r = 0,18; A = 50

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{200}{50} \cdot 0{,}18 + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}18)} = \frac{\ln 1{,}72}{\ln(1{,}18)} = 3{,}2766.$$

Для создания фонда потребуется 4 года (ответ округляем до ближайшего целого числа).



Пример 3.5

Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года на счет работника в банке перечислять одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 3000 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10%?

Решение:

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо с $A = 3000$ руб. и длительностью $n = 10$ лет. Полагая $r = 10\%$, по формуле (2.13) найдем приведенную стоимость этого аннуитета:

$$PV = 3000 \cdot FM4(10\%, 10) = 3000 \cdot 6{,}145 = 18435 \text{ руб.}$$

Таким образом, имея на счете 18435 руб., можно ежегодно снимать с него 3000 и через 10 лет исчерпать счет полностью.

Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет $(60 - 40 = 20)$ накопить 18435 руб. Размер вклада можно найти из формулы (2.12), полагая $FV = 18435$:

$$A = 18435/\left[FM3(10\%, 20) \cdot (1 + r)\right] = 18435/[57{,}274 \cdot 1{,}1] = 292{,}61 \text{ руб.}$$

Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 292 руб. 16 коп.

. . . .

3.5 Конверсия и замена аннуитетов

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*) или, наоборот, замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну — *консолидация рент*.

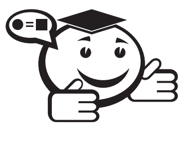
3.5.1 Выкуп ренты

Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа выбирается формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r, n), \tag{3.16}$$

$$PV_{pre} = (1+r) PV_{pst} = A \cdot FM4(r, n). \tag{3.17}$$

3.5.2 Рассрочка платежей



. . . .

Рассрочка платежей — обратная задача к задаче выкупа ренты.

. . . .

Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку. Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты — члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы. Подобные задачи рассматриваются в лабораторной работе №12.

3.5.3 Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется немедленная рента с параметрами A, n, r. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности равенство приведенных стоимостей запишется следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM2(r, n) \cdot PV_2, \tag{3.18}$$

где PV_1 — современная стоимость немедленной ренты; PV_2 — современная стоимость отложенной ренты.

Пример 3.6

Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если сложная процентная ставка равна 4% годовых?

Решение:

1) используем формулы (3.11) и (3.18), считая полугодие базовым периодом, при $t = 6$

$$PV = 100 \cdot FM2(2\%, 6) \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 0{,}888 \cdot 22{,}3965 = 1988{,}809.$$

Ренту можно приобрести за 1988809 руб.;

2) используем формулу (3.18), считая полугодие базовым периодом при $t = 0$

$$PV = 100 \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 22{,}3965 = 2239{,}65.$$

Ренту можно приобрести за 2239650 руб.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1+r)^t, \tag{3.19}$$

где A_1 — платеж исходной ренты; A_2 — неизвестный платеж отложенной ренты; t — время отложения ренты.

Пример 3.7

Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями $A = 2$ млн руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

Решение:

По формуле (3.19) при $A_1 = 2$; $t = 2$; $r = 0{,}2$,

$$A_2 = 2 \cdot (1 + 0{,}2)^2,$$
$$A_2 = 2{,}88.$$

Отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до $2{,}88$ млн руб.

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = \frac{\ln\left\{1 - \left[1 - (1 + r)^{-n1}\right](1 + r)^t\right\}}{\ln(1 + r)}, \tag{3.20}$$

где n_2 — неизвестный срок отложенной ренты; n_1 — срок исходной ренты; t — время отложения ренты.

В общем случае, когда $n_1 \neq n_2$, из равенства $PV_1 = PV_2$ следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM4(n_1,\, r)}{FM4(n_2,\, r)}(1 + r)^t. \tag{3.21}$$

Пример 3.8

Рента с ежегодными платежами в 2 млн руб. и сроком 5 лет откладывается на три года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты при условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

Решение:

В соответствии с (3.20) при $n_1 = 5$; $t = 3$; $r = 0{,}08$; $A = 2$

$$n_2 = \frac{\ln\left\{1 - (1 - 1{,}08^{-5})1{,}08^3\right\}}{\ln 1{,}08} = 6{,}689.$$

Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до $6{,}689$ года, т. е. на $1{,}689$ года.

Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6, тогда приведенная стоимость новой ренты составит

$$PV_2 = 2 \cdot FM4(8\%, 6) \cdot FM2(8\%, 3) = 2 \cdot 4{,}6288 \cdot 0{,}7938 = 7{,}3396.$$

Современная стоимость исходной ренты составит

$$PV_1 = 2 \cdot FM4(8\%, 5) = 2 \cdot 3{,}9927 = 7{,}9854.$$

Разность в сумме $0{,}6458$ млн руб. необходимо уплатить в начале действия контракта.

. . . .

Пример 3.9

Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями $A = 2$ млн руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года с изменением срока ренты до 11 лет. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

Решение:

По формуле (3.19) при $A_1 = 2$; $t = 2$; $r = 0{,}2$; $n_1 = 8$; $n_2 = 11$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{FM4(20\%, 8)}{FM4(20\%, 11)} \cdot 1{,}2^2 = 2 \cdot \frac{3{,}8372}{4{,}3271} \cdot 1{,}2^2 = 2{,}5539.$$

Платеж отложенной ренты равен $2{,}5539$ млн руб.

. . . .

3.5.4 Объединение (консолидация) рент

Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} PV_i, \tag{3.22}$$

где PV — современная стоимость заменяющей ренты; PV_i — современная стоимость i-той заменяемой ренты.

Пример 3.10

Три ренты постнумерандо — немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: $A_1 = 100$; $A_2 = 120$; $A_3 = 300$ *(тыс. руб.);* $n_1 = 6$; $n_2 = 11$; $n_3 = 8$ *лет.*
Необходимо:

1) *определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых;*
2) *определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 1500 тыс. руб.*

Решение:

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу 3.2:

Таблица 3.2

№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	$FM4(r,n)$	PV
1	100	6	3,32551	332,551
2	120	11	4,32706	519,472
3	300	8	3,83716	1151,148
Итого				2002,946

1) Платеж заменяющей ренты находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,\,7)\cdot FM2(20\%,\,3)} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459\cdot 0{,}5787} = 960{,}189.$$

Платеж заменяющей ренты равен 960189 руб.

Если бы заменяющая рента была бы немедленной, ее платеж находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,\,7)} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459} = 555{,}665.$$

2) Определим современную стоимость заменяющей немедленной ренты:

$$PV = 2002{,}946\cdot(1+0{,}2)^3 = 3461{,}091.$$

Неизвестный срок ренты находим из формулы (2.10)

$$n = -\frac{\ln\left(1-\dfrac{PV_{pst}}{A}\cdot r\right)}{\ln(1+r)};$$

при $A = 1500$; $r = 20\%$; $PV = 3461{,}091$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{3461{,}091}{1500} \cdot 0{,}2\right)}{\ln(1{,}2)} = 3{,}395.$$

Установим срок заменяющей ренты 4 года. При этом приведенная стоимость ренты равна

$$PV = 1500 \cdot FM4(20\%, 4) = 1500 \cdot 2{,}5887 = 3883{,}05.$$

Излишек в сумме $3883{,}05 - 3461{,}091 = 421{,}959$ компенсируем в начале финансовой операции.

. . . .

3.6 Аннуитеты с начислением и удержанием процентов в начале базового периода

Выведем формулы для оценки аннуитетов, на платежи которого начисляются проценты по сложной учетной ставке d.

При антисипативном начислении процентов по сложной учетной ставке d наращенный денежный поток (при $m = 1$, $p = 1$), начиная с последнего денежного поступления, примет вид:

$$A, \frac{A}{(1-d)}, \frac{A}{(1-d)^2}, \ldots, \frac{A}{(1-d)^{n-1}}$$

и, следовательно,

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{1-d}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{1-d} - 1} = A \cdot \frac{1-d}{d} \cdot \left[(1-d)^{-n} - 1\right]. \tag{3.23}$$

Отсюда следует, что

$$PV_{pst} = FV_{pst} \cdot (1-d)^n = A \cdot \frac{1-d}{d} \cdot \left[1 - (1-d)^n\right]. \tag{3.24}$$

В случае антисипативного начисления процентов формулы для оценки аннуитета пренумерандо получаются таким же образом, как и приведенные ранее формулы.

$$FV_{pre} = FV_{pst}\frac{1}{1-d}, \tag{3.25}$$

$$PV_{pre} = PV_{pst}\frac{1}{1-d}. \tag{3.26}$$

Пример 3.11

Оценить стоимость трехгодичной ренты с ежемесячной выплатой 300 долл., если также ежемесячно начисляются антисипативные проценты по сложной учетной ставке 6% годовых.

Решение:

По формуле (3.23) при $A = 300$, $n = 0{,}12 \cdot 3 = 0{,}36$, $d = \dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}005$

$$FV_{pst} = 300 \cdot \frac{1 - 0{,}005}{0{,}005}\left[(1 - 0{,}005)^{-36} - 1\right] = 11806{,}15.$$

Будущая стоимость ренты равна $11806{,}15$ долл.

По формуле (3.24) при $A = 300$, $n = 0{,}12 \cdot 3 = 0{,}36$, $d = \dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}005$

$$PV_{pst} = 300 \cdot \frac{1 - 0{,}005}{0{,}005}\left[1 - (1 - 0{,}005)^{-36}\right] = 9856{,}878.$$

Приведенная стоимость ренты равна $9856{,}878$ долл.

Контрольные вопросы по лекции 3

1) Как используются финансовые таблицы для оценки постоянных аннуитетов?
2) Чему равен коэффициент наращения аннуитета?
3) Чему равен коэффициент дисконтирования аннуитета?
4) Какая связь существует между будущей и приведенной стоимостями аннуитета?
5) Как изменяется коэффициент наращения аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
6) Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета при изменении срока действия аннуитета и изменении процентной ставки?
7) Какая связь существует между оценками аннуитета пренумерандо и постнумерандо?
8) Приведите пример отсроченного аннуитета.
9) Что такое выкуп ренты? Каковы методы решения этой задачи?

10) Что собой представляет рассрочка платежей с точки зрения финансовой математики? Каковы методы решения этой задачи?
11) В чем заключается сущность консолидации рент?
12) Как заменить немедленную ренту на отсроченную?
13) Объясните логику решения прямой задачи ренты постнумерандо, на платежи которой начисляются проценты по сложной учетной ставке.
14) Объясните логику решения обратной задачи ренты постнумерандо, на платежи которой начисляются проценты по сложной учетной ставке.
15) Необходимо накопить 1 млн рублей путем ежегодных вложений одинаковой суммы в банк. Банк А начисляет проценты по сложной ссудной ставке 10% годовых, а банк В — по сложной учетной ставке 10% годовых. В каком банке срок накопления будет меньше?

Лекция 4

ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ

4.1 Переменные ренты

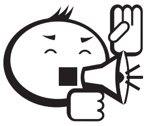
4.1.1 Оценка переменного аннуитета, платежи которого образуют арифметическую прогрессию

На практике возможны ситуации, когда величина платежа меняется со временем в сторону увеличения или уменьшения. Например, при заключении договоров аренды в условиях инфляции может предусматриваться периодическое увеличение платежа, компенсирующее негативное влияние изменения цен. Величина амортизационных отчислений может меняться в связи с изменением количества и стоимости основных фондов.

Аннуитет называется *переменным*, если его члены различны по величине. Для оценки переменного аннуитета используют общие формулы оценки денежного потока. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с некоторыми законами (в частности, образуют арифметическую или геометрическую прогрессию), то общие формулы для определения будущей или приведенной стоимости аннуитета можно упростить.

Пусть платежи аннуитета образуют арифметическую прогрессию, т. е. изменяются на постоянную абсолютную величину z и представляют собой последовательность:

$$A,\ A+z,\ A+2z,\ A+3z,\ \dots,\ A+(n-3)z,\ A+(n-2)z,\ A+(n-1)z.$$



Если z является положительной величиной, то платежи аннуитета возрастают. Если z является отрицательной величиной, то величина z и величина n (количество периодов аннуитета) связаны между собой соотношением: $A - z(n-1) > 0$, $\dfrac{A}{z} + 1 > n$.

Выведем формулу для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию с первым членом A и разностью z.

Если число периодов аннуитета равно n и на каждый платеж один раз в конце базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, то наращенный поток, записанный в порядке поступления платежей, имеет вид:

$$A(1+r)^{n-1},\ (A+z)(1+r)^{n-2},\ (A+2z)(1+r)^{n-3},\ (A+3z)(1+r)^{n-4},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \left\{A+(n-3)z\right\}(1+r)^2,\ \left\{A+(n-2)z\right\}(1+r),\ A+(n-1)z.$$

Группируем отдельно слагаемые, содержащие z, получим два ряда, один из которых содержит только слагаемые с A:

$$A(1+r)^{n-1},\ A(1+r)^{n-2},\ A(1+r)^{n-3},\ \ldots,\ A(1+r)^2, A(1+r), A.$$

Другой содержит только слагаемые с z:

$$z(1+r)^{n-2},\ 2z(1+r)^{n-3},\ 3z(1+r)^{n-4},\ \ldots,\ (n-3)z(1+r)^2,\ (n-2)z(1+r),\ (n-1)z.$$

Сумма наращенного денежного потока равна

$$\begin{aligned} FV = A\cdot FM3(r,n) + z(1+r)^{n-2} + 2z(1+r)^{n-3} + 3z(1+r)^{n-4} + \\ + \cdots + (n-3)z(1+r)^2 + (n-2)z(1+r) + (n-1)z. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Умножим обе части этого равенства на величину $(1+r)$, получим:

$$\begin{aligned} FV(1+r) = A\cdot FM3(r,n)(1+r) + z(1+r)^{n-1} + 2z(1+r)^{n-2} + 3z(1+r)^{n-3} + \\ + \cdots + (n-3)z(1+r)^3 + (n-2)z(1+r)^2 + (n-1)z(1+r). \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Вычтем равенство (4.1) из равенства (4.2), получим:

$$FV + FV\cdot r - FV = A\cdot FM3(r,\ n) + A\cdot FM3(r,\ n)\cdot r - A\cdot FM3(r,\ n) +$$
$$+z(1+r)^{n-1} + 2z(1+r)^{n-2} + 3z(1+r)^{n-3} + \cdots + (n-3)z(1+r)^3 + (n-2)z(1+r)^2 +$$
$$+(n-1)z(1+r) - z(1+r)^{n-2} - 2z(1+r)^{n-3} - 3z(1+r)^{n-4} - \cdots -$$
$$-(n-3)z(1+r)^2 - (n-2)z(1+r) - (n-1)z.$$
$$FV\cdot r = A\cdot FM3(r,n)\cdot r + z(1+r)^{n-1} + z(1+r)^{n-2} + z(1+r)^{n-3} + \cdots +$$
$$+z(1+r)^2 + z(1+r) + z - nz.$$
$$FV\cdot r = A\cdot FM3(r,\ n)\cdot r + z\cdot FM3(r,\ n) - nz,$$

$$FV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) FM3(r,\ n) - \frac{zn}{r}. \qquad (4.3)$$

Формулу для вычисления приведенной стоимости аннуитета постнумерандо получим из соотношений:

$$PV_{pst} = \frac{FV_{pst}}{(1+r)^n} \quad \text{и} \quad FM4(r,\,n) = \frac{FM3(r,\,n)}{(1+r)^n},$$

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) FM4(r,\,n) - \frac{zn}{r(1+r)^n}. \tag{4.4}$$

Формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета пренумерандо получаются из соотношений: $FV_{pre} = (1+r)FV_{pst}$, $PV_{pre} = (1+r)PV_{pst}$, поэтому для будущей и приведенной стоимости аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию с первым членом A и разностью z, запишем:

$$FV_{pre} = (1+r)\cdot\left(A + \frac{z}{r}\right) FM3(r,\,n) - (1+r)\frac{zn}{r}, \tag{4.5}$$

$$PV_{pre} = (1+r)\cdot\left(A + \frac{z}{r}\right) FM4(r,n) - \frac{zn}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{4.6}$$

Пусть платежи аннуитета образуют геометрическую прогрессии с первым членом A и знаменателем x. То есть все платежи изменяются на одну и ту же относительную величину x и составляют ряд:

$$A,\, A\cdot x,\, A\cdot x^2,\, A\cdot x^3,\, \ldots,\, A\cdot x^{n-2},\, A\cdot x^{n-1}.$$

Пример 4.1

Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 8 лет: а) в конце года; б) в начале года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 4 тыс. долл., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,5 тыс. долл. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 20% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,5 тыс. долл.?

Решение:

а) Согласно условию имеем переменный аннуитет постнумерандо с постоянным абсолютным изменением его членов и, следовательно, для оценки аннуитета воспользуемся формулами вычисления стоимости аннуитета с изменяющейся величиной платежа. По условиям соглашения $A = 4$ тыс. долл., $n = 8$, $r = 0{,}2$, и если суммы возрастают, то $z = 0{,}5$ тыс. долл.

Поэтому по формулам (4.3) и (4.4):

$$FV_{pst} = \left(4 + \frac{0{,}5}{0{,}2}\right) FM3(20\%,\, 8) - \frac{0{,}5\cdot 8}{0{,}2} = 87{,}244 \text{ тыс. долл.}$$

$$PV_{pst} = \left(4 + \frac{0{,}5}{0{,}2}\right) FM4(20\%,\, 8) - \frac{0{,}5\cdot 8}{0{,}2(1+0{,}2)^8} = 20{,}290 \text{ тыс. долл.}$$

Если суммы будут уменьшаться, то $z = -0{,}5$ и, следовательно, по формулам (4.3) и (4.4):

$$FV_{pst} = \left(4 - \frac{0{,}5}{0{,}2}\right) FM3(20\%,\ 8) + \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}2} = 44{,}749 \text{ тыс. долл.}$$

$$PV_{pst} = \left(4 - \frac{0{,}5}{0{,}2}\right) FM4(20\%,\ 8) + \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}2(1 + 0{,}2)^8} = 10{,}408 \text{ тыс. долл.}$$

б) Оценки аннуитета пренумерандо нетрудно получить, используя соотношения: $FV_{pre} = FV_{pst}(1 + r)$, $PV_{pre} = PV_{pst}(1 + r)$, поэтому:

- если $z = 0{,}5$, тогда

$$Fvpre = 87{,}244 \cdot 1{,}2 = 104693 \text{ долл.};$$

$$Pvpre = 20{,}29 \cdot 1{,}2 = 24348 \text{ долл};$$

- если $z = -0{,}5$, тогда

$$Fvpre = 44{,}749 \cdot 1{,}2 = 53699 \text{ долл};$$

$$Pvpre = 10{,}408 \cdot 1{,}2 = 12490 \text{ долл.}$$

. . . .

4.1.2 Оценка переменного аннуитета, платежи которого образуют геометрическую прогрессию

Выведем формулу для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x.

Если число периодов аннуитета равно n и на каждый платеж один раз в конце базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, то наращенный поток, записанный в порядке поступления платежей, имеет вид:

$$A(1+r)^{n-1},\ A\cdot x(1+r)^{n-2},\ A\cdot x^2(1+r)^{n-3},\ A\cdot x^3(1+r)^{n-4},\ \ldots,\ A\cdot x^{n-2}(1+r),\ A\cdot x^{n-1}.$$

То есть наращенный денежный поток представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b = A(1 + r)^{n-1}$ и знаменателем $q = \dfrac{x}{(1 + r)}$.

Сумма n первых членов этой прогрессии равна величине $b \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, поэтому

$$FV_{pst} = A(1 + r)^{n-1} \cdot \frac{\dfrac{x^n}{(1 + r)^n} - 1}{\dfrac{x}{(1 + r)} - 1},$$

и после преобразований получаем оценку переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x:

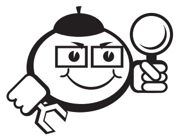
$$FV_{pst} = A \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}, \tag{4.7}$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{4.8}$$

Оценка переменного аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x:

$$FV_{pre} = A \cdot (1+r) \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}, \tag{4.9}$$

$$PV_{pre} = \frac{A}{(1+r)^{n-1}} \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{4.10}$$



Пример 4.2

По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 7 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 4 тыс. долл., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 10%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 28% годовых.

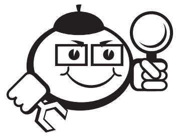
Решение:

Поскольку ежегодно платежи увеличиваются в 1,1 раза (на 10%), то денежный поток представляет собой переменный аннуитет постнумерандо с постоянным относительным изменением его членов. Поэтому для оценки аннуитета воспользуемся формулами (4.7) и (4.8). Полагая $A = 4$ тыс. долл., $n = 7$, $r = 0{,}28$ и $x = 1{,}1$, получим:

$$FV_{pst} = 4 \cdot \frac{1{,}1^7 - (1+0{,}28)^7}{1{,}1 - (1+0{,}28)} = 81{,}795 \text{ тыс. долл.}$$

$$PV_{pst} = \frac{4}{(1+0{,}28)^7} \cdot \frac{1{,}1^7 - (1+0{,}28)^7}{1{,}1 - (1+0{,}28)} = 14{,}530 \text{ тыс. долл.}$$

Если платежи аннуитета не образуют прогрессию, при решении задач также можно использовать финансовые таблицы. Для этого денежный поток необходимо представлять в виде суммы или разности стандартных аннуитетов.



Пример 4.3

Участок сдан в аренду на десять лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые шесть лет —

по 10 тыс. долл., в оставшиеся четыре года — по 11 тыс. долл. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

Решение:

Решать данную задачу можно различными способами в зависимости от того, какие аннуитеты будут выделены аналитиком. Общая схема денежного потока представлена на рис. 4.1

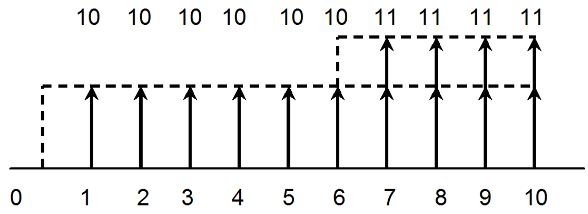


Рис. 4.1 – Аннуитет с изменяющейся величиной платежа

Естественно, приведенная стоимость денежного потока должна оцениваться с позиции начала первого временного интервала. Рассмотрим лишь два варианта решения из нескольких возможных. Все эти варианты основываются на свойстве аддитивности рассмотренных алгоритмов в отношении величины аннуитетного платежа.

1) Исходный поток можно представить себе как сумму двух аннуитетов: первый имеет $A = 10$ и продолжается десять лет; второй имеет $A = 1$ и продолжается четыре года. По формуле $PV = A \cdot FM4(r, n)$ можно оценить приведенную стоимость каждого аннуитета. Однако второй аннуитет в этом случае будет оценен с позиции начала седьмого года, поэтому полученную сумму необходимо дисконтировать с помощью формулы $PV = A \cdot FM2(r, h) \cdot FM4(r, n)$ к началу первого года. В этом случае оценки двух аннуитетов будут приведены к одному моменту времени, а их сумма даст оценку приведенной стоимости исходного денежного потока:

$$PV_{pst} = 10 \cdot FM4(15\%, 10) + 1 \cdot FM4(15\%, 4) \cdot FM2(15\%, 6) =$$
$$= 10 \cdot 5{,}019 + 1 \cdot 2{,}855 \cdot 0{,}432 = 51{,}42 \text{ тыс. долл.}$$

2) Исходный поток можно представить себе как разность двух аннуитетов: первый имеет $A = 11$ и продолжается десять лет; второй имеет $A = 1$ и, начавшись в первом году, заканчивается в шестом. В этом случае расчет выглядит так:

$$PV_{pst} = 11 \cdot FM4(15\%, 10) - 1 \cdot FM4(15\%, 6) = 11 \cdot 5{,}019 - 1 \cdot 3{,}784 = 51{,}42 \text{ тыс. долл.}$$

. . . .

4.2 Непрерывные ренты

Если в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины, то аннуитет считают непрерывным.

Оценки будущей и приведенной стоимости непрерывного можно вывести из формул для p-срочного аннуитета, переходя в них к пределу при $p \to \infty$.

Общая постановка задачи: в течение каждого базового периода непрерывно поступают денежные средства, составляя в общем итоге за период величину A. Например, выручка в магазин поступает непрерывным образом и составляет за квартал величину A.

Пусть в конце каждого периода p-срочного аннуитета суммарная величина денежных поступлений равна A, тогда каждое поступление будет равно $\frac{A}{p}$ и формула нахождения будущей стоимости аннуитета с поступлениями p раз за базовый период и начислением сложных процентов m раз внутри базового периода запишется в виде

$$FV_{pst} = \frac{A}{p} \cdot \frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)},$$

$$FV_{pst} = A \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right) \cdot \lim \frac{r/m}{p \cdot \left[(1+r/m)^{m/p} - 1\right]},$$

$$FV_{pst} = A \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right) \cdot \frac{r}{m} \cdot \lim \frac{1}{p \cdot \left[(1+r/m)^{m/p} - 1\right]}.$$

Рассмотрим величину $p \cdot \left[(1+r/m)^{m/p} - 1\right]$.

Запишем ее в виде

$$\frac{m\left[(1+r/m)^{m/p} - 1\right]}{m/p}.$$

Необходимо найти предел этой величины при $p \to \infty$.

Получаем предел вида 0 разделить на 0. Эту неопределенность раскрываем по правилу Лопиталя. По правилу Лопиталя, предел вида 0 разделить на 0 считается так: берется производная от числителя и знаменателя и затем считается предел.

То есть

$$\lim \frac{(1+r/m)^{m/p} - 1}{m/p} = \lim \frac{(1+r/m)^{m1/p} \ln(1+r/m)(-m/p^2)}{-m/p^2} =$$
$$= \ln(1+r/m)(1+r/m)^{m/p} = \ln(1+r/m)$$

Тогда

$$FV_{pst} = \frac{A \cdot r}{m^2 \cdot \ln(1+r/m)} \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right). \tag{4.11}$$

Приведенная стоимость этого непрерывного аннуитета составит:

$$PV_{pst} = \frac{A \cdot r}{m^2 \cdot \ln(1+r/m)} \cdot FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right). \tag{4.12}$$

Таким образом, переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным приводит к увеличению приведенной и будущей стоимости аннуитета в $\dfrac{r}{m^2 \ln(1 + r/m)}$ раз.

Пример 4.4

В течение 4 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 10 млн руб. Определите сумму, накопленную к концу четвертого года при использовании процентной ставки 15% годовых, если начисление сложных процентов осуществляется ежегодно.

Решение:

Полагаем $n = 4$, $m = 14$, $r = 15\%$. Поскольку платежи поступают достаточно часто, будем считать, что они поступают непрерывным образом. Тогда можно воспользоваться формулой (4.11) для определения наращенной суммы непрерывного аннуитета при млн руб.

$$FV = \frac{10 \cdot 0{,}15}{\ln(1 + 0{,}15)} \cdot 4{,}9934 = 53{,}592.$$

Сравним этот результат со значением, полученным по формуле p-срочного аннуитета, предполагая, что в году 360 дней и дан аннуитет постнумерандо. Так как $p = 360$, $A = 10/360$, получим:

$$FV_{pst} = \frac{10}{360} \cdot \frac{4{,}9934}{\dfrac{(1 + 0{,}15)^{\frac{1}{360}} - 1}{0{,}15}} = 53{,}581.$$

Видим, что полученные величины отличаются незначительно.

Пример 4.5

Финансовая компания в течение пяти лет в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 20 млн руб. ежегодно. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 30% за год и выплаты происходят постоянно и равномерно?

Решение:

Используем формулу (4.12) для определения приведенной стоимости непрерывного аннуитета, при $A = 20$ млн руб., $n = 5$, $m = 1$, $r = 30\%$:

$$PV = \frac{20 \cdot 30}{\ln(1 + 0{,}3)} \cdot FM4(30\%,\, 5) = 55{,}7 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, имея 55,7 млн руб., компания способна выполнить свои обязательства перед вкладчиками.

. . . .

Формулы (4.11) и (4.12) получены в условиях непрерывного поступления платежей и дискретного начисления процентов. Рассмотрим случай непрерывных платежей в условиях непрерывного начисления процентов.

Оценки непрерывного аннуитета в случае начисления непрерывных процентов получаем из формул (4.11) и (4.12), используя формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=e^{\delta n},$$

$$mn\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)=\delta n\ln e,$$

$$m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)=\delta.$$

Преобразуем формулу (4.11):

$$FV_{pst}=\frac{A\cdot r}{m^2\cdot\ln(1+r/m)}\cdot FM3\left(\frac{r}{m},\,mn\right)=\frac{A\cdot\left[(1+r/m)^{mn}-1\right]}{m\ln(1+r/m)}.$$

Используя выражения для эквивалентности ставок, полученные выше, запишем формулу для оценки будущей стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов:

$$FV=A\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \tag{4.13}$$

Для оценки приведенной стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов преобразуем формулу (4.12):

$$PV=\frac{A\cdot r}{m^2\ln(1+r/m)}\cdot FM4\left(\frac{r}{m},\,mn\right)=\frac{A\cdot r}{m^2\ln(1+r/m)}\cdot\frac{\left[1-(1+r/m)^{-mn}\right]\cdot m}{r}=$$
$$=\frac{A\left[1-(1+r/m)^{-mn}\right]}{m\ln(1+r/m)}$$

Используя выражения для эквивалентности ставок, полученные выше, запишем формулу для оценки приведенной стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов:

$$PV=A\cdot\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{4.14}$$

Пример 4.6

Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение трех лет, получая ежегодно выручку в размере 300 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться равномерно. Оцените ожидаемые денежные поступления, если применяется непрерывная ставка 20% за год.

Решение:

Поскольку в условии говорится о равномерном распределении продаж в течение года, то логично предполагать, что интенсивность потока выручки будет в какой-то мере постоянной величиной, равной 300 млн руб. в год. Считая, что денежные поступления происходят непрерывно, воспользуемся формулами для определения соответственно будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета (4.13) и (4.14). Полагая $A = 300$ млн руб., $n = 3$, $\delta = 0{,}2$, получим:

$$FV = 300 \cdot \frac{e^{0{,}2\cdot 3} - 1}{0{,}2} = 1233{,}18;$$

$$PV = 300 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}2\cdot 3}}{0{,}2} = 676{,}78.$$

Будущая стоимость денежных поступлений равна $1233{,}18$ млн руб.

Приведенная стоимость денежных поступлений равна млн $676{,}78$ руб.

Для определения срока аннуитета при прочих известных параметрах используют формулы:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{A} \cdot \delta + 1\right)}{\delta}, \tag{4.15}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{PV}{A} \cdot \delta\right)}{\delta}. \tag{4.16}$$

Пример 4.7

За какой срок наращенная сумма ренты вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов, если взносы поступают непрерывно и равномерно в течение года, на взносы начисляются проценты с силой роста 8%?

Решение:

По формуле (4.13) при $\frac{FV}{A} = 5$; $\delta = 8\%$

$$n = \frac{\ln(5 \cdot 0{,}08 + 1)}{0{,}08} = 4{,}21 \text{ года.}$$

Наращенная сумма ренты вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов через 5 лет.

4.3 Бессрочный аннуитет

Рассмотрим понятие бессрочного аннуитета и выведем некоторые формулы.

Аннуитет называется бессрочным (perpetuity), если денежные поступления продолжаются достаточно длительное время.

Математически это означает, что $n \to \infty$. Характерным примером бессрочного аннуитета являются консоли — выпускаемые правительствами некоторых стран облигации, по которым производят регулярные купонные выплаты, но которые не имеют фиксированного срока. В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, рассчитанные на 50 и более лет. Бессрочный аннуитет также называют и *вечной рентой*.

В этом случае прямая задача (определение будущей стоимости аннуитета) не имеет смысла.

Обратная задача (определение приведенной стоимости аннуитета) имеет решение. Рассмотрим вечный аннуитет постнумерандо с одним денежным поступлением A за период и начислением процентов по ставке r один раз в конце периода. Поток платежей такого аннуитета, приведенных к нулевому моменту времени, представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b = \frac{A}{1+r}$ и знаменателем $q = \frac{1}{1+r}$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна величине $\frac{b}{1-q}$, поэтому для бессрочного аннуитета постнумерандо, при $n \to \infty$, получим:

$$PV_{pst} = \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A}{r} = A \cdot FM4(r, \infty), \qquad (4.17)$$

где $FM4(r, \infty) = 1/r$.

Формула (4.17) показывает, что поток даже с неограниченным числом платежей имеет все же конечную приведенную стоимость. С финансовой точки зрения это понятно, поскольку деньги, которые поступят через много лет, сейчас мало что стоят (а при высокой инфляции практически ничего не стоят). Эта же ситуация проявляется и при сравнении коэффициентов дисконтирования бессрочного аннуитета и аннуитетов с большим сроком. Рассмотрим значения $FM4(r, n)$ при $r = 10\%$ (табл. 4.1).

Из таблицы видно, что при сроке аннуитета, превышающем 50 лет, коэффициенты дисконтирования аннуитета незначительно отличаются друг от друга.

Таблица 4.1 – Коэффициенты дисконтирования аннуитета

Срок (n) аннуитета	40	50	60	70	90	∞
$FM4(10\%, n)$	9,7791	9,9148	9,9672	9,9873	9,9981	10

С ростом процентной ставки r величина срока, начиная с которого коэффициенты $FM4(r, n)$ перестают сильно отличаться друг от друга, уменьшается (например, при $r = 15\%$ такой срок равен 40 годам). Таким образом, при больших сроках аннуитета и большом уровне процентной ставки для определения приведенной стоимости срочного аннуитета можно воспользоваться формулой для определения приведенной стоимости бессрочного аннуитета, при этом полученный приблизительный результат будет не слишком отличаться от точного значения.

Формула (4.17) используется для оценки целесообразности приобретения бессрочного аннуитета, если известен размер денежного поступления за период. В качестве r обычно принимается гарантированная процентная ставка (например, процент, предлагаемый государственным банком).

Пример 4.8

Определить текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежегодным поступлением 4,2 тыс. руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 14% годовых.

Решение:

По формуле (4.17) находим:

$$PV_{pst} = \frac{4{,}2}{0{,}14} = 30 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, если аннуитет предлагается по цене, не превышающей 30 тыс. руб., он представляет собой выгодную инвестицию.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, для бессрочного аннуитета постнумерандо с денежными поступлениями p раз за базовый период и начислением сложных процентов m раз за базовый период получим:

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4\left(\frac{r}{m}, \infty\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)} = \frac{A}{\frac{r}{m} \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)} = \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{4.18}$$

При $p = m = 1$ формула (4.18) совпадает с формулой (4.17).

Для определения приведенной стоимости бессрочного аннуитета с денежными поступлениями p раз за период и непрерывным начислением процентов по ставке δ перейдем к пределу при $n \to \infty$ в формуле (4.18). В результате получим:

$$PV_{pst} = \frac{A}{e^{\delta/p} - 1}. \tag{4.19}$$

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета пренумерандо в общем виде определяется с помощью приведенной стоимости бессрочного аннуитета постнумерандо.

В частности, при $p = 1$, $m = 1$ из (4.18) следует:

$$PV_{pst} = PV_{pst} \cdot (1 + r) = A \cdot FM4(r, \infty) \cdot (1 + r) = PV_{pst} + PV_{pst} \cdot r = PV_{pst} + A. \tag{4.20}$$

Т. е. получили очевидное финансовое утверждение: приведенная стоимость бессрочного аннуитета пренумерандо отличается от приведенной стоимости аннуитета постнумерандо на величину первого платежа.

Запишем формулы нахождения приведенной стоимости для бессрочного переменного аннуитета:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}, \ (z \geqslant 0), \tag{4.21}$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1 + r - q)}, \ (1 + r > q). \tag{4.22}$$

Аналогичным образом выводятся формулы для оценки бессрочного аннуитета при антисипативном начислении процентов.

$$PV_{pst} = A\frac{1 - d}{d}, \tag{4.23}$$

$$PV_{pre} = \frac{A}{d}. \tag{4.24}$$

Пример 4.9

Определить приведенную стоимость бессрочного аннуитета с платежами в 30 тыс. руб., выплачиваемыми в начале каждого квартала, если применяется сложная учетная ставка 16% годовых с ежеквартальным начислением процентов?

Решение:

По формуле (4.24) при $A = 30$; $d = 0{,}16/4 = 0{,}04$

$$PV_{pre} = \frac{30}{0{,}04} = 750 \text{ тыс. руб.}$$

Приведенная стоимость аннуитета равна 750 тыс. руб.

. . . .

С помощью формулы (4.24) можно определить истинную стоимость обыкновенной акции в том случае, когда выплачиваются одинаковые дивиденды (равные A) в течение достаточно долгого времени. При этом предположении темп роста дивидендов равен нулю, и соответствующая модель называется *моделью нулевого роста (zero-growth model)*. Такая ситуация свойственна привилегированным акциям высокого качества, выплаты дивидендов по которым одинаковы, регулярны и не зависят от величины прибыли на одну акцию, а время обращения привилегированных акций не ограничено.

Пример 4.10

Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 6 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 45 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 12% годовых?

Решение:

Поскольку из (4.17) следует, что истинная стоимость акции составляет $\frac{60}{0{,}12} =$ $= 50$ тыс. руб., то акции можно приобретать.

. . . .

4.4 Аннуитеты с периодом большим, чем базовый

В предыдущих разделах были рассмотрены аннуитеты, периоды которых не превосходили базовые периоды начисления процентов. В частности, если базовый период был равен году, то период аннуитета не превышал одного года. С целью представления различных случаев рассмотрим и не так часто встречающуюся ситуацию, связанную со срочным аннуитетом, когда его период больше года. Например, постоянный десятилетний аннуитет постнумерандо с денежными поступлениями каждые два года имеет вид, представленный на рис. 4.2.

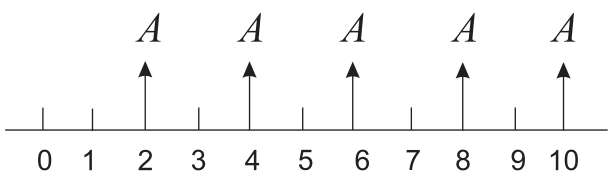


Рис. 4.2 – Аннуитет постнумерандо

Рассмотрим несколько более общий случай, когда базовый период начисления процентов не обязательно равен году и меньше периода аннуитета. Пусть есть постоянный аннуитет постнумерандо, денежные поступления которого (каждое в размере A) происходят в течение n периодов, являющихся базовыми для начисления процентов по ставке r. Причем денежные поступления осуществляются каждые u ($u > 1$) периодов, а начисление сложных процентов — в конце каждого периода.

Предположим для простоты, что n делится нацело на u, тогда число поступлений денежных сумм равно $\frac{n}{u}$. Оценим будущую стоимость аннуитета.

Последнее $\left(\frac{n}{u} - e\right)$ поступление остается равным A. На предпоследнее $\left(\left(\frac{n}{u} - 1\right) - e\right)$ поступление начисляются сложные проценты за u периодов, и оно будет равно $A(1 + r)^u$. На $\left(\frac{n}{u} - 2\right)$-е поступление начисляются сложные проценты за $2u$ периодов, и оно будет равно $A(1 + r)^{2u}$ и т. д. до первого включительно, которое станет равным $A(1 + r)^{\left(\frac{n}{u} - 1\right)u} = A(1 + r)^{n-u}$.

Полученные величины образуют геометрическую прогрессию с первым членом A, знаменателем $(1 + r)^u$ и числом членов, равным $\frac{n}{u}$. Поэтому и сумма этих величин равна:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{(1 + r)^{u \cdot \frac{n}{u}} - 1}{(1 + r)^u - 1} = A\frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r)^u - 1} = A\frac{FM3(r, n)}{FM3(r, u)}. \qquad (4.25)$$

Пример 4.11

Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 10 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будет поступать 1,4 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие суммы будут ежегодно начисляться декурсивные сложные проценты по ставке 12% годовых.

Решение:

В соответствии с контрактом денежные суммы образуют аннуитет длительностью 10 лет и с периодом 2 года. Таким образом, период аннуитета больше базового периода начисления процентов, равного году. Полагая $A = 1{,}4$, $n = 10$, $n = 24$, $r = 12\%$, по формуле (4.25) получим:

$$FV_{pst} = 1{,}4 \cdot \frac{FM3(12\%, 10)}{FM3(12\%, 2)} = 1{,}4 \cdot \frac{17{,}548}{2{,}12} = 11{,}589 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть теперь r также является процентной ставкой за базовый период, но начисление сложных процентов происходит m раз в течение этого периода (не пишем r^m, поскольку период может отличаться от года).

Рассмотрим, как непосредственно воспользоваться формулой (4.25), считая, что есть новый базовый период, равный m-й части исходного базового периода, и есть новая процентная ставка $\frac{r}{m}$. Тогда всего новых периодов будет уже mn, а денежные поступления осуществляются каждые mn этих периодов. Таким образом, заменяя в (4.25) r на $\frac{r}{m}$, n — на mn и u — на mu, получим:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}. \tag{4.26}$$

При начислении непрерывных процентов с силой роста δ будущая стоимость аннуитета составит:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta u} - 1}. \tag{4.27}$$

Пример 4.12

Фирма решила образовать фонд для обеспечения будущих расходов. С этой целью в конце каждых трех лет фирма перечисляет в банк 8 тыс. руб. Какая сумма будет на счете фирмы через 15 лет, если на поступающие суммы будут начисляться: а) ежеквартально сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 16%; б) непрерывные проценты с силой роста 16%?

Решение:

Денежные поступления образуют постоянный аннуитет с $A = 8$ тыс. руб., сроком $n = 15$ лет и периодом $u = 3$ года;

1) в этом случае $r = 16\%$, $m = 4$ и по (4.25):

$$FV_{pst} = 8 \cdot \frac{FM3(4\%, 60)}{FM3(4\%, 12)} = 8 \cdot \frac{237{,}99069}{15{,}025805} = 126{,}710 \text{ тыс. руб.};$$

2) полагая $\delta = 0{,}16$, по формуле (4.27) находим:

$$FV_{pst} = 8 \cdot \frac{e^{0{,}16 \cdot 15} - 1}{e^{0{,}16 \cdot 3} - 1} = 130{,}155 \text{ тыс. руб.}$$

Если начисление сложных процентов происходит m раз за базовый период, то для определения приведенной стоимости аннуитета можно использовать формулу

$$PV_{pst} = FV_{pst}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}.$$

Поэтому

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn} = A \cdot \frac{FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}, \qquad (4.28)$$

откуда, в частности, при $m = 1$ (однократном начислении процентов) следует, что

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4(r, n)}{FM3(r, u)}. \qquad (4.29)$$

В случае начисления непрерывных процентов

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta u} - 1} \cdot e^{-\delta n} = A \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta u} - 1}. \qquad (4.30)$$

Пример 4.13

Определить сумму, которую необходимо поместить на счет в банке, чтобы в течение 8 лет в конце каждого двухлетнего периода иметь возможность снимать со счета 3 тыс. руб., причем к концу срока полностью выбрать все деньги со счета, если на находящиеся на счете денежные суммы будут начисляться: а) ежегодно сложные проценты по ставке 12%; б) каждые полгода сложные проценты по ставке 12%; в) непрерывные проценты с силой роста 12%.

Решение:

Во всех случаях надо определить приведенную стоимость постоянного аннуитета с $A = 3$ тыс. руб., периодом $u = 2$ года и сроком $n = 8$ лет:

а) так как $r = 12\%$, то, применяя (4.29), в этой ситуации получим

$$PV_{pst} = 3 \cdot \frac{FM4(12\%, 8)}{FM3(12\%, 2)} = 3 \cdot \frac{4{,}9676398}{2{,}12} = 7{,}030 \text{ тыс. руб.;}$$

б) в этом случае $m = 2$, $r = 12\%$, поэтому из (4.29) следует, что

$$PV_{pst} = 3 \cdot \frac{FM4(6\%, 16)}{FM3(6\%, 4)} = 3 \cdot \frac{10{,}105895}{4{,}37616} = 6{,}930 \text{ тыс. руб.;}$$

в) поскольку в этом случае начисляются непрерывные проценты с силой роста $\delta = 0{,}12$, то по (4.30)

$$PV_{pst} = 3 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}12 \cdot 8}}{e^{0{,}12 \cdot 2} - 1} 6{,}825 \text{ тыс. руб.}$$

Формулы для оценок аннуитета пренумерандо получаются из соответствующих формул для оценок аннуитета постнумерандо с использованием того факта, как уже ранее упоминалось, что денежные поступления пренумерандо начинаются на период (аннуитета) раньше, чем постнумерандо.

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu}, \tag{4.31}$$

$$PV_{pre} = PV_{pst}^{a}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu}. \tag{4.32}$$

При непрерывном начислении процентов

$$FV_{pre} = FV_{pst}e^{\delta u}, \tag{4.33}$$

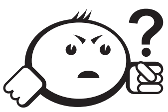
$$PV_{pre} = FV_{pst}e^{\delta u}. \tag{4.34}$$

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с начислением сложных процентов m раз за базовый период:

$$PV_{pst} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu}-1} = \frac{A}{\frac{r}{m}\cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}. \tag{4.35}$$

Если проценты начисляются непрерывно

$$PV_{pst} = \frac{A}{e^{\delta u}-1}. \tag{4.36}$$



Контрольные вопросы по лекции 4

1) Какой аннуитет называется переменным?
2) Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую зависимость образуют платежи такого аннуитета?
3) Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую зависимость образуют платежи такого аннуитета?
4) Приведите пример аннуитета, при оценке которого можно воспользоваться формулами оценки постоянного аннуитета.
5) Какой аннуитет называется непрерывным?
6) В каких случаях p-срочный аннуитет можно практически считать непрерывным? Приведите пример.

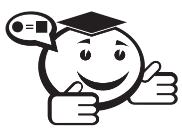
7) Каким образом получают формулы для оценки непрерывного аннуитета?
8) Имеет ли смысл выделять непрерывные аннуитеты постнумерандо и пренумерандо?
9) Какой аннуитет называется бессрочным?
10) Какая задача для бессрочного аннуитета не имеет решения?
11) В каких случаях срочный аннуитет можно практически считать вечным? Приведите пример.
12) Каким образом получают формулы для оценки бессрочного аннуитета?
13) Имеет ли смысл выделять бессрочные аннуитеты постнумерандо и пренумерандо?
14) Что означает термин «истинная стоимость акции»?

Лекция 5

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

5.1 Метод депозитной книжки

Можно дать иную интерпретацию расчета текущей стоимости аннуитета с помощью метода «депозитной книжки», логика которого такова. Сумма, положенная на депозит, приносит доход в виде процентов; при снятии с депозита некоторой суммы базовая величина, с которой начисляются проценты, уменьшается. Как раз эта ситуация и имеет место в случае с аннуитетом.



Текущая стоимость аннуитета — это величина депозита с общей суммой причитающихся процентов, ежегодно уменьшающаяся на равные суммы.

Эта сумма годового платежа включает в себя начисленные за очередной период проценты, а также некоторую часть основной суммы долга. Таким образом, погашение исходного долга осуществляется постепенно в течение всего срока действия аннуитета. Структура годового платежа постоянно меняется — в начальные периоды в нем преобладают начисленные за очередной период проценты; с течением времени доля процентных платежей постоянно уменьшается и повышается доля погашаемой части основного долга. Логику и счетные процедуры метода рассмотрим на простейшем примере.

Пример 5.1

В банке получена ссуда на пять лет в сумме 20 000 долл. под 13% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа.

Решение:

Если обозначить за A величину искомого годового платежа, то данный финансовый контракт можно представить в виде следующей схемы (рис.5.1).

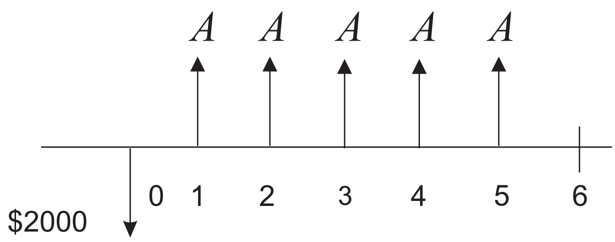


Рис. 5.1 – Схема к методу депозитной книжки

Для лучшего понимания логики метода депозитной книжки целесообразно рассуждать с позиции кредитора. Для банка данный контракт представляет собой инвестицию в размере 20 000 долл., т. е. отток денежных средств, что и показано на схеме. В дальнейшем в течение пяти лет банк будет ежегодно получать в конце года сумму A, причем каждый годовой платеж будет включать проценты за истекший год и часть основной суммы долга. Так, поскольку в течение первого года заемщик пользовался ссудой в размере 20 000 долл., то платеж, который будет сделан в конце этого года, состоит из двух частей: процентов за год в сумме 2600 долл. (13% от 20 000 долл.) и погашаемой части долга в сумме $(A - 2600)$ долл. В следующем году расчет будет повторен при условии, что размер кредита, которым пользуется заемщик, составит уже меньшую сумму по сравнению с первым годом, а именно $(20000 - A + 2600)$ долл. Отсюда видно, что с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает. Из схемы на рис. 5.1 видно, что мы имеем дело с аннуитетом постнумерандо, о котором известны его текущая стоимость, процентная ставка и продолжительность действия. Поэтому для нахождения величины годового платежа A можно воспользоваться формулой:

$$20000 = FM4(13\%,\, 5) \cdot A = 3{,}517 \cdot A \quad \text{т. е. } A = 5687 \text{ долл.}$$

Динамика платежей показана в табл. 5.1. Отметим, что данные в ходе вычислений округлялись, поэтому величина процентов в последней строке найдена балансовым методом.

Данная таблица позволяет ответить на целый ряд дополнительных вопросов, представляющих определенный интерес для прогнозирования денежных потоков. В частности, можно рассчитать общую сумму процентных платежей, величину

Таблица 5.1

Год	**Остаток ссуды на начало года**	**Сумма годового платежа**	**В том числе**		**Остаток ссуды на конец года**
			проценты за год	**погашенная часть долга**	
1	20000	5687	2600	3087	16913
2	16913	5687	2199	3488	13425
3	13425	5687	1745	3942	9483
4	9483	5687	1233	4454	5029
5	5029	5687	658	5029	0

процентного платежа в k-м периоде, долю кредита, погашенную в первые k лет, и т. д.

. . . .

Рассуждения, аналогичные используемым при решении примера, можно провести и в общем виде, что позволит дать более строго интерпретацию приведенной стоимости аннуитета с помощью метода депозитной книжки и попутно выявить полезные с финансовой точки зрения закономерности, позволяющие ответить на многие вопросы, связанные с денежными потоками

Итак, пусть получена ссуда в сумме S на n лет под процентную ставку r, причем сложные проценты начисляются на непогашенный остаток. Определим величину годового платежа при возврате долга равными суммами в конце каждого года.

Обозначим через A годовой платеж. В конце первого года часть его, равная Sr, идет на уплату процентов. Оставшаяся же часть $A - Sr$ — на уплату части долга. Таким образом, к концу первого года величина непогашенного остатка составит: $S - (A - Sr) = S(1 + r) - A$.

В конце второго года на уплату процентов пойдет уже величина $(S(1+r)-A)r$, а на уплату долга — $A - \big(S(1 + r) - A\big)r == (A - Sr)(1 + r)$. Следовательно, к концу второго года долг будет равен:

$$S(1+r)-A-(A-Sr)(1+r) = S(1+r)^2 - A\cdot\frac{(1+r)^2-1}{r} = S(1+r)^2 - A\cdot FM3(r,\,2).$$

В конце третьего года проценты и уплата долга соответственно составят:

$$\big(S(1+r)^2 - A\cdot FM3(r,\,2)\big)r,$$
$$A - \big(S(1+r)^2 - A\cdot FM3(r,\,2)\big)r = (A-Sr)(1+r)^2$$

следовательно, остаток долга станет равным:

$$S(1+r)^2 - A\cdot FM3(r,\,2) - (A-Sr)(1+r)^2 = S(1+r)^3 - A\cdot FM3(r,\,3).$$

Вообще можно доказать, что в конце k-го года ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) проценты, уплата долга и непогашенный остаток соответственно составят:

$$\left(S(1+r)^{k-1} - A \cdot FM3(r,\, k-1)\right) r, \tag{5.1}$$

$$(A - Sr)(1+r)^{k-1}, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} S(1+r)^{k-1} - A \cdot FM3(r,\, k-1) - (A - Sr)(1+r)^{k-1} = \\ = S(1+r)^{k} - A \cdot FM3(r,\, k). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Поскольку долг должен быть выплачен через n лет, то справедливо равенство $S(1+r)^n - A \cdot FM3(r,\, n) = 0$, откуда

$$S = A \cdot \frac{FM3(r,\, n)}{(1+r)^n} = A \cdot FM3(r,\, n).$$

Следовательно, S является приведенной стоимостью постоянного аннуитета постнумерандо с членом, равным A, т. е.

$$S = PV_{pst}.$$

Используя формулы (5.1)–(5.3), можно различным образом характеризовать денежные потоки. Например, найти сумму процентных платежей за m лет ($m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$):

$$\sum_{k=1}^{m} \left(S(1+r)^{k-1} - A \cdot FM3(r,\, k-1)\right) r = mA - (A - Sr)FM3(r,\, m),$$

откуда, в частности, следует, что доля кредита, погашенная в первые m лет, составит $(A - Sr)FM3(r,\, m)$.

Проверим некоторые вычисления приведенного примера. Поскольку для него $PV_{pst} = 20000$, $n = 5$, $A = 5687$, то из (5.2) можно найти величину процентного платежа в четвертом периоде:

$$(20000 \cdot (1 + 0{,}13)^3 5687 \cdot FM3(13\%,\, 3)) \cdot 0{,}13 = 1233,$$

что совпадает с соответствующим значением в табл. 5.1.

5.2 Анализ доступности ресурсов к потреблению в условиях рынка

Одной из типовых задач, решаемых на практике с помощью методов дисконтирования, является прогнозный анализ фондов, доступных к потреблению, в условиях, когда аналитик (физическое или юридическое лицо) оценивает свои возможные доходы, а также целесообразность проведения операций на рынке ссудных капиталов, подразумевающих предоставление или, наоборот, получение кредитов. Общая постановка базовой задачи такова.

Анализ проводится в условиях свободного равновесного рынка, предполагающего существование возможности размещения временно свободных средств путем предоставления кредита или депонирования средств в банке, а также получения финансовых ресурсов в требуемых объемах; для простоты предполагается, что ставки процента при получении кредита и при размещении временно свободных средств одинаковы. Исходными данными для анализа являются прогнозные оценки:

а) планируемых к получению доходов в разрезе анализируемых периодов (чаще всего — лет);

б) процентные ставки по кредитам, которые в требуемом объеме могут быть предоставлены или получены.

Требуется проанализировать альтернативы поведения в отношении объема ресурсов, доступных к потреблению. Рассмотрим постановку базовой задачи на примере.

Предположим, что инвестор планирует получить доход в текущем году в размере 12 тыс. руб., в следующем году — 15 тыс. руб. Прогнозируемая ставка процента по ссудам в течение этого периода — 15%. Какова же возможная политика инвестора в отношении потребления полученного дохода? Возможны несколько вариантов действия.

1) Инвестор потребляет доход в том периоде, в котором он был генерирован, т. е. общая сумма потребленных средств равна 27 тыс. руб. Это самая простая политика, не требующая какого-то дополнительного анализа.

2) Инвестор отказывается от потребления (использования) средств в течение первого года или, по крайней мере, максимально сокращает это потребление, предпочитая разместить эти средства на год в банке с тем, чтобы, получив в дальнейшем депонированную сумму и соответствующий процент, увеличить сумму средств, доступных к потреблению во втором году. Таким образом, если инвестор полностью отказывается от потребления в первом году, он сможет разместить в банке 12 тыс. руб., А через год получить $12 \cdot 1{,}15 = 13{,}8$ (тыс. руб.). Общая сумма средств, доступных к потреблению за два года, составит в этом случае 28,8 тыс. руб. Это политика экономного инвестора, предпочитающего сначала пожить в стесненных, а затем в более комфортных условиях.

3) Инвестор может пойти диаметрально противоположным путем, максимально увеличив потребление первого года за счет сокращения потребления второго года. Реализовать этот подход можно путем получения в первом году ссуды в банке с условием возврата ее вместе с начисленными процентами в следующем году, при этом инвестор исходит из условия, что максимальная сумма средств, которой он будет располагать во втором году и которую можно использовать для расчетов с банком по полученной ссуде, равна 15 тыс. руб. Очевидно, что максимально возможная ссуда для инвестора равна 13,04 тыс. руб. $(15/1{,}15 \approx 13{,}04)$. Эту сумму кредита, а также начисленные проценты в размере 1,96 тыс. руб. инвестор сможет погасить за счет планируемого к получению во втором году дохода в размере 15 тыс. руб. Это — политика инвестора, предпочитающего получить удовольствие от жизни как можно быстрее, хотя бы и с некоторыми затратами.

Рассмотренные варианты можно представить графически (рис. 5.2). Линия AB, пересекающая оси в точках $(0;\, 28{,}8)$ и $(25{,}04;\, 0)$, как раз и описывает возможные варианты поведения. Из приведенного графика видно, что, варьируя суммой получаемого или предоставляемого кредита, инвестор может выбрать различные стратегии поведения, каждой из которых соответствует некоторая точка на графике.

Допустим, что инвестор решил несколько урезать свои потребности первого года, снизив их на 2 тыс. руб. от максимально возможного. В этом случае потребление первого года составит 10 тыс. руб.; потребление второго года составит 17,3 тыс. руб. $(15+2\cdot1{,}15 = 17{,}3)$. Общая сумма потребления равна 27,3 тыс. руб. Этому варианту соответствует точка M на линии AB с координатами $(10;\ 17{,}3)$.

Допустим, что инвестору по некоторым причинам понадобилось увеличить на 2 тыс. руб. максимально возможное потребление первого года. В этом случае понадобится банковская ссуда, по которой придется рассчитаться из доходов второго года. Итак, потребление первого года равно 14 тыс. руб.; потребление второго года равно 12,7 тыс. руб. $(152\cdot1{,}15 = 12{,}7)$. Общая сумма потребления составит 26,7 млн руб. Этому варианту также соответствует некоторая точка L на линии AB.

Точка O на графике является центральной и соответствует варианту, когда в пределах каждого периода суммы потребления и дохода совпадают. Отклонение от точки O означает появление операций по получению или предоставлению кредита: движение по прямой от O в сторону A означает предоставление кредита; движение от O в сторону B означает получение кредита.

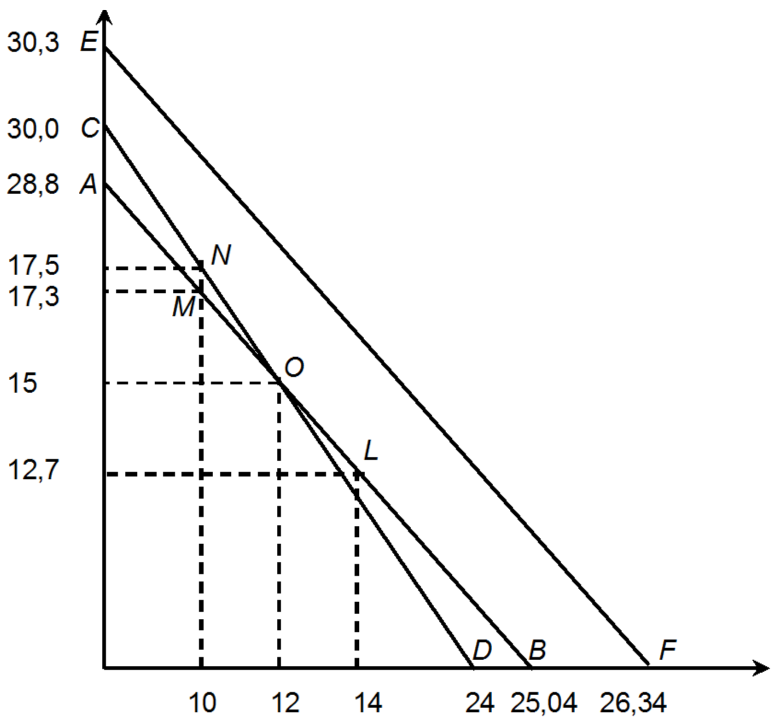


Рис. 5.2 – Графики линии доступности ресурсов к потреблению

Нетрудно видеть, что представленная зависимость описывается формулой

$$y = MC - (1+r)x, \tag{5.4}$$

где y — сумма к потреблению во втором году; x — сумма к потреблению в первом году; MC — максимально доступная к потреблению во втором году сумма; r — процентная ставка (в десятичных дробях).

Очевидно, $MC = P_1(1+r) + P_2$, где P_1, P_2 — доходы инвестора соответственно в первом и втором годах.

Ясно, что с ростом r угол наклона меняется, при этом наибольшая сумма средств, доступных к потреблению, растет, а политика в отношении потребления может изменяться в сторону максимально возможного откладывания момента потребления — при достижении некоторого значения процентной ставки инвестор, предпочитавший ранее по возможности ускорять потребление, может диаметрально изменить свою политику. Так, при ставке процента, равной 25%, объему потребления первого года в размере 10 тыс. руб. соответствует точка N на новом графике CD, показывающая, что при выборе такой политики объем средств, доступных к потреблению во втором году, увеличится с 17,3 до 17,5 тыс. руб.

Линия возможностей потребления зависит и от других факторов. В частности, появление новых инвестиционных возможностей может существенно изменить положение прямой.

Допустим, что в условиях предыдущей ситуации с планируемыми годовыми доходами в 12 и 15 тыс. руб. появилась возможность принять участие в краткосрочном инвестиционном проекте. Для этого необходимо в конце текущего года вложить 10 тыс. руб., при этом гарантированный доход через год составит 30%. Рассмотрим возможные варианты действия в этом случае.

Поскольку проект несомненно выгоден, речь идет о том, как распределить по годам доступные к потреблению ресурсы. Если инвестор хочет максимизировать общую сумму средств к потреблению, он полностью откажется от потребления в текущем году, инвестировав получаемый им доход, т. е. его оптимальная политика будет такова: участие в проекте (10 тыс. руб.) и депонирование в банке оставшейся суммы (2 тыс. руб.) под 15% годовых. Максимально доступная к потреблению сумма средств за два года составит: 13 тыс. руб. от участия в инвестиционном проекте $(10 \cdot 1{,}3)$; 2,3 тыс. руб. от депонирования средств в банке $(2 \cdot 1{,}15)$; 15 тыс. руб. — текущий доход второго года; итого — 30,3 тыс. руб.

Если инвестор хочет максимизировать объем потребления текущего года, то он откажется от потребления в следующем году, а его оптимальная политика будет такова: 12 тыс. руб. — текущий доход первого года; инвестирование 10 тыс. руб. в предлагаемый проект; 11,3 тыс. руб. — получение ссуды в банке под доход от участия в проекте $(13 : 1{,}15)$; 13,04 тыс. руб. — получение ссуды под текущий доход следующего года $(15 : 1{,}15)$; итого — 26,34 тыс. руб.

Таким образом, линия возможностей потребления сдвигается вправо (линия EF); меняется и угол ее наклона, поскольку рентабельность инвестиционного проекта отличается от базовой процентной ставки.

Рассмотренная ситуация, когда линия возможностей потребления представлена в виде прямой, в определенном смысле условна и используется лишь для иллюстрации общей идеи оптимизации финансовой политики в условиях рынка ссудных капиталов. В реальной жизни более распространенной является ситуация, когда процентные ставки при получении и размещении кредитов не совпадают, именно: ставка при получении кредита будет несколько выше ставки при размещении временно свободных средств путем предоставления их в долг. В этом случае прямая возможностей потребления при движении по ней от точки E начнет искривляться и трансформируется в выпуклую вверх кривую.

Существуют и другие факторы, влияющие на вид линии возможностей потребления: налоги, текущие расходы по реализации того или иного инвестиционного проекта, цена новой информации о возможных проектах и тенденциях на рынке капиталов, неравное положение различных кредиторов и инвесторов, неодинаковая доступность финансовых ресурсов для различных категорий инвесторов и др.

Контрольные вопросы по лекции 5

1) Объясните логику метода депозитной книжки.
2) Объясните логику решения задач использования свободных денежных ресурсов.

РАЗДЕЛ II

Методические указания к практическим занятиям

Практическое занятие 1

ПРОСТЫЕ СТАВКИ

Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временную ценность, смысл которой может быть выражен следующим утверждением: одна денежная единица, имеющаяся в распоряжении инвестора в данный момент времени, более предпочтительна, чем та же самая денежная единица, но ожидаемая к получению в некотором будущем. Эффективность любой финансовой операции, предполагающей наращение исходной суммы P до ожидаемой в будущем к получению суммы F $(F > P)$, может быть охарактеризована ставкой.

Простая ссудная ставка рассчитывается отношением наращения $F - P)$ к исходной (базовой) величине P. Учетная ставка рассчитывается отношением наращения $(F - P)$ к ожидаемой в будущем к получению, или наращенной, величине F.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

В финансовых вычислениях базовым периодом является год, поэтому обычно говорят о годовой ставке. Вместе с тем достаточно широко распространены краткосрочные операции продолжительностью до года. В этом случае за основу берется дневная ставка, причем в зависимости от алгоритмов расчета дневной ставки и продолжительности финансовой операции результаты наращения будут различными. Используются три варианта расчета:

а) точный процент и точное число дней финансовой операции — обозначение 365/365;

б) обыкновенный процент и точное число дней финансовой операции — обозначение 365/360;

в) обыкновенный процент и приблизительное число дней финансовой операции — обозначение 360/360.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (так называемой «приведенной стоимости»), которая через заданное время при наращении по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через заданное время.

Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю на дату его погашения. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени ссудной и учетной ставок.

Любая финансовая операция предусматривает участие, как минимум, двух сторон: кредитора (инвестора) и заемщика (получателя финансовых ресурсов); это обстоятельство является существенным для вынесения суждения об эффективности некоторой операции. Так, экономическая интерпретация ставки вообще и ее значения в частности зависит от того, с чьих позиций — кредитора или заемщика она дается. Для кредитора ставка характеризует его относительный доход; для заемщика — его относительные расходы. Поэтому кредитор всегда заинтересован в высокой ставке или в повышении ставки; интересы заемщика — прямо противоположны.

Математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское — для банка.

При применении наращения по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается, при наращении капитала по простой ссудной величина начисляемых процентов не изменяется. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Основные формулы раздела

$$F = P(1 + n \cdot r) \tag{1.1}$$

$$P = \frac{F}{(1 + n \cdot r)} \tag{1.2}$$

$$F = P \cdot (1 + r \cdot t/T) \tag{1.3}$$

$$F = P\left(1 + \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot r_i\right) \tag{1.4}$$

$$r = \frac{F - P}{P \cdot n}, \quad r = \frac{F - P}{P \cdot t} \cdot T \tag{1.5}$$

$$n = \frac{F - P}{P \cdot r} \tag{1.6}$$

$$P = F \cdot (1 - n \cdot d) \tag{1.7}$$

$$F = \frac{P}{(1 - n \cdot d)} \tag{1.8}$$

$$P = F \cdot (1 - d \cdot t/T) \tag{1.9}$$

$$F = \frac{P}{(1 - d \cdot t/T)} \tag{1.10}$$

$$D = F - P = F \cdot n \cdot d \tag{1.11}$$

$$d = \frac{F - p}{F \cdot n}, \quad d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \tag{1.12}$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \tag{1.13}$$

$$F = P \Big/ \left(1 - \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot d_i\right) \tag{1.14}$$

где P — вложенная сумма; F — наращенная сумма; n — количество периодов продолжительности финансовой операции; r — простая ссудная ставка; d — простая учетная ставка; t — продолжительность финансовой операции в днях; T — количество дней в году; D — дисконт.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Доказать следующее утверждение: банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Решение

Пор формуле (1.8) запишем, что $P = F \cdot (1 - nd)$. Очевидно, величина P должна быть не меньше нуля, поэтому:

$$1 - nd > 0;$$
$$nd < 1;$$
$$d < 1/n;$$
$$n < 1/d.$$

Задача 2

Доказать следующее утверждение: математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское — для банка.

Решение

По формулам (1.2) и (1.7) соответственно запишем:

$$P_{\text{ссудная}} = \frac{F}{(1 + nr)};$$
$$P_{\text{учетная}} = F \cdot (1 - nd)\,.$$

Необходимо доказать, что $P_{\text{ссудная}}$ всегда больше, чем $P_{\text{учетная}}$ при $r = d$.

Найдем разность $P_{\text{ссудная}}$ минус $P_{\text{учетная}}$ и покажем, что эта разность всегда положительна.

$$P_{\text{ссудная}} - P_{\text{учетная}} = \frac{F}{1+nr} - F\cdot(1-nr) = \frac{F - F - Fnr + Fnr + F(nr)^2}{1+nr} = \frac{F(nr)^2}{1+nr}$$

Очевидно, что величина $\dfrac{F(nr)^2}{1+nr}$ всегда положительна для любых $r > 0$ и $n > 0$.

Рассчитаем величину дисконтированной суммы P для ссудной и учетной ставок 10% годовых при $F = 100$. Расчеты занесем в таблицу 1.1:

Таблица 1.1

Ставка (в долях единицы)	**Продолжительность финансовой операции, лет**					
	0,5	1	2	3	4	5
$r = 0{,}1$	95,24	90,91	83,33	76,92	71,43	66,67
$d = 0{,}1$	95,00	90,00	80,00	70,00	60,00	50,00

Задача 3

Доказать следующее утверждение: при наращении по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается, при наращении капитала по простой процентной ставке капитал ежегодно увеличивается на одну и ту же величину.

Решение

Рассмотрим начисление процентов по учетным ставкам. По формуле (1.7) запишем: $F = P/(1-nd)$.

Величина начисленных процентов равна: $F - P = P/(1-nd) - P = Pnd/(1-nd)$.

За первый год капитал возрастет на величину $Pd/(1-d)$ $(n = 1)$. За два года капитал возрастет на величину $2Pd/(1-2d)$ $(n = 2)$, поэтому приращение капитала за год составит

$$I_2 = \frac{2Pd}{(1-2d)} - \frac{Pd}{(1-d)} = \frac{Pd}{(1-d)\cdot(1-2d)}.$$

За три года капитал возрастет на величину $3Pd/(1-3d)$ $(n = 3)$, поэтому приращение капитала за год составит

$$I_3 = \frac{3Pd}{(1-3d)} - \frac{2Pd}{(1-2d)} = \frac{Pd}{(1-2d)\cdot(1-3d)} \text{ и т. д.}$$

За год с номером k капитал возрастет на величину $kPd/(1-kd)$ $(n = k)$.

За год с номером $k+1$капитал возрастет на величину $(k+1)Pd/\left[1-(k+1)d\right]$ $(n = k+1)$, поэтому приращение капитала с года с номером k до года с номером $k+1$ составит

$$I_{k+1} = \frac{Pd}{\left[1-(k+1)\right](1-kd)}.$$

Таким образом,

$$I_{k+1} = I_k \cdot \frac{1-(k-1)\,d}{\left[1-(k+1)\,d\right]}$$

Так как $\dfrac{1-(k-1)\,d}{\left[1-(k+1)\,d\right]} > 0$, поэтому $I_{k+1} > I_k$ и начисленные проценты с каждым годом увеличиваются.

Рассмотрим начисление процентов по процентным ставкам.

По формуле (1.1) запишем: $F = P \cdot (1+nr)$.

Величина начисленных процентов равна $F - P = P + Pnr - P = Pnr$.

Приращение капитала за год с номером $k-1$ до года с номером k всегда равно одной и той же величине Pr.

Задача 4

Доказать следующее утверждение: простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Решение

По формулам (1.1) и (1.7) соответственно запишем:

$$F_{\text{ссудная}} = P \cdot (1+nr)\,;$$

$$F_{\text{учетная}} = \frac{P}{(1-nd)}.$$

Необходимо доказать, что $F_{\text{учетная}}$ больше, чем $F_{\text{ссудная}}$ при любых $r = d$.

Найдем разность между $F_{\text{учетная}}$ и $F_{\text{ссудная}}$:

$$F_{\text{учетная}} - F_{\text{ссудная}} = \frac{P}{1-nr} - P \cdot (1+nr) = \frac{Pn^2r^2}{1-nr}.$$

Величина $\dfrac{Pn^2r^2}{1-nr} > 0$ при любых n и r (при условии, что $1 - nr > 0$), поэтому простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Рассчитаем величину наращенной суммы по ссудной и учетной ставках при $P = 100$, $r = d = 10\%$ годовых. Расчеты занесем в таблицу 1.2:

Таблица 1.2

Ставка (в долях единицы)	**Продолжительность финансовой операции, лет**					
	0,5	1	2	3	4	5
$r = 0{,}1$	105	110	120	130	140	150
$d = 0{,}1$	105,26	111,11	125,00	142,86	166,67	200,00

Задача 5

Вы поместили в банк вклад 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 6% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова величина начисленных процентов?

Решение

По формуле (1.1) при $P = 100$ тыс. руб., $n = 3$, $r = 0{,}06$ получаем:

$$F = 100 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}06) = 118 \text{ тыс. руб.}$$

Через три года на счете накопится 118 тыс. рублей.

Величина начисленных за три года процентов составит:

$$118 - 100 = 18 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 6

На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 8% годовых, чтобы она увеличилась в 2 раза?

Решение

Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 2:

$$1 + n \cdot 0{,}08 = 2,$$

поэтому $n = 1/0{,}08 = 12{,}5$ лет. Сумма, размещенная в банке под 8% годовых, в два раза увеличится через $12{,}5$ лет.

Задача 7

Ссуда в сумме 3000 долл. предоставлена 16 января с погашением через 9 месяцев под 25% годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов:

а) обыкновенный процент с точным числом дней;

б) обыкновенный процент с приближенным числом дней;

в) точный процент с точным числом дней.

Решение

а) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 289 - 16 = 273$ дня), получим:

$$F = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}25 \cdot \frac{273}{360}\right) = 3568{,}75 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна $3568{,}75$ долл.

б) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 9 \cdot 30 = 270$дня), получим:

$$F = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}25 \cdot \frac{270}{360}\right) = 3562{,}5 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна $3562{,}5$ долл.

в) По формуле (1.3), используя точный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 289 - 16 = 273$ дня), получим:

$$F = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}25 \cdot \frac{273}{365}\right) = 3560{,}96 \text{ долл.}$$

Сумма к погашению равна $3560{,}96$ долл.

Задача 8

В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определить доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки при использовании банком простых обыкновенных процентов.

Решение

По формуле (1.5) при $F = 8{,}9$ тыс. руб., $P = 8$ тыс. руб., $t = 120$ дней, $T = 360$ дней, получим:

$$r = 360 \cdot \frac{(8{,}9 - 8)}{(8 \cdot 120)} = 0{,}3375 = 33{,}75\%.$$

Доходность банка составит $33{,}75$ процентов годовых.

Задача 9

Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 8% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 1%. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

Решение

Применяя формулу (1.4), получим :

$$F = 160 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}08 + 0{,}25 \cdot 0{,}08 \cdot + 0{,}25 \cdot 0{,}09 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}11) = 181{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

Через полтора года на счете накопится $181{,}6$ тыс. руб.

Постоянную ставку, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, находим из уравнения:

$$160 \cdot (1 + 1{,}5 \cdot r) = 181{,}6;$$

$r = 0{,}09 = 9\%$ годовых. Постоянная ставка, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, равна 9% годовых.

Задача 10

Через сколько лет удвоится сумма, вложенная в банк под 5% годовых? На вклад начисляются простые ссудные проценты.

Решение

Необходимо решить неравенство: $(1 + 0{,}05 \cdot n) \geqslant 2$, откуда $n \geqslant 20$.
Сумма, вложенная в банк под 5% годовых, удвоится через 20 лет.

Задача 11

Кредит выдается под простую ссудную ставку 24% годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, полученную заемщиком, и сумму процентных денег, если необходимо возвратить 3500 тыс. руб.

Решение

По формуле (1.2) при $F = 3500$; $n = 250/365$; $r = 0{,}24$ получаем:

$$P = \frac{3500}{(1 + 0{,}24 \cdot 250/365)} = 3017{,}2.$$

Сумма, получаемая заемщиком, составит $3\,017\,200$ руб.
Сумма процентных денег равна $(3\,500\,000 - 3\,017\,200) = 482\,800$ тыс. руб.

Задача 12

В банк 6 мая предъявлен для учета вексель, на сумму 140 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, считая, что в году 365 дней. Определить сумму, получаемую векселедержателем от банка, и комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя имеет смысл?

Решение

По формуле (1.7) при $F = 140$, $n = 65/365$, $d = 0{,}4$ получим:

$$P = 140 \cdot (1 - 0{,}4 \cdot 65/365) = 129{,}89.$$

Векселедержатель получит от банка $129{,}89$ тыс. руб.
Комиссионные банка (или дисконт) определяются по формуле $D = F - P$

$$D = F - P = 140 - 129{,}89 = 10{,}11 \text{ тыс. руб.}$$

Комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу, равны $10{,}11$ тыс. руб.

Учет векселя по учетной ставке имеет смысл при $n < 1/d$, для этой задачи при $n < 2{,}5$ года. При $n > 2{,}5$ года сумма P, которую должен получить владелец векселя при его учете, становится отрицательной.

Задача 13

Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан по простой учетной ставке 25% годовых. Определить срок кредита, если заемщик планирует получить на руки 350 тыс. руб.

Решение

По формуле (1.13) при $F = 400$, $P = 350$, $d = 0{,}25$ получаем:

$$n = \frac{(400 - 350)}{(400 \cdot 0{,}25)} = 0{,}5.$$

Срок кредита равен $0{,}5$ года.

Задача 14

Вексель на сумму 900 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 60 тыс. руб. в пользу банка. Определить величину годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году.

Решение

По формуле (1.1) при $F = 900$, $F - P = 60$, $t = 120$, $T = 360$ дней, получим:

$$d = 60 \cdot 360/(900 \cdot 120) = 0{,}20 = 20\%.$$

Годовая учетная ставка при временной базе 360 дней в году равна 20% годовых.

Задача 15

В банк предъявлен вексель на сумму 500 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода — 30% годовых, следующие полгода — 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Решение

По формуле (1.14) вычислим множитель наращения:

$$1 - (0{,}5 \cdot 0{,}30 + 0{,}5 \cdot 0{,}36 + 0{,}25 \cdot 0{,}38 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) = 0{,}475;$$
$$P = 500 \cdot 0{,}475 = 237{,}50.$$

Сумма, полученная владельцем векселя, равна $237\,5004$ руб.
По формуле (1.11) дисконт равен $D = 500 - 237{,}5 = 262{,}5$.
Дисконт банка равен $262\,500$ руб.

Задача 16

Банк 1 января учел два векселя со сроками погашения 5 февраля и 13 марта того же года. Применяя учетную ставку 10% годовых, банк удержал комиссионные в размере 1000 руб. Определить номинальную стоимость векселей, если *номинальная стоимость второго векселя в 2 раза больше, чем номинальная стоимость первого векселя.*

Решение

Обозначим номинальную стоимость первого векселя через F, тогда номинальная стоимость второго векселя составит $2 \cdot F$.

По таблице порядковых дней в году определим, что первый вексель учтен за 36 дней до срока погашения, а второй вексель учтен за 72 дня до срока погашения.

По формуле (1.11) величина дисконта для первого векселя равна

$$D_1 = F \cdot n \cdot d = F \cdot \frac{36}{360} \cdot 0{,}1 = 0{,}01 \cdot F.$$

По формуле (1.11) величина дисконта для второго векселя равна

$$D_2 = 2F \cdot n \cdot d = 2F \cdot \frac{72}{360} \cdot 0{,}1 = 0{,}04 \cdot F.$$

Учитывая, что комиссионные банка за учет двух векселей составили 1000 руб., запишем:

$$\begin{gathered} D_1 + D_2 = 1000; \\ 0{,}01F + 0{,}04F = 1000; \\ F = 20000. \end{gathered}$$

Номинальная стоимость первого векселя составит 20 тыс. руб, номинальная стоимость второго векселя составит 40 тыс. руб.

Задача 17

Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых за полгода до срока погашения. Какова доходность этой операции для банка, выраженная в виде простой ставки ссудного процента?

Решение

Пусть F — номинальная стоимость векселя. Тогда в соответствии с формулой (1.7) владелец векселя получает сумму

$$P = F \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 0{,}9 \cdot F.$$

Доходность банка, выраженную в виде простой ссудной ставки, находим по формуле (1.5):

$$r = \frac{(F - P)}{P \cdot n} = \frac{0{,}1F}{0{,}9F \cdot 0{,}5} = 0{,}22 = 22\%.$$

Доходность этой операции для банка, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна 22 процента годовых.

Задача 18

Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен вернуть 15 августа того же года 300 тыс. руб. Определить всеми возможными способами сумму, полученную предпринимателем, и величину дисконта, если проценты удерживаются банком при выдаче ссуды.

Решение

1) По формуле (1.10), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 227 - 71 = 156$ дней), получим:

$$P = 300(1 - 0{,}22 \cdot 156/365) = 271{,}79.$$

Предприниматель получит 271 790 руб.

Величина дисконта определяется по формуле (1.11) $D = 300 - 271{,}79 = 28{,}21$ тыс. руб.

2) По формуле (1.10), используя точный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 227 - 71 = 156$ дней)

$$P = 300(1 - 0{,}22 \cdot 156/360) = 271{,}40.$$

Предприниматель получит 271,40 тыс. руб.

Величина дисконта определяется по формуле (1.11) $D = 300 - 271{,}40 = 28{,}60$ тыс. руб.

3) По формуле (1.10), используя приближенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам ($t = 30 \cdot 5 + 3 = 153$ дня)

$$P = 300(1 - 0{,}22 \cdot 153/360) = 271{,}195$$

Предприниматель получит 271 195 руб.

Величина дисконта определяется по формуле (1.11):

$$D = 300 - 271{,}40 = 28{,}05.$$

Дисконт банка составит 28 050 руб.

Задача 19

Что выгоднее для инвестора — положить имеющиеся у него 1000 долл. в банк на годовой депозит при ссудной ставке 4% годовых, или купить за 1000 долл. вексель со сроком погашения через год и номинальной стоимостью 1050 долл.?

Решение

По формуле (1.1) вычислим сумму, которую через год получит инвестор, положив 1000 долл. в банк на депозит:

$$F = 1000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot) = 1040$$

Положив деньги в банк, инвестор через год получит 1040 долл. Купив вексель, инвестор через год при его погашении получит 1050 долл. Для инвестора выгоднее приобрести вексель.

Задача 20

На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую ссудную ставку 10% годовых, чтобы начисленные проценты были в 2 раза больше первоначальной суммы?

Решение

По формуле (1.6) $n = \dfrac{F - P}{P \cdot r}$. По условию задачи $F - P = 2 \cdot P$; $r = 0{,}1$.

Поэтому $n = \dfrac{2P}{P \cdot 0{,}1} = 20$ лет.

Денежную сумму необходимо положить в банк на 20 лет под простую ссудную ставку 10% годовых, для того, чтобы начисленные проценты были в 2 раза больше первоначальной суммы.

Практическое занятие 2

СЛОЖНЫЕ СТАВКИ

Схема сложных процентов предполагает их капитализацию, т. е. база, с которой происходит начисление, постоянно возрастает на величину начисленных ранее процентов. Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Для кредитора более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода). Для кредитора более выгодна схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год (проценты начисляются ежегодно). Обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

При начислении процентов за дробное число лет может использоваться схема сложных процентов, либо смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

Математическим дисконтированием (дисконтированием по сложной процентной ставке) называется задача нахождения такой величины первоначального капитала, которая через заданное количество времени при наращении по сложной процентной ставке обеспечит получение планируемой суммы.

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т. е. когда сложный процент (например, за кредит) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов, более выгодна сложная учетная ставка, если срок учета менее одного года; более выгодна простая учетная ставка, если срок учета превышает один год.

Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учетного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка для дробной части года). Стоимость учетного капитала больше при использовании смешанной схемы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т. к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают δ и называют *силой роста*.

Основные формулы раздела

$$F = P \cdot (1 + r)^n \tag{2.1}$$

$$P = \frac{F}{(1 + r)^n} \tag{2.2}$$

$$F = P(1 + r/m)^{nm} \tag{2.3}$$

$$F = P(1 + r)^{w+f} \tag{2.4}$$

$$F = P(1 + r)^w \cdot (1 + f \cdot r) \tag{2.5}$$

$$F_n = P \cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i)^{n_i} \tag{2.6}$$

$$r = m \cdot \left[\left(\frac{F}{P} \right)^{\frac{1}{nm}} - 1 \right] \tag{2.7}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F}{P}\right)}{m \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right)} \tag{2.8}$$

$$P = F(1 - d)^n \tag{2.9}$$

$$F = \frac{P}{(1 - d)^n} \tag{2.10}$$

$$P = F\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n} \tag{2.11}$$

$$P = F \cdot (1 - d)^{w+f} \tag{2.12}$$

$$P = F \cdot (1 - d)^w (1 - f \cdot d) \tag{2.13}$$

$$d = m\left[1 - \left(\frac{P}{F}\right)^{\frac{1}{m \cdot n}}\right] \tag{2.14}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P}{F}\right)}{m\ln\left(1 - \frac{d}{m}\right)} \quad (2.15)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (2.16)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \quad (2.17)$$

где F — наращенная сумма; P — вложенная сумма; n — количество лет; r — сложная процентная ставка; d — сложная учетная ставка; δ — непрерывная ставка; m — количество начислений процентов в году; w — целая часть периода финансовой операции; f — дробная часть периода финансовой операции.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

На вашем счете в банке 15 млн руб. Банковская ставка по депозитам равна 12% годовых, начисляется по схеме сложный ссудных процентов. Вам предлагают войти всем капиталом в организацию совместного предприятия, обещая удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

Решение

Для решения задачи используем формулу (2.1).

Если мы вложим деньги в банк, то через 5 лет получим следующую сумму:

$$F = 15 \cdot (1 + 0{,}12)^5 = 26{,}43 \text{ млн руб.}$$

Если мы войдем всем капиталом в организацию совместного предприятия, то наш капитал удвоится:

$$F = 15 \cdot 2 = 30 \text{ млн руб.}$$

Следует принять данное предложение и не вкладывать деньги в банк.

Задача 2

Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести ее в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Под какую минимальную ссудную ставку нужно положить деньги в банк, чтобы накопить требуемую сумму?

Решение

Для решения задачи используем формулу (2.6) при $m = 1$:

$$r = (5600/4000)^{1/2} - 1 = 0{,}1832 = 18{,}32\%.$$

Для того чтобы накопить нужную сумму, минимальная ссудная сложная ставка должна составлять $18{,}32\%$ годовых.

Задача 3

За выполненную работу предприниматель должен получить 600 тыс. руб. Заказчик не имеет возможности рассчитаться в данный момент и предлагает отложить срок уплаты на 2 года, по истечении которых он обязуется выплатить 730 тыс. руб. Выгодно ли это предпринимателю, если приемлемая норма прибыли составляет 10%? Какова минимальная ставка, которая делает подобные условия невыгодными для предпринимателя?

Решение

Для решения задачи используем формулу (2.1) при $P = 600$; $n = 2$; $r = 0{,}1$.

Будущая стоимость 600 тыс. руб. через 2 года при норме прибыли 10% составит:

$$F = 600(1 + 0{,}1)^2 = 720{,}6.$$

Положив деньги в банк, предприниматель через два года получит $720{,}6$ тыс. руб. Это меньше, чем 730 тыс. руб., поэтому предпринимателю выгодно ждать расчета 2 года.

Для расчета минимальной ставки, которая делает условия невыгодными, воспользуемся формулой (2.6) при $m = 1$:

$$r = (730/600)^{1/2} - 1 = 0{,}1030 = 10{,}3\%.$$

Минимальная ставка, которая делает условия невыгодными для предпринимателя, равна $10{,}3\%$ годовых.

Задача 4

Рассчитайте будущую стоимость 1000 долл. для следующих ситуаций:

1) *5 лет, 8% годовых, ежегодное начисление процентов;*
2) *5 лет, 8% годовых, полугодовое начисление процентов;*
3) *5 лет, 8% годовых, ежеквартальное начисление процентов.*

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (2.3).

1) При ежегодном начислении процентов $m = 1$

$$F = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{1}\right)^5 = 1469{,}3 \text{ долл.}$$

2) При полугодовом начислении процентов $m = 2$

$$F = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^{2\cdot 5} = 1480{,}2 \text{ долл.}$$

3) При ежеквартальном начислении процентов $m = 4$

$$F = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4\cdot 5} = 1485{,}9 \text{ долл.}$$

Задача 5

Банк предоставил ссуду в размере 5000 долл. на 39 месяцев под 10% годовых на условиях полугодового начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов:

1) *схема сложных процентов;*
2) *смешанная схема.*

Решение

Для решения воспользуемся формулами для вычисления наращенной суммы, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет.

1) Схема сложных процентов — формула (2.4), считая полугодие базовым периодом; $w = 6$; $f = 3{,}25 \cdot 2 - 6 = 0{,}5$; $r = 5\%$:

$$F = 5000 \cdot (1 + 0{,}05)^{6+0{,}5} = 6865{,}9.$$

По схеме сложных процентов возвращаемая сумма равна $6865{,}9$ долл.

2) Смешанная схема — формула (2.5), считая полугодие базовым периодом; $w = 6$; $f = 3{,}25 \cdot 2 - 6 = 0{,}5$; $r = 5\%$:

$$F = 500 \cdot (1 + 0{,}05)^6 (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}05) = 6867{,}99.$$

По смешанной схеме возвращаемая сумма равна $6867{,}99$ долл.

Задача 6

За какой срок первоначальный капитал в 500 тыс. руб. увеличится до 2 млн руб., если на него будут начисляться сложные проценты по ставке 10% годовых?

Решение

По формуле (2.8) при $F = 2000$; $P = 500$; $r = 0{,}1$; $m = 1$:

$$n = \frac{\ln(20000/5000)}{\ln(1{,}1)} = 14{,}54$$

Капитал в сумме 500 тыс. руб. увеличится до 2 млн руб. за 15 лет.

Задача 7

Фирме нужно накопить 2 млн долл., чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 5% годовых при полугодовом начислении процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

Решение

Для определения первоначального взноса используем формулу (2.2) при $r = 0{,}05$; $m = 2$; $n = 10$; $F = 2000$:

$$P = 2000/(1 + 0{,}05/2)10^2 = 1220{,}542.$$

Первоначальный вклад фирмы составит $1\,220\,542$ долл.

Задача 8

Рассчитать накопленную сумму, если на вклад в 2 млн руб. в течение 5 лет начисляются непрерывные проценты с силой роста 10%.

Решение

По формуле (2.16) при $P = 2$; $\delta = 0{,}1$

$$F = 2 \cdot e^{5 \cdot 0{,}1} = 3297{,}443.$$

Накопленная сумма составит $3\,297\,443$ руб.

Задача 9

Вы положили в банк на депозит 1000 долл. Банк начисляет сложные проценты по схеме — за первый год 4% годовых, а затем ставка увеличивается на 1% каждый год. Определить сумму, которая будет на Вашем счете через 4 года.

Решение

Используем формулу (2.6) при $n1 = n2 = n3 = n4 = 1$; $P = 1000$; $r1 = 0{,}04$; $r2 = 0{,}05$; $r3 = 0{,}06$; $r4 = 0{,}07$.

$$F = 1000 \cdot (1 + 0{,}04)^1 \cdot (1 + 0{,}05)^1 \cdot (1 + 0{,}06)^1 \cdot (1 + 0{,}07)^1 = 1239.$$

Через 4 года на счете накопится 1239 долл.

Задача 10

1 августа 2010 г. должник обязан уплатить кредитору 400 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги:

1) *1 января 2010 г.;*
2) *1 января 2011 г.;*
3) *1 августа 2010 г.?*

Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 34% годовых.

Решение

1) используем формулу (2.2) при $r = 0{,}34$; $n = 7/12$:

$$P = \frac{400}{(1 + 0{,}34)^{7/12}} = 337{,}22.$$

   1 января 2010 г. должник должен иметь $337\,220$ руб.

2) используем формулу (2.1) при $r = 0{,}34$; $n = 5/12$:

$$F = 400 \cdot (1 + 0{,}34)^{5/12} = 451{,}87.$$

   1 января 2011 г. должник должен иметь $451\,870$ руб.

3) 1 августа 2010 г. должник должен иметь $400\,000$ руб.

Задача 11

Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета.

Решение

1) При применении схемы сложных процентов воспользуемся формулой (2.12) при $n = 32/12 = 8/3$, $F = 70$ тыс. руб., $d = 0{,}24$, поэтому

$$P = 70(1 - 0{,}24)^{\frac{8}{3}} = 33{,}672.$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

2) При применении смешанной схемы воспользуемся формулой (2.13) при $w = 2$, $f = 2/3$:

$$P = 70(1 - 0{,}24)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}24\right) = 33{,}963.$$

Владелец векселя получит 33 963 руб.

Задача 12

Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите сумму, полученную при учете этого обязательства, если производилось 1) полугодовое; 2) поквартальное; 3) ежемесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 24% годовых.

Решение

1) Используем формулу (2.11) при $F = 46$; $d = 0{,}24$; $n = 4$; $m = 2$

$$P = 46 \cdot \left(1 - \frac{0{,}24}{2}\right)^{2 \cdot 4} = 16{,}543.$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 16 543 руб.

2) Используем формулу (2.11) при $F = 46$; $d = 0{,}24$; $n = 4$; $m = 4$:

$$P = 46 \cdot \left(1 - \frac{0{,}24}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 17{,}092.$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17092 руб.

3) Используем формулу (2.11) при $F = 46$; $d = 0{,}24$; $n = 4$; $m = 12$:

$$P = 46 \cdot \left(1 - \frac{0{,}24}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 17{,}443.$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17443 руб.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что с ростом числа осуществлений операций дисконтирования в году сумма, полученная при учете обязательства, возрастает.

Задача 13

Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке: в первые 2 года — 16%, в следующие 2 года — 19%, в оставшийся год — 2%. Определить наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же сумму?

Решение

По формуле (2.14) при $r1 = 16\%$, $r2 = 19\%$, $r3 = 23\%$ получаем:

$$F = \frac{20}{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)} = 56{,}106.$$

Наращенная сумма равна 56106 руб.

Постоянную годовую учетную ставку d, дающую тот же результат, находим из равенства:

$$(1-d)^5 = (1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23).$$
$$d = 0{,}1864.$$

Постоянная ставка, которая дает тот же результат, равна $18{,}64\%$ годовых.

Задача 14

За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 28% годовых?

Решение

По формуле (2.16) при $P = 62$ тыс. руб., $F = 80$ тыс. руб.; $m = 1$; $d = 0{,}28$; получим:

$$n = \frac{\ln \frac{62}{80}}{\ln(1-0{,}28)} = 0{,}776.$$

Обязательство было учтено за 280 дней ($0{,}776$ года) до срока погашения

Задача 15

Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 40 тыс. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 1) 20% годовых; 2) 25% годовых. Решение

1) По формуле (2.9) при $n = 3$, $F = 40$ тыс. руб., $d = 0{,}2$ получим:

$$P = 40 \cdot (1-0{,}2)^3 = 20{,}48.$$

Поэтому дисконт составит $40000 - 20480 = 19520$ тыс. руб.

2) По формуле (2.9) при $n = 3$, $F = 40$ тыс. руб., $d = 0{,}25$ получим:

$$P = 40 \cdot (1 - 0{,}25)^3 = 16{,}875.$$

Поэтому дисконт составит $40000 - 16875 = 23125$ тыс. руб.

Задача 16

Вексель был учтен за 2,5 года до срока его погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось:

1) *поквартальное дисконтирование;*
2) *ежемесячное дисконтирование.*

Решение

1) по формуле (2.15) при $P = 0{,}25F$; $n = 2{,}5$; $m = 4$, получим:

$$d = 4 \cdot \left[1 - 0{,}25^{\frac{1}{4 \cdot 2{,}5}}\right] = 0{,}5178.$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке $51{,}78\%$ годовых.

2) по формуле (2.15)) при $P = 0{,}25F$; $n = 2{,}5$; $m = 12$, получим:

$$d = 4 \cdot \left[1 - 0{,}25^{\frac{1}{12 \cdot 2{,}5}}\right] = 0{,}5419.$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке $54{,}19\%$ годовых.

Задача 17

Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых при полугодовом дисконтировании. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству?.

Решение

По формуле (2.16) при $P = 1/3 \cdot F$; $m = 2$; $d = 0{,}32$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1/3F}{F}\right)}{2 \cdot \ln\left(1 - \frac{0{,}32}{2}\right)} = 3{,}15.$$

Обязательство было учтено за $3{,}15$ года до срока погашения.

Задача 18

Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении 1) на 3 месяца; 2) на год.

Решение

1) Из формулы (2.11) выразим F при m = 1; n = 0,25; d = 0,28

$$F = \frac{P}{\left(1 - \frac{d(m)}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{P}{\left(1 - \frac{0{,}28}{2}\right)^{2 \cdot 0{,}25}} = 1{,}078P.$$

Тогда $F - P = 1{,}078P - P = 0{,}078P$.

Стоимость привлеченных средств найдем из формулы (2.15) при m = 1; n = = 0,25; d = 0,28

$$d = (F - P)/P \cdot n = 0{,}78P/P \cdot 0{,}25 = 0{,}3132.$$

Стоимость привлеченных средств, выраженная в виде простой учетной ставки равна 31,32% годовых.

2) Из формулы (2.11) выразим F при m = 1; n = 1; d = 0,28

$$F = \frac{P}{\left(1 - \frac{d(m)}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{P}{\left(1 - \frac{0{,}28}{2}\right)^{2}} = 1{,}35P.$$

Тогда $F - P = 1{,}35P - P = 0{,}35P$.

Стоимость привлеченных средств найдем из формулы (2.15) при m = 1; n = 1; d = 0,28

$$d = (F - P)/P \cdot n = 0{,}35P/P \cdot 1 = 0{,}35.$$

Стоимость привлеченных средств, выраженная в виде простой учетной ставки, равна 35% годовых.

Задача 19

По условиям финансового соглашения на сумму 900 тыс. руб., помещенную в банк на 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится:

1) *по полугодиям;*
2) *ежеквартально;*
3) *ежемесячно.*

Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке 24% годовых.

Решение

Из формулы (2.11) выразим $F = P/\left(1-\frac{d(m)}{m}\right)^{m\cdot n}$.

1) При $P = 900$; $m = 2$; $n = 5$; $d = 0{,}24$

$$F = \frac{900}{\left(1-\frac{0{,}24}{2}\right)^{2\cdot 5}} = 3231{,}6.$$

Наращенная сумма равна 3 231 600 руб.

2) При $P = 900$; $m = 4$; $n = 5$; $d = 0{,}24$

$$F = \frac{900}{\left(1-\frac{0{,}24}{4}\right)^{4\cdot 5}} = 3102{,}3.$$

Наращенная сумма равна 3 102 300 руб.

3) При $P = 900$; $m = 12$; $n = 5$; $d = 0{,}24$

$$F = \frac{900}{\left(1-\frac{0{,}24}{12}\right)^{12\cdot 5}} = 3024{,}6.$$

Наращенная сумма равна 3 024 600 руб.

Таким образом, с увеличением числа начислений процентов за год по сложной учетной ставке величина наращенной суммы убывает.

Если наращение по сложными процентами осуществляется по процентной ставке, то используем формулу (2.3):

1) При $P = 900$; $m = 2$; $n = 5$; $r = 0{,}24$

$$F = 900\cdot\left(1+\frac{0{,}24}{2}\right)^{2\cdot 5} = 2795{,}2.$$

Наращенная сумма равна 2 795 200 руб.

2) При $P = 900$; $m = 4$; $n = 5$; $r = 0{,}24$

$$F = 900\cdot\left(1+\frac{0{,}24}{4}\right)^{4\cdot 5} = 2886{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Наращенная сумма равна 2 886 400 руб.

3) При $P = 900$; $m = 12$; $n = 5$; $r = 0{,}24$

$$F = 900\cdot\left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12\cdot 5} = 2952{,}9.$$

Наращенная сумма равна 2 952 900 руб.

Разность между наращенными суммами составит:

m	$F_{\text{учетная}} - F_{\text{ссудная}}$, тыс. руб.
2	436,4
4	215,9
12	71,7
365	0,235

То есть с ростом количества начислений процентов разница между наращенными суммами уменьшается. Это объяснимо, т.к. чем меньше период начисления, тем меньше отличие между понятиями «предварительное» и «последующее» начисление.

Задача 20

Клиент имеет вексель на 100 тыс. руб., который он хочет учесть 01.03.2010 в банке по сложной учетной ставке, равной 7% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2010 г.?

Решение

Срок даты учета до даты погашения векселя равен 153 дня, число дней в году 365. По формуле (2.9) при $F = 100$; $d = 0{,}07$; $n = 153/365$

$$P = 100 \cdot (1 - 0{,}07)^{153/365} = 97{,}038.$$

Владелец векселя получит 97 038 руб.

Практическое занятие 3

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ И ЭФФЕКТИВНЫЕ СТАВКИ

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки.

Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются.

При замене или объединении платежей используется принцип эквивалентности: ни одна из сторон финансовой сделки не должна казаться в убытке или получить дополнительную прибыль.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками. Именно эта ставка характеризует реальную эффективность операции, однако во многих финансовых контрактах речь чаще всего идет о номинальной ставке, которая в большинстве случаев отличается от эффективной.

Меняя частоту начисления процентов или вид ставки, можно существенно влиять на эффективность операции. В частности, оговоренная в контракте ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, 60% годовых при условии ежедневного начисления процентов соответствуют на самом деле 82,1%, начисляемых ежегодно. Отмеченная особенность исключительно значима в условиях высоких номинальных ставок. При составлении финансовых договоров данный прием нередко используется для сокрытия истинных расходов. Поэтому, заключая контракт, целесообразно уточнять, о какой ставке (процентной, учетной, эффективной и др.) идет речь или, по крайней мере, отдавать себе отчет в этом.

Основные формулы раздела

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \tag{3.1}$$

$$r_e = e^{\delta} - 1 \tag{3.2}$$

$$\delta = m \cdot \ln\left(1 + \frac{r}{m}\right) \tag{3.3}$$

$$r = m \cdot \left[(1 + r_e)^{1/m} - 1\right] \tag{3.4}$$

$$d_e = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m \tag{3.5}$$

$$d = m \cdot \left[1 - (1 - d_e)^{1/m}\right] \tag{3.6}$$

$$r = \frac{d}{1 - nd} \tag{3.7}$$

$$d = \frac{r}{1 + nr} \tag{3.8}$$

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c} \tag{3.9}$$

$$d_c = \frac{r_c}{1 + r_c} \tag{3.10}$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{n} \tag{3.11}$$

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{d(m)}{m}\right)^{m \cdot n}}{n} \tag{3.12}$$

где r_e — эффективная ссудная ставка; d_e — эффективная учетная ставка; e^{δ} — сила роста; r — простая процентная ставка; d — простая учетная ставка; r — сложная процентная ставка; d — сложная учетная ставка; $r(m)$ — сложная процентная ставка с начислением процентов m раз за период; $d(m)$ — сложная учетная ставка с начислением процентов m раз за период; n — продолжительность финансовой операции в годах.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку:

1) *28% годовых с ежеквартальным начислением процентов;*
2) *30% годовых с полугодовым начислением процентов?*

Решение

Рассчитаем эффективную годовую процентную ставку для каждого варианта.

1) По формуле (3.1) при $r = 0{,}28$; $m = 4$

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}28}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}3107 = 31{,}1\%.$$

2) По формуле (3.1) при $r = 0{,}32$; $2 = 4$

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}3}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}3225 = 32{,}25\%.$$

Для банка выгоднее предоставлять кредит по варианту 2, так как в этом случае эффективная годовая ставка выше (предоставлять кредит под $32{,}25\%$ годовых выгоднее, чем под $31{,}1\%$).

Задача 2

Срок уплаты по долговому обязательству — полгода, простая учетная ставка — 18% годовых . Какова доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

Решение

По формуле (3.7) при $d = 0{,}18$; $n = 0{,}5$

$$r = \frac{0{,}18}{(1 - 0{,}5 \cdot 0{,}18)} = 0{,}198.$$

Доходность операции, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна $19{,}8\%$ годовых.

Задача 3

Определить, под какую ставку ссудных процентов выгоднее поместить капитал в 10 млн руб. на пять лет — под простую ставку 14% годовых или под сложную ставку 12% при ежеквартальном начислении процентов?

Решение

В данном случае можно не считать наращенную сумму, поэтому не важна величина первоначального капитала. Достаточно, например, найти простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке, воспользовавшись формулой эквивалентности по формуле (3.11) при $r(m) = 0{,}12$; $n = 5$; $m = 4$:

$$r = \frac{\left(1 + \frac{00{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5} - 1}{5} = 0{,}1612.$$

Так как простая процентная ставка $16{,}12\%$, которая дала бы одинаковый результат с данной сложной процентной ставкой, больше предложенной ставки в 14%, ясно, что предпочтительнее использовать сложную процентную ставку. Чтобы убедиться, насколько сложная ставка выгоднее, определим наращенные суммы:

$$F(14\%) = 17;$$
$$F(16{,}12\%) = 22{,}04.$$

Владелец капитала в 10 млн руб. за 5 лет может накопить 17 млн руб. с использованием простой ставки 14% годовых; с использованием сложной ставки 12% годовых при ежеквартальном начислении процентов можно накопить $22{,}04$ млн руб.

Задача 4

На капитал в сумме 500 тыс. руб. ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых в течение 5 лет. Определить эквивалентную ставку непрерывного начисления процентов (силу роста).

Решение

По формуле (3.2) при $r = 0{,}08$; $m = 1$

$$\delta = \ln(1 + 0{,}08) = 0{,}077.$$

Таким образом, ежегодное начисление процентов по ставке 8% эквивалентно непрерывному начислению процентов по ставке $7{,}7\%$.

Задача 5

Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 9% и сложные проценты начисляются ежемесячно.

Решение

По формуле (3.4) при $r = 0{,}09$; $m = 12$

$$r = 12 \cdot \left[(1 + 0{,}09)^{1/12} - 1\right] = 0{,}086 = 8{,}6\%.$$

Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 9% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке $8{,}6\%$.

Задача 6

Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 20% годовых и учет осуществляется:

1) *каждые полгода;*
2) *ежеквартально;*
3) *ежемесячно.*

Решение

1) По формуле (3.6) при $d_e = 0{,}2$; $m = 2$

$$d = 2 \cdot \left[1 - (1 - 0{,}2)^{1/2}\right] = 0{,}32668.$$

Номинальная учетная ставка равна $32{,}67\%$ годовых.

2) По формуле (3.6) при $d_e = 0{,}2$; $m = 4$

$$d = 4 \cdot \left[1 - (1 - 0{,}2)^{1/4}\right] = 0{,}341235.$$

Номинальная учетная ставка равна $34{,}12\%$ годовых.

3) По формуле (3.6) при $d_e = 0{,}2$; $m = 12$

$$d = 12 \cdot \left[1 - (1 - 0{,}2)^{1/12}\right] = 0{,}351426.$$

Номинальная учетная ставка равна $35{,}14\%$ годовых.

Задача 7

Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8% годовых. Определите эквивалентную простую ставку при следующих сроках ссуды:

1) 5 лет;

2) 180 дней;

3) 365 дней.

Решение

Запишем уравнение эквивалентности простых и сложных учетных ставок:

$$r = \frac{(1 + r_c)^n - 1}{n}:$$

1) при $n = 5$; $r_c = 0{,}08$ получаем:

$$r = \frac{(1 + 0{,}08)^5 - 1}{5} = 0{,}09 = 9\%;$$

2) при $n = 180/360$; $r_c = 0{,}08$ получаем:

$$r = \frac{(1 + 0{,}08)^{180/360} - 1}{(180/360)} = 0{,}078 = 7{,}8\%;$$

3) при n = 365 дней (1 год) величина сложной и эквивалентной ей простой ставки совпадают.

Задача 8

В банк для учета предъявлены 2 векселя — один на сумму в 100 тыс. руб. и сроком погашения через год, второй — на сумму 150 тыс. руб. и сроком погашения через 2 года. Два векселя необходимо заменить одним, на сумму 250 тыс. руб. Определить срок погашения нового векселя при использовании сложной учетной ставки 20% годовых.

Решение

Для определения срока погашения нового векселя необходимо составить уравнение эквивалентности контрактов, согласно которому владелец нового векселя должен получить такую же сумму, что и при учете двух векселей номиналом 100 тыс. руб. и 150 тыс. руб. Из полученного уравнения можно определить срок погашения нового векселя.

$$100000 \cdot (1 - 0{,}2) + 150000 \cdot (1 - 0{,}2)^2 = 250000 \cdot (1 - 0{,}2)^n$$

$$176000 = 250000 \cdot 0{,}8^n$$

$$0{,}8^n = 0{,}704$$

$$\log 0{,}8^n = \log 0{,}704$$

$$n = \log 0{,}704 / \log 0{,}8$$

$$n = 1{,}57$$

Срок погашения нового векселя составит 1,57 года.

Задача 9

Предприниматель и кредитор 1 июня 2009 года заключили контракт, в соответствии с которым предприниматель 1 июня 2010 года должен выплатить кредитору 100 000 долл., 1 июня 2011 должен выплатить 200 000 долл. и 1 июня 2012 года должен выплатить 400 000 долл. Предприниматель планирует выплатить 1 июня 2011 года 300 000 долл., оставшуюся сумму долга вернуть 1 июня 2013 года. Какую сумму предприниматель должен будет выплатить через 4 года, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

Решение

Изобразим схему выплат на графике. Под осью отметим платежи по старому соглашению, над осью — по новому контракту.

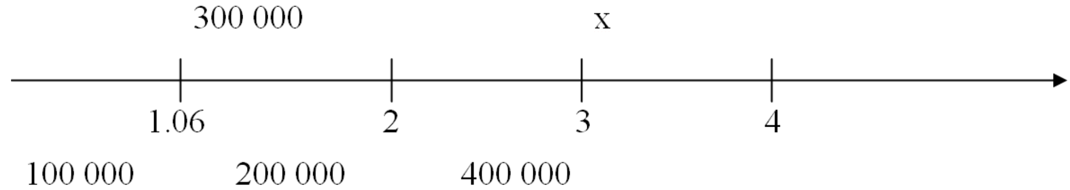


Рис. 3.1

Величину неизвестного платежа находим из условия эквивалентности контрактов. Приведенные стоимости платежей по старому контракту необходимо приравнять к приведенным стоимостям потоков платежей по новому контракту и из полученного уравнения определить неизвестную величину нового платежа.

$$\frac{100000}{(1+0{,}2)}+\frac{200000}{(1+0{,}2)^2}+\frac{400000}{(1+0{,}2)^3}=\frac{300000}{(1+0{,}2)^2}+\frac{X}{(1+0{,}2)^4};$$
$$X = 508\,800.$$

Через 4 года предприниматель должен выплатить $508\,800$ долл.

Задача 10

Согласно контракту предприниматель через год должен выплатить кредитору 10 тыс. долл., через три года должен выплатить 40 тыс. долл. и через 5 лет должен выплатить еще 30 тыс. долл. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. долл. через 2 года и 40 тыс. долл. через 4 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 34% годовых?

Решение

Два контракта считаются эквивалентными, если приведенные стоимости платеже по этим контрактам одинаковы. В качестве даты приведения обычно принимают дату, от которой измеряются все сроки. В данном случае — это момент заключения контракта.

Сумма приведенных стоимостей платежей по первому контракту составит:

$$\frac{10000}{(1+0{,}34)}+\frac{40000}{(1+3\cdot 0{,}34)}+\frac{30000}{(1+5\cdot 0{,}34)}=38376.$$

Сумма приведенных стоимостей платежей по второму контракту составит:

$$\frac{30000}{(1+2\cdot 0{,}34)}+\frac{40000}{(1+4\cdot 0{,}34)}=34806.$$

Контракты не являются эквивалентными. Первый контракт выгоднее для кредитора, а второй — для предпринимателя.

Практическое занятие 4

УЧЕТ НАЛОГОВ И ИНФЛЯЦИИ В ПРИНЯТИИ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Для оценки наращенной суммы с учетом ее обесценения полученную величину делят на индекс инфляции за время осуществления наращения. Если множитель наращения равен индексу инфляции, то соответствующее наращение лишь нейтрализует действие инфляции.

При инфляции выделяют следующие виды процентных ставок: номинальную, реальную, положительную. Иногда ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой.

Для обеспечения реального роста стоимости первоначального капитала при инфляции необходимо исходную ставку увеличивать (индексировать). Выбор величины такой индексированной ставки определяется поставленными целями. Для обеспечения реальной доходности, согласно исходному коэффициенту наращения, необходимо так индексировать исходную ставку (увеличить на инфляционную премию), чтобы новый коэффициент наращения полностью компенсировал потери из-за инфляции.

Формула Фишера определяет значение сложной годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции. Эта формула по существу показывает ту величину, называемую инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке (эта ситуация типична для стран с развитой рыночной экономикой) пользуются и приближенным вариантом формулы Фишера.

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции.

Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки: вместо ставки простой ссудной ставки r применяется ставка $(1-t)r$.

В условиях начисления ссудных процентов по сложной ставке r наращенная сумма с учетом начисленных процентов определяется по формуле

$$F_t = P\left[(1+r)n(1-t)+t\right]. \tag{4.1}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

На вклад начисляются сложные проценты: 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?

Решение

1) Обозначим через $I_u^{(1/12)}$ ежемесячный (т. е. за 1/12 года) индекс инфляции, тогда $I_u^{(1/12)} = 1{,}03$ и при $к = 12$ находим индекс инфляции за год:

$$I_u^{(1)} = \left(I_u^{(1/12)}\right)^{12} = 1{,}03^{12} = 1{,}4258.$$

Пусть r — процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства $1+r = I_u^{(1)}$ (т. е. множитель наращения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r = I_u^{(1)} - 1 = 1{,}4258 - 1 = 0{,}4258 = 42{,}58\%.$$

Реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей $42{,}58\%$ годовых.

2) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, пользуемся равенством:

$$\left(1+\frac{r(4)}{4}\right)^4 = I_p^{(1)},\ \text{откуда:}$$

$$r(4) = 4\left(\sqrt[4]{I_u^{(1)}} - 1\right) = 0{,}3709 = 37{,}09\%.$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежеквартальном начислении процентов по ставке не меньше, чем $37{,}09\%$ годовых.

3) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством

$$\left(1+\frac{r(12)}{12}\right)^{12} = I_u^{(1)},\ \text{откуда:}$$

$$r(12) = 12\left(\sqrt[12]{I_u^{(1)}} - 1\right) = 0{,}36 = 36\%.$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежемесячном начислении сложных процентов по ставке, не меньше чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно, $r\,(12)\,/12 > 0{,}03$, поэтому $r > 0{,}36$.

Задача 2

Номинальная процентная ставка, компенсирующая действие инфляции, равна 52% годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

Решение

Приравняем годовой индекс инфляции к множителю наращения за год. Полагая $r\,(4) = 0{,}52$, получим:

$$I_u^{(1)} = \left(1 + \frac{r\,(4)}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{0{,}52}{4}\right)^4 = 1{,}6305.$$

Поэтому индекс инфляции за полгода ($0{,}5$ года) составит:

$$I_u^{(0{,}5)} = \sqrt{I_u^{(1)}} = \sqrt{1{,}6305} = 1{,}2769.$$

Темп инфляции α находим из условия $(1 + \alpha) = I$.

Темп инфляции за полгода равен $27{,}69\%$.

Задача 3

На вклад в течение трех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция за это время за каждый год последовательно составит 15, 20 и 10 процентов. Какова должна быть сила роста за год, чтобы покупательная способность вклада не уменьшилась?

Решение

Поскольку индекс инфляции за первый год равен $1{,}15$, за второй — $1{,}2$ и за третий — $1{,}1$, то индекс инфляции за 3 года составит:

$$I_u^{(3)} = I1 \cdot I2 \cdot I3 = 1{,}15 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 = 1{,}518.$$

Пусть δ — сила роста за год, позволяющая первоначальной сумме только сохранить свою покупательную способность. Приравнивая индекс инфляции за три года к множителю наращения за это же время, получим: $e^{3\cdot\delta} = I_u^{(3)}$, поэтому

$$\delta = \frac{\ln I_u}{3} = \frac{\ln 1{,}518}{3} = 0{,}1391.$$

Сила роста должна превышать $13{,}91\%$ за год.

Задача 4

На вклад в течение 15 месяцев начисляются проценты: 1) по схеме сложных процентов; 2) по смешанной схеме. Какова должна быть процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 8%?

Решение

1) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 8%, то индекс инфляции за каждый квартал ($0{,}25$ года) равен $1{,}08$. Поэтому индекс инфляции за 15 месяцев ($1{,}25$ года, или 5 кварталов) составит:

$$I_p^{(1{,}25)} = 1{,}08^5 = 1{,}4693.$$

Обозначим через r искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращения при использовании схемы сложных процентов:

$$(1 + r)^{1{,}25} = 1{,}4693.$$

Отсюда:

$$r = 1{,}4693^{1/1{,}25} - 1 = 0{,}3605.$$

Ставка должна превышать $36{,}05\%$ годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 8% за каждый квартал годовой темп инфляции составит $1{,}08^4 - 1 = 0{,}3605 = 36{,}05\%$. Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т. е. $r > 36{,}05\%$.

2) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за $1{,}25$ года к множителю наращения, получим квадратное уравнение относительно ставки r:

$$(1 + r) \cdot (1 + 0{,}25r) = 1{,}4693.$$

Решая уравнение, определяем корни: $r = -5{,}3508$, $r = 0{,}3508$.

Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать $35{,}08\%$ годовых. «Граничное» значение ставки в этом случае получили почти на 1% меньше, чем в предыдущем, что объясняется большей эффективностью смешанной схемы начисления по сравнению со схемой сложных процентов.

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

$$(1 + r)(1 + 0{,}25r) > 1{,}4693.$$

Задача 5

На вклад 280 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции — 0,5 % в месяц.

Решение

При наращении сложными процентами при ежеквартальном начислении процентов сумма вклада составит:

$$F = 280000 \cdot (1 + 0{,}1/4)^{4 \cdot 1{,}75} = 332830.$$

Индекс инфляции за $1{,}75$ года при темпе инфляции 2% в месяц составит

$$I_u^{(1{,}75)} = (1 + 0{,}005)^{21} = 1{,}11.$$

Величина вклада с точки зрения ее покупательной способности равна

$$F_\alpha = \frac{F}{I_u^{(1{,}75)}} = \frac{332830}{1{,}11} = 299730.$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$F_\alpha - P = 299730 - 280000 = 19730.$$

Задача 6

На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые учетные проценты по ставке под 14% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (4.1) при $P = 300$; $n = 1{,}5$; $t = 0{,}12$; $d = 0{,}14$

$$F_t = 300 \cdot \frac{(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}12)}{(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}14)} = 370{,}018.$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 370018 руб.

Задача 7

На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые проценты по ставке под 16% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (4.1) при $P = 300$; $n = 1{,}5$; $t = 0{,}12$; $r = 0{,}16$

$$F_t = 300 \cdot \left[1 + 0{,}16 \cdot (1 - 0{,}12) \cdot 1{,}5\right] = 360{,}336.$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 360336 руб.

Задача 8

На вклад в 2 млн руб. в течение 4-х лет каждые полгода начислялись сложные проценты по годовой номинальной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 8% годовых.

Решение

Запишем формулу (4.1) с учетом полугодового начисления процентов:

$$F_t = P \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} \cdot (1 - t) + t \right]$$

при $P = 2$; $r = 0{,}12$; $n = 4$; $m = 2$; $t = 0{,}08$

$$F_t = 3{,}09268$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит $3\,092\,680$ руб.

Задача 9

Для участия в некотором проекте предпринимателю необходимо 280 тыс. руб. Между тем он располагает суммой 250 тыс. руб. С целью накопления необходимой суммы предприниматель собирается положить 250 тыс. руб. в банк. Предлагаемая банком ставка по вкладам равна 14% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, использует точный процент с точным числом дней, а ставка налога на проценты равна 1%?

Решение

Обозначим через X необходимое число дней, тогда формула (4.1) запишется в виде:

$$F_t = P\big[(1 + r(1 - t)X/365\big].$$

При $F_t = 280$; $= 250$; $r = 0{,}14$; $t = 0{,}01$

$$280 = 250 \cdot \big[1 + 0{,}014 \cdot (1 - 0{,}01)X/365\big].$$

Решая полученное уравнение относительно X, получаем:

$$X = 316{,}017.$$

Для накопления требуемой суммы необходимо 317 дней.

Задача 10

Клиент положил в банк 60 тыс. рублей под простую процентную ставку 10% годовых и через полгода с учетом налога на проценты получил 62,8 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

Решение

Из формулы (4.1) выразим ставку налога на проценты

$$t = 1 - \frac{1}{nr} \cdot \left(\frac{F_t}{P} - 1\right).$$

При $F_t = 62{,}8$; $P = 60$; $r = 0{,}1$; $n = 0{,}5$

$$t = 0{,}067.$$

Ставка налога на проценты равна $6{,}7\%$.

Практическое занятие 5

ОЦЕНКА ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Одним из ключевых понятий в финансовом менеджменте является понятие денежного потока как совокупности притоков и/или оттоков денежных средств, имеющих место через некоторые временные интервалы.

Денежный поток, срок действия которого ограничен, называется срочным; если притоки (оттоки) осуществляются неопределенно долго, денежный поток называется бессрочным. Если притоки (оттоки) осуществляются в начале периодов, денежный поток носит название пренумерандо, если в конце периодов — постнумерандо.

Известны две задачи оценки денежного потока с учетом фактора времени: прямая и обратная. Первая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока; для понимания экономической сущности этой задачи ее легче всего увязывать с процессом накопления денег в банке и оценкой величины наращенной суммы. Вторая задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока; наиболее наглядная ситуация в этом случае — оценка текущей стоимости ценной бумаги, владение которой дает возможность в будущем получать некоторые платежи.

Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока. Аннуитет — однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы. Постоянный аннуитет имеет дополнительное ограничение, его элементы одинаковы по величине.

Ускоренные методы оценки денежных потоков основаны на применении мультиплицирующих и дисконтирующих множителей, которые табулированы в специальных финансовых таблицах. Таблицы инвариантны по отношению к виду потока — постнумерандо или пренумерандо; оценки для потока пренумерандо отличаются от соответствующих оценок для потока постнумерандо на величину множителя $(1+r)$, где r — ставка в долях единицы.

В финансовой математике разработаны универсальные формулы, позволяющие делать расчеты в несовпадениях моментов поступления аннуитетных платежей и начисления процентов.

Оценка будущей стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$FV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r,n); \tag{5.1}$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{5.2}$$

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r,n); \tag{5.3}$$

$$FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{5.4}$$

Оценка будущей стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A поступают p раз в течение базового периода, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж m раз в течение каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)}. \tag{5.5}$$

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A поступают p раз в течение базового периода, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж m раз в течение каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, m\right)}. \tag{5.6}$$

Оценки постоянного аннуитета пренумерандо вычисляют по формулам:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = FV_{pst} \cdot FM1\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right). \tag{5.7}$$

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = PV_{pst} \cdot FM1\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right). \tag{5.8}$$

Оценку приведенной стоимости отсроченного аннуитета определяем по формуле:

$$PV_{pst} = A \cdot FM2\left(r,h\right) \cdot FM4\left(r,n\right). \tag{5.9}$$

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*) или, наоборот, замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну — *консолидация рент*.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Анализируются 2 варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо, т. е. поступление денежных средств осуществляется в начале соответствующего временного интервала:

План 1: Вносить на депозит 5000 долл. каждые полгода при условии, что банк начисляет 10% годовых с полугодовым начислением процентов.

План 2: делать ежегодный вклад в размере 10000 долл. на условиях 9% годовых при ежегодном начислении процентов.

Ответьте на следующие вопросы:

1) *Какая сумма будет на счете через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен?*
2) *Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка в плане 2 будет повышена до 10%?*

Решение

План 1:

Принимая за базовый период полгода, воспользуемся формулой (5.1) при $A = 5000$; $r = 5\%$; $n = 20$:

$$FV_1 = 0{,}5 \cdot FM3(5\%, 20) = 5000 \cdot 33{,}066 = 165330.$$

План 2:

Принимая за базовый период год, воспользуемся формулой (5.1) при $A = 10000$; $r = 9\%$; $n = 10$:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(9\%, 10) = 10000 \cdot 15{,}193 = 151930.$$

В данной задаче более предпочтительным является план 1, так как в этом случае будущая стоимость денежного потока выше. Если процентная ставка в плане 2 будет снижена до 8%, то будущая стоимость денежного потока будет равна:

$$FV_2 = 10000 \cdot FM3(10\%, 10) = 10000 \cdot 15{,}937 = 159370,$$

но и в этом случае решение не изменится, то есть выгоднее план 1.

Задача 2

Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет получать в конце каждого квартала 8 тыс. долл. Определить возможные суммы, которые через три года получит предприниматель, если можно поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с начислением процентов 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно.

Решение

1) используем формулу (5.5) при $A = 8$; $n = 3$; $r = 24\%$; $m = 1$; $p = 4$:

$$FV_{pst} = 8 \cdot \frac{FM3\,(24\%, 3)}{FM3\left(24\%, \dfrac{1}{4}\right)} = 8 \cdot \frac{3{,}7776}{0{,}2302} = 131281,$$

причем значение $FM3\,(24\%, 1/4)$ вычисляем непосредственно по формуле

$$FM3\,(r, n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r} = \frac{(1+0{,}24)^{\frac{1}{4}}}{0{,}24} - \frac{1}{0{,}24} = 0{,}2302.$$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет $131\,281\,000$ долл.

2) Используем формулу (5.1), считая базовым периодом квартал, тогда $A = 8$; $n = 12$; $r = 6\%$:

$$FV_{pst} = 8 \cdot FM3(6\%, 12) = 8 \cdot 16{,}8699 = 134959.$$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет $134\,959\,000$ долл.

3) Используем формулу (5.5) при $A = 8$; $n = 3$; $r = 24\%$; $m = 1$; $p = 4$:

$$FV_{pst} = 8 \cdot \frac{FM3(2\%, 36)}{FM3(2\%, 3)} = 8 \cdot \frac{51{,}9944}{3{,}0606} = 135915.$$

Через три года в банке на счете предпринимателя будет $135\,915\,000$ долл.

Задача 3

Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 6% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты 1) ежегодно; 2) ежемесячно?

Решение

Для ответа на поставленный вопрос во всех случаях необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо.

1) по формуле (5.4) при $A = 100$; $r = 6\%$; $n = 6$:

$$PV_{pst} = 100 \cdot FM4(6\%, 6) = 100 \cdot 4{,}917 = 491{,}7.$$

В банк на счет необходимо положить $491\,700$ руб.

2) по формуле (5.8) при $A = 100$; $r = 6\%$; $n = 6$; $m = 12$:

$$PV_{pst} = 100 \cdot \frac{FM4(6/12{,}72)}{FM3(6/12{,}12)} = 100 \cdot 4{,}8915 = 489{,}15.$$

В банк на счет необходимо положить $489\,150$ руб.

Задача 4

Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 30 00 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10%?

Решение

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.

По формуле (5.3) при $A = 30000$; $r = 10\%$; $n = 10$ найдем приведенную стоимость этого аннуитета:

$$PV_{pst} = 30000 \cdot FM4(10\%, 10) = 30000 \cdot 6{,}145 = 184350.$$

Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 184 350 руб. можно ежегодно снимать с него 30 000 руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.

Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет (60 – 40 = 20) накопить 184350 руб.

Размер вклада можно найти из формулы (5.7), при $FV_{pre} = 184350$: $n = 20$; $r = 10\%$; $m = 1$; $p = 1$

$$A = \frac{184350}{\big(FM3(10\%, 20) \cdot (1 + r)\big)} = \frac{184350}{(57{,}274 \cdot 1{,}1)} = 2926{,}125.$$

Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 2916 руб. 13 коп.

Задача 5

Иванов должен Петрову 200 тыс. руб. Он предлагает вернуть долг равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых 1) ежемесячно; 2) ежеквартально; 3) ежегодно.

Решение

Выразим n из формулы (5.6), подставляя значения всех известных параметров.

1) Формула (5.6) при $A = 50$; $r = 0{,}12$; $m = 12$; $p = 1$ имеет вид:

$$200 = 50 \cdot \frac{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}12}{12}\right)^{-12n}}{\dfrac{0{,}12}{12}} \cdot \frac{\dfrac{0{,}12}{12}}{\left(1 + \dfrac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1};$$

из этой формулы находим n

$$n = 5{,}92 \text{ лет}.$$

Долг будет погашен через $5{,}92$ года.

2) Формула (5.6) при $A = 50$; $r = 0{,}12$; $m = 4$ и $p = 1$ имеет вид:

$$200 = 50 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{-4n}}{\frac{0{,}12}{4}} \cdot \frac{\frac{0{,}12}{4}}{\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{4}};$$

$$n = 5{,}89 \text{ лет.}$$

Долг будет погашен через $5{,}89$ года.

3) Формула (5.6) при $A = 50$; $r = 0{,}12$; $m = 1$ и $p = 1$ имеет вид

$$200 = 50 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-n}}{0{,}12};$$

$$n = 5{,}77 \text{ лет.}$$

Долг будет погашен через $5{,}77$ года.

Задача 6

Господин X выплатил жене при разводе 1 млн руб. Жена после развода планирует получать ежемесячно одинаковые суммы в течение 20 лет. Какую сумму она будет получать, при условии, что процентная ставка по вкладам в банк равна 10% годовых?

Решение

1 млн долл. — это приведенная стоимость срочной ренты постнумерандо, срок ренты — 20 лет, выплаты по ренте — ежемесячные. Величину неизвестного платежа находим из формулы (5.5) при $PV_{pst} = 1\,000\,000$; $n = 20$; $m = 1$; $p = 12$:

$$1\,000\,000 = A \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-20}}{(1 + r)^{1/12} - 1};$$

$$A = 9336.$$

Ежемесячно жена будет получать 9336 руб.

Задача 7

Клиент в конце каждого года вкладывает 300 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 10% годовых. Определить сумму, которая будет на счете через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?

Решение

По формуле (5.1) при $A = 300$; $r = 10\%$; $n = 7$:

$$FV_{pst} = 300 \cdot FM3(10\%, 7) = 300 \cdot 9{,}487 = 2846{,}1.$$

Через 7 лет на счете накопится 2846100 руб.

Величину однократного взноса в начале первого года находим по формуле (2.2) при $F = 2846{,}1$; $r = 10\%$; $n = 7$:

$$P = 2846{,}1 \cdot FM2(10\%, 7) = 2846{,}1 \cdot 0{,}51 = 1450{,}44.$$

Взнос равен $1\,450\,440$ руб.

Задача 8

Фирме предложено инвестировать 200 млн руб. на срок 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 50 млн руб.); по истечении четырех лет будет выплачено дополнительное вознаграждение в размере 25 млн руб. Примет ли она это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 8% годовых?

Решение

По формуле (2.1) при $P = 200000$; $r = 0{,}08$; $n = 4$ определим сумму, которая накопится на счете, если положить деньги в банк:

$$F1 = 200 \cdot (1 + 0{,}08)^4 = 272{,}098.$$

По формуле (5.1) при $A = 50000$; $r = 8\%$; $n = 4$ определим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst} = 50 \cdot FM3(8\%, 4) = 50 \cdot 4{,}5061 = 225{,}305.$$

С учетом дополнительного вознаграждения в 25 млн руб., при условии инвестирования 200 млн, на конец четвертого года на счете фирмы будет сумма, равная

$$F2 = 225{,}305 + 25 = 250{,}305.$$

$F1 > F2$, поэтому фирме выгодно положить деньги в банк и не принимать данное предложение.

Задача 9

Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты будут осуществляться 1) через 3 года; 2) немедленно, а сложная процентная ставка равна 4% годовых?

Решение

1) Используем формулу (5.9), считая полугодие базовым периодом, при $h = 6$

$$PV_{psr} = 100 \cdot FM2(2\%, 6) \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 0{,}888 \cdot 22{,}3965 = 1988{,}809.$$

Ренту можно приобрести за $1\,988\,809$ руб.

2) Используем формулу (5.3), считая полугодие базовым периодом:

$$PV_{pst} = 100 \cdot FM4(2\%, 30) = 100 \cdot 22{,}3965 = 2239{,}65.$$

Ренту можно приобрести за $2\,239\,650$ руб.

Задача 10

Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 350 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 60 тыс. руб. в банк под 28% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты а) ежегодно; б) по полугодиям.

Решение

а) Выразим n из формулы (5.1):

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{FV}{A}\cdot r + 1\right)}{\ln(1+r)};$$

$FV = 350$, $A = 60$, $r = 28\%$, поэтому

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{350}{60}\cdot 0{,}28 + 1\right)}{\ln(1+0{,}28)} = 3{,}92.$$

Для создания фонда потребуется $3{,}92$ года.

б) Найдем срок, подставляя в формулу (5.5) значения всех известных параметров, и выразим n, учитывая, что $p = 1$, $m = 2$:

$$350 = 60\frac{\left(1+\dfrac{0{,}28}{2}\right)^{2\cdot n} - 1}{\left(1+\dfrac{0{,}28}{2}\right)^{2} - 1},$$

$$1{,}14^{2\cdot n} = 2{,}748,$$

$$n = \frac{\ln 2{,}748}{2\ln 1{,}14} = 3{,}857.$$

Таким образом, $n = 3{,}857$ года.

Задача 11

Первоначальная рента имеет следующие параметры: $A_1 = 2$ тыс. руб.; $r = 9\%$; $n_1 = 5$ лет. Необходимо заменить ее на ренту со следующими параметрами: $r = 9\%$; $n_2 = 8$ лет и найти платеж новой ренты A_2.

Решение

Используем формулу $A_2 = A_1 \cdot \dfrac{FM4(n_1, r)}{FM4(n_2, r)}\cdot (1+r)^t$ при $A_1 = 2$; $n_1 = 5$; $r = 9\%$; $n_2 = 8$; $t = 0$:

$$A_2 = 2\cdot\frac{FM4(9\%, 5)}{FM4(9\%, 8)} = 2\cdot\frac{3{,}89}{5{,}54} = 1{,}405.$$

Платеж новой ренты равен $1\,405$ руб.

Задача 12

Объединяются три ренты с параметрами:

$A_1 = 1000$ *руб.;* $r_1 = 6\%$*;* $n_1 = 10$ *лет,*

$A_2 = 500$ *руб.;* $r_2 = 5\%$*;* $n_2 = 8$ *лет,*

$A_3 = 2000$ *руб.;* $r_3 = 5\%$*;* $n_3 = 12$ *лет.*

Необходимо найти платеж объединенной ренты, если ее срок составляет 10 лет, процентная ставка равна 6% годовых.

Решение

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу 5.1:

Таблица 5.1

№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	$FM4(r,n)$	PV
1	1000	10	7,36	7360,09
2	500	8	6,46	3231,61
3	2000	12	8,86	17726,5
Итого				28318,2

Размер платежа ренты находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4\,(r,n)} = \frac{PV}{FM4\,(6\%,10)} = \frac{28318{,}2}{7{,}36} = 3847{,}54.$$

Платеж объединенной ренты равен 3847 руб. 54 коп.

Практическое занятие 6

ПЕРЕМЕННЫЙ АННУИТЕТ

Аннуитет называется переменным, если его члены различны по величине. Для оценки переменного аннуитета используют общие формулы оценки денежного потока. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с некоторыми законами (в частности, образуют арифметическую или геометрическую прогрессию), то общие формулы для определения будущей или приведенной стоимости аннуитета можно упростить.

Основные формулы раздела

Будущая стоимость аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

$$FV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) FM3\,(r,n) - \frac{zn}{r}. \tag{6.1}$$

Приведенная стоимость аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) FM4\,(r,n) - \frac{zn}{r(1+r)^n}. \tag{6.2}$$

Будущая стоимость аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

$$FV_{pre} = (1+r) \cdot \left(A + \frac{z}{r}\right) FM3\,(r,n) - (1+r)\,\frac{zn}{r}. \tag{6.3}$$

Приведенная стоимость аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

$$PV_{pre} = (1+r) \cdot \left(A + \frac{z}{r}\right) FM4\,(r,n) - \frac{zn}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{6.4}$$

Будущая стоимость аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{6.5}$$

Приведенная стоимость аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{6.6}$$

Будущая стоимость аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

$$FV_{pre} = A \cdot (1+r)\, \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{6.7}$$

Приведенная стоимость аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

$$PV_{pre} = \frac{A}{(1+r)^{n-1}} \cdot \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{6.8}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 6 лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 5 тыс. руб., каждая следующая будет увеличиваться на 0,4 тыс. руб. Оценить этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 10% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,4 тыс. руб.?

Решение

По формулам (6.1) и (6.2) при $A = 5$, $n = 6$, $r = 0{,}1$ и, если суммы возрастают, то $z = 0{,}4$:

$$FV_{pst} = \left(5 + \frac{0{,}4}{0{,}1}\right) \cdot FM3\,(10\%, 6) - \frac{0{,}4 \cdot 6}{0{,}1} = 45{,}441.$$

$$PV_{pst} = \left(5 + \frac{0{,}4}{0{,}1}\right) \cdot FM3\,(10\%, 6) - \frac{0{,}4 \cdot 6}{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^6} = 25{,}650.$$

Если суммы будут уменьшаться, то $z = -0{,}4$:

$$FV_{pst} = \left(5 - \frac{0{,}4}{0{,}1}\right) \cdot FM3\,(10\%, 6) + \frac{0{,}4 \cdot 6}{0{,}1} = 31{,}716.$$

$$PV_{pst} = \left(5 - \frac{0{,}4}{0{,}1}\right) \cdot FM3\,(10\%, 6) + \frac{0{,}4 \cdot 6}{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^6} = 17{,}903.$$

Задача 2

За 6 лет необходимо накопитъ 30 тыс. долл. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 800 долл. и процентная ставка равна 8% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 2 тыс. долл.

Решение

Величину первого вклада найдем из формулы (6.1) при $FV_{pst} = 30000$; $z = 800$; $n = 6$; $r = 0{,}08$:

$$30000 = \left(A + \frac{800}{0{,}08}\right) \cdot FM3(8\%, 6) - \frac{800 \cdot 6}{0{,}08}.$$

Из полученного уравнения находим размер первого вклада: $A = 2268$. Размер первого вклада равен 2268 долл.

Если же известна величина первого вклада $A = 2000$ долл. и неизвестна величина z абсолютного изменения денежных поступлений, то формула (6.1) примет вид:

$$30000 = \left(2000 + \frac{z}{0{,}08}\right) \cdot FM3(8\%, 6) - \frac{z \cdot 6}{0{,}08}.$$

Из полученного уравнения находим $z = 918$ долл.

Каждый год денежные поступления необходимо увеличивать на 918 долл.

Задача 3

По условиям контракта в течение 7 лет в конце года платежи поступают на депозитный счет в банке. Первый платеж равен 4 тыс. долл., а каждый последующий платеж увеличивается на 10% по отношению к предыдущему. Оцените этот контракт, если на депозитный счет в конце каждого года начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

Решение

Поскольку ежегодно платежи увеличиваются в 1,1 раза (на 10%), то поступающие на счет платежи представляют собой переменный аннуитет постнумерандо с постоянным относительным изменением его членов. Поэтому для оценки контракта воспользуемся формулами (6.5) и (6.6) при $A = 4000$; $n = 7$; $r = 0{,}0$; $x = 1{,}1$:

$$FV_{pst} = 4000 \cdot \frac{1{,}1^7 - (1 + 0{,}08)^7}{1{,}1 - (1 + 0{,}08)} = 46979;$$

$$PV_{pst} = \frac{4}{(1 + 0{,}08)^7} \cdot \frac{1{,}1^7 - (1 + 0{,}08)^7}{1{,}1 - (1 + 0{,}08)} = 27412;$$

Будущая стоимость контракта составит 46979 долл., приведенная стоимость контракта составит 27412 долл.

Задача 4

Участок сдан в аренду на десять лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые шесть лет — по 10 тыс. долл., в оставшиеся четыре года — по 11 тыс. долл. Требуется оценить будущую стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

Решение

Решать данную задачу можно различными способами в зависимости от того, какие аннуитеты будут выделены аналитиком. Общая схема денежного потока представлена на рис. 6.1.

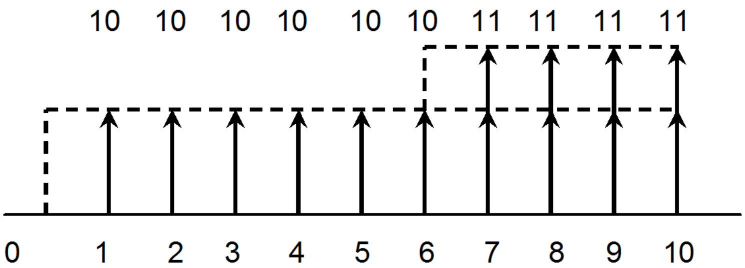


Рис. 6.1 – Аннуитет с изменяющейся величиной платежа

Будущая стоимость денежного потока должна оцениваться с позиции окончания последнего временного интервала. Рассмотрим следующие варианты решения задачи.

1) Исходный поток можно представить себе как сумму двух аннуитетов: первый продолжается шесть лет, платеж этого аннуитета равен $10\,000$; второй продолжается четыре года, его платеж равен $11\,000$. По формуле $FV = FM3(r, n)$ можно оценить будущую стоимость каждого аннуитета.

$$FV1 = 10FM3(15\%, 6) = 88;$$
$$FV2 = 11FM3(15\%, 4) = 55.$$

Так как величина $FV1$ рассчитана на момент окончания шестого года, то для расчета будущей стоимости необходимо при помощи формул наращения привести эту величину к моменту окончания года 10:

$$FV = FV1FM1(15\%, 4) + FV2 = 208.$$

2) Исходный поток можно представить себе как сумму двух аннуитетов: первый продолжается десять лет, платеж этого аннуитета равен $10\,000$; второй продолжается четыре года, его платеж равен $1\,000$. По формуле $FV = FM3(r, n)$ можно оценить будущую стоимость каждого аннуитета.

$$FV = 10FM3(15\%, 10) + 1FM3(15\%, 4) = 208.$$

Задача 5

За 10 лет необходимо накопить 60 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 300 руб. и процентная ставка равна 15% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определить, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 2,5 тыс. руб.

Решение

Полагая в (6.1) $n = 10$; $FV_{pst} = 60$; $z = 0{,}3$; $r = 0{,}15$; находим размер первого вклада:

$$A = \frac{60 + \dfrac{0{,}3 \cdot 10}{0{,}15}}{FM3(15\%, 10)} - \frac{0{,}3}{0{,}15} = 1{,}940 \text{ тыс. руб.}$$

Если же известна величина первого вклада $A = 2{,}5$ тыс. руб., то из (6.1) получим:

$$z = \frac{0{,}15\big(60 - 2{,}5 \cdot FM3(15\%, 10)\big)}{FM3(15\%, 10) - 10} = 0{,}135 \text{ тыс. руб.}$$

Практическое занятие 7

НЕПРЕРЫВНЫЙ АННУИТЕТ

Если в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины, то аннуитет считают непрерывным.

Оценки будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета можно вывести из формул для p-срочного аннуитета, переходя в них к пределу при $p \to \infty$.

Основные формулы раздела

Будущая стоимость непрерывного аннуитета с дискретным начислением процентов

$$FV_{pst} = \frac{A \cdot r}{m^2 \cdot \ln\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)} \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right). \tag{7.1}$$

Приведенная стоимость непрерывного аннуитета с дискретным начислением процентов

$$PV = \frac{A \cdot r}{m^2 \ln\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)} FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right). \tag{7.2}$$

Будущая стоимость непрерывного аннуитета с непрерывным начислением процентов

$$FV = A \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}. \tag{7.3}$$

Приведенная стоимость непрерывного аннуитета с непрерывным начислением процентов

$$PV = A \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{7.4}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

В течение 4-х лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 100 млн руб. Определите сумму, накопленную к концу четвертого года при использовании процентной ставки 15% годовых, если начисление сложных процентов осуществляется ежегодно.

Решение

Поскольку платежи поступают достаточно часто, можно считать, что они поступают непрерывным образом. Тогда можно воспользоваться формулой (7.1) для определения наращенной суммы непрерывного аннуитета при $A = 10$; $n = 4$, $m = 1$, $r = 0{,}15$:

$$FV = \frac{100 \cdot 0{,}15}{\ln(1 + 0{,}15)} \cdot 4{,}9934 = 535{,}92.$$

К концу четвертого года на счете в банке накопится $535\,920\,000$ руб.

Сравним этот результат со значением, полученным по формуле p-срочного аннуитета постнумепрандо при $p = 360$; $A = 10/360$; $n = 4$, $m = 1$, $r = 0{,}15$:

$$FV^{a}_{pst} = \frac{100}{360} \cdot \frac{4{,}9934}{\dfrac{(1 + 0{,}15)^{\frac{1}{360}-1}}{0{,}15}} = 535{,}81.$$

К концу четвертого года на счете в банке накопится $535\,810\,000$ руб.

Видим, что полученные величины отличаются на 3000 руб.

Задача 2

Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение трех лет, получая ежегодно выручку в размере 100 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться равномерно. Оцените ожидаемые денежные поступления, если применяется непрерывная ставка 20% годовых.

Решение

Поскольку в условии говорится о равномерном распределении продаж в течение года, то интенсивность потока выручки будет постоянной величиной, равной 300 млн руб. в год. Считая, что денежные поступления происходят непрерывно, воспользуемся формулами для определения соответственно будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета (7.3) и (7.4). Полагая $A = 100$; $n = 3$; $\delta = 0{,}2$, получим:

$$FV = 100 \cdot \frac{e^{0{,}2 \cdot 3} - 1}{0{,}2} = 411{,}06.$$

Оценка денежных поступлений на момент окончания третьего года равна $411{,}06$ млн руб.

$$PV = 300 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}2 \cdot 3}}{0{,}2} = 676{,}78.$$

Дисконтированная оценка денежных поступлений на момент начала первого года равна $676{,}78$ млн руб.

Задача 3

Финансовая компания в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 200 млн руб. ежегодно в течение пяти лет. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 10% за год и выплаты происходят постоянно и достаточно равномерно?

Решение

Для решения задачи необходимо найти приведенную стоимость непрерывного аннуитета по формуле (7.2) при $A = 20$ млн; $n = 5$; $m = 1$; $r = 0{,}10$:

$$PV = \frac{200 \cdot 0{,}1}{\ln(1 + 0{,}1)} \cdot FM4(10\%, 5) = 790{,}54.$$

Таким образом, имея $79{,}54$ млн руб. компания способна выполнить свои обязательства перед вкладчиками.

Задача 4

Десятилетняя рента с ежегодными суммарными платежами в размере 1 млн руб. выкупается за 4 млн руб. Определить срок этой ренты, если на платежи начисляются непрерывные проценты по ставке 10% годовых.

Решение

По условию задачи известна приведенная стоимость непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов. Срок ренты можно выразить из формулы (7.4):

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{PV}{A} \cdot \delta\right)}{\delta}.$$

Подставим в полученное выражение значения $A = 1$; $n = 10$; $PV = 4$; $\delta = 0{,}1$, получим

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{4}{1} \cdot 0{,}1\right)}{0{,}1} = 5{,}11.$$

Срок ренты равен $5{,}11$ года.

Практическое занятие 8

БЕССРОЧНЫЙ АННУИТЕТ

Аннуитет называется *бессрочным* (*perpetuity*), если денежные поступления продолжаются достаточно длительное время. Математически это означает, что $n \to \infty$. Бессрочный аннуитет также называют и *вечной рентой*.

В этом случае прямая задача (определение будущей стоимости аннуитета) не имеет смысла.

Основные формулы раздела

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета постунемрандо

$$PV_{pst} = \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+r}} = \frac{A}{r} = A \cdot FM4\left(r, \infty\right), \tag{8.1}$$

где $FM4(r, \infty) = 1/r$.

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с денежными поступлениями p раз за базовый период и начислением сложных процентов m раз за базовый период

$$PV_{pst} = \frac{A}{\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{8.2}$$

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с денежными поступлениями p раз за период и непрерывным начислением процентов по ставке δ

$$PV_{pst} = \frac{A}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}. \tag{8.3}$$

Приведенная стоимость бессрочного аннуитета пренумерандо

$$PV_{pst} = PV_{pst} + A. \tag{8.4}$$

Приведенная стоимость для бессрочного переменного аннуитета:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}, \ (z \geqslant 0); \tag{8.5}$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1 + r - q)}, \ (1 + r > q); \tag{8.6}$$

выводятся формулы для оценки бессрочного аннуитета при антисипативном начислении процентов.

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{1 - d}{d}; \tag{8.7}$$

$$PV_{pre} = \frac{A}{d}. \tag{8.8}$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Определить текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежегодным поступлением 520 тыс. руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 13% годовых.

Решение

По формуле (8.1) находим:

$$PV_{pst} = \frac{520}{0{,}13} = 4000.$$

Следовательно, если аннуитет предлагается по цене, не превышающей 4 млн руб., он представляет собой выгодную инвестицию.

Задача 2

Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 60 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 350 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 15% годовых?

Решение

Для ответа на вопрос необходимо найти истинную стоимость акции и сравнить ее с величиной 350 тыс. руб. Истинную стоимость акции находим из формулы (8.1) при $A = 60000$; $r = 0{,}15$:

$$PV = \frac{60000}{0{,}15} = 400\,000.$$

Так как истинная стоимость акции составляет $400\,000$ руб., то акции можно приобретать по цене $350\,000$ руб.

Задача 3

Фирма собирается учредить фонд для ежегодной выплаты пособий своим работникам. Выплаты будут производиться в конце года. Определить сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы обеспечить получение неограниченно долго в конце каждого года 80 тыс. долл., если банк начисляет:

а) ежегодно сложные проценты по ставке 16%;

б) ежеквартально сложные проценты по ставке 16%;

в) непрерывные проценты с силой роста 16%.

Решение

Денежный поток во всех случаях является бессрочным аннуитетом постнумерандо, причем $A = 80$ тыс. долл. Необходимо найти приведенную стоимость этого аннуитета:

а) по формуле (8.1) при $r = 0{,}16$, получим

$$PV_{pst}^{a} = \frac{80}{0{,}16} = 500.$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит 500 тыс. долл.;

б) по формуле (8.2) при $r = 0{,}16$; $m = 4$; $p = 1$ получим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{80}{\left(1 + \dfrac{0{,}16}{4}\right)^{4} - 1} = 470{,}98.$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит $470{,}98$ тыс. долл.;

в) по формуле (8.3) при $p = 1$; $\delta = 0{,}16$ получим:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = \frac{80}{e^{0{,}16} - 1} = 461{,}07.$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит $461{,}07$ тыс. долл.

Задача 4

Компания за предыдущий год выплатила 2 тыс. руб. за акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 200 руб. ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 33 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 12% годовых. Изменится ли ситуация, если дивиденды по акциям будут расти на 6% ежегодно в течение неопределенно долгого времени?

Решение

1) Для ответа на вопрос необходимо найти приведенную стоимость бессрочного переменного аннуитета. По формуле (8.5) при $A = 2000$; $z = 200$; $r = 0{,}12$ получаем $PV = 320556$.

Так как истинная стоимость акции меньше 33000, то приобретать ее за 33000 руб. не имеет смысла.

2) Для ответа на вопрос необходимо найти приведенную стоимость бессрочного переменного аннуитета. По формуле (8.6) при $A = 2000$; $q = 1{,}06$; $r = 0{,}12$ получаем $PV = 33333$.

Так как истинная стоимость акции больше 33000, то имеет смысл приобрести ее за 33000 руб.

Практическое занятие 9

ОЦЕНКА АННУИТЕТА С ПЕРИОДОМ БОЛЬШЕ ГОДА

На практике распространены аннуитеты, периоды которых больше, чем базовый период начисления процентов. Например, платежи аннуитета поступают каждые 2 года, а проценты начисляются ежегодно.

Будущая стоимость аннуитета постумерандо с денежными поступлениями, равными A, сложные ссудные проценты по ставке r начисляются m раз в год, период аннуитета составляет n периодов. Платежи аннуитета поступают через u периодов:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{FM3\left(\dfrac{r}{m}, n \cdot m\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, u \cdot m\right)}. \tag{9.1}$$

Приведенная стоимость аннуитета постумерандо с денежными поступлениями, равными A, сложные ссудные проценты по ставке r начисляются m раз в год, период аннуитета составляет n периодов. Платежи аннуитета поступают через u периодов:

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4\left(\dfrac{r}{m}, n \cdot m\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, u \cdot m\right)}. \tag{9.2}$$

Будущая стоимость аннуитета пренумерандо с денежными поступлениями, равными A, сложные ссудные проценты по ставке r начисляются m раз в год, период аннуитета составляет n периодов. Платежи аннуитета поступают через u периодов:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mu}. \tag{9.3}$$

Приведенная стоимость аннуитета пренумерандо с денежными поступлениями, равными A, сложные ссудные проценты по ставке r начисляются m раз в год, период аннуитета составляет n периодов. Платежи аннуитета поступают через u периодов:

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mu}. \quad (9.4)$$

При начислении непрерывных процентов с силой роста δ будущая стоимость аннуитета составит:

$$FV_{pst} = A \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta u} - 1}. \quad (9.5)$$

При начислении непрерывных процентов с силой роста δ приведенная стоимость аннуитета составит

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{e^{\delta \cdot u} - 1}. \quad (9.6)$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1

Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 12 лет, в соответствии с которым на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будут поступать по 30 тыс. руб. Требуется определить сумму, накопленную на счете к концу действия контракта, если на поступающие суммы будут начисляться:

1) *ежегодно сложные проценты по номинальной ставке 24% годовых;*
2) *ежеквартально сложные проценты по номинальной ставке 24% годовых;*
3) *непрерывные проценты с силой роста 24%.*

Решение

Денежные поступления образуют постоянный аннуитет постнумерандо. Необходимо найти будущую стоимость аннуитета.

1) По формуле (9.1) при $A = 30$; $r = 24\%$; $n = 12$; $m = 1$; $u = 2$

$$FV_{pst} = 30 \cdot \frac{FM3\,(24\%, 12)}{FM3\,(24\%, 2)} = 30 \cdot \frac{50{,}8950}{2{,}24} = 681{,}63.$$

К концу действия контракта на счете накопится 681 630 руб.

2) По формуле (9.1) при $A = 30$; $r = 24\%$; $n = 12$; $m = 4$; $u = 2$

$$FV_{pst} = 30 \cdot \frac{FM3\,(6\%, 48)}{FM3\,(6\%, 8)} = 30 \cdot \frac{256{,}5645}{9{,}8975} = 777{,}66.$$

К концу действия контракта на счете накопится 777 660 руб.

3) По формуле (9.5) при $A = 30$; $\delta = 24\%$; $n = 12$; $u = 2$

$$FV_{pst} = 30 \cdot \frac{e^{0{,}24 \cdot 12} - 1}{e^{0{,}24 \cdot 2} - 1} = 818{,}78.$$

К концу действия контракта на счете накопится 818 780 руб.

Задача 2

Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение 15 лет в конце каждого трехлетнего периода снимать со счета 80 тыс. руб. и за 15 лет исчерпать счет полностью, если на находящиеся на счете денежные суммы будут начисляться:

1) *ежегодно сложные проценты по ставке 20 % годовых;*
2) *каждые полгода по ставке 20% годовых;*
3) *непрерывные проценты по ставке 20% годовых.*

Решение

Денежные потоки образуют аннуитет постнумерандо. Необходимо найти приведенную стоимость аннуитета.

1) По формуле (9.2) при $A = 80$; $r = 20\%$; $n = 15$; $m = 1$; $u = 3$

$$PV_{pst} = 80 \cdot \frac{FM4\,(20\%, 15)}{FM3\,(20\%, 3)} = 80 \cdot \frac{4{,}6755}{3{,}64} = 192{,}76.$$

На счет необходимо положить $192\,760$ руб.

2) По формуле (9.2) при $A = 80$; $r = 20\%$; $n = 15$; $m = 2$; $u = 3$

$$PV_{pst} = 80 \cdot \frac{FM4\,(10\%, 30)}{FM3\,(10\%, 6)} = 80 \cdot \frac{9{,}4269}{7{,}7156} = 97{,}74.$$

На счет необходимо положить $97\,740$ руб.

3) По формуле (9.6) при $A = 80$; $\delta = 20\%$; $n = 15$; $m = 1$; $u = 3$

$$PV_{pst} = 80 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}2 \cdot 15}}{e^{0{,}2 \cdot 3}} = 92{,}46.$$

На счет необходимо положить $92\,460$ руб.

Задача 3

Предприниматель приобрел оборудование на сумму 900 тыс. руб. в кредит под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать долг надо равными платежами в конце каждого второго года и выплатить весь долг за 10 лет. Необходимо определить величину каждого платежа и составить план погашения долга.

Решение

Поток платежей по кредиту представляет собой аннуитет постнумерандо. Платеж аннуитета A находим из формулы (9.2) при $r = 25\%$; $n = 10$; $m = 1$; $u = 2$; $PV_{pst} = 900$

$$A = \frac{PV_{pst} FM3\,(25\%, 2)}{FM4\,(25\%, 10)} = \frac{900 \cdot 2{,}25}{3{,}5705} = 567147.$$

Величина каждого платежа равна $567\,147$ руб.

Рассмотрим план погашения долга.

В течение первых двух лет предприниматель пользовался кредитом в сумме 900 тыс. руб., поэтому величина процентов за первые 2 года равна

$$900 \cdot (1 + 0{,}25)^2 - 900 = 506250.$$

Таким образом, платеж за первые два года состоит из двух частей:

$$567147 = 506250 \text{ (величина начисленных процентов)}+$$
$$+\,60897 \text{ (погашаемая часть долга).}$$

В следующие 2 года расчет повторяется при условии, что размер кредита, которым пользовался предприниматель, равен $900000 - 60897 = 839103$ руб., поэтому величина начисленных процентов составит

$$471995 = 839103 \cdot (1 + 0{,}25)^2 - 839103.$$

Погашаемая часть долга за следующие 2 года равна $567147 - 471995 = 95152$ и т. д.

С течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает.

План погашения долга представим в таблице 9.1.

Таблица 9.1

Номер двух-летия	**Остаток кредита на начало двухлетия**	**Величина платежа**	**В том числе**		**Остаток кредита на конец двухлетия**
			проценты за 2 года	**погашенная часть долга**	
1	900000	567147	506250	60897	839103
2	839103	567147	471995	95152	743951
3	743951	567147	418473	148674	595277
4	595277	567147	334843	232304	362974
5	362974	567147	204173	362974	0

Практическое занятие 10

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим правила расчетов при получении ссуды под проценты, которые начисляются на оставшийся непогашенный остаток. Ссуда возвращается равными годовыми платежами.

Типовые задачи с решениями

Задача 1

В банке получена ссуда в сумме 800 тыс. руб. под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать ссуду необходимо равными годовыми платежами. Требуется определить сумму годового платежа и составить план погашения долга.

Решение

Обозначим через A величину годового платежа. Поток этих платежей представляет собой аннуитет постнумерандо, приведенная стоимость которого равна 800 тыс. руб. поэтому величину платежа находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4\,(25\%, 6)} = \frac{800}{2{,}95} = 271{,}058.$$

Сумма годового платежа составит $271\,058$ руб.

Составим план погашения долга.

В течение первого года заемщик пользовался ссудой в размере $800\,000$ руб., поэтому платеж, сделанный в конце года и равный $271\,058$ руб., состоит из двух частей: процентов в сумме $200\,000$ руб. (25% от $800\,000$) и погашаемой части долга в сумме $271\,058 - 200\,000 = 71\,058$ руб.

В следующем году расчет повторяется при условии, что размер кредита, которым пользуется заемщик, равен $800\,000 - 71\,058 = 728\,942$ руб. Проценты за второй год будут равны $182\,236$ руб. (25% от $728\,942$), а погашаемая часть долга будет равна $271\,058 - 182\,236 = 88\,822$ руб.

Таким образом, с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает.

План погашения долга представим в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Год	Остаток ссуды на начало года	Сумма годового платежа	В том числе		Остаток ссуды на конец года
			проценты за год	проценты за 2 года	
1	800000	271058	200000	71058	728942
2	728942	271058	182236	88823	640120
3	640120	271058	160030	111028	529091
4	529091	271058	132273	138785	390306
5	390306	271058	97577	173481	216825
6	216825	271058	54232	216826	0

Данные в ходе вычислений округлялись, поэтому величина процентов в последней строке найдена балансовым методом: рассчитываем погашенную часть долга $216\,826$ руб., затем определяем величину процентов за год $271\,058 - 216\,826 =$ $= 54\,232$ руб. Суммируя величины в пятом столбце, получаем размер выданной ссуды: 800 000 руб.

Задача 2

Предприниматель получил ссуду в сумме 300 тыс. руб. под 20% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. В соответствии с финансовым соглашением предприниматель будет возвращать долг равными суммами по 102 тыс. руб. в конце каждого года. Составьте план погашения долга.

Решение

Поток годовых платежей представляет собой аннуитет постнумерандо, поэтому срок аннуитета находим из уравнения

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{PV_{pst}}{A} \cdot r\right)}{\ln(1 + r)} \text{ при } PV_{pst} = 300;\ A = 102;\ r = 0{,}2;$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{300}{102} \cdot 0{,}2\right)}{\ln(1 + 0{,}2)} = 4{,}867.$$

Получили нецелое количество лет. Поэтому первые четыре года величина годового платежа равна 102 тыс. руб., а в последнем пятом неполном году величина платежа уменьшится: она будет равна сумме остатка долга на начало пятого года и начисленных на этот остаток процентов.

План погашения долга представим в таблице 10.2.

Таблица 10.2

Год	**Остаток ссуды на начало года**	**Сумма годового платежа**	**В том числе**		**Остаток ссуды на конец года**
			проценты за год	**погашенная часть долга**	
1	300000	102000	60000	42000	258000
2	258000	102000	51600	50400	207600
3	207600	102000	41520	60480	147120
4	147120	102000	29424	72576	74544
5	74544	894534	14909	74544	0

Величина платежа в пятом году (89 453 руб.) равна остатку ссуды на начало года (74 544) и начисленным на этот остаток процентам 14 909 (20% от 74 544).

Задача 3

Кредитор заключил контракт, в соответствии с которым заемщик обязуется выплатить 600 тыс. руб. за 5 лет равными суммами в конце каждого года, причем на непогашенный остаток будут по полугодиям начисляться сложные проценты по годовой номинальной ставке 24%. По какой цене кредитор может продать этот контракт банку, который на ссуженные деньги ежеквартально начисляет сложные проценты по ставке 28% годовых?

Решение

Определим величину годового платежа, который заемщик должен вносить для погашения долга из формулы

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4\left(\dfrac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, \dfrac{m}{p}\right)} \text{ при } PV_{pst} = 600;\ n = 5;\ r = 0{,}24;\ m = 2;$$

$$A = 600 \cdot \frac{FM3\,(12\%, 2)}{FM4\,(12\%, 10)} = 600 \cdot \frac{2{,}12}{5{,}6502} = 22{,}512.$$

Величина годового платежа равна 22 512 руб.

Таким образом, банку предлагается выкупить аннуитет сроком на 5 лет и платежом A, равным 22 512. Цена, по которой банк может выкупить такой аннуитет, определяется по формуле

$$PV_{pst} = A \cdot \frac{FM4\left(\dfrac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\dfrac{r}{m}, \dfrac{m}{p}\right)} \text{ при } PV_{pst} = 600;\ n = 5;\ r = 0{,}28;\ m = 4;$$

$$PV = 22{,}512 \cdot \frac{FM4\,(7\%, 20)}{FM3\,(7\%, 4)} = 22{,}512 \cdot \frac{10{,}5940}{4{,}4399} = 53{,}716.$$

Банк может выкупить долг за 53 716 руб.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Изучение курса «Финансовые вычисления» предусматривает выполнение двух контрольных работ. Контрольные работы оформляются в текстовом файле в формате WORD.

Контрольные работы состоят из 5 вариантов. Выбор варианта осуществляется по обычной формуле.

Контрольная работа №1 включает задачи 1–10; контрольная работа №2 включает задачи 11–20. При решении необходимо сначала записать формулу; затем определить все параметры, которые в формулу подставляются, далее произвести все расчеты и сформулировать ответ.

В таблице 10.3 указано соответствие между задачами контрольной работы и темами учебного пособия.

Вариант 1

1) Предприниматель поместил в банк вклад в сумме 500 тыс. руб. под 10% годовых с ежеквартальной выплатой простых процентов. Какую сумму он будет получать каждый квартал? Как изменится сумма к получению при выплате простых процентов каждый месяц?
2) 10 апреля предприниматель получил ссуду в банке под простую учетную ставку 20% годовых и должен возвратить 18 ноября того же года 750 тыс. руб. Определить точным и приближенным способами сумму, полученную клиентом.
3) Предприниматель получил ссуду в банке в размере 20 млн руб. сроком на 5 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 25% годовых, на оставшиеся 3 года ставка равна 23% годовых. Найдите доход банка за 5 лет, если сложные ссудные проценты начисляются ежеквартально.
4) Вексель на сумму 800 тыс. руб. учитывается за 2 года до срока погашения. Какую сумму получит предъявитель векселя при учете по сложной учетной ставке 20% годовых?

Таблица 10.3

номер задачи	тема учебно-методического пособия
1	простые ставки
2	простые ставки
3	сложные ставки
4	сложные ставки
5	эквивалентные и эффективные ставки
6	замена платежей и консолидация платежей
7	начисление процентов в условиях инфляции
8	налоги и начисление процентов
9	оценка постоянных аннуитетов
10	оценка постоянных аннуитетов
11	определение параметров ренты
12	определение параметров ренты
13	аннуитеты с антисипативным начислением процентов
14	замена и консолидация рент
15	переменный аннуитет
16	непрерывный аннуитет
17	бессрочный аннуитет
18	аннуитет с периодом, большим, чем базовый
19	метод депозитной книжки
20	анализ доступности ресурсов к потреблению

5) Банк учитывает вексель за 300 дней до срока погашения по сложной учетной ставке 10% годовых при временной базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, если используется временная база 365 дней и банк хочет получить такой же доход?
6) Три платежа: 10 000 долл., срок погашения 15 мая; 20 000 долл., срок погашения 15 июня; 15 000 долл., срок погашения 15 августа заменяется одним платежом со сроком погашения 1 августа на основе простой процентной ставки. Определить сумму нового платежа.
7) На вклад начисляются сложные проценты: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Вычислить годовую номинальную процентную ставку, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 2%.
8) В банк на депозит внесено 5000 долл., срок депозита — полгода, простая ссудная ставка равна 5% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.
9) Страховая компания заключила договор с предприятием на 5 лет, установив годовой страховой взнос в сумме 800 тыс. руб.. Страховые взносы помеща-

ются в банк под сложную процентную ставку 10% годовых, начисляемую ежемесячно. Определите сумму, которую получит по данному контракту страховая компания при следующих условиях: а) взносы поступают в конце года; б) взносы поступают равными долями в конце каждого полугодия (по 400 тыс. руб.); в) взносы поступают равными долями в конце каждого квартала (по 200 тыс. руб.).

10) Раз в полгода делается взнос в банк по схеме постнумерандо в размере 500 долл. Банк ежемесячно начисляет сложные проценты по ставке 8% годовых. Какая сумма будет на счете через 5 лет?
11) Вы намерены сделать подарок в сумме 10 000 долл. своему 13-летнему сыну на момент его совершеннолетия (18 лет). С этой целью вы намерены заключить договор с банком, согласно которому вы будете делать ежеквартальные взносы в банк (схема пренумерандо), на которые банк будет ежегодно начислять проценты по ставке 8% годовых. Определите величину взноса. Какую сумму нужно было бы единовременно положить в банк сегодня, чтобы достичь той же цели?
12) Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 20 млн руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 2 млн руб. начисляются сложные проценты по ставке 7% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года?
13) Оцените ренту пренумерандо с ежегодными платежами в конце каждого года в сумме 150 тыс. руб., сложные проценты по учетной ставке 15% годовых, срок ренты — 10 лет. Сравните полученные результаты с оценкой ренты, на платежи которой начисляются сложные ссудные проценты по ставке 15% годовых.
14) Рента постнумерандо с платежами A=500 тыс. руб. и сроком 10 лет откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определить срок отложенной ренты при ставке пролонгирования 12% годовых.
15) За 10 лет предпринимателю необходимо накопить 50 млн руб.. Для этого предприниматель планирует ежегодно вносить некоторую сумму в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 10% годовых. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать платежи на 400 тыс. руб.? Денежные поступления осуществляются в начале каждого года.
16) В течение 5 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 300 тыс. руб. Определите сумму, накопленную на счете к концу пятилетнего срока при использовании сложной процентной ставки 8% годовых, считая, что платежи поступают непрерывным образом.
17) Стоит ли покупать за 55 000 руб. ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в сумме 60 000 руб. в течение 50 лет? При расчетах использовать сложную ставку 10% годовых, начисляемую ежеквартально.
18) Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 20 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода

будет поступать по 150 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие платежи ежегодно будут начисляться сложные ссудные проценты по ставке 8% годовых.

19) Вы заняли на 4 года 10 000 тыс. долл. под 14% , начисляемых по схеме сложных процессов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите величину годового платежа.

20) Вы имеете на счете 40 000 долл. и прогнозируете свой доход в течение следующих 2 лет в сумме 60 000 долл. и 70 000 долл. соответственно. Ожидаемая процентная ставка в эти годы будет 8 и 14%. Ваши минимальные расходы составят: в текущем году — 20 000 долл.; в следующие годы ожидается их прирост с темпом 10% в год. Рассчитайте потенциально доступную сумму к потреблению в каждом из следующих 2-х лет.

Вариант 2

1) Клиент поместил в банк 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 11% годовых. Какая сумма будет на его счете через а) 7 месяцев; б) три года; в) 4 года 3 месяца? При расчете используйте формулу обычного процента с приближенным числом дней.

2) Предприниматель получил ссуду в 600 тыс. руб. на полгода. Банк предоставляет ссуду на условиях начисления простых учетных процентов по ставке 16% годовых. Какую сумму предприниматель будет должен банку?

3) В банк вложены деньги в сумме 800 тыс. руб. на полтора года под 10% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите доход клиента в этой финансовой операции.

4) Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.

5) Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.

6) Контракт на выплату 10 000 долл. 1 ноября и выплату 5000 долл. 1 января следующего года необходимо заменить новым контрактом, в соответствии с которым 1 декабря выплачивается 6000 долл., оставшаяся сумма погашается 1 марта. Определить сумму второго платежа на основе простой ссудной ставки (следующий год не високосный).

7) Номинальная процентная ставка, компенсирующая при наращении инфляцию, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.

8) В банк на депозит внесено 7000 долл., срок депозита — квартал, простая ссудная ставка равна 8% годовых. Ставка налога на начисленные проценты

равна 2%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты и реальную доходность финансовой операции.

9) Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 200 тыс. руб. каждые полгода при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 7% с ежемесячным начислением процентов. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?

10) Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка 9% в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене имеет смысл приобретать эту ренту?

11) К моменту выхода на пенсию, т. е. через 8 лет , г-н N хочет иметь на счете 30 000 долл. Для этого намерен делать ежегодный взнос по схеме пренумерандо. Определите размер взноса, если банк предлагает 7% годовых.

12) Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн руб. начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года?

13) Какую сумму необходимо положить на депозит, чтобы в течение 15 лет снимать со счета в конце каждого года по 20 тыс. долл., если банк начисляет проценты по сложной учетной ставке 9% годовых? Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 9% годовых?

14) Годовая рента постнумерандо с платежами A=200 тыс. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка для пролонгирования равна 10% годовых. Определить размер платежа отложенной ренты. Как изменится ответ, если платежи в отложенной ренте будут производиться в начале года?

15) По условиям контракта на счет в банке в начале года в течение 6 лет поступают платежи. Первый платеж равен 50 тыс. руб., а каждый последующий по отношению к предыдущему увеличивается на 2%. Оцените этот контракт, если банк начисляет по вкладам сложные проценты из расчета 9% годовых.

16) Финансовая компания в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 15 млн руб. ежегодно в течение десяти лет. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 10% за год и выплаты происходят постоянно и достаточно равномерно?

17) Компания за предыдущий год выплатила 1 тыс. руб. за акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 50 руб. ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о це-

лесообразности покупки акций компании по цене 21 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 10% годовых.

18) Фирма решила создать фонд для обеспечения будущих расходов. С этой целью в конце каждых трех лет фирма перечисляет в банк по 500 тыс. руб. Какая сумма будет на счете через 9 лет, если на поступающие платежи будут начисляться: 1) по полугодиям сложные проценты по номинальной ставке 10% годовых; 2) непрерывные проценты с силой роста 10%?

19) Вы заняли на 5 лет 12 000 тыс. долл. под 12% , начисляемых по схеме сложных процессов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите, какая часть основной суммы кредита будет погашена за первые 2 года.

20) Вы выиграли в лотерею 1 млн руб. и анализируете следующие инвестиционные возможности: а) покупка дачи за 1 млн руб.; б) участие в краткосрочном инвестиционном проекте с ожидаемой годовой доходностью в 20%, требующем вложения 0,6 млн руб. Постройте линию возможностей потребления на следующий год, если банковская процентная ставка равна 12%.

Вариант 3

1) В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 250 тыс. руб. через 180 дней при взятом кредите в 200 тыс. руб. Определите доходность такой операции для банка, если банк использует простые обыкновенные проценты.

2) Банк за 20 дней до срока погашения учел вексель на сумму 40 тыс. руб. Доход банка составил 800 руб. Какую простую учетную ставку использовал банк, если считать в году 360 дней?

3) Клиент поместил 500 тыс. руб. в банк на 2 года под процентную ставку 10% годовых. Определите наращенную за это время сумму при начислении сложных процентов: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

4) В банк 5 июля предъявлен для учета вексель на сумму 200 тыс. руб. со сроком погашения 5 сентября того же года. Банк учитывает вексель по сложной учетной ставке 20% годовых, считая год равным 360 дней и проводя приблизительный подсчет дней. Определить сумму, которую получит векселедержатель, и доход банка.

5) Банк учитывает вексель по простой учетной ставке 22% годовых. Какой величины должна быть сложная учетная ставка с ежемесячным учетом, чтобы доход банка при учете векселя не изменился?

6) Два векселя: один номинальной стоимостью 20 000 руб. и сроком погашения 10 июня; другой номинальной стоимостью 50 000 руб. и сроком погашения 1 августа заменяются одним с продлением срока погашения до 1 октября. Определить номинальную стоимость нового векселя при использовании простой учетной ставки 8% годовых.

7) На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 4-х лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 6%, 7%, 8% и 9%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма вклада через четыре года по своей покупательной способности не уменьшилась?
8) В банк на депозит внесено 5000 долл., срок депозита — три года, сложная ссудная ставка равна 9% годовых. Ставка налога на начисленные проценты равна 3%. Определить наращенную сумму с учетом налога на проценты, сумму уплаченного налога и реальную доходность финансовой операции.
9) Раз в квартал делается взнос в банк по схеме постнумерандо в размере 400 долл. Банк ежемесячно начисляет сложные проценты по ставке 5% годовых. Какая сумма будет на счете через 6 лет?
10) Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 8% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 300 тыс. руб., исчерпав счет полностью, при следующих условиях: 1) банк начисляет сложные проценты ежеквартально; 2) банк начисляет сложные проценты ежемесячно?
11) Вам необходимо накопить 25 тыс. долл. за 8 лет. Каким должен быть ежегодный взнос в банк (схема пренумерандо), если банк предлагает 10% годовых. Какую сумму нужно было бы единовременно положить в банк сегодня, чтобы достичь той же цели?
12) Некоторая фирма создала фонд в размере 10 млн руб. для премирования своих работников. Фирма предполагает ежегодно выплачивать работникам 1 млн руб. Найти срок использования фонда, если банк начисляет ежегодно сложные проценты по ставке 6% годовых.
13) Какую сумму необходимо положить на депозит, чтобы в течение 15 лет снимать со счета в начале каждого года по 10 тыс. долл., если банк начисляет проценты по сложной учетной ставке 8% годовых? Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 8% годовых?
14) Необходимо выкупить полугодовую ренту с платежами в 50 тыс. руб., срок ренты — 10 лет; сложные проценты по ставке 10% начисляются по полугодиям. Определить сумму выкупа ренты.
15) За 5 лет необходимо накопитъ 2 млн руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 200 тыс. руб. и процентная ставка равна 8% годовых? Денежные поступления осуществляются в начале каждого года.
16) Месторождение полезных ископаемых будет разрабатываться в течение 8 лет, при этом ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения составят в среднем 300 млн руб. в год. Определите приведенную стоимость ожидаемого дохода при использовании сложной процентной ставки 10% годовых и в предположении, что отгрузка и реализация продукции будут непрерывны и равномерны.

17) Определить текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежемесячными поступлениями в сумме 10 тыс. руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 14% годовых, начисляемых ежеквартально.

18) Определить сумму, которую необходимо поместить на счет в банке, чтобы в течение 16 лет в конце каждого двухлетнего периода иметь возможность снимать со счета 100 тыс. руб. и концу срока снять все деньги со счета, если банк начисляет на вклады 1) ежегодно сложные проценты по ставке 8% годовых; 2) ежеквартально сложные проценты по ставке 8% годовых; 3) непрерывные проценты с силой роста 8% годовых.

19) Вы заняли на 6 лет 15 000 тыс. долл. под 10% , начисляемых по схеме сложных процессов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите: а) какой процент будет уплачен в третьем году? б) какая часть кредита останется непогашенной по истечении первых трех лет?

20) Вы выиграли в лотерею 1 млн руб. и анализируете следующие инвестиционные возможности: а) покупка дачи за 1 млн руб.; б) участие в краткосрочном инвестиционном проекте с ожидаемой годовой доходностью в 25%, требующем вложения 0,7 млн руб. Постройте линию возможностей потребления на следующий год, если банковская процентная ставка равна 10%.

Вариант 4

1) Предприниматель взял в банке ссуду на 3 года под процентную ставку 25% годовых. Определить, во сколько раз к концу срока сумма долга будет больше выданной банком суммы, если банк начисляет простые проценты.

2) Векселедержатель 1 октября предъявил для учета вексель на сумму 600 тыс. руб. со сроком погашения 25 октября текущего года. Банк учел вексель по простой учетной ставке 20% годовых. Какую сумму получит векселедержатель от банка?

3) Банк предоставил ссуду в размере 500 тыс. руб. на 33 месяца под процентную ставку 28% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму нужно будет вернуть банку по окончании срока при использовании следующих условиях: 1) при расчетах используется схема сложных процентов; б) при расчетах используется смешанная схема?

4) Долговое обязательство на выплату 2 млн руб. учтено за 2 года до срока. Определить полученную сумму, если производилось: а) полугодовое; б) поквартальное; в) помесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 20% годовых.

5) Банком выдан кредит на 9 месяцев под 24% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

6) Принято решение объединить три платежа стоимостью 10 000 долл., 20 000 долл. и 15 000 долл., срок уплаты которых наступит соответственно

через 135, 166 и 227 дней от настоящего момента времени, в один платеж, равный им по сумме. Определить срок консолидированного платежа при использовании простой процентной ставки 8% годовых.

7) На вклад в 900 тыс. руб. каждые полгода начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 8%. Оцените сумму вклада через 1,5 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции — 0,5% за квартал.
8) В банк на депозит внесено 100 тыс. руб., срок депозита — три года, сложная ссудная ставка равна 8% годовых. Определить ставку налога на начисленные проценты, если после его уплаты у вкладчика осталось 120 тыс. руб.
9) В начале каждого года вы вкладываете 500 тыс. руб. в банк, ежегодно начисляющий сложные проценты по ставке 9% годовых. Определить сумму, которая накопится на счете через 5 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк, то какой величины должен быть взнос?
10) Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение 8 лет иметь возможность снимать со счета по 3000 в конце каждого полугодия и за 8 лет исчерпать счет полностью, если банк ежеквартально начисляет сложные проценты по ставке 10% годовых?
11) Предприниматель планирует накопить 1 млн руб., осуществляя в начале каждого года равные вклады в банк под сложную ссудную ставку 10% годовых. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы накопить необходимую сумму 1) за 5 лет; 2) за 10 лет?
12) Некоторая фирма создала фонд в размере 5 млн руб. для премирования своих работников. Фирма предполагает ежегодно выплачивать работникам 600 тыс. руб. Найти срок использования фонда, если банк начисляет ежегодно сложные проценты по ставке 8% годовых.
13) Ежегодно в конце года на депозит вносится 100 тыс. руб. Какая сумма накопится на депозите через 5 лет, если банк ежегодно начисляет сложные проценты по учетной ставке 10% годовых. Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 10% годовых?
14) Найти годовую ренту — сумму сроком в 10 лет для двух годовых рент: одна продолжается 5 лет с годовым платежом 1 млн руб., другая — продолжительностью 8 лет и годовым платежом 0,8 млн руб. Годовая ставка сложных процентов равна 8%.
15) Согласно условиям финансового контракта на счет в банке в течение 5 лет будут поступать в начале года денежные суммы, первая из которых равна 60 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 3 тыс. руб. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 12% годовых и сложные проценты начисляются в начале года.
16) Финансовая компания в течение трех лет в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам 8 млн руб. ежегодно. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 12% за год и выплаты происходят постоянно и достаточно непрерывно?

17) Фирма собирается учредить фонд для ежегодной выплаты пособий своим работникам. Выплаты будут производиться в конце года. Определить сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы обеспечить получение неограниченно долго в конце каждого года 1 млн руб., если банк начисляет: а) ежегодно сложные проценты по ставке 10%; б) ежеквартально сложные проценты по ставке 10%; в) непрерывные проценты с силой роста 10%.
18) На счет в банке в начале каждого трехлетнего периода будут поступать по 100 тыс. руб. Определить сумму, накопленную на счете через 15 лет, если на поступающие платежи будут начисляться сложные ссудные проценты по ставке 7% годовых.
19) Вы заняли на 5 лет 10 000 тыс. долл. под 8% , начисляемых по схеме сложных процессов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите общую сумму процентов к выплате.
20) Вы выиграли в лотерею 1 млн руб. и анализируете следующие инвестиционные возможности: а) покупка дачи за 1 млн руб.; б) участие в краткосрочном инвестиционном проекте с ожидаемой годовой доходностью в 25%, требующем вложения 0,7 млн руб. Постройте линию возможностей потребления на следующий год, если банковская процентная ставка равна 10%.

Вариант 5

1) Банк выдал ссуду на 35 дней в размере 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 20% годовых. Рассчитать доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году а) 360 дней; б) 365 дней.
2) Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 31 марта того же года. Банк учел вексель по простой учетной ставке 15% годовых и выплатил клиенту 250 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год високосный?
3) За какой срок исходная сумма в 150 тыс. руб. возрастет до 500 тыс. руб., если сложные проценты по процентной ставке 8% годовых начисляются а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?
4) Вы имеете вексель на сумму 1,5 млн руб. и хотели бы при его учете по сложной учетной ставке за 2 года до срока погашения получить 2/3 этой суммы. Какая должна быть годовая учетная ставка при дисконтировании поквартально?
5) Рассчитайте эффективную годовую процентную ставку, если номинальная ставка равна 10% годовых и проценты начисляются: а) ежегодно; в) ежеквартально; в) ежемесячно.
6) Принято решение объединить три платежа стоимостью 10 000 долл., 20 000 долл. и 15 000 долл., срок уплаты которых наступит соответственно через 135, 166 и 227 дней от настоящего момента времени, в один платеж стоимостью 500 000 руб. Определить срок консолидированного платежа при использовании простой процентной ставки 6% годовых.

7) На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 2%?
8) Вкладчик имеет 180 тыс. рублей и планирует увеличить эту сумму до 200 тыс. руб. через полгода. Определить требуемую простую годовую ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на начисленные проценты равна 2%.
9) Анализируются два плана накопления денежных средств по схеме аннуитета пренумерандо: 1) класть на депозит 100 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет сложные проценты по ставке 8% с ежеквартальным начислением процентов; 2) делать ежегодный вклад в размере 420 тыс. руб. при условии, что банк ежегодно начисляет сложные проценты по ставке 7%. Какая сумма будет на счете через 5 лет при реализации каждого плана?
10) Какую сумму необходимо поместить в банк под процентную ставку 10% годовых, чтобы в течение 5 лет иметь возможность ежегодно получать по 120 тыс. руб., снимая деньги равными долями каждые 2 месяца (по 20 тыс. рублей), и в конце пятого года исчерпать счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?
11) Вы намерены купить дачу и для этой цели планируете накопить 10 тыс. долл. через 5 лет. Каким должен быть ежеквартальный взнос в банк (схема пренумерандо), если банк предлагает 12% годовых, начисляемых ежеквартально.
12) Какой срок необходим для того, чтобы на депозите накопилось 10 млн руб., при условии, что на ежегодные взносы в сумме 1 млн руб. начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых? Взносы на депозит делаются в начале каждого года. Как изменится срок, если взносы на депозит будут в конце каждого года?
13) Ежегодно в начале года на депозит вносится 200 тыс. руб. Какая сумма накопится на депозите через 5 лет, если банк ежегодно начисляет сложные проценты по учетной ставке 12% годовых. Как изменится ответ, если банк будет начислять проценты по сложной ссудной ставке 12% годовых?
14) Индивидуальный предприниматель погашает кредит равными ежемесячными платежами в 100 тыс. руб. в течение 3-х лет. Банк согласился уменьшить платежи до 80 тыс. руб. Насколько увеличится срок погашения кредита, если банк использует сложную ставку 12% годовых с ежемесячным начислением процентов?
15) За 5 лет необходимо накопить 4 млн руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15% и процентная ставка равна 14% годовых ? Денежные поступления и начисление процентов осуществляются в конце года.

16) Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение 4-х лет, получая ежегодно выручку в размере 50 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться равномерно. Оцените ожидаемый доход фирмы, если применяется непрерывная ставка 22% за год.

17) Определить ежемесячные поступления бессрочного аннуитета постнумерандо, если его приведенная стоимость равна 100 тыс. руб. и предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 12% годовых, начисляемых ежеквартально.

18) В течение 8 лет на счет в банке каждые 2 года вносится по 100 тыс. руб. по схеме: 1) постнумерандо; 2) пренумерандо. На поступающие платежи банк ежеквартально начисляет сложные проценты по ставке 8% годовых. Какая сумма накопится на депозите в конце 8-го года?

19) Предприятие приобрело здание за 20 000 долл. на следующих условиях: а) 25% стоимости оплачиваются немедленно; б) оставшаяся часть погашается равными годовыми платежами в течение 10 лет с начислением 12% годовых на непогашенную часть кредита по схеме сложных процентов. Определите величину годового платежа.

20) Ваш доход в следующем году возрастет на 5 000 руб., что составит 12% к доходу текущего года. Расходы на потребление текущего года — 35 000 руб. Каков потенциальный объем средств к потреблению в следующем году, если банковская процентная ставка равна 17%?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе изучения дисциплины студент должен освоить методы расчета приведенной и будущей стоимости платежей и денежных потоков; научиться применять различные схемы начисления процентов.

Методы финансовых вычислений важны в практическом применении, при принятии решений о поиске источников финансирования и определении вариантов вложения временно свободных денежных средств. Невозможно стать «хорошим» финансовым менеджером, только читая теоретические монографии, учебники и руководства. Необходимо умение ориентироваться в методах, привлекаемых для получения оценок в области кредитования и инвестирования. Разбирая материал, представленный в пособии, можно научиться рассчитывать подобные оценки.

Сложность и обоснованность решений финансового менеджера определяются не сложностью привлекаемого математического аппарата, а ответственностью за возможные последствия. Непродуманно составленный договор о некоторой финансовой операции может привести к существенным финансовым потерям. Например, может быть не учтена инфляция или налогообложение начисленных процентов либо в контракте может быть указана не эффективная, а номинальная ставка, т. е. реальная доходность финансовой операции может оказаться ниже ожидаемой.

Повышение финансово-аналитической подготовки экономистов и менеджеров — одно из важнейших направлений совершенствования системы высшего профессионального образования. Печальный опыт российских финансовых пирамид говорит и о том, что введение курса «финансовые вычисления» в университетские программы является оправданным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Четыркин Е. М. Финансовая математика. : учебник / Е. М. Четыркин. — 8-е изд.— М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008. — 400 с.

[2] Финансовая математика : учеб. пособие / Е. В. Ширшов [и др.]. — М.: Издательство «Кнорус», 2011. — 200 с.

[3] Печенежская И. А. Финансовая математика : сб. задач / И. А. Печенежская. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. — 186 с.

[4] Ковалев В. В. Финансовый менеджмент. Теория и практика : учебник / В. В. Ковалев. — М. : Проспект, 2008. — 1024 с.

Приложение А

ФИНАНСОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Мультиплицирующий множитель $FM1(r,n) = (1+r)^n$, характеризующий будущую стоимость одной денежной единицы на конец периода n

n	r									
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1.010	1.020	1.030	1.040	1.050	1.060	1.070	1.080	1.090	1.100
2	1.020	1.040	1.061	1.082	1.102	1.124	1.145	1.166	1.188	1.210
3	1.030	1.061	1.093	1.125	1.158	1.191	1.225	1.260	1.295	1.331
4	1.041	1.082	1.126	1.170	1.216	1.262	1.311	1.360	1.412	1.464
5	1.051	1.104	1.159	1.217	1.276	1.338	1.403	1.469	1.539	1.611
6	1.062	1.126	1.194	1.265	1.340	1.419	1.501	1.587	1.677	1.772
7	1.072	1.149	1.230	1.316	1.407	1.504	1.606	1.714	1.828	1.949
8	1.083	1.172	1.267	1.369	1.477	1.594	1.718	1.851	1.993	2.144
9	1.094	1.195	1.305	1.423	1.551	1.689	1.838	1.999	2.172	2.358
10	1.105	1.219	1.344	1.480	1.629	1.791	1.967	2.159	2.367	2.594
11	1.116	1.243	1.384	1.539	1.710	1.898	2.105	2.332	2.580	2.853
12	1.127	1.268	1.426	1.601	1.796	2.012	2.252	2.518	2.813	3.138
13	1.138	1.294	1.469	1.665	1.886	2.133	2.410	2.720	3.066	3.452
14	1.149	1.319	1.513	1.732	1.980	2.261	2.579	2.937	3.342	3.797
15	1.161	1.346	1.558	1.801	2.079	2.397	2.759	3.172	3.642	4.177
16	1.173	1.373	1.605	1.873	2.183	2.540	2.952	3.426	3.970	4.595
17	1.184	1.400	1.653	1.948	2.292	2.693	3.159	3.700	4.328	5.054
18	1.196	1.428	1.702	2.026	2.407	2.854	3.380	3.996	4.717	5.560
19	1.208	1.457	1.753	2.107	2.527	3.026	3.616	4.316	5.142	6.116
20	1.220	1.486	1.806	2.191	2.653	3.207	3.870	4.661	5.604	6.727
21	1.232	1.516	1.860	2.279	2.786	3.399	4.140	5.034	6.109	7.400
22	1.245	1.546	1.916	2.370	2.925	3.603	4.430	5.436	6.658	8.140
23	1.257	1.577	1.974	2.465	3.071	3.820	4.740	5.871	7.258	8.954
24	1.270	1.608	2.033	2.563	3.225	4.049	5.072	6.341	7.911	9.850
25	1.282	1.641	2.094	2.666	3.386	4.292	5.427	6.848	8.623	10.834
30	1.348	1.811	2.427	3.243	4.322	5.743	7.612	10.062	13.267	17.449
35	1.417	2.000	2.814	3.946	5.516	7.686	10.676	14.785	20.413	28.102
40	1.489	2.208	3.262	4.801	7.040	10.285	14.974	21.724	31.408	45.258
45	1.565	2.438	3.781	5.841	8.985	13.764	21.002	31.920	48.325	72.888
50	1.645	2.691	4.384	7.106	11.467	18.419	29.456	46.900	74.354	11.739

Дисконтирующий множитель $FM2\left(r,n\right) = 1/\left(1+r\right)^n$, характеризующий приведенную стоимость одной денежной единицы, ожидаемой к получению через n периодов

n	r										
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
1	.990	.980	.971	.962	.952	.943	.935	.926	.917	.909	.901
2	.980	.961	.943	.925	.907	.890	.873	.857	.842	.826	.812
3	.971	.942	.915	.889	.864	.840	.816	.794	.772	.751	.731
4	.961	.924	.888	.855	.823	.792	.763	.735	.708	.683	.659
5	.951	.906	.863	.822	.784	.747	.713	.681	.650	.621	.593
6	.942	.888	.837	.790	.746	.705	.666	.630	.596	.564	.535
7	.933	.871	.813	.760	.711	.665	.623	.583	.547	.513	.482
8	.923	.853	.789	.731	.677	.627	.582	.540	.502	.467	.434
9	.914	.837	.766	.703	.645	.592	.544	.500	.460	.424	.391
10	.905	.820	.744	.676	.614	.558	.508	.463	.422	.386	.352
11	.896	.804	.722	.650	.585	.527	.475	.429	.388	.350	.317
12	.887	.789	.701	.625	.557	.497	.444	.397	.356	.319	.286
13	.879	.773	.681	.601	.530	.469	.415	.368	.326	.290	.258
14	.870	.758	.661	.577	.505	.442	.388	.340	.299	.263	.232
15	.861	.743	.642	.555	.481	.417	.362	.315	.275	.239	.209
16	.853	.728	.623	.534	.458	.394	.339	.292	.252	.218	.188
17	.844	.714	.605	.513	.436	.371	.317	.270	.231	.198	.170
18	.836	.700	.587	.494	.416	.350	.296	.250	.212	.180	.153
19	.828	.686	.570	.475	.396	.331	.277	.232	.194	.164	.138
20	.820	.673	.554	.456	.377	.312	.258	.215	.178	.149	.124
21	.811	.660	.538	.439	.359	.294	.242	.199	.164	.135	.112
22	.803	.647	.522	.422	.342	.278	.226	.184	.150	.123	.101
23	.795	.634	.507	.406	.326	.262	.211	.170	.138	.112	.091
24	.788	.622	.492	.390	.310	.247	.197	.158	.126	.102	.082
25	.780	.610	.478	.375	.295	.233	.184	.146	.116	.092	.174
30	.742	.552	.412	.308	.231	.174	.131	.099	.075	.057	.044
35	.706	.500	.355	.253	.181	.130	.094	.068	.049	.036	.026

Мультиплицирующий множитель $FM3(r,n) = \sum_{i=1}^{n}(1+r)^{n-i} = \left[(1+r)^n - 1\right]/r$, характеризующий будущую стоимость срочного аннуитета постнумерандо

n	r									
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060	2.070	2.080	2.090	2.100
3	3.030	3.060	3.091	3.122	3.152	3.184	3.215	3.246	3.278	3.310
4	4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375	4.440	4.506	4.573	4.641
5	5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637	5.751	5.867	5.985	6.105
6	6.152	6.308	6.468	6.633	6.802	6.975	7.153	7.336	7.523	7.716
7	7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394	8.654	8.923	9.200	9.487
8	8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897	10.260	10.637	11.028	11.436
9	9.368	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491	11.978	12.488	13.021	13.579
10	10.462	10.950	11.464	12.006	12.578	13.181	13.816	14.487	15.193	15.937
11	11.567	12.169	12.808	13.486	14.207	14.972	15.784	16.645	17.560	18.531
12	12.682	13.412	14.192	15.026	15.917	16.870	17.888	18.977	20.141	21.384
13	13.809	14.680	15.618	16.627	17.713	18.882	20.141	21.495	22.953	24.523
14	14.947	15.974	17.086	18.292	19.598	21.015	22.550	24.215	26.019	27.975
15	16.097	17.293	18.599	20.023	21.578	23.276	25.129	27.152	29.361	31.772
16	17.258	18.639	20.157	21.824	23.657	25.672	27.888	30.324	33.003	35.949
17	18.430	20.012	21.761	23.697	25.840	28.213	30.840	33.750	36.973	40.544
18	19.614	21.412	23.414	25.645	28.132	30.905	33.999	37.450	41.301	45.599
19	20.811	22.840	25.117	27.671	30.539	33.760	37.379	41.446	46.018	51.158
20	22.019	24.297	26.870	29.778	33.066	36.785	40.995	45.762	51.159	57.274
21	23.239	25.783	28.676	31.969	35.719	39.992	44.865	50.422	56.764	64.002
22	24.471	27.299	30.536	34.248	38.505	43.392	49.005	55.456	62.872	71.402
23	25.716	28.845	32.452	36.618	41.430	46.995	53.435	60.893	69.531	79.542
24	26.973	30.421	34.426	39.082	44.501	50.815	58.176	66.764	76.789	88.496
25	28.243	32.030	36.459	41.645	47.726	54.864	63.248	73.105	84.699	98.346
30	34.784	40.567	47.575	56.084	66.438	79.057	94.459	113.28	136.31	164.49
35	41.659	49.994	60.461	73.651	90.318	111.43	138.23	172.31	215.71	271.02
40	48.885	60.401	75.400	95.024	120.80	154.76	199.63	259.05	337.87	442.58
45	56.479	71.891	92.718	121.03	159.70	212.74	285.74	386.50	525.84	718.88

Дисконтирующий множитель $FM4(r,n) = \sum_{i=1}^{n} 1/(1+r)^n$, характеризующий приведенную стоимость срочного аннуитета постнумерандо

n	r									
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7	6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8	7.652	7.326	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9	8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10	9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145
11	10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495
12	11.255	10.575	9.954	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814
13	12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.013
14	13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367
15	13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.560	8.061	7.606
16	14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824
17	15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022
18	16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201
19	17.226	15.679	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365
20	18.046	16.352	14.878	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514
21	18.857	17.011	15.415	14.029	12.821	11.764	10.836	10.017	9.292	8.649
22	19.661	17.658	15.937	14.451	13.163	12.042	11.061	10.201	9.442	8.772
23	20.456	18.292	16.444	14.857	13.489	12.303	11.272	10.371	9.580	8.883
24	21.244	18.914	16.936	15.247	13.799	12.550	11.469	10.529	9.707	8.985
25	22.023	19.524	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077
30	25.808	22.396	19.601	17.292	15.373	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427
35	29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644
40	32.835	27.356	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779
45	36.095	29.490	24.519	20.720	17.774	15.456	13.606	12.108	10.881	9.863
50	39.196	31.424	25.730	21.482	18.256	15.76	13.801	12.23	10.96	9.915

Приложение Б

ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА ДНЕЙ В ГОДУ

Обычный год

День месяца	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

Високосный год

День месяца	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

ГЛОССАРИЙ

Базовый период — временной интервал денежного потока.

Бессрочный (perpetuity) аннуитет — аннуитет, у которого денежные поступления продолжаются достаточно длительное время (более 50 периодов).

Временной интервал — момент поступлений/оттоков денежных средств.

Выкуп ренты — замена ренты единовременным платежом.

Денежный поток — это распределенная во времени последовательность выплат и поступлений денежных средств, генерируемая некоторым активом или инвестиционным проектом.

Дисконтирование — принятое в финансовой математике название процедуры определения стоимости денег в более ранний момент времени в соответствии с принятой ставкой дисконтирования.

Дисконтирование коммерческое (банковский учет) — дисконтирование, при котором его ставкой выступает дисконтная ставка.

Дисконтирование математическое — дисконтирование, при котором его ставкой является обычная процентная ставка (ставка процентов).

Дисконтирующий множитель (коэффициент дисконтирования) — прошлая стоимость одной денежной единицы.

Индекс инфляции — величина, которая показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Инфляция — изменение баланса между денежной массой и объемом созданных в стране благ и услуг в сторону увеличения денег. Проявляется в росте цен и обесценении денег.

Инфляционная премия — величина, которую необходимо прибавить к реальной ставке для компенсации инфляционных потерь.

Капитализация процентов — процедура систематического присоединения процентов к сумме денег, относительно которой они определялись.

Коэффициент дисконтирования ренты (аннуитета) — показывает, во сколько раз приведенная стоимость аннуитета больше величины его денежного поступления.

Математическое дисконтирование — способ определения современной величины денег по процентной ставке.

Множитель наращения (коэффициент наращения) — будущая стоимость одной денежной единицы через несколько процентных периодов исходя из ставки наращения за период.

Множитель наращения ренты (коэффициент аккумуляции вкладов) — показывает, во сколько раз наращенная сумма аннуитета больше величины его денежного поступления.

Наращение — процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов. Так же в финансовой математике называют процедуры вычисления суммы денег с начисленными процентами.

Наращенная (будущая) стоимость денег — сумма денег, увеличенная за счет присоединения процентов; получается в результате осуществления наращения.

Непрерывный аннуитет — в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины.

Номинальная доходность — номинальная годовая процентная ставка, базовая ставка по договору, из расчета которой определяются и начисляются проценты при внутригодовой капитализации.

Номинальная ставка процента — годовая ставка процентов исходя из которой определяется величина ставки, применяемая в каждом периоде при начислении сложных процентов несколько раз в году.

Обратная задача оценки денежного потока — суммарная оценка дисконтированного денежного потока.

Объединение (консолидация) рент — замена нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить.

Отсроченный аннуитет — аннуитет, в котором первый из потока платежей начинает поступать через h периодов.

Переменный аннуитет — аннуитет, члены которого различны по величине.

Простая процентная ставка — ставка процентов, которая применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды.

Процентная ставка — отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

Процентные деньги — сумма, уплаченная за пользование заемными денежными средствами.

Прямая задача оценки денежного потока — это суммарная оценка наращенного денежного потока с позиции будущей стоимости.

Рассрочка платежей — обратная задача к задаче выкупа ренты, замена разового платежа потоком платежей.

Сложная процентная ставка — ставка процентов применяется к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

Современная величина — величина, полученная дисконтированием заданной конечной величины ссуды.

Ставка дисконтирования — одна из двух процентных ставок (ставка процентов либо дисконтная ставка), по которой осуществляется операция дисконтирования.

Ставка процентов — процентная ставка, применяемая для начисления процентов обычных (декурсивных).

Темп инфляции — величина, которая показывает, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период.

Учет — процесс начисления и удержания процентов в начале финансовой операции.

Учет векселя — продажа или перевод векселя по стоимости ниже номинала до истечения его срока.

Учетная ставка — ставка процентов при начислении и удержании процентов из суммы кредита в начале срока операции.

Финансовая рента (аннуитет) — денежный поток с равными по величине временными интервалами.

Формула Фишера — определяет значение годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции.

Эффективная ставка процентов — годовая ставка сложных процентов, используемая в качестве меры доходности финансовой операции.

Эквивалентные ставки — такие ставки, которые дают одинаковый результат при замене одной ставки на другую.

Учебное издание

Красина Фаина Ахатовна

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Корректор Осипова Е. А.
Компьютерная верстка Хомич С. Л.

Издано в Томском государственном университете
систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40
Тел. (3822) 533018.