Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А.С. Бернгардт, А.С. Чумаков, В.А. Громов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие

Томск
ТУСУР
2014

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73
Б51

Рецензент
Доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник ИМКЭС СО РАН
профессор, **Н.П. Красненко**

Бернгардт А.С., Чумаков А.С., Громов В.А.

Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / А.С. Бернгардт, А.С. Чумаков, В.А. Громов. – 2-е изд., переработ. и доп. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2014. – 160 с.

Сборник содержит задачи по 16 основным разделам теории вероятностей и математической статистики. В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения и формулы, затем даны примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73

Оглавление

Раздел 1. Алгебра событий

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при многократном повторении опыта.

Опытом называется воспроизведение комплекса условий для наблюдения исследуемого явления.

Событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Исходами называют несовместные взаимоисключающие результаты опыта.

Элементарным называется событие, которому соответствует только один ***исход***, а ***сложным*** – событие, которому соответствует некоторое ***множество*** исходов опыта.

Совокупность всех элементарных событий ω в опыте образует ***пространство*** Ω элементарных событий. Пространство элементарных событий – это *математическая модель опыта*, в которой любому *случайному событию A* ставится в соответствие некоторое *подмножество A пространства элементарных событий* Ω. В общем случае каждому опыту можно поставить в соответствие несколько математических моделей, то есть пространств элементарных событий.

Событие называется ***достоверным,*** если при повторении опыта оно происходит *всегда*. Ему соответствует само пространство Ω.

Событие называется ***невозможным,*** если при повторении опыта оно не происходит *никогда.* Ему соответствует пустое множество $\varnothing$.

Так как событие отождествляется с подмножеством пространства Ω, то над событиями можно совершать все операции, выполнимые над множествами. В частности, определены следующие отношения и операции между событиями:

$A \subset B$ (*отношение включения множеств*: множество A является подмножеством множества B). Означает, что событие B происходит всегда, когда происходит событие A. Говорят, что событие A ***влечет*** за собой появление в опыте события B;

$A=B$ (*отношение эквивалентности множеств*) – событие A ***эквивалентно (равно)*** событию B. Это возможно тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$;

$C=A+B$, $C=\sum_{i=1}^{n} A_i$ (*объединение множеств* $\cup$) – ***сумма событий***. Состоит в том, что в опыте произошло хотя бы одно из этих событий (не исключающее логическое «*или*»);

$C=AB$, $C=\prod_{i=1}^{n} A_i$ (*пересечение множеств* $\cap$) – ***произведение событий***. Состоит в совместном осуществлении этих событий в опыте (логическое «и»);

$C=A-B$, ($A\setminus B$ – состоит из элементов множества A, не принадлежащих множеству B) – ***разность событий***, состоящее в том, что событие A произойдет, а событие B нет.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу***, если в опыте обязательно произойдет хотя бы одно из них. Сумма событий, образующих полную группу, дает *достоверное* событие.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно заключается в непоявлении события A. Множество $\overline{A}$ дополняет A до полного, то есть $A+\overline{A}=\Omega$.

Пример 1

Пусть опыт состоит в бросании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков X. Определить пространство элементарных событий и подмножества, соответствующие событиям $A=\{X$ кратно трем$\}$, $B=\{X$ нечетно$\}$, $C=\{X>3\}$, $D=\{X<7\}$, $E=\{X$ дробно$\}$, $F=\{0{,}5<X<1{,}5\}$

Решение. Элементарное событие (исход опыта) состоит в выпадении конкретного количества очков, то есть $\omega_i = i$, $i \in [1,6]$. Поэтому множество элементарных исходов можно сконструировать следующим образом: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. Перечисленные события можно описать как следующие подмножества: $A=\{3,6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{4,5,6\}$, $D=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$, $E=\varnothing$, $F=\{1\}$. Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов в соответствующих множествах, определим пары совместных событий: A и B, A и C, A и D, B и C, B и D, B и F, C и D, D и F.

Пример 2

Из таблицы случайных чисел наугад выбрано два числа. Событие A означает что первым выбрано простое, а событие B означает, что вторым выбрано четное число. Что означают события $\overline{A}$, AB, $A+B$.

Решение. Событие $\overline{A}$ означает, что первым выбрано непростое число. Событие AB означает совместное осуществление событий A и B, то есть первым выбрано простое и вторым четное число. Событие $A+B$ означает, что произошло хотя бы одно из этих событий, то есть первым выбрано простое, или вторым выбрано четное число, или первое простое и второе четное.

Задачи

1.1. Укажите, являются ли элементарными перечисленные ниже события:

а) выпадение суммы очков 7 при бросании двух игральных костей;

б) выпадение двух цифр в опыте с тремя монетами;

в) вытаскивание туза при случайном выборе карты из колоды;

г) вытаскивание двойки пик при случайном выборе карты из колоды;

д) выпадение суммы очков 2 при бросании пары игральных костей;

е) выпадение трех цифр при бросании трех монет.

1.2. Когда возможно равенство $AB=A$?

1.3. Событие A – хотя бы одно из трех изделий бракованное, событие B – все три изделия доброкачественные. Что означает события: а) $A+B$; б) AB.

1.4. Бросают две игральных кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B – хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события а) $\overline{A}\overline{B}$; б) $\overline{A}+B$.

1.5.Из таблицы случайных чисел наугад взято одно число. Событие A – выбранное число делится на 5; событие B – данное число оканчивается нулем. Что означают события а) $A–B$; б) $\overline{A}B$.

1.6. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k (k=1, 2, …,10), причем $r_1 < r_2 < ... < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k. Что означают события:

$$B = \sum_{k=1}^{6} A_k\ ;\ C = \prod_{k=5}^{10} A_k\ .$$

1.7. Два шахматиста играют одну партию. Событие A – выиграет первый игрок, событие B – выиграет второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получить полную группу событий?

1.8. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A – первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B – второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C – третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события:

а) ABC; б) $A+B+C$; в) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; г) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$; д) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

1.9. Из обычной колоды в 52 карты наугад берут одну. Пусть событие A={взятая карта – король}, событие B={взятая карта – масти «пик»}, а событие C={взятая карта – десятка «пик»}. Объясните, в чем состоит смысл каждого из перечисленных ниже событий:

а) $A+B$; б) AB; в) $A+\overline{B}$; г) $A+C$; д) $B+C$; е) AC; ж) BC; з) $(AB)+C$; и) ABC.

Раздел 2. Непосредственный подсчет вероятностей

Вероятностью события называется численная мера степени возможности этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Напомним некоторые определения.

Полной группой событий называется совокупность таких событий, что в результате опыта непременно должно произойти *хотя бы одно* из них.

Несколько событий в данном опыте называются ***несовместными***, если появление одного из них *исключает* возможность появления других. Несколько событий в данном опыте называются ***равновозможными***, если вероятность их появления равны между собой.

Если все события – исходы опыта образуют *полную группу попарно несовместных и равновозможных событий,* то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n – общее число исходов в опыте; m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Таким образом, вычисление вероятности некоторого события заключается в определении числа n всех равновозможных исходов в опыте и числа исходов m, благоприятствующих событию A. Во многих случаях для подсчета чисел n и m приходится пользоваться формулами теории соединений.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются только самими элементами. Например, сочетаниями из трех элементов *а, в* и *с* по два будет *ав, ас* и *вс*. Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Размещениями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются друг от друга как самими элементами, так и порядком элементов. Например, размещениями из 3 элементов *а, в* и *с* по два будет *ав, ас, ва, вс, са, св*. Число размещений определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$$

Перестановками из n элементов называются такие их соединения, которые различаются только порядком входящих в них элементов. Например, перестановками из трех элементов *а, в* и *с* будут *авс, асв, вас, вса, сав, сва*. Число перестановок определяется по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n.$$

Пример 1

На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 5 кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

Решение. Обозначим события A – из 5 взятых наугад кинескопов 3 кинескопа Львовского завода. Возможные элементарные исходы в данном опыте заключаются в получении со склада 5 кинескопов независимо от того, на каком заводе они изготовлены. Общее число исходов равно числу различимых комбинаций по 5 кинескопов в каждой, которые можно образовать из имеющихся на складе 15 кинескопов. Оно равно числу способов, которыми можно взять 5 кинескопов из общего числа 15, т.е. равное числу сочетаний из 15 элементов по 5 – C_{15}^5. Следовательно, $n = C_{15}^5$.

Из общего числа возможных исходов опыта необходимо выделить благоприятствующие событию A. Исход будет благоприятствовать событию A, когда среди 5 взятых кинескопов 3 изготовлены на Львовском заводе. Появление 3 кинескопов производства Львовского завода среди 5 полученных со склада можно гарантировать, если они взяты из общего числа кинескопов, изготовленных на Львовском заводе, т.е. из 10. Три кинескопа из 10, изготовленных на Львовском заводе, можно взять числом способов, равным числу сочетаний из 10 элементов по 3 – C_{10}^3. Остальные 2 кинескопа должны выбираться из оставшихся 5 кинескопов, не принадлежащих производству Львовского завода; число различимых комбинаций по 2 кинескопа в каждой, которые можно образовать из 5 кинескопов, равно числу сочетаний из 5 элементов по 2 – C_5^2.

Поскольку каждая комбинация из трех кинескопов производства Львовского завода может появляться в сочетании с любой комбинацией из двух кинескопов, не принадлежащих производству Львовского завода, то общее число исходов опыта, благоприятствующих событию *A*, будет равно произведению $C_{10}^3 C_5^2$. Следовательно, вероятность интересующего нас события равна

$$P(A) = \frac{C_{10}^3 C_5^2}{C_{15}^5} = 0,4.$$

Пример 2

Из букв разрезной азбуки составлено слово «треугольник». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем выбранные четыре буквы собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него появится слово «руль».

Решение. Обозначим событие *A* – из букв, составляющих слово «треугольник», набрано слово «руль». Элементарные возможные исходы в данном опыте составляют комбинации из четырех букв. Однако в отличие от предыдущего примера в данном случае важен порядок следования букв в комбинации. Поэтому к числу различимых будут относиться комбинации, отличающиеся друг от друга не только набором букв, но и порядком их следования.

Общее число исходов *n* подсчитывается следующим образом. Вначале из 11 букв образуем комбинации по 4 буквы независимо от порядка их следования. Количество таких комбинаций равно числу сочетаний из 11 по 4 – C_{11}^4. Каждой комбинации из 4 букв соответствуют исходы опыта, отличающиеся порядком следования букв в комбинации. Количество их равно числу перестановок из 4 элементов – P_4. Следовательно, общее число исходов в опыте равно произведению числа комбинаций из 4 букв на число исходов, соответствующих одной комбинации, т.е. числу размещений из 11 элементов по 4, а именно $n = C_{11}^4 P_4$.

Из всех исходов в опыте лишь один благоприятствует событию *A*, т.е. $m = 1$. Следовательно, вероятность события *A* равна.

$$P(A)=\frac{1}{n}=\frac{1}{C_{11}^{4}P_{4}}=\frac{1}{A_{11}^{4}}=\frac{1}{7920}.$$

Пример 3

Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, … N, k раз вынимается шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера внутренних шаров образуют возрастающую последовательность.

Решение. Обозначим событие A – номера к вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Элементарные возможные исходы в данном опыте представляют различные наборы номеров k вынутых шаров независимо от порядка их появления. Поскольку после каждого извлечения шар возвращается в урну, то не исключаются исходы, когда один и тот же номер встречается в наборе из k номеров несколько раз.

Номер первого извлеченного шара может быть любым от 1 до N. Номер второго извлеченного шара также может быть любым из интервала 1 до N. Каждый номер первого извлеченного шара может появиться в сочетании с любым номером второго извлеченного шара. Следовательно, общее число исходов при извлечении двух шаров равно N^2. Аналогично рассуждая по индукции, находим, что при извлечении k шаров общее число исходов будет $n=N^k$.

К числу благоприятствующих событию A исходов необходимо отнести те, в которых номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Возрастающую последовательность из номеров можно образовать из общего числа N номеров несколькими способами, количество которых равно числу сочетаний C_N^k.

Действительно, по определению, сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые различаются друг от друга только самими элементами, причем в каждой комбинации элементы могут быть расположены в любом желаемом порядке, в том числе образовывать возрастающую последовательность, если элементы пронумерованы. Следовательно, число благоприятствующих событию A исходов равно $m=C_N^k$ и вероятность

$$P(A)=\frac{C_N^k}{N^k}.$$

Пример 4

Решать предыдущую задачу при условии, что вынутые шары в урну не возвращаются.

Решение. В случае, когда вынутые шары в урну не возвращаются, общее число возможных исходов в опыте должно подсчитываться иначе. Действительно, номер первого извлеченного шара может быть любым от 1 до N. Номер второго извлеченного шара может быть любым, за исключением того, который появился при первом извлечении. Каждый номер первого извлеченного шара может появиться в сочетании с любым номером второго извлеченного шара. Следовательно, общее число исходов при извлечении двух шаров равно $N(N-1)$. Далее, номер i-го извлеченного шара может быть любым, за исключением тех номеров, которые появились в предыдущих $(i-1)$ извлечениях. Значит, общее число исходов в опыте при извлечении k шаров равно $n = N(N-1)...(N-k+1)$.

Благоприятствовать событию A, как и в предыдущей задаче, будут исходы, в которых номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность. Их число равно $m = C_N^k$. Вероятность события A найдется

$$P(A) = \frac{C_N^k}{N(N-1)...(N-k+1)} = \frac{1}{k!}.$$

По мере развития теории вероятностей была замечена недостаточность «классического» определения вероятности, основанного на рассмотрении конечной группы равновероятных событий. Некоторые задачи требуют видоизменения «классического» определения вероятности для случаев, когда мыслимо бесконечное множество исходов опыта. Ниже приводится пример такого типа задач.

Пример 5

Два человека договорились встретиться в условленном месте, причем каждый из них приходит туда независимо от другого в случайный момент времени между 12 и 13 часами, ждет 1/3 часа и, если второй за это время не появился, уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдет.

Решение. Обозначим событие A – встреча состоялась. Обозначим время прихода первого и второго человека соответственно через x и y. Тогда событие A эквивалентно тому; что разность между временами прихода первого и второго человека по абсолютной величине не превзойдет 1/3 часа, т.е. $A = \left[|x - y| \le 1/3 \right]$.

Все возможные исходы опыта изобразятся точками квадрата, представленного на рис. 2.1.

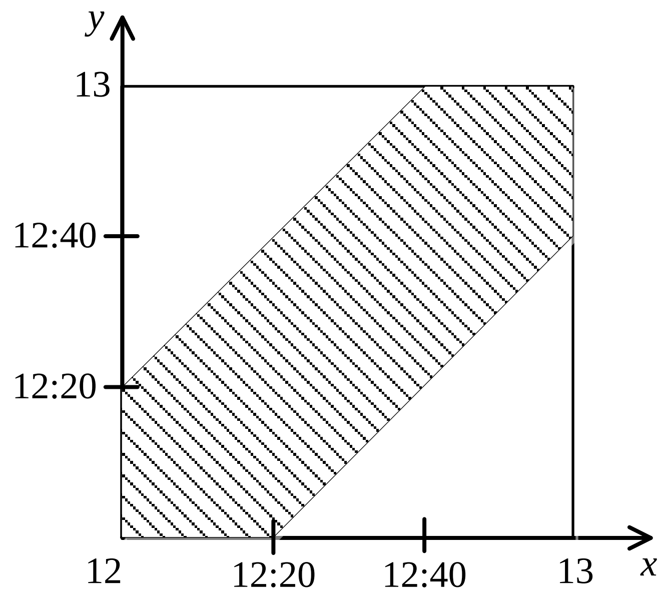

Рис. 2.1

Событию A благоприятствуют точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $A = \left[|x - y| \le 1/3 \right]$. Область, где выполняется указанное неравенство, на рис. 2.1 заштрихована. Искомая вероятность будет равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P(A) = \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2}{1} = \frac{5}{9}.$$

Задачи

2.1. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

A – появление четного числа очков;

B – появление не менее 5 очков;

C – появление не более 5 очков.

2.2. Из общего числа резисторов, находящихся в данной кассе, 20 % имеют номинал 1 кОм, 30 % – 2 кОм, 50 % – 3 кОм. Какова вероятность, что первый взятый наугад резистор будет иметь номинал 2 кОм?

2.3. Имеются две урны: в первой a белых и $в$ черных шаров, во второй с белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

2.4. В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых 3 с пониженной крутизной. Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух электронных ламп.

2.5. В урне a белых и в черных шаров ($a \geq 2$, $в \geq 3$). Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность того, что 2 из них будут белыми, а 3 черными.

2.6. В партии, состоящей из k изделий, имеется m дефектных. Из партии выбирается для контроля n изделий. Найти вероятность того, что из них ровно 5 изделий будут дефектными.

2.7. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в 2 группы по 10 человек. Найти вероятность того, что: а) двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах; б) четверо наиболее сильных попадут по два в разные группы.

2.8. В урне a белых, $в$ черных и c красных шаров. Из урны вынимают три шара. Найти вероятность того, что среди них не будет шаров одинакового цвета.

2.9. В мастерской находятся a+$в$ блоков от двух различных радиоприемников, из которых два повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки разных приемников.

2.10. В блоке электронной счетной машины, содержащем 24 лампы, отказала одна лампа. Неисправность отыскивается путем поочередной замены ламп исправной. Найти вероятность того, что неисправность окажется устраненной не более чем при первых трех попытках.

2.11. Из урны, содержащей a белых и $в$ черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что оставшийся в урне шар будет белым.

2.12. На вход радиоприемного устройства поступают кодовые комбинации, состоящие из двух знаков: 1 (посылка) а 0 (пауза). Какова вероятность того, что в кодовой комбинации будет хотя бы один нуль, если появление нуля и единицы равновозможное?

2.13. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов?

2.14. Показать, что более вероятно при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу, чем при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы.

2.15. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2.16. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найди вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1,2,\ldots n$.

2.17. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

2.18. По линии связи в случайном порядке передаются 30 знаков алфавита. Определить вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово «радио».

2.19. В 25 экзаменационных билетах содержатся по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы только на 45 вопросов. Какова вероятность того, что доставшийся экзаменующемуся билет состоит из подготовленных им вопросов?

2.20. Две однотипные радиостанции, разнесенные в пространстве относительно друг друга, предварительно настроены на 10 фиксированных частот, одинаковых у обеих станций. Какова вероятность того, что при независимом произвольном выборе рабочих частот обе включенные радиостанции окажутся настроенными на одну и ту же частоту?

2.21. «Секретный» замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными написаниями на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры дисков образуют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

2.22. В урне имеется k шаров, помеченных номерами $1,2,\ldots k$. Из урны m раз вынимаются по одному шару ($m \leq k$), номер шара записывается и шар кладется обратно в урну. Найти вероятность того, что все записанные номера будут различны.

2.23. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе, состоящей из m самолетов ($k \leq m$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все k орудий будут стрелять по одной и той же цели.

2.24. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность того, что в нем:

а) все цифры различные;

б) все цифры нечетные.

2.25. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2.26. В урне a белых, $в$ черных и c красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше черного.

2.27. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что шесть из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся пять телевизоров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общей регулировке?

2.28. 3. В урне три белых, пять черных и четыре красных шара. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что красный шар появится раньше белого.

2.29. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

2.30. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров ($m > n$), вынимают наудачу один шар за другим. Чему равна вероятность того, что наступит момент, когда число вынутых черных шаров будет равно числу вынутых белых?

2.31. Из партии, состоящей из 20 радиоприемников, для проверки произвольно отбирают три приемника. Партия содержит пять неисправных приемников. Какова вероятность того, что в число отобранных войдут: а) только исправные приемники; б) только неисправные приемники; в) один неисправный и два исправных приемника?

2.32. Два источника синусоидального напряжения одинаковой частоты включаются независимо. Найти вероятность того, что разность фаз колебаний окажется не больше $\pm 30^{o}$.

2.33. Разведка производится пеленгатором с равномерно вращающейся антенной, угол раствора диаграммы направленности которой $в = 18^{o}$. Цель, которая с равной вероятностью может появиться на любом направлении, излучает кратковременный (по сравнению со скоростью вращения антенны пеленгатора) сигнал. Найти вероятность того, что цель будет запеленгована.

2.34. В любые моменты времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ. Определить вероятность того, что приемник будет перегружен.

Раздел 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется такое событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно* из событий: A или B, или оба вместе.

Суммой нескольких событий называется такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно* из суммируемых событий.

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в *совместном* осуществлении и события A, и события B.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в *совместном* осуществлении всех этих событий.

Условной вероятностью события A относительно B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $P(A/B)$.

События A и B называются ***независимыми***, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или не произошло другое. Для независимых событий

$$P(A/B) = P(A); \qquad P(B/A) = P(B).$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на *условную вероятность* другого при условии, что первое имело место

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A)$$

или

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A / B).$$

Для независимых событий A и B

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность произведения нескольких зависимых событий определяется формулой

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Для независимых событий написанная формула упрощается и принимает вид

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей

События A и B несовместны, если возникновение одного из них исключает появление другого.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В случае, когда события А и В совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

где AB – произведение событий A и B.

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Событие $\overline{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно происходит тогда, когда события A не происходит. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 1

Подсчитано, что в русском тексте буква «а» встречается с вероятностью 0,075, буква «б» – с вероятностью 0,017, буква «в» – с вероятностью 0,046. Какова вероятность того, что наугад взятая из текста буква окажется «б» или «в»?

Решение. Обозначим через *Б* событие, состоящее в том, что взята наугад буква «б» по условию $P(Б) = 0{,}017$. Событие $В$ – из текста взята буква «в»;

вероятность этого события по условию равна $P(В) = 0{,}046$. Событие $Н$, вероятность которого требуется найти, является суммой введенных выше событий, т.е.

$$Н = Б + В.$$

Поскольку из текста выбирается одна буква, то появление одного из событий $Б$ или $В$ исключает возможность появления другого. В силу несовместности событий $Б$ и $В$ искомая вероятность определяется по теореме сложения несовместных событий

$$P(Н) = P(Б) + P(В) = 0{,}063.$$

Пример 2

Велогонщик теряет всякую надежду на успех в гонке, если сделает прокол шины. Вероятность прокола шины на трассе гонки равна 0,01. Найти вероятность того, что гонщик сойдет с трассы.

Решение. Рассмотрим два события: A_1 – прокол шины первого колеса, A_2 – прокол шины второго колеса. Как и в первом примере, интересующее нас событие A может быть предоставлено в виде суммы $A = A_1 + A_2$. В отличии от предыдущего примера события A_1 и A_2 здесь совместны, поэтому для определения вероятности $P(A)$ требуется применить теорему сложения для совместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

Будем считать, что события A_1 и A_2 независимы. Тогда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\,P(A_2) = 0{,}0199.$$

Пример 3

Изделие последовательно проходит две стадии испытаний и отбраковывается при обнаружении неисправности на любой из стадий. Какова вероятность того, что изделие выдержит все испытания, если вероятность выдержать испытание на первой стадии равна 0,9, на второй (если пройдена первая) – 0,7?

Решение. Обозначим события: A – изделие прошло первое испытание, B – изделие прошло второе испытание. Используя понятие произведения событий, представим событие C – изделие выдержит оба испытания в виде

$$C = AB.$$

Так как вероятность выдержать второе испытание зависит от того, выдержало ли изделие первое испытание, то событие B является зависимым от события A. По условию задачи заданы следующие вероятности: $P(A) = 0{,}9$, $P(B/A) = 0{,}7$. Требуемую вероятность найдем, пользуясь теоремой для вероятности произведения зависимых событий

$$P(C) = P(AB) = P(A)\,P(B/A) = 0{,}63.$$

Пример 4

Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены 3 независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

Решение. Обозначим событие A – в одном из тех независимых измерений ошибка измерений превысит заданную точность. Введем в рассмотрение событий A_i, состоящие в том, что ошибка превысила заданную точность в i – м измерении. Событие A произойдет, если ошибка превысит заданную точность или в первом, или во втором, или в третьем измерении, а в остальных двух измерениях она не превысит заданной точности. Следовательно, событие A можно представить в виде суммы произведений следующих событий:

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3.$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляют собой несовместные события. На основании теоремы сложения для несовместных событий имеем

$$P(A) = P\left(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right) + P\left(\bar{A}_1 A_2\bar{A}_3\right) + P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3\right).$$

Поскольку по условию задачи измерения являются независимыми, то события, входящие в произведения, являются также независимыми. Таким образом

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3).$$

Имея в виду, что $P(A_1) = 0{,}4$ и $P(\bar{A}_i) = 0{,}6$ (i=1,2,3), получим

$$P(A) = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432.$$

Пример 5

Агрегат состоит из двух параллельных цепей (основной и резервной), каждая из которых включает в себя три элемента, включенных последовательно. Надежность каждого элемента (вероятность безотказной работы) равна 0,98. Найти надежность всего агрегата.

Решение. Обозначим событие A – безотказная работа агрегата. Это событие имеет место, если работоспособна или основная, или резервная цепь, т.е. событие A можно представить в виде суммы двух более простых событий

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 – безотказная работа основной цепи; A_2 – безотказная работа резервной цепи.

Событие A_1 не исключает возможность появления события A_2, следовательно, эти события совместные. Тогда вероятность события A можно найти, используя теорему сложения для совместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1A_2).$$

Работоспособность каждой цепи не зависит от того, в каком состоянии (работоспособном или неработоспособном) находится другая цепь. В силу независимости событий A_1 и A_2 имеем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1)\, P(A_2).$$

Событие A_1 происходит тогда, когда три последовательно соединенных элемента, образующие основную цепь, работают исправно, т.е. событие A_1 можно представить в виде произведения трех элементарных событий

$$A_1 = B_1\, B_2\, B_3,$$

где B_i (i = 1,2,3) – безотказная работа i-го элемента основной цепи. События B_1, B_2, B_3 являются независимыми, так как отказы отдельных элементов происходят независимо. Поэтому

$$P(A_1) = P(B_1)\, P(B_2)\, P(B_3).$$

Поскольку надежность всех элементов основной и резервной цепей одинакова $P(B_i) = 0{,}98$, то

$$P(A_1) = 0{,}98^3 = 0{,}94.$$

Из условия задачи следует, что резервная цепь ничем не отличается от основной, поэтому

$$P(A_2) = 0{,}941.$$

Следовательно, надежность всего агрегата равна

$$P(A) = 2 \cdot 0{,}941 – 0{,}98^6 = 0{,}996.$$

Приведем другой вариант решения этой задачи, более предпочтительный, когда количество параллельных цепей больше двух. В связи с этим сформулируем события A иначе, а именно, безотказная работа хотя бы одной цепи – основной или резервной. Противоположным к нему является событие $\overline{A}$ – отказ всего агрегата, которое происходит тогда, когда откажет и основная, и резервная цепь. Следовательно, событие $\overline{A}$ можно представить в виде произведения двух более простых событий

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2,$$

где $\overline{A}_1$ – отказ основной цепи; $\overline{A}_2$ – отказ резервной цепи.

Поскольку отказ одной из цепей не изменяет вероятность отказа другой цепи, то события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ независимы и

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2).$$

В свою очередь событие $\overline{A}_1$ произойдет, если откажет хотя бы один элемент цепи. Противоположным к событию «хотя бы один элемент цепи откажет» является событие – «ни один из элементов цепи не откажет». Таким образом

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(B_1 B_2 B_3).$$

Имея в виду независимость событий B_1, B_2, B_3, получим

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}98^3.$$

Поскольку основная и резервная цепи ничем не отличаются, то

$$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}98^3.$$

Значит:

$$P(\overline{A}) = (1 - 0{,}98^3)^2.$$

Тогда вероятность события A определится

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - 0{,}98^3)^2.$$

Задачи

3.1. В партии из 1000 резисторов в среднем 160 отклоняются от номинала от 0 до 0,5 %, 220 – от 0,5 до 1 %, остальные – от 1 до 5 %. Найти вероятность того, что выбранный наугад резистор будет отклоняться от номинала не более чем на 1%.

3.2. Два пеленгатора A и B независимо пеленгуют объект, каждый с вероятностью успеха, равной $P = 0{,}3$. Какова вероятность того, что или первый, или второй пеленгатор достигнут успеха?

3.3. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,9. Какова вероятность попадания в цель?

3.4. Прием радиосигналов производится на два разнесённых приёмника. Вероятность правильного приёма на первый приёмник равна P_1, на второй – P_2. События, состоящие в приёме сигналов каждым приёмником, считаются независимыми. Определить, вероятность правильного приёма радиосигналов.

3.5. Цех в среднем выпускает 5 % бракованных изделий. Из каждой сотни изделий в среднем 60 оказываются первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное в цехе, окажется первого сорта.

3.6. Радиотехническое устройство содержит n_1 ламп, n_2 транзисторов и n_3 предохранителей. Выход любой детали из строя приводит к неисправности устройства. Вероятность выхода из строя за время T одной из ламп q_1, транзистора q_2, предохранителя q_3. Какова вероятность того, что за время T устройство выйдет из строя?

3.7. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью P, Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен хотя бы один раз.

3.8. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью P (независимо от других циклов и от других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятности следующих событий:

A – объект будет обнаружен хотя бы одной из станций;

B – объект будет обнаружен каждой из станций.

3.9. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна P_1. При повышенном напряжении вероятность аварии прибора потребителя электрического тока равна P_2. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

3.10. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия 0,5, из второго – 0,6 и из третьего – 0,7. Зная, что каждое орудие стреляет один раз, найти вероятность поражения цели, если для этого достаточно двух попаданий.

3.11. При совпадении помехи с импульсным сигналом во времени вероятность подавления его помехой в результате интерференции равна 0,02. Определить вероятность подавления сигнала, если вероятность совпадения его с помехой во времени равна 0,04.

3.12. Команда тела управления в виде импульсного кода с целью повышения её проходимости в условиях действия помех дублируется таким образом, что вместо одного кода всегда передаются три. Команда считается искаженной, если все три посылки кодов оказываются искаженными помехами. Какова вероятность искажения команды, если вероятность искажения одного кода $P = 0{,}2$ и отдельные посылки кодов искажаются помехами независимо?

3.13. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приёмника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приёмника – 0,2. Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приёмника.

3.14. Устройство, предназначенное для обнаружения сигнала, состоит из вращающейся антенной системы и приёмника с периодически меняющейся настройкой. Сигнал обнаруживается и проходит на выход устройства, когда антенна оказывается направленной на источник сигнала, а приёмник настроен на его частоту. Какова вероятность обнаружения сигнала таким устройством, если вероятность попадания сигнала в антенну равна 0,6, а вероятность принятия сигнала приёмника (совпадение по частоте) при условии, что сигнал прошел антенну, равна 0,4?

3.15. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех могут возникнуть искажения: посланный сигнал подвергается искажению с вероятностью 1/100 и принимается правильно, с вероятностью 99/100 (независимо от того, были ли переданы предшествующие сигналы с искажением или без искажения). Зная, что послана комбинация 10110; найти вероятность того, что: а) она получена без искажений; б) получена комбинация 11110; в) в полученной комбинации имеется одно искажение.

3.16. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью P. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго – признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k-м испытании.

3.17. В мастерской находятся $a + в$ блоков от двух различных радиоприёмников, из которых два повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки разных приёмников?

3.18. Из урны, содержащей m шаров с номерами от 1 до N, последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет извлечен при втором извлечении.

3.19. Три стрелка поочередно ведут стрельбу по одной и той же мишени. Каждый стрелок имеет два патрона. При первом же попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка израсходуют весь свой боезапас.

3.20. Каждая буква слова "математика" написана на отдельной карточке, которые тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки. Какова вероятность получить слова «тема»?

3.21. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа N. Отыскание этой лампы производится путём поочередной замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверять n ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы равна P.

3.22. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона, а потому набирает её наудачу. Определить вероятность того, что ещё придется звонить не более чем, в три места.

3.23. Уходя из квартиры, N гостей, имеющих одинаковые номера обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятности следующих событий:

A – каждый гость наденет свои калоши;

B – каждый гость наденет калоши, относящиеся к одной паре (может быть, и не свои).

3.24. В урне имеются n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

3.25. В урне *а* белых, *в* чёрных и *с* красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два шара будут одноцветными.

3.26. Шкала радиоприёмного устройства освещается четырьмя параллельно включенными лампочками. Вероятность того, что каждая из лампочек будет гореть в течение 1500 часов, равна 0,9. Какова вероятность, что шкала будет освещена в течение этих 1500 часов, если лампочки, которые выйдут из строя за указанный промежуток времени, не будут заменены доброкачественными?

3.27. Радиоблок состоит из трех параллельных цепей, каждая из которых включает в себя четыре последовательно соединённых элемента. Две цепи являются резервными. Надёжность элементов в основной цепи 0,97, в резервных цепях – 0,92. Определить надёжность блока.

3.28. Телефонный номер состоит из шести цифр. Определить вероятность того, что при случайном наборе номер будет оканчиваться на 240.

3.29. Для сигнализации об аварии установлены два независимо-работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

3.30. Завод изготавливает определенного типа изделия. Каждое изделие имеет дефект с вероятностью P. Изделие осматривается одним контролёром: он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью P_1, а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α. Найти вероятности следующих событий:

A – изделие будет забраковано;

B – изделие будет забраковано, но ошибочно;

C – изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом.

3.31. Два стрелка независимо один от другого делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка P_1, для второго – P_2. Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность того, что выиграет первый стрелок.

3.32. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

3.33. Студентам, едущим на практику, предоставлено 15 мест в Омск; 10 – в Красноярск, 5 – в Новосибирск. Какова вероятность того, что три определенных студента A, B, C попадут на практику в один и тот же город.

3.34. Из урны, содержащей n шаров, n раз наугад вынимается по одному шару с возвращением каждый раз шара обратно. Найти вероятность того, что в руке перебывают все шары.

3.35. Батареи A и B поочередно обстреливают друг друга, причем каждая может произвести два выстрела. Первой открывает огонь батарея A, которая поражает противника с вероятностью 0,3. Ответный выстрел батареи B поражает батарею A с вероятностью 0,4. Определить вероятность поражения каждой батареи.

Раздел 4. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности применяется в тех случаях, когда по условию задачи существует неопределенность в отношении причин, вызывающих появление события *A*. Для ликвидации этой неопределенности выдвигаются n исключающих друг друга предположений (гипотез) H_1, H_2,…, H_n относительно всех возможных причин, приводящих к следствию (событию) *A*. Гипотезы H_1 формулируются таким образом, чтобы вычисление вероятностей гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностей события *A* при каждой гипотезе $P(A/H_i)$ представляло собой простую задачу.

В таком случае вероятность события *A* вычисляется по формуле полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i; $P(A / H_i)$ – условная вероятность события *A* при этой гипотезе.

Пример 1

Микросхема может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что микросхема проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что микросхема проработает заданное число часов.

Решение. Обозначим через *A* событие, состоящее в том, что микросхема проработает заданное число часов. Непосредственно вычислить вероятность события *A* мы не можем, поскольку по условию задачи имеется неопределенность относительно принадлежности микросхемы к одной из трех партий. Для снятия этой неопределенности выдвигаем три гипотезы:

H_1 – микросхема принадлежит первой партии;

H_2 – второй партии;

H_3 – третьей партии.

Вероятности этих гипотез заданы: $P(H_1) = 0{,}25$; $P(H_2) = 0{,}5$; $P(H_3) = 0{,}25$.

Условные вероятности события *A* при каждой гипотезе также известны по условию задачи и равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}1; \qquad P(A/H_2) = 0{,}2; \qquad P(A/H_3) = 0{,}4.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}225.$$

Пример 2

Имеются три урны. В первой урне 3 белых и 2 черных шара; во второй – 2 белых и 3 черных и в третьей – 4 белых и 2 черных. Из второй урны перекладывают 2 шара, а из третьей урны – 3 шара в первую урну. Шары первой урны перемешивают и берут 2 шара. Найти вероятность того, что шары белые.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что 2 шара, извлеченные из первой урны после перекладывания, оказалась белого цвета. Очевидно, вероятность события A будет зависеть от того, какие шары по цвету были переложены в первую урну из второй и третьей урны соответственно, Непосредственному вычислению вероятности события A препятствует незнание состава шаров по цвету, которые переложены в первую урну.

Для ликвидации этой неопределенности выдвигаем следующие 5 гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

H_1 – переложено 5 белых шаров;

H_2 – переложено 4 белых и 1 черный шар;

H_3 – переложено 3 белых и 2 черных шара;

H_4 – переложено 2 белых и 3 черных шара;

H_5 – переложен 1 белый и 4 черных шара.

Условные вероятности события A при этих гипотезах вычисляются по формуле классического определения вероятности. Пусть верна первая гипотеза H_1. Тогда в первой урне оказалось 8 белых и 2 черных шара. Общее число исходов в опыте по извлечению двух шаров равно числу способов, которыми можно взять 2 элемента из 10, т.е. C_{10}^2, из них благоприятствуют событию A, т.е. когда два шара берутся из общего количества белых шаров, находящихся в урне; число таких исходов равно C_8^2. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A / H_i) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2}.$$

Аналогично находятся условные вероятности события A при других гипотезах.

Обратимся теперь к вычислению вероятностей гипотез. Гипотеза H_1 реализуется единственным способом, а именно, когда из второй и третьей урны извлекаются два и три белых шара соответственно. Событие H_1 можно представить в виде произведения двух независимых событий:

$$H_1 = H_1^I H_1^{II},$$

где H_1^I – извлечение двух белых шаров из второй урны; H_1^{II} – извлечение трех белых шаров из третьей урны.

Вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1) = P(H_1^I)P(H_1^{II}).$$

Вероятности, стоящие в правой части последнего равенства, находятся по формуле классического определения вероятности:

$$P(H_1^I) = \frac{1}{C_5^2}; \qquad P(H_1^{II}) = \frac{C_4^3}{C_6^3}; \qquad P(H_1) = \frac{C_4^3}{C_5^2 C_6^3}.$$

Гипотеза H_2 реализуется двумя способами, а именно, когда из второй урны извлекаются 2 белых шара, а из третьей урны – 2 белых и один черный шар, или же когда из второй урны извлекаются 1 белый и 1 черный шар, а из третьей урны – 3 белых шара. Эти два варианта осуществления события H_2 являются несовместными, поэтому по теореме сложения вероятностей можно записать

$$P(H_2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_5^2 C_6^3} + \frac{C_2^1 C_3^1 C_4^3}{C_5^2 C_6^3}.$$

Гипотеза H_3 имеет три варианта осуществления, а именно, из второй урны извлекаются 2 белых шара, а из третьей урны – 1 белый и 2 черных шара, или же из второй урны извлекаются 1 белый и 1 черный шар, а из третьей урны – 2 белых и 1 черный шар, или же из второй урны извлекаются 2 черных шара, а из третьей урны – три белых шара. Пользуясь теоремой сложения для несовместных событий и теоремой умножения для независимых событий, вычислим

$$P(H_3) = \frac{1}{C_5^2 C_6^3}[C_4^1 + (C_2^1)^2 C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^3].$$

Аналогично вычислим вероятности остальных гипотез:

$$P(H_4)=\frac{1}{C_5^2C_6^3}[C_2^1C_3^1C_4^1+C_3^2C_4^2C_2^1]; \qquad P(H_5)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_5^2C_6^3}.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{C_5^2C_6^3C_{10}^2}[C_4^3C_8^2+(C_4^2C_2^1+C_2^1C_3^1C_4^3)C_7^2+(C_4^1+(C_2^1)^2C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^3)C_6^2+$$
$$+(C_2^1C_3^1C_4^1+C_3^2C_4^2C_2^1)C_5^2+C_3^2C_4^1C_4^2]=0,318.$$

Пример 3

По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом – 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух – 0,6, при трех – 1. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что самолет сбит в результате трех выстрелов. Как следует из условия задачи, вероятность сбить самолет зависит от того, сколько будет попаданий при трех выстрелах.

Чтобы устранить имеющуюся неопределенность относительно количества попаданий в самолет, мы выдвигаем следующие 4 гипотезы:

H_1 – зарегистрировано три попадания;

H_2 – зарегистрировано два попадания;

H_3 – зарегистрировано одно попадание;

H_4 – не зарегистрировано ни одного попадания.

Если свершилась гипотеза H_1, то согласно условию задачи $P(A/H_1)=1$.

Для следующих трех гипотез условная вероятность выполнения события H равна соответственно

$$P(A/H_2) = 0,6; \qquad P(A/H_3) = 0,2; \qquad P(A/H_4) = 0.$$

Вычислим теперь вероятности гипотез. Гипотеза H_1 свершается, если во всех трех выстрелах зарегистрировано попадание. Согласно теореме умножения для независимых событий вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1)=0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7=0,14.$$

Гипотеза H_2 имеет место в том случае, когда среди трех выстрелов два попадания будут зарегистрированы или в первом и втором выстрелах, или в первом и третьем выстрелах, или во втором в третьем выстрелах. Согласно теореме сложения для несовместных событий и теореме умножения для независимых событий будем иметь

$$P(H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41.$$

Аналогично рассуждая, находим вероятность третьей гипотезы:

$$P(H_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

Вычисление вероятности четвертой гипотезы $P(H_4)$ не является обязательным, поскольку при этой гипотезе условная вероятность события A равна нулю.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = 1 \cdot 0{,}14 + 0{,}6 \cdot 0{,}41 + 0{,}2 \cdot 0{,}36 = 0{,}458.$$

Задачи

4.1. Управление беспилотным самолетом при посадке осуществляется по радиолинии посредством двух команд «вверх» и «вниз». Определить полную вероятность искажения команды помехами, если вероятность передачи команды «вверх» равна 0,2 и вероятность искажения этой команды помехами – 0,4, а вероятность передачи команды «вниз» равна 0,8 и вероятность её искажений – 0,1.

4.2. Связная самолетная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и составляющей 25 % полной мощности. Вероятности работы радиостанций в этих режимах соответственно равны 0,7; 0,1; 0,2. Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют соответственно величины 0,3; 0,2; 0,05. Определить вероятность того, что за время T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

4.3. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины возникнет сбой в арифметическом устройстве, оперативной памяти и остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, оперативной памяти и остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

4.4. Схема содержит 3 блока типа A, 2 блока типа B и 5 блоков типа C. Схема выходит из строя при порче любого блока. Блоки типа A выходят из строя с вероятностью 0,2, блоки типа B – с вероятностью 0,3, блоки типа C – с вероятностью 0,5. Найти вероятность выхода схемы из строя.

4.5. Имеется четыре крупные цели, пять средних и одиннадцать мелких. Вероятности попадания в цель соответственно равны P_1 = 0,7; P_2 = 0,5; P_3 = 0,2. Стрельба ведется по одной из наугад выбранной цели. Определить вероятность попадания в цель.

4.6. Вероятность того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приёмника или передатчика) выйдут за время полета из допусков, равна соответственно 0,1; 0,2; 0,3. В случае, если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, двух блоков – 0,4, трех – 0,5. Найти вероятность того, что связь не будет установлена.

4.7. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

4.8. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью P_0, если применяет – с вероятностью $P_1 < P_0$.Вероятность того, что во время цикла будут применены помехи, равна P и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

4.9. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью Р имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером, с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i-го контролера равна P_i (i = 1,2,3). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью P_0. Определить вероятности следующих событий:

A – изделие будет забраковано;

B – изделие будет забраковано в цехе;

C – изделие будет забраковано в ОТК завода.

4.10. Команда состоит из двух отличных, двух хороших и четырех посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7 и для посредственного – 0,5. Наугад вызываются два стрелка, причем каждый из них стреляет один раз. Какова вероятность, что оба стрелка попадут в цель.

4.11. Орудийная батарея состоит из четырех орудий: два орудия попадают в цель при одном выстреле с вероятностью 0,6, а два других – с вероятностью 0,7. Для поражения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании вероятность поражения цели равна 0,8. Одно из орудий выстрелило дважды. Найти вероятность поражения цели.

4.12. Через сектор обзора РЛС проходит группа из N самолетов, каждый из которых имеет постановщик помех. Если на самолете включен постановщик помех, вероятность его обнаружения равна P_1, если постановщик помех не включен – P_2. Постановщик помех включается с вероятностью P. Найти вероятность того, что не все самолеты будут обнаружены.

4.13. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и $в$ черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

4.14. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

4.15. Для контроля продукции из трех партий деталей взята одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 1/3 деталей – бракованные, а в двух других все доброкачественные?

4.16 При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5/3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

4.17. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица переходит в единицу с вероятностью p и в нуль с вероятностью $(1 - p)$, нуль переходит в нуль с вероятностью q и в единицу с вероятностью $(1 - q)$. Наугад отправлен сигнал. Вычислить вероятность того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал единицы; б) на приемном конце будет получен сигнал нуля.

4.18. Для повышения надежности и улучшения качества радиосвязи в условиях замираний приём сообщений корреспондента осуществляется на два приёмника, пространственно разнесённых друг относительно друга. Вероятность приема сигнала первым радиоприёмником равна 0,8, вторым – 0,7, а при одновременной работе обоих – приёмников 0,94. Определить вероятность приёма радиосигнала корреспондентом, если вероятность безотказной работы за время сеанса связи первого приёмника составляет 0,9, второго 0,85, а радиостанции корреспондента – 0,8.

4.19. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приёмника, передается два сигнала: единица и нуль. За счет воздействия помех сигналы могут искажаться. На участке передатчик-ретранслятор единица переходит в единицу с вероятностью p_1 и в нуль с вероятностью $(1 - p_1)$, нуль переходит в нуль с вероятностью p_2 и в единицу с вероятностью $(1 - p_2)$. На участке ретранслятор-приёмник указанные вероятности соответственно равны p_3 и $(1 - p_3)$, p_4 и $(1 - p_4)$. Найти вероятность того, что комбинация 10, посланная передатчиком, будет принята приёмником без искажений.

4.20. Имеется n экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ не на все $2n$ вопросов, а только на $m < 2n$. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

Раздел 5. Формула Байеса

Формула Байеса является отображением причинно-следственной связи, существующей между случайными событиями. Пусть в результате проведения опыта мы наблюдаем некоторое событие (следствие) A, которое может быть вызвано одним из n исключающих друг друга событий (причин). Вследствие некоторого случайного механизма, связанного с изучаемым явлением, каждая причина вызывает следствие A со своей вполне определенной вероятностью. Спрашивается, как вычислить вероятность того, что наблюденное в опыта событие A было вызвано каждой из возможных причин.

Относительно возможных причин, вызывающих появление события (следствия) A, выдвигаются n. гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Предполагается, что до опыта известны или могут быть вычислены их вероятности $P(H_1), ..., P(H_n)$, которые называются априорными вероятностями гипотез. Если зафиксирована некоторая гипотеза H_i, то это снимает неопределенность относительно причины, вызвавшей появление события A; вычисление условной вероятности $P(A/H_i)$ обычно не представляет большого труда. Вероятность того, что верна гипотеза H_i после проведения опыта, в котором зарегистрировано появление события А, вычисляется по формуле Байеса

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)},$$

где $P(H_i / A)$ – апостериорные вероятности. Как видно из формулы, апостериорная вероятность гипотезы H_i зависит не только от априорной вероятности этой гипотезы, но и от условной вероятности события A при данной гипотезе.

Пример 1

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что эта пробоина принадлежит третьему стрелку.

Решение. В результате проведения опыта наблюдалось следствие (событие) A – в мишени обнаружена одна пробоина. Выдвигаем относительно причин, вызвавших следствие A, следующие гипотезы:

H_1 – в мишень попал первый стрелок, а второй и третий стрелок не попали;

H_2 – в мишень попал второй стрелок, а первый и третий стрелок не попали;

H_3 – в мишень попал третий стрелок, а второй и первый стрелок не попали.

Вероятности этих гипотез находятся по теореме умножения независимых событий:

$$P(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}015; \qquad P(H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}035;$$

$$P(H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}135.$$

Любая из перечисленных гипотез (причин) с неизбежностью приводит к появлению события A, т.е. условные вероятности появления события A при любой гипотезе равны единице:

$$P(A / H_1) = P(A / H_2) = P(A / H_3) = 1.$$

По формуле Байеса находим вероятность того, что пробоина принадлежит третьему стрелку, т.е. что верна третья гипотеза

$$P(H_3 / A) = \frac{0{,}135}{0{,}015 + 0{,}035 + 0{,}135} = 0{,}7.$$

Пример 2

Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линия отличается от нормального, используется индикатор, принадлежащий с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу, вероятнее всего, принадлежал индикатор.

Решение. Событие A, которое наблюдалось, заключается в том, что индикатор сработал и был получен сигнал о нарушении нормальной работы линии. Неизвестным является, к какому из трех типов принадлежит индикатор. Выдвигаем гипотезы:

H_1 – индикатор принадлежит к первому типу;

H_2 – индикатор принадлежит ко второму типу,

H_3 – индикатор принадлежит к третьему типу.

Априорные вероятности этих гипотез известны и равны: $P(H_1)$ = 0,2, $P(H_2)$ = 0,3, $P(H_3)$ = 0,5. Кроме того, известны условные вероятности срабатывания индикатора для каждого из перечисленных типов: $P(A/H_1)=1$, $P(A/H_2)=0,75$, $P(A/H_3)=0,4$.

Вероятности того, что верны первая, вторая или третья гипотеза, находятся по формуле Байеса:

$$P(H_1/A)=\frac{0,2}{0,2+0,3\cdot 0,75+0,5\cdot 0,4}=0,32,$$

$$P(H_2/A)=\frac{0,3\cdot 0,75}{0,2+0,3\cdot 0,75+0,5\cdot 0,4}=0,36,$$

$$P(H_3/A)=\frac{0,5\cdot 0,4}{0,2+0,3\cdot 0,75+0,5\cdot 0,4}=0,32.$$

Следовательно, вероятнее всего, что индикатор принадлежал ко второму типу.

Пример 3

Из урны, в которой было $m\geq 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из неё наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.

Решение. Результатом опыта явился факт, что два вынутые из урны шара оказались белыми. В этом состоит событие *A*. Вероятность этого события зависит от того, какого цвета шар был потерян. Выдвигаем гипотезы:

H_1 – потерян шар белого цвета;

H_2 – потерян шар черного света.

Поскольку потеря любого шара из урны равновероятна, то априорные вероятности потерять шар белого или черного цвета будут равны соответственно

$$P(H_1)=\frac{m}{n+m};\; P(H_2)=\frac{n}{n+m}.$$

Если зафиксирована гипотеза, то вычисление вероятности события А не представляет большого труда. Например, если свершилась гипотеза H_1, то в урне осталось шаров $n + m - 1$, из них белого цвета $(m - 1)$. Вероятность извлечь при этом два шара белого цвета будет равна

$$P(A / H_1) = \frac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2},$$

т.е. отношению числа различимых комбинаций по два шара, взятых из белых шаров, к числу различимых комбинаций по два шара, взятых из общего числа шаров в урне. Аналогично находится вероятность события A при второй гипотезе

$$P(A / H_2) = \frac{C_m^2}{C_{n+m-1}^2}.$$

По формуле Байеса находим априорную вероятность первой гипотезы

$$P(H_1 / A) = \frac{\dfrac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \dfrac{m}{n+m}}{\dfrac{C_{m-1}^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \dfrac{m}{n+m} + \dfrac{C_m^2}{C_{n+m-1}^2} \cdot \dfrac{n}{n+m}} = \frac{m \cdot C_{m-1}^2}{m \cdot C_{m-1}^2 + n \cdot C_m^2}.$$

Задачи

5.1. Имеются три урны: в первой из них 2 белых шара и 3 черных; во второй – 3 белых шара и 2 черных, в третьей – 5 белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из неё шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

5.2. Известно, что 96 % выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,03. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

5.3. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}3$.

5.4. Прибор состоит из двух узлов, работа каждого узла, безусловно, необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго – p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

5.5. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

5.6. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества; вообще 40 % приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность (вероятность безотказной работы) равна 0,95, если из деталей обычного качества, то его надежность равна 0,7. Прибор испытывался и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

5.7. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй - с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0. Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: 1) первым контролером; 2) вторым контролером; 3) ОТК завода.

5.8. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

5.9. По двоичному каналу связи с шумами передаются сигналы 1 или 0 с априорными вероятностями $P(1) = 0,6$ и $P(0) = 0,4$. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $P(1/1) = 0,9$; вероятность перехода единицы в нуль $P(0/1) = 0,1$; вероятность перехода нуля в нуль

$P(0/0) = 0{,}8$ и вероятность перехода нуля в единицу $P(1/0) = 0{,}2$. На выходе радиоприёмного устройства зарегистрирована единица. Какова вероятность того, что: а) в действительности была передана 1; б) на самом деле был передан 0.

5.10. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1 - p)$ только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует превышение некоторого порогового значения с вероятностью p_1; если только помеха – с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало превышение некоторого порогового значения. Найти вероятность того, что в составе принятого сигнала имеется полезный сигнал.

5.11. Две радиостанции I и II независимо друг от друга передают, по одному разу одно и то же сообщение радиостанции III. Вероятность приёма сообщения станцией III от станции I равна 0,8, а от станции II – 0,4. Станцией III было принято одно сообщение. Найти вероятность того, что это сообщение было передано станцией I.

5.12. Брак в продукции завода вследствие дефекта A составляет 5 %, причем среди забракованной по признаку A продукции в 6 % случаев встречается дефект B, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект B встречается в 2 % случаев. Найти вероятность встретить дефект B во всей продукции.

5.13. Имеется две урны: в первой, a белых шаров и b черных, во второй – c белых и d черных. Выбирается наугад одна из урн и вынимается из неё один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что следующий шар, который мы вынем из той же урны, будет тоже белым.

5.14. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количества бракованных изделий наиболее вероятно?

5.15. В техникуме n студентов, из которых n_k $(k = 1, 2, 3)$ человек учатся k-й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

5.16. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: АААА, ВВВВ, СССС, причем априорные вероятности каждой из последовательностей есть соответственно 0,3; 0,4; 0,3. Известно, что действие шумов на приёмное устройство уменьшает вероятность правильного приёма каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность АААА, если на приемном устройстве получена АВСА.

Раздел 6. Схема Бернулли (повторение независимых опытов)

Рассматривается последовательность независимых опытов, в каждом из которых возможны два исхода – появление или не появления некоторого события A. Предполагая вероятность появления события A в каждом опыте известной, необходимо найти вероятность того, что оно появится ровно m раз среди n независимых опытов.

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А происходит с одной и той же вероятностью p, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \ldots, n),$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность $R_{m,n}$ того, что среди n опытов событие A появится не менее m раз, выражается формулой

$$R_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} P_{k,n}\,.$$

Если $m < \dfrac{n+1}{2}$, то удобнее перейти к противоположному событию и вероятность $R_{m,n}$ вычислять по формуле

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,n}\,.$$

Полагая в последней формуле $k = 1$, получим выражение для вероятности хотя бы одного появления события A при n независимых опытах

$$R_{1,n} = 1 - P_{0,n} = 1 - q^n.$$

Пример 1

Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8. Какова вероятность 3 попаданий при 5 выстрелах?

Решение. В данной задаче опыт заключается в выстреле по мишени и он повторяется 5 раз. Исходами каждого опыта является попадание или непопадание в мишень; вероятности этих исходов равны p = 0,8 и q = 0.2.

Нас интересуют такие исходы в серии из 5 выстрелов, когда будет три попадания, независимо от того, в каких по счету выстрелах они будут зарегистрированы. Количество таких исходов равно C_5^3. В силу независимости опытов вероятность каждого исхода одна и та же и равна $0{,}83^3 \cdot 0{,}2^2$. Поскольку все исходы в серии опытов представляют собой несовместные события, то искомая вероятность равна сумме вероятностей всех исходов, когда среди 5 выстрелов будет 3 попадания, т.е.

$$P_{3,5} = C_5^3\ 0{,}8^3\ 0{,}2^2 = 0{,}2.$$

Пример 2

Самолет сбрасывает 6 бомб на объект с вероятностью попадания каждой 0,3. Какова вероятность разрушения объекта, если для этого достаточно двух попаданий?

Решение. Опыт заключается в сбрасывании одной бомбы и он повторяется 6 раз. Исходами каждого опыта является попадание и непопадание бомбы; вероятности этих исходов равны $p = 0{,}3$; $q = 0{,}7$ по условию задачи. Объект будет разрушен, если будут иметь место такие исходы в последовательности из 6 опытов, в которых зарегистрировано не менее чем два попадания. Иными словами, разрушение объекта происходит при попадании любого количества бомб за исключением одного попадания и непопадания всех бомб.

В данной задаче удобнее перейти к противоположному событию – попаданию менее двух бомб – и воспользоваться формулой

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,n}.$$

В таком случае $n = 6$; $m = 2$; $P_{0,6} = 0{,}7^6$; $P_{1,6} = C_6^1\ 0{,}3\ 0{,}7^5$;
$R_{2,6} = 1 - 0{,}7^6 - 6\ 0{,}3\ 0{,}7^5 = 0{,}58$.

Пример 3

Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше, чем второго. Вероятность изготовления годной детали первым автоматом равна 0,9, а вторым – 0,7. С конвейера взяты любые 5 деталей. Найти вероятность того, что 4 из них годные.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что 4 детали из 5 взятых с конвейера годные. В условиях задачи есть неопределенность, заключающаяся в том, что неизвестно, на каком автомате изготовлена каждая деталь, взятая с конвейера. Чтобы снять эту неопределенность, выдвигаем гипотезы:

H_1 – деталь изготовлена на первом автомате;

H_2 – деталь изготовлена на втором автомате.

Поскольку производительность первого автомата втрое больше, чем второго, то вероятность первой гипотезы в три раза больше вероятности второй, а в сумме эти вероятности дают единицу.

Следовательно:

$$P(H_1) = \frac{3}{4}, \quad P(H_2) = \frac{1}{4}.$$

Введем событие B – случайно взятая деталь с конвейера годная. Из условия задачи следует

$$P(B/H_1) = 0{,}9, \qquad \text{P}(B/H_2) = 0{,}7.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(B) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}7 = 0{,}85; \qquad P(\overline{B}) = 0{,}15.$$

Опыт заключается в том, что с конвейера берется деталь, этот опыт повторяется 5 раз. Исходы каждого опыта состоят в том, что взятая с конвейера деталь годная или негодная. Вероятности этих исходов равны соответственно 0,85 и 0,15. Нас интересуют исходы в серии из 5 опытов, в которых событие B появится 4 раза независимо от того, в каких по счету опытах оно появится. Таких исходов C_5^4, а каждый исход в силу независимости опытов имеет вероятность $0{,}85^4 \cdot 0{,}15$. Следовательно, по теореме о повторении опытов имеем $P(A) = C_5^4\, 0{,}85^4 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}39$.

Задачи

6.1. Транзисторный радиоприемник смонтирован на 9 полупроводниках, для которых вероятность брака равна 0,05. Найти вероятность того, что приемник будет неработоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее двух бракованных полупроводников.

6.2. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

6.3. Радиоэлектронный комплекс самолета-бомбардировщика включает в себя 10 объектов. Вероятность безотказной работы каждого объекта в течение времени T равна 0,9. Объекты выходят из строя независимо один от другого. Вычислить вероятность того, что за время T: а) откажет хотя бы один объект; б) откажут ровно два объекта; в) откажут не менее двух объектов.

6.4. Алфавит источника сигнала состоит из 10 равновозможных кодовых комбинаций, причем каждый раз в линию связи посылается один из них. Какова вероятность того, что в результате пятикратной передачи одна и та же кодовая комбинация появится не менее трех раз?

6.5. Коды некоторой радиотелеграфной системы с целью большей защищенности от помех, которые могут преобразовать одни коды в другие, составляются только из четного числа импульсов. Коды с нечетным числом импульсов регистрируются приемным устройством как ошибочные и не принимаются. Благодаря этому, искажения получаются только в случаях подавления помехами не менее чем двух импульсов (или 4 и т.д.) одновременно в одном коде или при появлении четного числа ложных импульсов на незанятых позициях кода. Определить вероятность искажения кода, состоящего из двух импульсов и четырех свободных позиций за счет появления ложных импульсов от помех, если вероятность появления ложного импульса (на одной позиции) $P = 0{,}4$ и ложные импульсы на различных позициях появляются независимо один от другого.

6.6. Найти вероятность искажения кода (см. задачу 5.5) при условии, что проверка на четность импульсов на приемном конце линии передачи не производится и для искажения кода достаточно появление хотя бы одного ложного импульса на какой-либо свободной позиции кода.

6.7. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 или 1 на каждой позиции равновозможно. Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации появится число нулей меньше двух.

6.8. При вращении антенны радиолокатора во время облучения точечной цели (например, самолета) успевают отразиться 8 импульсов. Найти вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора, если для этого необходимо прохождение через приемник не менее 5 импульсов, а вероятность подавления импульса помехой в приемнике равна 0,1, и подавление различных импульсов помехами независимые события.

6.9. В семье десять детей. Считая вероятность рождения мальчика или девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

6.10. Для того чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди вновь пойманных 150 рыб 10 меченых?

6.11. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсов равна 0,25. Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 видеоимпульсов превысят порог.

6.12. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, может быть обнаружен с вероятностью P. Для контроля, из продукции завода выбирается n изделий. Найти вероятность следующих событий:

A – ни в одном из изделий не будет обнаружено дефекта;

B – среди n изделий ровно в двух будет обнаружен дефект;

C – среди n изделий не менее чем в двух будет обнаружен дефект.

6.13. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимание рабочего в течение промежутка времени τ, равна 1/3. Найти вероятность того, что а) за время τ 4 станка потребуют к себе внимания рабочего; б) число требований к рабочему со стороны станков за время τ будет между 3 и 6 (включая границы).

6.14 Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом равна 0,004. Какова вероятность уничтожения самолета при залпе из 250 винтовок?

6.15. Для увеличения надежности радиосвязи используется метод накопления, при котором каждый символ (0 или 1) передается три раза подряд. На приемном конце регистрируется тот символ, который в принятой последовательности из трех символов содержится не менее двух раз. Определить вероятность правильного приема по методу накопления, если вероятность правильного приема каждого символа равна 0,9.

6.16. Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятности попадания каждым из охотников одинаковы и равны 0,4. Определить вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0,2, при двух – с вероятностью 0,5 и при трех – с вероятностью 0,8.

6.17. Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Найти вероятность того, что у стрелка останется хотя бы один неизрасходованный патрон, если он получил десять патронов и вероятность попадания в цель при каждом выстреле постоянна и равна 0,2.

6.18. Производится стрельба тремя ракетами по кораблю. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Для потопления корабля достаточно двух попаданий; при попадании одной ракеты корабль тонет с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что корабль будет потоплен.

6.19. Пункт A нужно связать с 10 абонентами пункта B. Каждый абонент занимает линию 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

6.20. Телефонная станция обслуживает N абонентов, которые пользуются телефоном одинаково часто и в течение часа производят n разговоров со средней продолжительностью 1/40 часа. Найти вероятность одновременного разговора равно m абонентов.

6.21. АТС обслуживает N абонентов, каждому из которых может предоставить для разговора любую из l линий ($l < N$), если она свободна. Все абоненты одинаково часто говорят по телефону и в течение часа производят n разговоров средней продолжительностью 1/40 часа каждый. Один из абонентов вызвал АТС. Какова вероятность того, что все линии окажутся занятыми?

6.22. Сорт «Смесь» содержит поровну конфеты четырех наименований, например «а», «б», «в» и «г». Большое количество конфет «Смесь» расфасовывается в кульки по 8 конфет в каждый для подарков на детский праздник. Какова вероятность того, что из 25 подарков в 9 окажется по одной конфете сорта «а»?

6.23. Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

6.24. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

6.25. Радиолокационная станция, работающая в режиме кругового обзора, обнаруживает цель за один цикл обзора с вероятностью $p = 0{,}7$. Найти вероятность того, что за 10 циклов обзора: а) сигнал от цели будет зарегистрирован ровно 3 раза; б) не менее 5 раз.

6.26. В условии задачи 6.25 цель за каждый цикл обзора облучается серией из n импульсов. Решение о наличии сигнала от цели принимается, если не менее k импульсов в серии превысили некоторый порог. Вероятность превышения порога одним импульсом равна p_1 и одинакова для всех импульсов серии. Найти вероятность того, что за N циклов обзора сигнал от цели будет зарегистрирован не менее m раз.

6.27. На самолете имеется постановщик помех, который включается автоматически от специального приемного устройства, реагирующего на облучение самолета сигналом РЛС. Включение производится, если зарегистрировано не менее 4 импульсов. Вероятность обнаружения каждого импульса равна p. Найти вероятность включения постановщика помех при облучении самолета серией из 20 импульсов.

6.28. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5 и 0,8.

6.29. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приема каждого из сигналов не зависят от приема остальных и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Определить вероятность того, что будет принято k сигналов ($k = 0,1,2,3,4$).

6.30. Агрегат состоит из основной и нескольких резервных цепей. Каждая цепь включает в себя пять последовательно соединенных элементов.

Надежность каждого элемента 0,98. Сколько нужно иметь резервных цепей, чтобы надежность агрегата была бы не меньше надежности элемента?

6.31. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не менее трех отказов?

Раздел 7. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной называется случайная величина, возможные значения которой можно перечислить и они отличаются на конечную величину.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает. Закон распределения может иметь разные формы.

Ряд распределения

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены всевозможные значения этой случайной величины $x_1, x_2, \dots x_n$ и указаны вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения $P_1, P_2, \dots, P_n$:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

где $p_i = P\,[X = x_i\,]$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графическое изображение ряда распределения называется ***многоугольником распределения.***

Функция распределения

Функция распределения случайной величины X – это функция $F(x)$, выражающая зависимость вероятность неравенства $X < x$ от текущего значения x:

$$F(x) = P\,[X < x].$$

Функция $F(x)$ есть неубывающая функция: $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$.

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция; она испытывает скачки в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины X, причем величина скачка равна вероятности соответствующего возможного значения.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

где x_i – возможные значения случайной величины X, $p_i = P[X = x_i]$; $M[\cdot]$ – оператор усреднения. Если вас интересует результат, полученный после выполнения операции усреднения, то мы его будем обозначать одной буквой $M[X] = m_x$.

Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины X от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины

$$D[X]=M[\dot{X}^2].$$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i.$$

Дисперсия $D[X]$ кратко обозначается D_x.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}.$$

Начальным моментом к-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой случайной величины

$$m_k[X]=M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины $m_k[X]$ вычисляется по формуле

$$m_k[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Центральным моментом к-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\dot{X}$:

$$\mu_k[X]=M[\dot{X}^k].$$

Он вычисляется по формуле

$$\mu_k[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^k p_i.$$

Пример 1

На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомобилю дальнейшее движение. Составить закон распределения случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

Решение. Чтобы составить закон распределения дискретной случайной величины X, необходимо перечислить её возможные значения и вычислить вероятности, с которыми она их принимает. В данной задаче случайная величина X имеет возможные значения $x_1 = 0$, $x_2=1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.

Случайная величина X принимает свое первое значение $x_1 = 0$ в том случае, если первый же встретившийся светофор запрещает автомобилю дальнейшее движение. Следовательно, событие $X = 0$ эквивалентно событию – светофор запрещает автомобилю дальнейшее движение. Отсюда $P[X = 0] = 0,5$. Событие, состоящее в том, что случайная величина принимает своё второе возможное значение $x = 1$, эквивалентно событию – первый светофор разрешает, а второй – запрещает дальнейшее движение автомобиля. Предполагая, что разрешение и запрещение движения автомобилю двумя соседними светофорами представляют независимые события, получим $P\left[X=1\right]=0,5\cdot 0,5=0,25$. Аналогично вычисляются вероятности того, что случайная величина X принимает следующие значения:

$$P\left[X=2\right]=0,5^3=0,125;\ P\left[X=3\right]=0,5^4=0,0625.$$

Вероятность того, что случайная величина примет пятое возможное значение $X = 4$, равна вероятности того, что все четыре светофора разрешают дальнейшее движение автомобиля. Следовательно, $P[X = 4] = 0,5^4 = 0,0625$. Следует обратить внимание, что вероятности двух последних возможных значений случайной величины равны между собой, хотя смысл последних сомножителей в формулах для вычисления этих вероятностей разный. По вычисленным значениям построим ряд распределения:

X	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

Пример 2

Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка P_1, для второго – P_2. Рассматриваются две случайные величины: X_1 – число попаданий первого стрелка; X_2 – число попаданий второго стрелка и их разность $Z = X_1 - X_2$. Построить ряд распределения случайной величины Z и найти ее характеристики m_z и D_z.

Решение. Случайная величина Z, представляет собой разность числа попаданий первого и второго стрелка, имеет три возможных значения: $Z_1 = -1$; $Z_2 = 0$; $Z_3 = 1$. Событие, состоящее в том, что случайная величина Z принимает первое возможное значение $Z_1 = -1$, эквивалентно одновременному осуществлению двух событий, состоящих в том, что число попадании X_1 первого стрелка равно нулю ($X_1 = 0$), а число попаданий X_2 второго стрелка равно единице ($X_2 = 1$). Поскольку стрелки стреляют независимо, то события $X_1 = 0$ и $X_2 = 1$ также являются независимыми. Пользуясь теоремой умножения для независимых событий, получим

$$P(Z=-1) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=1) = q_1 p_2.$$

Событие $Z = 0$ реализуется в том случае, если в результате выстрела будет зарегистрировано или попадание, или непопадание в мишень у обоих стрелков. Попадание и непопадание в мишень обоих стрелков представляют несовместные события. Пользуясь теоремой сложения для несовместных событий, получим

$$P(Z=0) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=0) + P(X_1=1)\cdot P(X_2=1) = q_1 q_2 + p_1 p_2.$$

Аналогично находится вероятность того, что случайная величина X примет своё третье значение

$$P(Z=1) = P(X_1=1)\cdot P(X_2=0) = q_2 p_1.$$

В этих формулах предполагается $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$.

Ряд распределение величины Z имеет вид

z_i	-1	0	1
p_i	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} z_i P(Z = z_i) = (-1) q_1 p_2 + 0\cdot(q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1\cdot p_1 q_2 = -q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 - p_2.$$

Дисперсию находим через второй начальный момент

$$D_z = m_2[Z] - m_z^2;\; m_2[Z] = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 P[Z = z_i].$$

В конкретном случае

$$m_2[Z] = (-1)^2 q_1 p_2 + 0^2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1^2 p_1 q_2 = p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2;$$

$$D_z = p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2 - (p_1 - p_2)^2 = p_1 q_1 + p_2 q_2 .$$

Пример 3

Четыре одинаковые электрические лампочки временно выворачивают из патронов и кладут в ящик. Затем их случайным образом вынимают из ящика и вворачивают в патроны. Каково математическое ожидание числа лампочек, попавших в тот патрон, из которого они были вынуты?

Решение. Опыт заключается в том, что вворачивается 4 электрических лампочки в 4 патрона. Исходом данного опыта является какое-либо размещение электрических лампочек по патронам. Подсчитаем число возможных исходов, т.е. число способов размещения электрических лампочек по патронам.

В первый патрон можно ввернуть любую из 4 электрических лампочек. После того как первый патрон занят, во второй патрон можно ввернуть любую из 3 оставшихся лампочек. Подобным же образом в третий патрон можно ввернуть любую из 2 оставшихся лампочек и, наконец, в четвертый патрон вворачивается одна оставшаяся лампочка. Рассуждая таким образом, приходим к выводу о том, что число возможных исходов в опыте равно числу перестановок из 4 элементов, т.е. $P_4 = 4! = 24$.

С рассматриваемым опытом свяжем случайную величину X – число лампочек, попавших в тот патрон, из которого они были вынуты. Введенная случайная величина имеет возможные значения $x_0 = 0, x_1 = 1, ..., x_4 = 4.$

Вычислим вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения. Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X = 4$, эквивалентно тому, что все электрические лампочки попадут в патрон, из которого они вынуты. Из 24 возможных исходов в данном опыте лишь один благоприятствует указанному событию. Следовательно:

$$P[X = 4] = \frac{1}{24}.$$

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X = 3$, эквивалентно тому, что три лампочки попадут в патрон, из которого они вынуты. Это событие следует рассматривать как невозможное, так как если 3 лампочки попали в патроны, из которых они вынуты, то из этого неизбежно вытекает, что и четвертая лампочка попадет в патрон, из которого она вынута. Следовательно:

$$P[X = 3] = 0.$$

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X = 2$, эквивалентно тому, что 2 лампочки из 4 попадут в патроны, из которых они вынуты. С тем, чтобы выполнялось событие $X = 2$, две оставшиеся лампочки могут быть размещены по патронам единственным способом. Поэтому количество исходов опыта, благоприятствующих событию $X = 2$, равно числу способов, сколькими можно взять 2 лампочки из 4, т.е. $C_4^2 = 6$. Отсюда

$$P[X = 2] = \frac{6}{24}.$$

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X = 1$, эквивалентно тому, что одна лампочка из 4 попадет в патрон, из которого она вынута. Этой лампочкой может быть любая из четырех. С тем, чтобы выполнялось событие $X = 1$, три оставшиеся лампочки могут быть размещены по патронам двумя способами. Поэтому количество исходов опыта, благоприятствующих событию $X = 1$, равно произведению $4 \cdot 2 = 8$. Отсюда

$$P[X = 1] = \frac{8}{24}.$$

Событие, состоящее в том, что случайная величина примет значение $X = 0$, эквивалентно тому, что ни одна лампочка из 4 не попадет в патрон, из которого она вынута. Это событие дополняет предыдущие события до полной группы, поэтому его вероятность равна

$$P[X = 0] = 1 - \frac{1}{24} - \frac{6}{24} - \frac{8}{24} = \frac{9}{24}.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i).$$

В рассматриваемом конкретном случае

$$M[X]=0\cdot\frac{9}{24}+1\cdot\frac{8}{24}+2\cdot\frac{6}{24}+3\cdot 0+4\cdot\frac{1}{24}=1.$$

Задачи

7.1. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие *А*; вероятность события *А* равна *р*. Рассматривается случайная величина *X*, равная единице, если событие А произошло, и нулю, если не произошло (число появлений события *А* в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины *X* и её функцию распределения, найти её математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент.

7.2. Производятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

7.3. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A. Написать ряд распределения случайной величины X – числа появлений противоположного события $\bar{A}$ в n опытах – и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

7.4. Два баскетболиста поочередно забрасывает мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго – 0,6.

7.5. Вероятность получения отметки от цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна *р*. Цель считается обнаруженной, если от нее получено n отметок. Найти закон распределения случайной величины X – числа оборотов антенны радиолокатора до обнаружения цели.

7.6. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа *X* появлений герба к числу *Y* появлений решки.

7.7. В нашем распоряжении имеется n лампочек: каждая из них с вероятностью p имеет дефект. Лапочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Рассматривается случайная величина X – число лампочек, которое будет испробовано. Построить ее ряд распределения и найти математическое ожидание.

7.8. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

7.9. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа дополнительных вопросов которые задаст преподаватель студенту.

7.10. Монета бросается n раз. Найти функцию распределения числа выпадений решки.

7.11. На вход ограничителя воздействует видеоимпульс со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна P. Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X, принимающую значение 1 (превышение) и 0 (непревышение), определить среднее значение и дисперсию величины X. Найти среднее значение и дисперсию числа Y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

7.12. Закон распределения дискретной случайной величины задан рядом распределения

x_i	– 2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание m_x и дисперсию D_x случайной величины X.

7.13. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна P_1, P_2 и P_3. Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно P_1+ P_2+P_3.

7.14. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1,2,2,5,10; б) 1,2,3,4,10; в) 1,2,5,10, среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании гири ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

7.15. Вероятность приёма позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 с до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 с. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двухсторонней связи.

7.16. На пути движения автомобиля шесть светофоров; каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Составить ряд распределения и построить функцию распределения числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

7.17. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M[X] = 0,9$.

7.18. Найти математическое ожидание суммы очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных костей.

7.19. Блокировочная схема, состоящая из реле A, включенного последовательно с двумя реле B и C, соединёнными параллельно, должна обеспечить замыкание цепи между входной и выходной клеммами. Вследствие неисправности реле A может не сработать с вероятностью 0,18, а реле B и C – с одинаковыми вероятностями, равными 0,22. Определить среднее число включений схемы до первого отказа блокировочной схемы.

7.20. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками a. Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из n станков равновероятна, вычислить среднее значение длины перехода рабочего.

7.21. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекается по одному шару без возвращения до первого появления белого цвета. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров.

7.22. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

7.23. Некий человек хочет открыть свою дверь и имеет n ключей. По неизвестным нам причинам он испытывает эти ключи независимо и случайно. Найти математическое ожидание числа испытаний: а) если уже испробованный ключ не устраняется из дальнейшего выбора; б) если устраняется. (Предполагается, что только один ключ подходит к двери).

Раздел 8. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X называется ***распределенной по биномиальному закону***, если она имеет целочисленные возможные значения $0,1,\ldots,n$, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой

$$P[X = m] = P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $0 < p < 1$.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по биноминальному закону, равна $m_x = np$, а дисперсия $D_x = np(1-p)$.

Дискретная случайная величина X называется ***распределенной по закону Пуассона***, если ее возможные значения составляют бесконечный ряд целых чисел $0,1,2,\ldots,m,\ \ldots$, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой

$$P[X = m] = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a > 0$ – параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона: $m_x = a$, $D_x = a$.

Распределение Пуассона широко используется в теории массового обслуживания для описания потоков событий. ***Потоком событий*** называется последовательность событий, наступающих в *случайные моменты времени*. Для *простейшего (пуассоновского)* потока событий вероятность появления ровно m событий в заданный интервал времени T определяется распределением Пуассона с параметром распределения a, определяемым выражением $a=\lambda T$, где λ – интенсивность потока, среднее число событий, которое появляется в единицу времени.

Пример 1

Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. При шестикратной передаче найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для числа принятых сигналов.

Решение. Опыт заключается в передаче радиосигнала, и он повторяется 6 раз. С каждым опытом связано два возможных исхода: положительный – сигнал принят; отрицательный – сигнал не принят. Введём случайную величину X – число положительных исходов в серии из 6 опытов с возможными значениями $X_0 = 0$, $X = 1$, …, $X_6 = 6$. Вероятность того, что случайная величина X примет какое-то конкретное возможное значение, определяется теоремой о повторении опытов, а следовательно, сама случайная величина распределена по биномиальному закону. Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются по формулам:

$$m_x = np, \qquad D_x = np(1-p), \qquad \sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Отсюда $m_x = 6 \cdot 0{,}7 = 4{,}2$; $D_x = 6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}26$; $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{1{,}26} = 1{,}12$.

Пример 2

Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну секунду, равно трем. Найти вероятность того, что за две секунды поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение. По условию, $\lambda = 3$, $T = 2$, $m = 4$. Воспользуемся формулой Пуассона.

а) Параметр $a = 3 \cdot 2 = 6$, искомая вероятность $P(4) = \dfrac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0{,}135$.

б) События «поступило менее четырех вызовов» равно сумме следующих несовместных событий: A – поступило 0 вызовов, B – поступил один вызов, $Г$ – поступило два вызова, $Д$ – поступило три вызова. Применив теорему сложения для несовместных событий, получим

$$P(m < 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}152.$$

в) События «поступило не менее четырех вызовов» и «поступило менее четырех вызовов» противоположны, поэтому

$$P(m \geq 4) = 1 - P(m > 4) = 1 - 0{,}152 = 0{,}848.$$

Задачи

8.1. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

8.2. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят пять абонентов?

8.3. Завод выпускает в среднем 99,8 % доброкачественных и 0,2 % бракованных изделий. Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 500 изделий число бракованных будет больше трех?

8.4. Из кошелька на стол высыпали 25 монет. Какова вероятность того, что число монет, упавших гербом вверх, заключено между 8 и 15, включая и эти два крайних значения?

8.5. Среднее число импульсов в секунду хаотической импульсной помехи, подчиняющейся закону распределения Пуассона, равно $\lambda = 10^4\, c^{-1}$. Найти вероятность попадания хотя бы одного импульса в интервал $\tau = 100\,\text{мкс}$.

8.6. Радиостанция связи в среднем отказывает через каждые 150 часов работы. Определить вероятности исправной работы и отказа станции за время сеанса связи продолжительностью 1,5 часа. Известно, что распределение вероятностей возникновения неисправностей в радиоаппаратуре подчиняется закону Пуассона (после того как аппаратура проходит небольшой период «приработки»). Определить также время, в течение которого можно гарантировать исправную работу станции с вероятностью 0,9.

8.7. При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Поток неисправностей можно считать простейшим. Среднее число неисправностей за сутки равно двум. Требуется определить вероятность того, что: а) за двое суток не будет ни одной неисправности; б) в течение суток возникнет хотя бы одна неисправность; в) за неделю работы прибора возникнет не более трех неисправностей.

Раздел 9. Законы распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин

Непрерывной случайной величиной называется величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток. Непрерывная случайная величина X считается заданной, если задана ее функция распределения $F(x)$ или плотность вероятности $w(x)$. Определение функции распределения дано в предыдущем разделе 7.

Плотностью вероятности непрерывной случайной величины называется производная от функции распределения

$$w(x) = F'(x).$$

Плотность вероятности $w(x)$ неотрицательна и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\,dx = 1.$$

Графическое изображение плотности вероятности называется кривой распределения.

Элементом вероятности для случайной величины X называется $w(x)dx,$ приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок $dx,$ примыкающий к точке X.

Вероятность попадания на участок от α до β для непрерывной случайной величины выражается формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} w(x)\,dx.$$

Математическое ожидание и *дисперсия* непрерывной случайной величины X вычисляются по формулам:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x)\,dx;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 w(x)\,dx.$$

Начальный и *центральный* моменты k-го порядка случайной величины X выражаются формулами

$$m_k[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k w(x)\,dx;$$

$$\mu_k[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^k\, w(x)\,dx.$$

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной в интервале (α,β), если ее плотность вероятностей в этом интервале постоянна:

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{при } \alpha<X<\beta;\\ 0 & \text{при } X<\alpha,\ X>\beta.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на участке (α,β), равны

$$m_x=\frac{\alpha+\beta}{2};\quad D_x=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Пример 1

При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время T работы прибора от его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром μ

$$w(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t} & \text{при } t>0;\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$$

При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0, после чего прибор снова включается в работу. Найти плотность вероятности $w(t)$ и функцию распределения $F(t)$ промежутка времени T^* между двумя неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$.

Решение. Промежуток времени T^* между двумя соседними неисправностями складывается из продолжительности ремонта t_0 и времени T работы прибора от его включения до возникновения неисправности, т.е., плотность вероятности случайной величины можно записать в виде

$$w(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t} & \text{при } t>t_0;\\ 0 & \text{при } t<t_0.\end{cases}$$

Функция распределения $F(t)$ выражается через плотность вероятности формулой

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} w(t)dt.$$

При подстановке $w(t)$ и интегрировании получим

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\mu(t-t_0)} & \text{при } t>t_0;\\ 0 & \text{при } t<t_0.\end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины T^* найдется по формуле

$$M\left[T^*\right]=M\left[T\right]+t_0=\int_0^{\infty} t\mu e^{-\mu t}dt+t_0=\frac{1}{\mu}+t_0.$$

Согласно выше приведенной формуле выражение для дисперсии имеет вид

$$D[t]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-M\left[T^*\right]\right)^2 w(t)dt=\int_{t_0}^{\infty}\left(t-\frac{1}{\mu}-t_0\right)^2 \mu e^{-\mu(t-t_0)}dt=\frac{1}{\mu^2}.$$

Вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$, равна

$$P\left(T^*>2t_0\right)=P\left(2t_0<T^*<\infty\right)=F(\infty)-F(2t_0)=1-\left(1-e^{-\mu(2t_0-t_0)}\right)=e^{-\mu t_0}.$$

Пример 2

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ равна $w(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x,$ вне этого интервала $w(x)=0.$ Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно два раза значение, заключенное в интервале $\left(0,\frac{\pi}{4}\right).$

Решение. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β), являющийся частью интервала (a,b), на котором задано распределение случайной величины X, определяется соотношением

$$P(0<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} w(x)dx.$$

В конкретном случае

$$P\left[0<X<\frac{\pi}{4}\right]=\int_{0}^{\pi/4}\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}=\frac{\pi+2}{4\pi}.$$

По условию задачи производится три независимых испытания, в каждом из которых случайная величина попадает в интервал $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. с вероятностью $\frac{\pi+2}{4\pi}$. Вероятность того, что в трех испытаниях X примет ровно два раза значение из интервала $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, равна по теореме о повторении опытов

$$P_{2,3}=C_3^2\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

Пример 3

Случайная величина X распределена по закону Лапласа, т.е. ее плотность равна

$$w(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}},$$

где a – любое вещественное число, $\alpha > 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле

$$m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}dx=\frac{1}{2\alpha}\left\{\int_{-\infty}^{a} xe^{\frac{x-a}{\alpha}}dx+\int_{a}^{\infty} xe^{-\frac{x-a}{\alpha}}dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}(\alpha y+a)e^{y}dy+\int_{0}^{\infty}(\alpha y+a)e^{-y}dy\right\}=a.$$

Дисперсия случайной величины X определяется по формуле

$$D[X]=m_2[X]-m_x^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}dx-a^2=2a^2.$$

Задачи

9.1. Дан график плотности вероятности $w(x)$ случайной величины X. Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак величины на обратный?

9.2. К случайной величине X прибавим постоянную неслучайную величину a. Как от этого изменятся её характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

9.3. Случайную величину умножили на a. Как от этого изменятся её характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

9.4. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (показательное распределение) $F(t)=1-\exp(-\lambda t)$ $(0\le t<\infty)$. Найти вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T.

9.5. Вероятность обнаружения цели за время поиска задается формулой $P(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$ $(\lambda>0)$. Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения цели.

9.6. Время T обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

9.7. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид $F(t) = 1-e^{-t/T}$ $(0\le t)$. Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T; б) плотность распределения $w(t)$.

9.8. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ:

$$w(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

а) построить кривую распределения; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

9.9. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$w(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

а) найти коэффициент a; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания величины X на участок (– 1; + 1); г) существует ли для случайной величины X числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия?

9.10. Мишень состоит из трех концентрических кругов радиусом $1/\sqrt{3}$, 1 и $\sqrt{3}$. Попадание в центральный круг стоит 4 очка, в среднее кольцо – 3 очка, в крайнее кольцо – 2 очка и вне круга – 0 очков. Плотность вероятности точки попадания на расстоянии r от центра мишени равна $\dfrac{1}{\pi(1+r^2)}$. Найти математическое ожидание числа очков, выбитых при пяти выстрелах.

9.11. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.

9.12. Случайная величина X подчинена закону Лапласа

$$W(x) = ae^{-\lambda|x|} \ (\lambda > 0).$$

а) Найти коэффициент a; б) построить графики плотности вероятности и функции распределения; в) найти m_x и D_x.

9.13. Азимутальный лимб имеет цену делений $1°$. Какова вероятность при считывании азимутального угла сделать ошибку в пределах $\pm 10'$, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов?

9.14. На электронное реле воздействует случайное напряжение X с релеевской плотностью вероятности

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (x > 0).$$

Определить вероятность P срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 2 В. Определить среднее значение и дисперсию случайной величины X.

9.15. Интегральная функция релеевского распределения описывается выражением

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Выяснить, начиная с какого значения x_0 величина $F(x_0) \geq 0{,}997$.

9.16. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 8 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного автобуса менее 3 мин.

9.17. Случайная величина X распределена равномерно m_x = 4, D_x = 3. Найти плотность вероятности величины X.

9.18. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0; \\ \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad 0 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $w(x)$; б) найти математическое ожидание и дисперсию X; в) найти вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале(1/2, 1); г) построить графики функций $F(x)$ и $w(x)$.

9.19. Бомбардировщик может быть атакован истребителем под различными курсовыми углами; случайная величина X – курсовой угол – распределена по закону, плотность распределения $w(x)$ которого имеет вид:

$$w(x) = \begin{cases} A_0 \cos x & -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 & |x| \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A и функцию распределения $F(x)$ курсового угла; б) вероятность того, что атакующий истребитель может быть обстрелян, если на бомбардировщике имеется стрелковая установка, позволяющая обстреливать атакующий истребитель, только когда курсовой угол находится в пределах от $-\dfrac{\pi}{3}$ до $+\dfrac{\pi}{3}$.

9.20. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -2; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2} & \text{при} \quad -2<x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (–1, 1).

9.21. Случайная величина X задана плотностью распределения $w(x)=\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x$ в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, вне этого интервала $w(x)$ = 0. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно 2 раза значение, заключенное в интервале $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. Найти математическое ожидание случайной величины X.

9.22. Случайная величина X задана плотностью распределения $W(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$ в интервале (–c, c), вне этого интервала $w(x)$=0. Найти математическое ожидание величины X.

9.23. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будут сделана ошибка, превышающая 0,2 А.

9.24. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$w(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{при} \ 0\le x\le 2; \\ 0 & \text{при} \ x<0 \ \text{или} \ x>2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a. Определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,5.

9.25. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -2; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad -2<x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

9.26. Линия длиной L обслуживается ремонтной бригадой, база которой находится у середины линии. Найти среднее значение и дисперсию расстояния (вдоль линии) от базы до места очередного ремонта, если известно, что последнее с одинаковой вероятностью находится в любой точке линии.

9.27. Функция распределения случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-1; \\ a+b\arcsin x & \text{при} \quad -1\le x\le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти плотность вероятности случайной величины X и построить ее график.

9.28. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы укажут время, которое отличается от истинного времени не более чем на 20 с.

Раздел 10. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина *X* называется распределенной по нормальному закону, если её плотность распределения равна

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, равно $m_x = m$, а дисперсия $D_x = \sigma^2$. Вероятность попадания случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, в интервале (α, β) выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табулированная функция, обладающая свойством $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$.

Вероятность того, что случайная величина *X* отклонится от своего математического ожидания m_x на величину, не превосходящую *L*, выражается формулой

$$P\left[\left|x - m_x\right| < L\right] = 2\Phi^*\left[\frac{L}{\sigma}\right] - 1.$$

Пример 1

Средняя квадратическая ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м. Определить вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине не превосходящей 20 м.

Решение. В данном примере случайная величина *X* означает ошибку измерения дальности, которая распределена по нормальному закону. Из условий задачи следует, что систематическая ошибка измерения дальности отсутствует, следовательно $m_x = 0$ м, $\sigma = 25$ м.

Событие, состоящее в том, что ошибка измерения дальности по абсолютной величине не превосходит 20 м, равносильно тому, что случайная величина X заключена в интервале $-20< x < 20$. Вероятность этого события равна $P(-20<x<20)=\Phi^*\left(\frac{20}{25}\right)-\Phi^*\left(-\frac{20}{25}\right)=0,576$.

Пример 2

Измерительный прибор имеет среднюю квадратическую ошибку 50, систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо провести измерений, чтобы с вероятностью не менее 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 7?

Решение. Ошибка измерения дальности представляет случайную величину X, распределенную по нормальному закону с параметрами $m_x=0$, $\sigma_x=50$. Найдем вероятность того, что при одном измерении ошибка измерения дальности не превзойдет по абсолютной величине 7, по формуле

$$P\left[\left|x-m_x\right|<L\right]=2\Phi^*\left(\frac{L}{\sigma}\right)-1.$$

В конкретном случае

$$P\left[\left|x\right|<7\right]=2\Phi^*\left(\frac{7}{50}\right)-1=0,1114.$$

В каждом опыте имеется два исхода: ошибка измерения дальности может превзойти 7 или не превзойти, Вероятность того, что ошибка измерения дальности среди некоторого числа опытов не превзойдет по абсолютной величине 7, выражается формулой

$$R_{1,n}=1-(1-p)^n,$$

где $p=P\left[\left|x\right|<7\right]\Rightarrow 1-p=1-0,1114=0,8886$.

Вероятность $R_{1,n}=0,9$ по условию задачи. Следовательно, $0,9=1-0,8886^n$ или $n\geq\frac{\lg 0,1}{\lg 0,8886}$, n = 20.

Пример 3

Ошибка радиодальномера подчинена нормальному закону. Систематической ошибки радиодальномер не дает. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение измеренного значения дальности, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9 можно было бы ожидать, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 30 м?

Решение. Вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания на величину, не превосходящую значения L, выражается формулой $P\left[\left|x-m_x\right|<L\right]=2\Phi^*\left[\frac{L}{\sigma}\right]-1$. Поскольку радиодальномер систематической ошибки не дает, то $m_x=0$. По условию задачи $P[|x|<30]=0{,}9$.

Значит $0{,}9=2\Phi^*\left[\frac{30}{\sigma_x}\right]-1$.

Отсюда $2\Phi^*\left[\frac{30}{\sigma_x}\right]=\frac{1{,}9}{2}=0{,}95$.

По таблицам функции $\Phi^*(x)$ находим $\frac{30}{\sigma_x}=1{,}65$; $\sigma_x=18{,}1$ м.

Задачи

10.1. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно m = 3 и среднеквадратическое отклонение σ = 2. Написать плотность вероятности X.

10.2. Написать плотность распределения нормально распределенной случайной величины X, зная, что $m_x=3$; $D_x=16$.

10.3. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

10.4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x=3$, $\sigma_x=2$. Как изменится плотность распределения $w(x)$, если параметры примут значения $m_x=-3$, $\sigma_x=4$?

10.5. Отклонения величины сопротивления резистора от номинального значения подчиняется нормальному закону распределения со средним значением 10 кОм, равным номиналу, среднее квадратическое отклонение равно 200 Ом. Определить вероятность того, что наугад взятое сопротивление резистора будет отличаться от номинала более чем на 5 %.

10.6. Конденсаторы с номинальным значением емкости 1000 пф при рассортировке на производстве разделяются на три категории:

A – с отклонением от номинала не более чем на 1 %;

B – с отклонением от номинала от 1 до 5 %;

C – с отклонением от номинала более чем на 5 %.

Определить, сколько процентов всех конденсаторов в массовом производстве попадает в категории *A*, *B*, *C*, если известно, что отклонение емкости от номинала подчиняется нормальному закону распределения со средним значением, равным номинальному. Среднее квадратическое отклонение равно 50 пф.

10.7. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированный импульсов с заданным шагом квантования Δ (Δ – наименьшая разность между двумя импульсами). На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону распределения с плотностью распределения $W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования Δ, то при передаче сообщения возникает ошибка. Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысят 0,1.

10.8. При массовом изготовлении некоторой детали установлено, что её длина *X* распределена нормально с параметрами $m_x=25$ см и $\sigma_x=0,2$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

10.9. Случайная величина *X* подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x=0$. Задан интервал (α,β), не включающий начало координат. При каком значении среднего квадратического отклонения σ вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (α,β) достигает максимума?

10.10. Нормальное распределение с плотностью $W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ усечено значением *x* = *b*, а значения, меньшие *b*, отброшены. Найти математическое ожидание и дисперсию этого усеченного распределения.

10.11. Скорость летательного аппарата измеряется при помощи некоторого прибора, ошибка которого подчинена нормальному закону. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение σ_x этой ошибки, чтобы в 95 % всех измерений ошибка в скорости не превосходила 5 м/с?

10.12. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m_x = 10$. вероятность попадания X в интервал (10, 20) равна 0,3. чему равна вероятность попадания в интервал (0, 10)?

10.13. Возможный результат измерения длительности τ видеоимпульса подчиняется нормальному закону распределения. Среднее квадратическое отклонение σ_τ метода измерения равно 0,001 с. Как следует выбрать число ε, чтобы с вероятностью 0,997 имело место неравенство $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$, где τ_0 – истинное значение длительности видеоимпульса?

10.14. Имеется случайная величина *X*, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x. Требуется приближенно заменить нормальный закон законом постоянной плотности в интервале (α, β); границы α, β подобрать так, чтобы сохранить неизменными основные характеристики случайной величины *X*: математическое ожидание и дисперсию.

10.15. Мера точности определения дальности радиолокатором равна 0,02. Систематическая ошибка радиолокатора равна 2,5. Вероятность того, что ошибка попадает в некоторый интервал, симметричный относительно центра распределения, равна 0,697. Найти границы этого интервала, считая, что случайные ошибки подчинены нормальному закону.

10.16. Случайная величина *X* – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией 16 $мВ^2$. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка *X*: а) превзойдет по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5 – 3,5 мВ.

10.17. Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы (мост, автострада, взлётно-посадочная полоса). Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий при трех выстрелах:

A – хотя бы одно попадание в полосу;

B – не менее двух попаданий в полосу;

10.18. Регулятор обеспечивает постоянство напряжения в цепи. Напряжение подчиняется нормальному закону, причем его номинальное значение 26 В, а среднее квадратическое отклонение 3 В. При отклонении напряжения от номинала более чем на 0,4 В регулятор срабатывает. Определить вероятность срабатывания регулятора.

10.19. Каково должно быть среднее квадратическое отклонение, для того, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,6, что при срабатывании двух бомб на полосу шириной 40 м, середина которой совпадает с центром рассеяния, будет не менее одного попадания?

Раздел 11. Системы случайных величин

Совокупность двух случайных величин (X, Y), рассматриваемых совместно, называется системой двух случайных величин. Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как случайная точка с координатами (X, Y) на плоскости (рис. 11.1) или как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X, Y), составляющие которого представляют собой случайные величины X и Y (рис. 11.2)

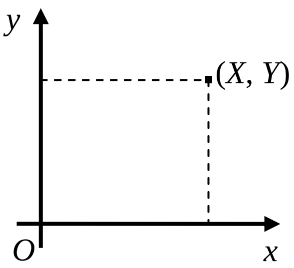

Рис. 11.1

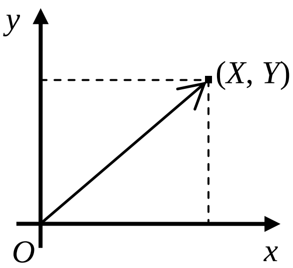

Рис. 11.2

Система случайных величин ($X_{1,} X_2, ..., X_n$) изображается случайной точкой или случайным вектором в пространстве n измерений.

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$, $Y < y$

$$F(x, y) = P[(X < x), (Y < y)].$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованную область (рис. 11.3).

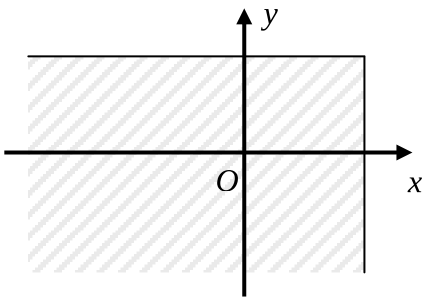

Рис. 11.3

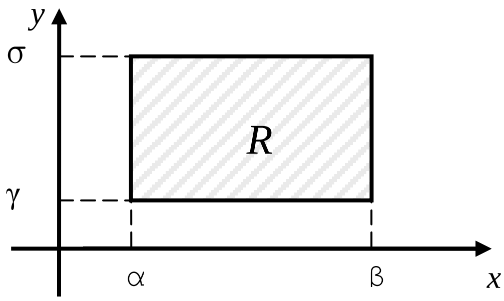

Рис. 11.4

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R со сторонами, параллельными осями координат, включающий свою нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую (рис. 11.4), выражается через функцию распределения формулой

$$P[(X,Y)\in R]=F(\beta,\sigma)-F(\alpha,\sigma)-F(\beta,\gamma)+F(\alpha,\gamma)\,.$$

Плотность распределения системы двух случайных величин (X, Y) выражается через функцию распределения формулой

$$w(x,y)=F''_{xy}(x,y).$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольную область D выражается формулой

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D w(x,y)\,dx\,dy.$$

Функция распределения системы выражается через плотность распределения формулой

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} w(x,y)\,dx\,dy.$$

Плотности распределения отдельных случайных величин, входящих в систему, выражаются формулами

$$w_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x,y)\,dy;\;\; w_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x,y)\,dx.$$

Условные функции распределения случайных величин X и Y, входящих в систему, обозначаются $F_1(x\,|\,y)$ и $F_2(y\,|\,x)$, а условные плотности распределения – $w_1(x\,|\,y)$ и $w_2(y\,|\,x)$.

Теорема умножения плотностей вероятностей

$$w(x,y)=w_1(x)\,w_2(y\,|\,x),$$
$$w(x,y)=w_2(y)\,w_1(x\,|\,y).$$

Выражения для условных плотностей распределения через безусловные

$$w_1(x\,|\,y)=\frac{w(x,y)}{w_1(y)},$$
$$w_2(y\,|\,x)=\frac{w(x,y)}{w_1(x)}.$$

Для независимых случайных величин

$$w_1(x\,|\,y)=w(x),\;w_2(y\,|\,x)=w(y).$$

Начальным моментом порядка $k+s$ системы (X, Y) называется величина

$$\alpha_{k,s}[X,Y] = M[X^k Y^s] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij},$$

где $p_{ij} = P((X = x_i)(Y = y_i))$.

Для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{k,s}[X,Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s w(x,y)\,dx\,dy,$$

где $w(x,y)$ – плотность распределения системы.

Центральным моментом порядка $k+s$ системы (X, Y) называется величина

$$\mu_{k,s}[X,Y] = M[\dot{X}^k \dot{Y}^s] = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s\, p_{ij}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$\mu_{k,s}[X,Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s w(x,y)\,dx\,dy.$$

Ковариационным моментом K_{xy} двух случайных величин (X, Y) называется центральный момент порядка 1+1 (второй смешанный центральный момент)

$$K_{xy} = \mu_{11}[X,Y] = M[\dot{X},\dot{Y}].$$

Для независимых случайных величин *ковариационный* момент равен нулю.

Коэффициентом корреляции r_{xy} двух случайных величин (X, Y) называется безразмерная величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\mu_{2,0}[X,Y]}$; $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\mu_{0,2}[X,Y]}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами.

Ковариационной матрицей системы n случайных величин ($X_1, X_2, \dots, X_n$) называется таблица, составленная из *ковариационных* моментов всех этих величин, взятых попарно

$$\left\| K_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{Vmatrix},$$

где $K_{ij} = K_{x_i, y_j} = M[\dot{X}_i, \dot{Y}_j]$ – *ковариационный* момент случайных величин X_i, Y_j.

Нормированной корреляционной матрицей системы n случайных величин называется таблица, составленная из коэффициентов корреляции всех этих величин, взятых попарно

$$\left\| r_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

где $r_{ij} = K_{ij} / \sigma_x \sigma_y$ – коэффициент корреляции (нормированный ковариационный момент).

Пример

Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу, каждый в свою мишень. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, Y – второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго – p_2. Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y).

Решение. Составим таблицу значений F(x,y) для различных значений аргументов. Так как случайные величины независимы, то

$$F(x, y) = P(X < x)P(Y < y) = F_1(x)F_2(y).$$

Построим функцию распределения $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 - p_1 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Аналогично для $F_2(y)$:

$$F_2(y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad y\le 0,\\ 1-p_2 & \text{при} \quad 0<y\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad y>1.\end{cases}$$

Значения функции распределения $F(x, y)$ приведены в таблице

y	x		
	$x\le 0$	$0<x\le 1$	$x>1$
$y\le 0$	0	0	0
$0<y\le 1$	0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$1-p_2$
$y>1$	0	$1-p_1$	1

Задачи

11.1. По цели производится четыре независимых выстрела, вероятность попадания при одном выстреле равна p. Определить таблицу распределения системы (X, Y) и ее числовые характеристики, если X – число попаданий в цель, а Y – число промахов.

11.2. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, Y – второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго – p_2. Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y).

11.3. Плотность распределения $W(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$W(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi} & \text{внутри эллипса } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ 0 & \text{вне этого эллипса.}\end{cases}$$

Доказать, что X и Y – зависимые величины.

11.4. Имеются две независимые случайные величины (X, Y), подчиненные каждая показательному закону

$$W(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x>0,\end{cases}$$

$$W(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y<0,\\ \mu e^{-\mu y} & \text{при } y>0.\end{cases}$$

Написать выражения: а) плотности распределения системы; б) функции распределения системы (X, Y).

11.5. В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 3 %, а вследствие дефекта B – 4,5 %. Годная продукция составляет 95 %. Найти коэффициент корреляции дефектов A и B.

11.6. Случайные величины X и Y связаны с соотношением $mX + nY = c$, где m, n, c – неслучайные величины ($m \neq 0, n \neq 0$). Найти: а) коэффициент корреляции r_{xy}, б) отношением среднеквадратических отклонений σ_x / σ_y.

11.7. Случайные величины X, Y независимы и распределены по нормальному закону: $M[X] = a$, $M[Y] = b$, $D[X] = D[Y] = \sigma^2$. Найти радиус круга с центром в точке (a, $в$), вероятность попадания в который случайной точки (X, Y) равна 0,997.

11.8. Плотность распределения системы случайных величин X и Y имеет вид

$$W(x, y) = \frac{1}{\pi(x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 1)}.$$

Определить, зависимы или независимы случайные величины X и Y.

11.9. Дана ковариационная матрица системы случайных величин (X_1, X_2, X_3):

$$\left\| K_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{matrix} \right\|.$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\left\| k_{ij} \right\|$.

11.10. Имеются независимые случайные величины X, Y. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = 0, \sigma_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале (0, 1). Написать выражение для плотности распределения $W(x, y)$ и функции распределения $F(x, y)$ системы (X, Y).

11.11. Система двух случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_x = 4, m_y = 6, \sigma_x = 5, \sigma_y = 2, r_{xy} = 0{,}8$. Написать выражение для плотности распределения системы.

11.12. Прибор состоит из двух блоков. Время исправной работы каждого блока есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром λ_1 для первого блока и λ_2 для второго. Оба блока, безусловно, необходимы для работы прибора. Найти вероятность того, что за время T прибор не выйдет из строя, если блоки отказывают независимо.

9.13. Независимые случайные величины X, Y распределены по нормальным законам с параметрами $m_x = 2, m_y = -3, \sigma_x = 1, \sigma_y = 2$. Вычислить вероятности следующих событий: а) $(X < m_x)(Y < m_y)$; б) X < 3; в) Y < X – 5; г)$|X| < 1$; д) $(|X| < 1)(|Y| < 2)$.

11.14. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону с числовыми характеристиками $m_x = m_y = 0, \sigma_x = \sigma_y = 10, r_{xy} = 0$. Определить вероятность того, что: а) $X < Y$; б) $X > 0$, $Y < 0$.

11.15. Случайный вектор (X, У) с неотрицательными компонентами имеют функцию распределения $F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}$, $x > 0, y > 0$. Найти математическое ожидание и ковариационную матрицу этого вектора. Зависимы или независимы его компоненты?

11.16. Мишень состоит из четырех концентрических окружностей радиусом 10, 20, 30, 40 см. Попадание в яблочко оценивается в 5 баллов, в каждой из трех колец – соответственно в 4,3 и 2 балла. Задание считается выполненным, если после трех выстрелов получено не менее 7 баллов, и оценивается на отлично, если получено более 12 баллов. Какова вероятность выполнить задание при круговом рассеянии с вероятным отклонением 20 см? Какова вероятность получить при этом отличную оценку? Центр рассеивания совпадает с центром мишени.

11.17. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости $W(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$. Найти вероятность попадания точки (X, Y) в квадрат R, сторона которого равна двум и направлена под углом 45 градусов к осям координат.

11.18. Плотность распределения системы двух независимых величин (X, Y) имеет вид $W(x, y) = K \cdot e^{-\left[\frac{(x-4)^2}{50} + (y+6)^2\right]}$. Найти коэффициент K, числовые характеристики системы. Определить вероятность совместного выполнения двух неравенств $-10 < X < 10$, $-10 < Y < 6$.

11.19. Производиться стрельба по точечной цели снарядом, зона разрушительного действия которого представляет собой круг радиусом R. Рассеивание точки попадания снаряда круговое, с параметрами $m_x = m_y = 0, \sigma_x = \sigma_y = 2R$ (центр рассеивания совпадает с целью). Сколько выстрелов нужно произвести для того, чтобы разрушить цель с вероятностью $P = 0{,}9$.

11.20. Положение случайной точки (X, Y) равновероятно в любом месте круга радиуса R, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения и функцию распределения каждой из прямоугольных координат. Являются ли случайные величины X и Y зависимыми?

11.21. В радиолокационной системе с разнесенным приемом, приемники находятся на таких расстояниях друг от друга, что сигналы X, Y, Z статически независимы. Законы распределения вероятностей для сигналов X, Y, Z нормальные с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 3, \sigma_z^2 = 12$. Найти коэффициент корреляции для напряжений U и V. Если $U = X + Z$, $V = Y + Z$.

11.22. Сообщение на входе линии связи может с одинаковой вероятностью принимать одно из двух возможных значений: $x_1 = -1$ В или $x_2 = +1$ В. На выходе линии установлен вольтметр, ошибка измерения которого распределена нормально с математическим ожиданием равным 0 и средним квадратическим отклонением 0,5 В. Показания вольтметра равно 0,75 В. Найти условные вероятности сообщений x_1 и x_2.

11.23. Сообщение X на входе линии связи есть случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $m_x = 0, \sigma_x = 10$ В. Сигнал на выходе линии $Y = X + Z$, где помеха Z – случайная величина, независимая от X и имеющая нормальное распределение с параметрами $m_z = 0$, $\sigma_z = 1$ В. Указать наиболее вероятное значение переданного сообщения, если сигнал на выходе линии равен 7 В.

Раздел 12. Законы распределения и числовые характеристики функции случайных величин

Пусть X – непрерывная случайная величина, задана ее плотность распределения $W(x)$. Известно, что другая случайная величина Y связана с нею функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(x),$$

где φ – дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента X. Тогда плотность распределения случайной величины Y выражается формулой

$$g(y) = W[x = \psi(y)]\left|\psi'(y)\right|,$$

где $\psi(y)$ – функция, обратная по отношению к $\varphi(y)$.

Если φ – функция немонотонная, то обратная функция неоднозначна и плотность распределения случайной величины определяется в виде суммы стольких слагаемых, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} W[x = \psi_i(y)]\left|\psi_i'(y)\right|,$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y), ..., \psi_k(y)$ – значения обратной функции для данного y.

Плотность распределения суммы двух случайных величин

$$Z = X + Y,$$

с плотностью распределения $W(x, y)$, выражается любой из формул:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, z - x)dx;$$

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(z - y, y)dy.$$

Плотность распределения произведения $Z = X\,Y$ находится по формуле:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, \frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx.$$

Если X – дискретная случайная величина, ряд распределения которой задан, а величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i ,$$

а дисперсия выражается формулой

$$D_y = D[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2.$$

Для непрерывных случайных величин аналогичные формулы имеют вид

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) W(x) dx;$$

$$D_y = D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x)]^2 W(x) dx - m_y^2.$$

Если (X,Y) – система дискретных случайных величин, распределение которой характеризуется вероятностями $P_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$, а случайная величина Z функционально связана с системой (X, Y) соотношением $Z = \varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z = M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) P_{ij};$$

а дисперсия выражается формулой

$$D_z = D[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j)]^2 P_{ij} - m_z^2;$$

Для непрерывных случайных величин аналогичные формулы имеют вид

$$m_z = M[\varphi(X,Y)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) W(x, y) dxdy;$$

$$D_z = D[\varphi(X,Y)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x, y)]^2 W(x, y) dxdy - m_z^2.$$

Если c – неслучайная величина, то $M[c] = c$; $D[c] = 0$.

Если c – неслучайная величина, а X – случайная, то

$$M[cX] = cM[X]; \qquad D[cX] = c^2 D[X].$$

Теорема сложения математических ожиданий

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y]$$

и в общем случае

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

где a_i и b – неслучайные коэффициенты, равно той же линейной функции от их математических ожиданий

$$m_y = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b,$$

где $m_{x_i} = M[X_i]$ (i = 1,…,n).

Теорема умножения математических ожиданий

Математическое ожидание произведения двух случайных величин (*X*, *Y)* выражается формулой

$$M[X,Y] = M[X]M[Y] + K_{xy},$$

где K_{xy} – ковариационный момент величин (*X*, *Y).*

Математическое ожидание произведения двух не коррелированных случайных величин (*X*, *Y)* равно произведению их математических ожиданий

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Теорема сложения дисперсий

Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой

$$D[\sum_{i=1}^{n} X\ ] = \sum_{i=1}^{n} D_{xi} + 2\sum_{i=1}^{n} K_{xiyi}\ D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} + 2\sum_{i<j}^{n} K_{x_i x_j},$$

где $K_{x_i x_j}$ – ковариационный момент случайных величин X_i, X_j.

Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин (X, Y) равна сумме их дисперсий

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]$$

и в общем случае для некоррелированных случайных величин $X_1, X_2 ... X_n$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i].$$

Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

$$Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b.$$

где a_i, b – неслучайные величины, выражается формулой

$$D_y = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i D[X_i]+2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i} K_{x_j}.$$

Пример 1

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	–2	–1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Задать закон распределения случайной величины – значит, задать ее возможные значения и вероятности, с которыми их принимает случайная величина. Возможные значения функции мы получим, если подставим возможные значения аргумента, причем две пары значений отличаются лишь знаком. Отличающиеся лишь знаком возможные значения X дают одно и то же значение случайной величины Y, причем вероятность того, что Y примет это возможное значение, равна сумме вероятностей того, что случайная величина X примет соответствующее возможные значения, отличающиеся знаком

$$y_1=(\pm 2)^2=4; y_2=(\pm 1)^2=1.$$

$y_1=(\pm 2)^2=4; y_2=(\pm 1)^2=1.$ Отсюда ряд распределения случайной величины Y имеет вид

y_j	1	4
p_j	0,5	0,5

Пример 2

Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью

$$W(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ (-\infty < x < +\infty).$$

Найти плотность распределения обратной величины $Y = \dfrac{1}{X}$.

Решение. Плотность распределения функции Y и аргумента X связаны между собой соотношением

$$W_2(y) = W[x = \psi(y)]\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|.$$

В нашем случае $X = \dfrac{1}{Y}$ и $\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right| = \left|-\dfrac{1}{y^2}\right|$.

Следовательно:

$$W_2(y) = \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

случайная величина Y также распределена по закону Коши.

Пример 3

Случайная величина X равномерно распределена в интервале (0,2), случайная величина Y равномерно распределена в интервале (–1, 1); X и Y независимы. Найти плотность распределения величины $Z = X + Y$.

Решение. Плотность распределения суммы случайных величин X и Y выражается формулой

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, z-x)dx.$$

Поскольку X и Y независимы, то последнюю формулу запишем в виде

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x)W_2(z-x)dx.$$

Известно, что

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2; \\ 0 & x < 0,\, x > 2; \end{cases}$$

$$W_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1; \\ 0 & x < -1, x > 1. \end{cases}$$

Подынтегральное выражение в плотности $W(z)$ будет отличным от нуля при одновременном выполнении неравенств

$$0 < x < 2,$$
$$-1 < z - x < 1,$$

которые можно переписать в виде

$$0 < x < 2,$$
$$z - 1 < x < z + 1.$$

Если $z - 1$, то эта система неравенств является несовместной и, следовательно, $W(z) = 0$. Если $-1 < z < +1$, то указанная система неравенств совместно выполняется при $0 < x < z + 1$.

Отсюда

$$W(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{z+1}{4}.$$

Если $+1 < z < 3$, то написанная выше система неравенств совместно выполняется при $z - 1 < x < 2$.

Наконец, если $z > 3$, то исходная система неравенств является несовместной и $W(z) = 0$.

Таким образом:

$$W(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z < -1, \\ \frac{z+1}{4} & \text{при} \quad -1 < z < +1, \\ \frac{3-z}{4} & \text{при} \quad +1 < z < 3, \\ 0 & \text{при} \quad z > 3. \end{cases}$$

Пример 4

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$W(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

Решение. Математическое ожидание функции от случайного аргумента выражается формулой

$$m_y = \int_0^\infty e^{-x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Дисперсия функции от случайного аргумента выражается формулой

$$D_y = \int_0^\infty e^{-2x} \lambda e^{-\lambda x} dx - m_y^2 = \lambda \int_0^\infty e^{-(2+\lambda)x} dx - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \frac{\lambda}{(2+\lambda)(1+\lambda)^2}.$$

Задачи

12.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	3	6	10
p_i	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X + 1$.

12.2. Определить закон распределения резонансной частоты колебательного контура, если его емкость изменяется по нормальному закону распределения

$$W(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(c-c_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где c_0 – нормальное значение емкости. Индуктивность контура полагаем постоянной,

12.3. Случайная величина X распределена по закону Релея с плотностью

$$W(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти закон распределения величины $Y = e^{-X^2}$.

12.4. Найти плотность распределения случайной величины $Z = aX^2$, если X – нормальная случайная величина, у которой $m_x = 0$, а > 0.

12.5. Определить плотность распределения случайной величины $Y = |X|$, если X – нормальная случайная величина, у которой $m_x = 0$.

12.6. Найти плотность распределения модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если:

а) случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным σ.

б) X и Y – независимые нормальные случайные величины, плотность распределения которых

$$W(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-h)^2 + y^2}{2\sigma^2}}.$$

12.7. Дан случайный вектор (X, Y) с плотностью $W(x,y)$. Найти плотность вектора (U, V), где $U = x + y$, $V = x - y$.

12.8. На плоскости даны два независимых случайных вектора: орт с фазой, равномерно распределенной в промежутке (0,2), и произвольный случайный вектор. Как распределена фаза суммы этих векторов?

12.9. Дана последовательность $\{z_i\}$ независимых случайных величин, принимающих значение 0 и 1 с вероятностями 0,5. Найти распределение случайной величины $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{2}$.

12.10. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $W(x)$. Найти закон распределения случайной величины

$$Y = signX = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

и ее числовые характеристики.

12.11. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (0,1), чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (\text{при } y > 0)?$$

12.12. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	–1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^X$.

12.13. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 1 - X^2$.

12.14. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны соответственно m_x и D_x. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -X$.

12.15. Система случайных величин X, Y подчинена закону нормального распределения

$$W(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Определить математическое ожидание случайной величины $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

12.16. Случайная величина X распределена с постоянной плотностью в интервале (1,2)

$$W(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in (1,2), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (1,2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 1/X$.

12.17. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением $Y = 2 - 3X$. Числовые характеристики величины X заданы: $m_x = -1, D_x = 4$.

Определить: а) математическое ожидание и дисперсию величины Y; б) корреляционный момент и коэффициенты корреляции величины X и Y.

12.18. Показать, что для одностороннего нормального распределения

$$W(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x>0.$$

Среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$m_x=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1,\ \sigma_x^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

12.19. Случайная величина X задана плотностью распределения $W(x)=\cos x$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, вне этого интервала $W(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=X^2$.

12.20. Имеется две независимые случайные величины X и Y. Величина X распределена по нормальному закону

$$W(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

Величина Y распределена равномерно в интервале (0,2). Определить: а) $M[X+Y]$; б) $M[XY]$; в) $M[X^2]$; г) $M[X-Y^2]$; д) $D[X+Y]$; е) $D[X-Y]$.

12.21. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины X и Y, чтобы $D[XY]=D[X]D[Y]$?

12.22. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, может случайным образом занимать любое положение на экране (плотность распределения постоянна). Диаметр экрана равен D. Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

12.23. На оси абсцисс имеются два соседних отрезка длиной по единице; в пределы одного из них случайным образом попадает точка X, в пределы второго – точка Y, причем координаты точек X и Y независимы. Плотность распределения каждой из случайных величин X, Y в пределах соответствующего отрезка постоянна. Найти математическое ожидание, дисперсию и второй начальный момент расстояния R между ними.

12.24. Случайные величины X и Y имеют числовые характеристики $m_x = 1, m_y = 2, D_x = 0,01, D_y = 0,04, r_{xy} = 0,5$. Определить математическое ожидание случайной величины $Z = 2XY + 1$.

12.25. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $W(x)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

12.26. Найти математическое ожидание m_{xy} и дисперсию σ_{xy}^2 произведения двух независимых случайных величин X и Y, равномерно распределенных соответственно в промежутках (a,b) и (c,d).

12.27. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени, подчинено закону Пуассона с параметром а. Длительность ремонта машины зависит от числа m вышедших из строя элементов и определяется формулой $t_m = T(1 - e^{-am})$. Определить математическое ожидание длительности ремонта и ущерба, причиненного простоем машин, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта $S_m = kt_m^2$.

12.28. Стрельба по некоторой цели начинается в момент ее обнаружения и продолжается вплоть до некоторого момента t^*, в который цель покидает зону обстрела и становится уже недоступной. Момент T, в который обнаруживается цель, представляет собой случайную величину, распределенную равномерно в промежутке от 0 до t^*. Число выстрелов, которое может быть осуществлено по цели за время ее обстрела $t^* - T$, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = \lambda(t^* - T)$. При каждом выстреле цель поражается с вероятностью p. Найти полную вероятность поражения цели с учетом случайности момента обнаружения.

12.29. Угол упреждения Y при воздушной стрельбе определяется формулой

$$Y = \frac{U}{V} \sin X ,$$

где U – скорость цели, V – скорость полета снаряда, X – курсовой угол цели. Найти математическое ожидание m_y и среднее квадратическое отклонение D_y угла упреждения, если X – случайная величина, равномерно распределенная в интервале 600–700 км/час, а V = 1 км/см и постоянна (U и X независимы).

12.30. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

12.31. Система случайных величин (X, Y) имеет следующие характеристики: $m_x = 0, m_y = 2, \sigma_x^2 = 2, \sigma_y^2 = 1$ и коэффициент корреляции $r_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Z = 2X - 3Y.$$

12.32. Случайная величина X имеет математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2. Величина Y связана с X соотношением $Y = 3X - 2$, величина Z, в свою очередь, связана с X соотношением $Z = 3 - 4X$. Определить: а) корреляционный момент величин X и Z; б) коэффициент корреляции Y и Z.

Раздел 13. Выборка и способы ее представления. Выборочные параметры распределения

Математическая статистика – это наука о математических методах, позволяющих получать обоснованные выводы о параметрах, видах распределений и других свойствах случайных величин по конечной совокупности наблюдений над ними – ***выборке***.

Выборка понимается следующим образом. Пусть случайная величина X наблюдается в случайном эксперименте B. Повторим эксперимент B n раз, предполагая, что условия проведения эксперимента, а следовательно, и распределение наблюдаемой случайной величины X не изменяются от эксперимента к эксперименту. Этот новый составной эксперимент связан с n-мерной случайной величиной – ***случайным вектором*** $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, где X_j – случайная величина, соответствующая j-му эксперименту. Очевидно, X_j, $j = 1, 2, ..., n$, – независимые в совокупности случайные величины, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и случайная величина X.

Закон распределения случайной величины X называется распределением ***генеральной совокупности***, а случайный вектор $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ – ***выборочным вектором***. Числа $x_1, ..., x_n$, получаемые на практике при n - кратном повторении эксперимента в неизменных условиях, представляют собой реализацию выборочного вектора и называются ***выборкой*** $\left(x_1, ..., x_n\right)$ объема n.

Выборку $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ при необходимости можно рассматривать как точку ***выборочного пространства***, т.е. множества, на котором задано распределение выборочного вектора $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$. Аналогично определяется выборка в случае, когда случайный эксперимент связан с несколькими случайными величинами. Например, выборка объема n из двумерной генеральной совокупности есть последовательность $\left(x_1, y_1\right), ..., \left(x_n, y_n\right)$ пар значений случайных величин X и Y, принимаемых ими в n независимых повторениях случайного эксперимента.

Способы представления выборки

Результаты наблюдений $x_1, x_2, ..., x_n$ генеральной совокупности X, записанные в порядке их регистрации, обычно труднообозримы и неудобны для дальнейшего анализа. Задачей статистического описания выборки является получение такого ее представления, которое позволяет выявить характерные особенности совокупности исходных данных.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$, где $x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{(n)}$. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки $x^{(n)} - x^{(1)} = \omega$ называется *размахом выборки.*

Пусть выборка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ содержит различных чисел $z_1, z_2, ..., z_k$, причем z_i встречается n_i раз, $i = 1, 2, ..., k$. Число n_i называется *частотой* элемента выборки z_i. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. ***Статистическим рядом*** называется последовательность пар (z_i, n_i). Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы z_i, а вторая – их частоты.

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде *группированного статистического ряда.* Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивается на k непересекающихся интервалов. Вычисления значительно упрощаются, если эти интервалы имеют одинаковую длину $b \approx \frac{\omega}{k}$. В дальнейшем подразумевается именно этот случай. После того как частичные интервалы выбраны, определяют частоты – количество n_i элементов выборки, попавших в i-й интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Получающийся статистический ряд в верхней строке содержит середины z_i интервалов группировки, а в нижней – частоты n_i – $(i = 1, 2, ..., k)$.

Наряду с частотами одновременно подсчитываются также накопленные частоты $\sum_{j=1}^{i} n_j$, относительные частоты n_i/n и *накопленные относительные частоты* $\sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n}$, $i = 1, 2, ..., k$. Полученные результаты сводятся в таблицу, называемую *таблицей частот группированной выборки.*

Следует помнить, что группировка выборки вносит погрешность в дальнейшие вычисления, которая растет с уменьшением числа интервалов.

Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – выборка из генеральной совокупности с функцией распределения $F_X(x)$. *Распределением выборки* называется распределение дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $1/n$. Соответствующая функция распределения называется *эмпирической (выборочной) функцией распределения* и обозначается $F_n^*(x)$.

Эмпирическая функция распределения определяется по значениям накопленных частот соотношением

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{z_i < x} n_i,$$

где суммируются частоты тех элементов выборки, для которых выполняется неравенство $z_i < x$. Очевидно, что $F_n^*(x) = 0$ при $x \le x^{(1)}$ и $F_n^*(x) = 1$ при $x > x^{(n)}$. На промежутке $\left(x^{(1)}, x^{(n)}\right]$ $F_n^*(x)$ представляет собой неубывающую кусочно-постоянную функцию.

Аналогично определяется *эмпирическая функция распределения* для группированной выборки. При каждом x $F_n^*(x)$ сходится по вероятности к $F_X(x)$ и, следовательно, при большом объеме выборки может служить приближенным значением (оценкой) *функции распределения генеральной совокупности* в каждой точке x.

В ряде случаев для наглядного представления выборки используют *гистограмму* и *полигон* частот.

Гистограммой частот группированной выборки называется кусочно-постоянная функция, неизменная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них значения $\frac{n_i}{b}$, $i=1,2,...,k$,. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки n.

Аналогично определяется *гистограмма относительных частот.* Площадь соответствующей ступенчатой фигуры для нее равна единице. При увеличении объема выборки и уменьшении интервала группировки гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности распределения $W_X(x)$ генеральной совокупности.

Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках (z_i, n_i), $i=1,2,...,k$, а *полигоном относительных частот* – ломаная с вершинами в точках $\left(z_i, \frac{n_i}{n}\right)$, $i=1,2,...,k$. Таким образом, полигон относительных частот получается из полигона частот сжатием по оси Oy в n раз.

Если плотность распределения генеральной совокупности является достаточно гладкой функцией, то полигон относительных частот является более хорошим приближением плотности, чем гистограмма.

Выборочные параметры распределения

Пусть $x_1, x_2,..., x_n$ – *выборка* объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F_X(x)$. Рассмотрим выборочное распределение, т.е. распределение дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2,..., x_n$ с вероятностями, равными $1/n$. Числовые характеристики этого выборочного распределения называются *выборочными (эмпирическими) числовыми характеристиками.* Следует отметить, что выборочные числовые характеристики являются *характеристиками данной выборки*, но не являются характеристиками распределения генеральной совокупности. Чтобы подчеркнуть это различие, выборочные характеристики в дальнейшем будем обозначать теми же символами, что и ранее, но со значком * наверху. Некоторые выборочные характеристики имеют традиционные обозначения, например, $\overline{x}$ – выборочное среднее.

Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется по формуле $m_X = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$.

Так как для выборочного распределения $p_j = 1/n$, то выборочное математическое ожидание (выборочное среднее) определяется выражением

$$m_X^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j .$$

Аналогично выборочная дисперсия

$$D_X^* = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 p_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - (\bar{x})^2 .$$

Пример 1

Записать в виде вариационного и статистического рядов выборку 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Определить размах выборки.

Решение. Объем выборки $n = 15$. Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.

Размах выборки $\omega = 10 - 2 = 8$.

Различными в заданной выборке являются элементы $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 4$, $z_4 = 5$, $z_5 = 7$, $z_6 = 10$; их частоты соответственно равны $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 3$, $n_5 = 4$, $n_6 = 2$. Следовательно, статистический ряд исходной выборки можно записать в виде следующей таблицы:

z_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

Для контроля правильности записи находим $\sum n_i = 15$ (здесь и в дальнейшем в суммах вида $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ будем опускать верхний и нижний индексы).

Пример 2

Представить выборку 55 наблюдений в виде таблицы частот, используя 7 интервалов группировки. Выборка:

20,3	15,4	17,2	19,2	23,3	18,1	21,9
15,3	16,8	13,2	20,4	16,5	19,7	20,5
14,3	20,1	16,8	14,7	20,8	19,5	15,3
19,3	17,8	16,2	15,7	22,8	21,9	12,5
10,1	21,1	18,3	14,7	14,5	18,1	18,4
13,9	19,1	18,5	20,2	23,8	16,7	20,4
19,5	17,2	19,6	17,8	21,3	17,5	19,4
17,8	13,5	17,8	11,8	18,6	19,1	

Решение. Размах выборки $\omega = 23{,}8 - 10{,}1 = 13{,}7$. Длина интервала группировки $b = 13{,}7/7 \approx 2$. В качестве первого интервала удобно взять интервал 10–12. Результаты группировки сведены в таблицу.

Номер интервала i	Границы интервала	Середина интервала z_i	Частота n_i	Накопленная частота $\sum_{j=1}^{i} n_j$	Относительная частота n_i/n	Накопленная относительная частота $\sum_{j=1}^{i} n_j/n$
1	10–12	11	2	2	0,0364	0,0364
2	12–14	13	4	6	0,0727	0,1091
3	14–16	15	8	14	0,1455	0,2546
4	16–18	17	12	26	0,2182	0,4728
5	18–20	19	16	42	0,2909	0,7637
6	20–22	21	10	52	0,1818	0,9455
7	22–24	23	3	55	0,0545	1,0000

Пример 3

Построить гистограмму и полигон частот, а также график эмпирической функции распределения группированной выборки из примера 2.

Решение. По результатам группировки (см. таблицу) строим гистограмму частот (рис. 13.1). Соединяя отрезками ломаной середины верхних оснований прямоугольников, из которых состоит полученная гистограмма, получаем соответствующий полигон частот (рис. 13.2).

Так как середина первого интервала группировки $z_i = 11$, то $F_n^*(x) = 0$ при $x \le 11$. Рассуждая аналогично, находим, что $F_n^*(x) = 1$ при $x > 23$. На полуинтервале $(11, 23]$ эмпирическую функцию распределения строим по данным третьего и последнего столбцов таблицы. $F_n^*(x)$ имеет скачки в точках, соответствующих серединам интервалов группировки. В результате получаем график $F_n^*(x)$, изображенный на рис. 13.3.

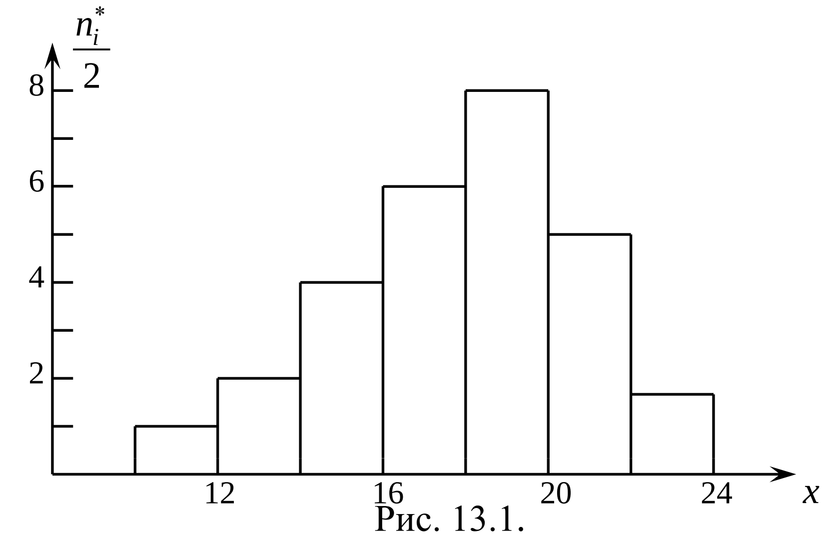

Рис. 13.1.

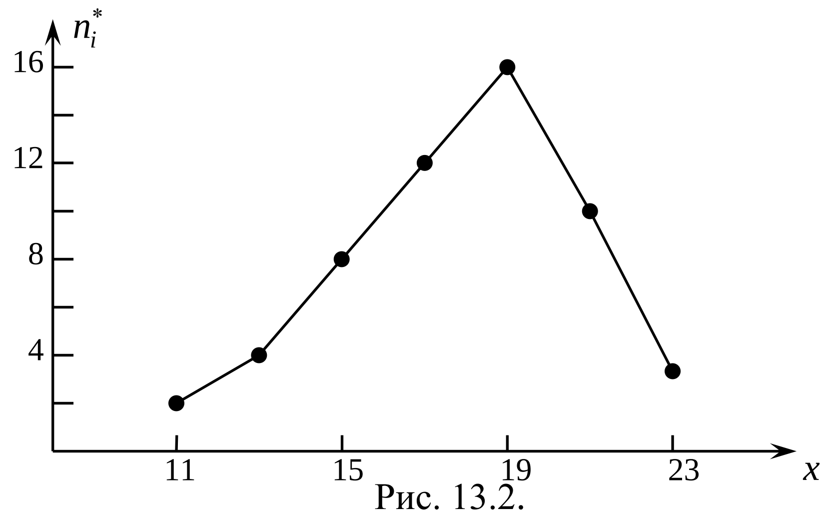

Рис. 13.2.

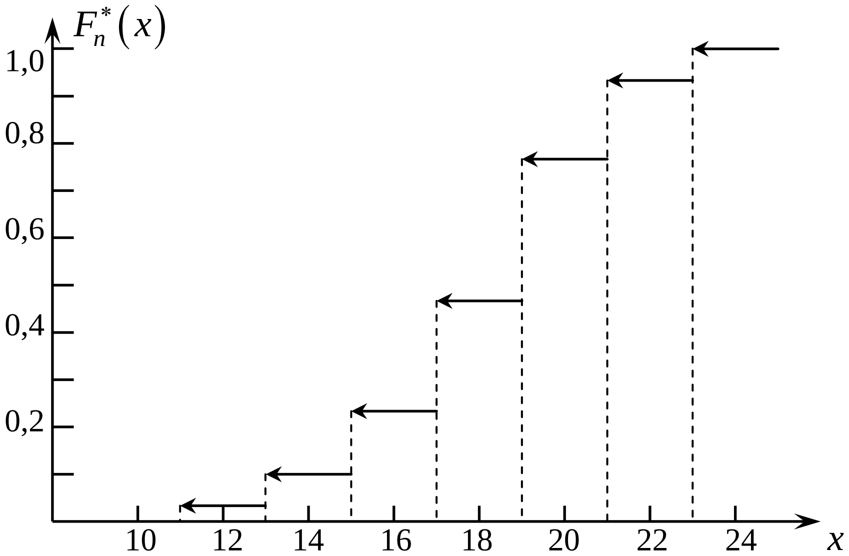

Рис. 13.3.

Пример 4

Определить выборочное среднее и выборочную дисперсию для выборки 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4.

Решение. Представим данные в виде вариационного ряда: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Выборочное среднее $m_X^* = \frac{1}{8}(1+1+2+3+4+5+6+8) = 3{,}75$.

Выборочная дисперсия

$$D_X^* = \frac{1}{8}\left(1^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+8^2\right) - 3{,}75^2 = 5{,}44.$$

Задачи

Для каждой из приведенных ниже выборок определить размах, а также построить вариационный и статистический ряды.

13.1. 11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11, 12, 13, 16, 8, 9, 14, 5, 11, 3.

13.2. 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18.

13.3. В группе на занятии по статистике проводится эксперимент по регистрации номера месяца рождения каждого из студентов группы. Построить вариационный и статистический ряды полученной выборки.

В задачах 13.4, 13.5 найти размах выборки, число и длину интервалов, а также составить таблицу частот (границы первого интервала указываются).

13.4**.** Время решения контрольной задачи студентами (в секундах):

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	49	49	14	57	54	59
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	72	41	45	44	55	30	40
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50

Первый интервал: 14–23.

13.5. Продолжительность работы батареек одного типа (в часах):

13,4	14,7	15,2	15,1	13,0	8,80	14,0	17,9	15,1	16,5	16,6
14,2	16,3	14,6	11,7	16,4	15,1	17,6	14,1	18,8	11,6	13,9
18,0	12,4	17,2	14,5	16,3	13,7	15,5	16,2	8,40	14,7	15,4
11,3	10,7	16,9	15,8	16,1	12,3	14,0	17,7	14,7	16,2	17,1
10,1	15,8	18,3	17,5	12,7	20,7	13,5	14,0	15,7	21,9	14,3
17,7	15,4	10,9	18,2	17,3	15,2	16,7	17,3	12,1	19,2	

Первый интервал: 8,4–10,4.

В задачах 13.6–13.9 построить графики эмпирических функций распределения, гистограммы и полигоны частот для выборок, представленных статистическими рядами.

13.6.

z_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

13.7

z_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

13.8

Границы интервалов	10–20	20–30	30– 40	40–50	50–60	60–70	70–80
Частоты	1	2	7	18	12	8	2

13.9.

Границы интервалов	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30	30–32	32–34
Частоты	4	3	3	2	4	7	12	5

13.10. Измерения емкости затвор-сток у 80 полевых транзисторов дали следующие результаты:

1,9 3,1 1,3 0,7 3,2 1,1 2,9 2,7 2,7 4,0
1,7 3,2 0,9 0,8 3,1 1,2 2,6 1,9 2,3 3,2
4,1 1,3 2,4 4,5 2,5 0,9 1,4 1,6 2,2 3,1
1,5 1,1 2,3 4,3 2,1 0,7 1,2 1,5 1,8 2,9
0,8 0,9 1,7 4,1 4,3 2,6 0,9 0,8 1,2 2,1
3.2 2,9 1,1 3,2 4,5 2,1 3,1 5,1 1,1 1,9
0,9 3,1 0,9 3,1 3,3 2,8 2,5 4,0 4,3 1,1
2,1 3,8 4,6 3,8 2,3 3,9 2,4 4,1 4,2 0,9

Построить гистограмму и полигон относительных частот по этой выборке, предварительно проведя группировку. В качестве длины интервала взять следующие значения: а) $b = 0{,}3$; б) $b = 0{,}6$; в) $b = 1{,}2$.

Вычислить среднее и дисперсию следующих выборок:

13.11. 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

13.12 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3.

13.13 а) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 9; б) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 12. Сравнить полученные числовые результаты для выборок а) и б).

В задачах 13.14.–13.16. определить среднее и дисперсию группированных выборок.

13.14**.**

Границы интервалов	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	11–13
Частоты	1	2	4	2	1	1

13.15.

Границы интервалов	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
Частоты	1	1	3	2	1	1

13.16.

Границы интервалов	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
Частоты	8	14	40	26	6	4

13.17. Предположим, что в результатах наблюдений случайной величины X присутствует одна и та же систематическая погрешность a. Какое влияние оказывает эта систематическая погрешность на величины выборочных среднего и дисперсии?

Раздел 14. Точечные оценки параметров распределения, их свойства и методы получения

Основная задача *математической статистики* состоит в нахождении *распределения* наблюдаемой случайной величины X по данным *выборки*. Во многих случаях вид распределения X можно считать известным, и задача сводится к получению *приближенных значений* ***неизвестных параметров*** *этого распределения.* Пусть $F_X(x,\theta)$ – функция распределения случайной величины X, содержащая один неизвестный параметр θ, а $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений этой случайной величины. ***Точечной оценкой*** θ неизвестного параметра θ называется *такая функция результатов опыта (выборки)* $\theta = \theta(x_1, x_2, ..., x_n)$, которую можно принять за подходящее значение оцениваемого параметра.

Любую функцию элементов выборки называют ***статистикой.*** Чтобы выяснить, какие свойства должна иметь статистика $\theta(x_1, x_2, ..., x_n)$ для того, чтобы ее значения могли бы считаться хорошей в некотором смысле оценкой параметра θ, ее рассматривают как функцию случайного вектора $(X_1, X_2, ..., X_n)$, одной из реализаций которого является данная выборка $x_1, x_2, ..., x_n$. Так как закон распределения каждой из случайных величин X_i, $i = 1, 2, ..., n$, есть $F_X(x,\theta)$ и является функцией параметра θ, то и распределение статистики $\theta(x_1, x_2, ..., x_n)$ также зависит от неизвестного параметра θ.

Качество оценок характеризуется следующими основными свойствами.

1. ***Состоятельность***. Оценка $\theta \equiv \theta_n = \theta(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *состоятельной оценкой* параметра θ, если θ_n сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ при $n \to \infty$. Последнее означает, что для любого сколь угодно малого значения ε вероятность $P\left[\left|\theta_n - \theta\right| < \varepsilon\right] \to 1$ при $n \to \infty$. Для состоятельной оценки $M\left[\theta_n\right] \to \theta$ *и* $D\left[\theta_n\right] \to 0$ *при* $n \to \infty$.

2**.** ***Несмещенность***. Оценка θ называется *несмещённой оценкой* параметра θ, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, то есть $M\left[\theta\right]=\theta$. Разность $M\left[\theta\right]-\theta$ называется *смещением.* Для несмещенных оценок систематическая ошибка оценивания равна нулю.

Для оценки параметра θ может быть предложено несколько состоятельных несмещенных оценок. Мерой точности несмещенной оценки θ считают ее дисперсию $D\left[\theta\right]$.

3. ***Эффективной*** называется несмещенная оценка θ_0 параметра θ, дисперсия которой минимальна среди всех возможных оценок θ.

При выполнении некоторых условий регулярности, для дисперсии несмещенной оценки θ параметра θ выполняется неравенство Крамера-Рао:

$$D\left[\theta\right]\geq\frac{1}{I_n(\theta)}, \tag{1}$$

где $I_n(\theta)$ – *информация Фишера,* содержащаяся в выборке объема n относительно неизвестного параметра θ. Для непрерывной случайной величины X с условной плотностью распределения $W_X\left(x/\theta\right)$

$$I_n(\theta)=nM\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln W_X\left(X/\theta\right)\right)^2\right]. \tag{2}$$

Если же X – дискретная случайная величина, то

$$I_n(\theta)=nM\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p\left(X/\theta\right)\right)^2\right],$$

где $p\left(x/\theta\right)=P\left[X=x/\theta\right]$.

Условия регулярности выполняются для обычно используемых статистик нормального, биномиального и пуассоновского распределений.

Несмещенная оценка $\theta=\theta_n$ называется *асимптотически эффективной* оценкой параметра θ, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{I_n(\theta)D\left[\theta_n\right]}=1.$$

Методы оценивания статистических характеристик

1. Простейший метод статистического оценивания – ***метод подстановки*** *или* ***аналогии*** – состоит в том, что в качестве оценки той или иной число-

вой характеристики (среднего, дисперсии и др.) генеральной совокупности берут соответствующую характеристику распределения выборки – выборочную характеристику.

Известно, что выборочная дисперсия

$$D_X^* = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности. Показано, что несмещенная оценка дисперсии генеральной совокупности задается статистикой

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

2. Метод максимального правдоподобия. Метод максимального правдоподобия является одним из наиболее распространенных методов нахождения оценок неизвестных параметров распределения генеральной совокупности. Пусть X – непрерывная случайная величина с условной плотностью распределения $W_X\left(x/\theta\right)$, зависящей от неизвестного параметра θ, значение которого требуется оценить по выборке объема n. Условную плотность распределения выборочного вектора $\left(X_1,...,X_n\right)$ при фиксированном значении неизвестного параметра θ можно записать в виде

$$W_{X_1,...,X_n}\left(x_1,...,x_n/\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} W_{X_i}\left(x_i/\theta\right).$$

Пусть, наконец, $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений случайной величины X, по которой находится оценка неизвестного параметра.

Функцией правдоподобия $L(\theta)$ выборки объема n называется условная плотность выборочного вектора, рассматриваемая при фиксированных значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Функция правдоподобия является, таким образом, функцией только неизвестного параметра θ, т.е.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} W_{X_i}\left(x_i/\theta\right).$$

Аналогично определяется функция правдоподобия выборки дискретной случайной величины X. Пусть X – дискретная случайная величина, причем вероятность $P\left[X = x\right] = p\left(x/\theta\right)$ есть функция неизвестного параметра θ. Предположим, что для оценки параметра θ получена конкретная выборка наблюдений случайной величины X объема n: $x_1, x_2, ..., x_n$. Функция правдоподобия $L(\theta)$ выборки объема n равна вероятности того, что при заданном значении параметра θ компоненты выборочного вектора $X_1, ..., X_n$ примут фиксированные значения $x_1, ..., x_n$, т. е.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P\left[X_i = x_i / \theta\right] = \prod_{i=1}^{n} p\left(x_i / \theta\right).$$

По методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается значение θ, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Такую оценку называют *МП-оценкой.* В случае дискретного распределения наблюдаемой случайной величины X МП-оценка неизвестного параметра θ есть такое значение θ, при котором вероятность появления данной конкретной выборки максимальна. Аналогичную интерпретацию МП-оценки можно дать и в случае оценки параметра распределения непрерывной случайной величины.

Для упрощения вычислений, связанных с получением МП-оценок, в некоторых случаях удобно использовать логарифмическую функцию правдоподобия, то есть $l(\theta) = \ln L(\theta)$.

При выполнении некоторых достаточно общих условий МП-оценки состоятельны, асимптотически эффективны и асимптотически нормально распределены.

Если для параметра θ существует эффективная оценка, то метод максимального правдоподобия дает именно эту оценку и другой МП-оценки не существует.

3. Метод моментов. Для получения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s$ распределения генеральной совокупности X часто используется метод моментов, состоящий в следующем.

Пусть $W_X\left(x / \theta_1, \theta_2, ..., \theta_s\right)$ – условная плотность распределения случайной величины X. Определим с помощью этой плотности s каких-либо моментов случайной величины X, например первые s начальных моментов, по формулам

$$\alpha_m\left(\theta_1, ..., \theta_s\right) = M\left[X^m\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m W_X\left(x / \theta_1, ..., \theta_s\right) dx, \ m = 1, 2, ..., s.$$

По выборке наблюдений случайной величины найдем значения соответствующих выборочных моментов:

$$\alpha_m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m, \ m = 1, 2, ..., s.$$

Попарно приравнивая теоретические моменты α_m случайной величины X их выборочным значениям α_m^*, получаем систему s уравнений с неизвестными $\theta_1, ..., \theta_s$:

$$\alpha_m(\theta_1, ..., \theta_s) = \alpha_m^*, \ m = 1, 2, ..., s.$$

Решая полученную систему относительно неизвестных $\theta_1, ..., \theta_s$ находим оценки $\theta_1, ..., \theta_s$ неизвестных параметров.

Аналогично находятся оценки неизвестных параметров по выборке наблюдений дискретной случайной величины.

Пример 1

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из генеральной совокупности с конечными математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Используя метод подстановки, найти оценку m. Проверить несмещенность и состоятельность полученной оценки.

Решение. По методу подстановки в качестве оценки m математического ожидания надо взять математическое ожидание распределения выборки – выборочное среднее. Таким образом, получаем

$$\tilde{m} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Чтобы проверить несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки m, рассмотрим эту статистику как функцию выборочного вектора $(X_1, X_2, ..., X_n)$. По определению выборочного вектора имеем: $M[X_i] = m$ и $D[X_i] = \sigma^2$, $i = 1, 2, ..., n$, причем X_i – независимые в совокупности случайные величины.

Следовательно,

$$M[\tilde{m}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\cdot nm = m,$$

$$D[\tilde{m}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Отсюда по определению получаем, что $\tilde{m}$ – несмещенная оценка m, и так как $D[\tilde{m}] \to 0$ при $n \to \infty$, $\tilde{m}$ является состоятельной оценкой математического ожидания m.

Пример 2

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности $N(m, \sigma)$. Показать, что выборочное среднее $\bar{x}$ является эффективной оценкой параметра m.

Решение. В примере 1 было показано, что $\bar{x}$ – несмещенная оценка параметра m, причем $D[\tilde{m}] = \dfrac{\sigma^2}{n}$. Используя (2), найдем информацию Фишера $I_n(m)$. Имеем

$$f_X(x, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln f_X(x, m) = -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} - \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right).$$

Следовательно:

$$\frac{\partial \ln f_X(x, m)}{\partial m} = \frac{x-m}{\sigma^2}.$$

Математическое ожидание случайной величины $\left(\dfrac{X-m}{\sigma^2}\right)^2$ равно:

$$M\left[\frac{(X-m)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{1}{\sigma^4} M\left[(X-m)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Таким образом:

$$I_n(m) = nM\left[\frac{(X-m)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Так как условие (4) выполнено, т.е. $D[\tilde{m}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{I_n(m)}$, то для нормально распределенной генеральной совокупности $\bar{x}$ является эффективной оценкой математического ожидания m.

Пример 3

Найти МП-оценку параметра λ распределения Пуассона.

Решение. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений случайной величины X, имеющей распределение Пуассона с неизвестным параметром λ, т.е.

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

где x принимает неотрицательные целочисленные значения, $x = 0,1,2...$ Функция правдоподобия $L(\lambda)$ выборки объема n определяется по формуле:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\Sigma x_i}}{x_1! x_2! ... x_n!} e^{-\lambda n}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L(\lambda) = -\ln(x_1! x_2! ... x_n!) + \left(\sum x_i\right) \ln \lambda - \lambda n.$$

Используя необходимое условие экстремума, получим уравнение для определения МП-оценки:

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}.$

Полученная МП-оценка является несмещенной и состоятельной оценкой λ (пример 1), а также эффективной оценкой этого параметра.

Пример 4

Найти МП-оценки математического ожидания m и дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений случайной величины X с плотностью распределения

$$W_X\left(x/m,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем функцию правдоподобия $L\left(m,\sigma^2\right)$. Имеем

$$L\left(m,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия отсюда равна

$$\ln L\left(m,\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum(x_i-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Используя необходимые условия максимума $\ln L\left(m,\sigma^2\right)$, получим систему уравнений для нахождения МП-оценок:

$$\frac{\partial\ln L\left(m,\sigma^2\right)}{\partial m}=\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-m)=0,$$

$$\frac{\partial\ln L\left(m,\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum(x_i-m)^2=0.$$

Из первого уравнения системы находим $m=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2=D_X^*.$$

Отметим, что выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещенной и состоятельной оценкой m (см. пример 1), а также эффективной оценкой в случае нормально распределенной генеральной совокупности (см. пример 2). Выборочная дисперсия D_X^* является состоятельной и смещенной оценкой σ^2.

Пример 5

Методом моментов найти оценки неизвестных параметров a и b для Г-распределения с плотностью

$$W_X\left(x/a,b\right)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\mathrm{e}^{-bx}, & x>0.\end{cases}$$

Решение. Для нахождения опенок параметров a и b по методу моментов воспользуемся начальным моментом первого порядка (математическим ожиданием) и центральным моментом второго порядка (дисперсией):

$$\alpha_1(a,b) = m = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

$$\mu_2(a,b) = \sigma^2 = \frac{a}{b^2}. \tag{2}$$

По выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ из генеральной совокупности, имеющей Г-распределение, находим значения соответствующих выборочных моментов:

$$\alpha_1^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \tag{3}$$

$$\mu_2^* = D_X^* = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \tag{4}$$

Приравнивая (1) и (3), (2) и (4) соответственно, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{a}{b} = \bar{x}, \quad \frac{a}{b^2} = D_X^*,$$

решая которую, находим $a = \dfrac{\bar{x}^2}{D_X^*}$, $\tilde{b} = \dfrac{\bar{x}}{D_X^*}$.

Задачи

14.1. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из генеральной совокупности с конечным начальным моментом α_s. Используя метод подстановки, найти оценку начального момента $\tilde{\alpha}_s$. Показать, что полученная оценка является несмещенной и состоятельной.

14.2. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из генеральной совокупности с известным средним m и неизвестной дисперсией σ^2. Показать, что несмещенной оценкой σ^2 будет статистика

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - m\right)^2.$$

14.3. Рассмотрим две выборки объемов n_1 и n_2 из одной генеральной совокупности со средним m и дисперсией σ^2. Пусть $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2 и S_2^2 – несмещенные оценки средних и дисперсий, определенные по этим выборкам. Показать что объединенные оценки, вычисляемые по формулам

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2},$$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

будут несмещенными и состоятельными оценками m и σ^2.

14.4. Показать, что выборочное среднее, вычисленное по выборке из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона с параметром λ, будет несмещенной и состоятельной оценкой этого параметра.

14.5. В результате проведения n независимых экспериментов в одних и тех же условиях случайное событие A произошло x раз.

а) Показать, что относительная частота $h = \dfrac{x}{n}$ появления события A будет несмещенной и состоятельной оценкой вероятности события A: $P(A) = p$ в одном эксперименте.

б) Определить такое значение p, при котором дисперсия h будет максимальна.

14.6. Показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой параметра λ распределения Пуассона.

14.7. Показать, что относительная частота появления события A в n независимых испытаниях является эффективной оценкой вероятности p появления события A в одном испытании.

14.8. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности $N(m, \sigma)$. Найти информацию Фишера $I_n(\sigma^2)$.

14.9. Пусть x – наблюдаемое значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение $B(n, p)$. Другими словами, x – число «успехов» в n независимых испытаниях, причем p – вероятность «успеха» в одном испытании. Найти МП-оценку параметра p. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

14.10. Пусть x – число автолюбителей, заправившихся на данной станции в течение n часов. Предположим, что число автолюбителей, подъезжающих на заправку, есть случайная величина X, имеющая распределение Пуассона с параметром $n\lambda$, где λ – ожидаемое число заправляющихся автолюбителей в течение одного часа. Найти МП-оценку параметра λ. Показать, что полученная оценка является несмещенной, состоятельной и эффективной.

В задачах 14.11 и 14.12 по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n найти МП-оценки параметров указанных распределений. Показать, что полученные оценки являются несмещенными и состоятельными.

14.11. Показательное распределение $E_X(1/\lambda)$.

14.12. Нормальное распределение $N(m,1)$.

14.13. При помощи n различных приборов получены n измерений случайной величины X. В предположении, что X имеет нормальное распределение, а дисперсия i-го измерения известна и равна σ_i^2, $i=1,2,...,n$, найти МП-оценку математического ожидания m случайной величины X. Показать, что полученная оценка является несмещенной, и вычислить ее дисперсию.

14.14. Отказ прибора произошел при k-м испытании. Найти МП-оценку вероятности отказа p при одном испытании и вычислить ее математическое ожидание.

14.15. В n независимых испытаниях событие A произошло x раз. Методом моментов найти оценку вероятности p появления события A в одном испытании.

В задачах 14.16–14.18 по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n найти оценки параметров указанных распределений, используя метод моментов.

14.16. Пуассоновское распределение с параметром λ.

14.17. Нормальное распределение $N(m,\sigma)$.

14.18. Показательное распределение $E_X(\lambda)$.

Раздел 15. Интервальные оценки. Доверительные интервалы и доверительная вероятность

При статистической обработке результатов наблюдений часто необходимо не только найти оценку $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ, но и определить погрешность оценки. С этой целью вводится понятие доверительного интервала.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий (накрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $p = 1 - \alpha$, т.е.

$$P[\theta_1 < \theta < \theta_2] = 1 - \alpha .$$

Число $1 - \alpha$ называется *доверительной вероятностью,* а значение α – *уровнем значимости.* Статистики $\theta_1 = \theta_1(x_1, ..., x_n)$ и $\theta_2 = \theta_2(x_1, ..., x_n)$, определяемые по выборке $x_1, ..., x_n$ из генеральной совокупности с неизвестным параметром θ, называются соответственно *нижней и верхней границами доверительного интервала.*

Указанное условие означает, что в большой серии независимых экспериментов, в каждом из которых получена выборка объема *n*, в среднем $(1-\alpha)100\%$ из общего числа построенных доверительных интервалов содержат истинное значение параметра θ.

Длина доверительного интервала, характеризующая погрешность интервального оценивания, зависит от объема выборки *n* и доверительной вероятности $1 - \alpha$: при увеличении объема выборки длина доверительного интервала уменьшается, а с приближением доверительной вероятности к единице - увеличивается. Выбор доверительной вероятности определяется конкретными условиями. Обычно используются значения $1 - \alpha$, равные 0,90; 0,95; 0,99.

При решении некоторых задач применяются односторонние доверительные интервалы, границы которых определяются из условий

$$P[\theta < \theta_2] = 1 - \alpha \text{ или } P[\theta_1 < \theta] = 1 - \alpha .$$

Эти интервалы называются соответственно *левосторонними и правосторонними доверительными интервалами.*

Чтобы найти доверительный интервал для параметра θ, необходимо знать закон распределения статистики $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1, ..., x_n)$, значение которой является оценкой параметра θ. При этом для получения доверительного интервала наименьшей длины при данном объеме выборки n и заданной доверительной вероятности $1-\alpha$ в качестве оценки $\tilde{\theta}$ параметра θ следует брать эффективную либо асимптотически эффективную оценку.

Один из методов построения доверительных интервалов состоит в следующем. Предположим, что существует статистика $Y = Y(\tilde{\theta}, \theta)$ такая, что:

а) закон распределения Y известен и не зависит от θ;

б) функция $Y(\tilde{\theta}, \theta)$ непрерывна и строго монотонна по θ.

Пусть, далее, $(1-\alpha)$ – заданная доверительная вероятность, а $y_{\alpha/2}$ и $y_{1-\alpha/2}$ – квантили распределения статистики Y уровней $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно.

Напомним что квантилью уровня p функции распределения F(y) случайной величины Y называется минимальное значение y_p, при котором функция распределения не меньше p.

Тогда с вероятностью $1-\alpha$ выполняется неравенство

$$y_{\alpha/2} < Y(\tilde{\theta}, \theta) < y_{1-\alpha/2}.$$

Решая неравенство относительно θ, найдем границы θ_1 и θ_2 доверительного интервала для θ. Если плотность распределения статистики Y симметрична относительно оси *Oy*, то доверительный интервал имеет наименьшую длину, а если это распределение несимметрично, то длину, близкую к наименьшей.

Пример 1

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности. Найти доверительный интервал для математического ожидания m при условии, что дисперсия генеральной совокупности известна и равна σ^2, а доверительная вероятность равна $1-\alpha$.

Решение. В качестве оценки математического ожидания m возьмем выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$. Для нормально распределенной генеральной совокупности выборочное среднее является эффективной оценкой m. Выборочное среднее $\bar{X}$ в данном случае имеет нормальное распределение $N\left(m, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

Рассмотрим статистику $U = \dfrac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, имеющую нормальное распределение $N(0, 1)$ независимо от значения параметра *m*. Кроме того, *U* как функция *m* непрерывна и строго монотонна. Следовательно,

$$P\left[u_{\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha,$$

где $u_{\alpha/2}$ и $u_{1-\alpha/2}$ квантили нормального распределения $N(0, 1)$.

Решая неравенство

$$u_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2},$$

относительно *m*, получим, что с вероятностью $1-\alpha$ выполняется следующее условие:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2},$$

Так как квантили нормального распределения связаны соотношением $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, полученный доверительный интервал для m можно записать следующим образом:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Задачи

В следующих задачах предполагается, что выборка объема n получена из генеральной совокупности, имеющей либо нормальное распределение $N(m, \sigma)$*, либо распределение, достаточно близкое к нормальному.*

15.1. Показать, что если дисперсия генеральной совокупности σ^2 неизвестна, а в качестве оценки дисперсий используется статистика $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, то при доверительной вероятности $1-\alpha$ доверительный интервал для математического ожидания *m* имеет вид

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1),$$

где $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ - квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

Выборочные оценки в задачах 15.2–15.5 определялись по результатам n наблюдений. Используя эти данные, а также результаты примера 1 и задачи 15.1, найти 90%- и 99 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания (среднего) следующих характеристик:

15.2. Емкость конденсатора, если $\bar{x} = 20$ мкФ, $n = 16$, среднеквадратичное отклонение известно и равно 4 мкФ.

15.3. Время безотказной работы электронной лампы, если $\bar{x} = 500$, $n = 100$, среднеквадратичное отклонение известно и равно 10 ч.

15.4. Диаметр вала, если $\bar{x} = 30$ мм, $n = 9$, $s^2 = 9$ мм^2.

15.5. Содержание углерода в единице продукта, если $\bar{x} = 18$ г, $n = 25$, $s^2 = 16$ г^2.

15.6. Пусть из одной генеральной совокупности получены две выборки объемов n_1 и n_2 соответственно. Выборочные оценки средних $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$.. Объединенные оценки среднего по выборке объема $n_1 + n_2$, вычисляются по формулам

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}.$$

Показать, что если дисперсия генеральной совокупности известна и равна σ^2, то доверительный интервал для среднего определяется следующим образом:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} u_{1-\alpha/2};$$

Для уточнения характеристик, приведенных в задачах 15.2–15.5, были проделаны повторные эксперименты и получены новые выборочные оценки. Используя объединенные выборочные оценки (см. задачу 15.6), найти 90%. и 99%-ные доверительные интервалы для среднего (задачи 15.7–15.10).

15.7. Емкость конденсатора, если $n = 9$, $\bar{x} = 18$ мкФ.

15.8. Время безотказной работы электронной лампы, если $n = 64$, $\overline{x} = 480$ ч.

15.9. Диаметр вала, если $n = 16$, $\overline{x} = 29$ мм, $s^2 = 4,5$ мм^2.

15.10. Содержание углерода в единице продукта, если $n = 9$, $\overline{x} = 18,8$ г, $s^2 = 20$ г^2.

15.11. Оценка величины сопротивления для большой партии однотипных резисторов, определенная по результатам измерений 100 случайно отобранных экземпляров, равна $\overline{x} = 10\ кОм$.

а) Считая, что дисперсия измерений известна: $\sigma^2 = 1\ кОм^2$, найти вероятность того, что для резисторов всей партии величина сопротивления лежит в пределах 10 ± 0,1 кОм.

б) Сколько измерений нужно произвести, чтобы с вероятностью 0,95 утверждать, что для всей партии резисторов величина сопротивления лежит в пределах 10 ± 0,1 кОм?

15.12. Для определения вертикального угла ориентира используют среднее арифметическое нескольких замеров угла при помощи секстанта. Для углов, измеряемых секстантом, среднеквадратичное отклонение принимается равным $\sigma = 1,5'$. Найти количество замеров, которое нужно произвести, чтобы:

а) погрешность результата с вероятностью 0,99 не превосходила $1'$;

б) погрешность результата с вероятностью 0,95 не превосходила $1,5'$.

Раздел 16. Критерий χ^2. Проверка гипотезы о виде распределения

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений случайной величины *X*. Проверяется ***непараметрическая гипотеза*** H_0, утверждающая, что *X* имеет функцию распределения $F_X(x)$. Для того, чтобы принять или отвергнуть гипотезу вводят *критерий, характеризующий степень расхождения теоретического и выборочного распределений*. Существует правило выбора критерия, при котором он довольно прост и при больших объемах выборки *n* его закон распределения практически не зависит от распределения *X*.

Проверка гипотезы H_0 при помощи критерия χ^2 осуществляется по следующей схеме. По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения случайной величины *X*. Далее, область возможных значений случайной величины *X* разбивается на *r* множеств $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_r$ например, *r* интервалов в случае, когда *X* – непрерывная случайная величина, или *r* групп, состоящих из отдельных значений, для дискретной случайной величины *X*.

Пусть n_k – число элементов выборки, принадлежащих множеству Δ_k, $k = 1, 2, ..., r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$. Используя предполагаемый закон распределения случайной величины *X*, находят вероятности p_k того, что значение *X* принадлежит множеству Δ_k, то есть $p_k = P[X \in \Delta_k]$, $k = 1, 2, ..., r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$.

Полученные результаты можно представить в виде следующей таблицы:

Число элементов	Число наблюдений				Всего
	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_r	
Наблюдаемое	n_1	n_2	$\dots$	n_r	n
Ожидаемое	np_1	np_2	$\dots$	np_r	n

Выборочное значение статистики критерия χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi_B^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k\right)^2}{np_k}.$$

Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α, если

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2\left(r - l - 1\right),$$

где $\chi_{1-\alpha}^2\left(r-l-1\right)$ – квантиль порядка $1-\alpha$ распределения χ^2 с $r-l-1$ степенями свободы, а l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке; если же $\chi_B^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2\left(r-l-1\right)$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Замечание. Критерий χ^2 использует тот факт, что случайная величина $\frac{n_k - np_k}{\sqrt{np_k}}$, $k = 1, 2, ..., r$ имеет распределение, близкое к нормальному $N(0, 1)$. Чтобы это утверждение было достаточно точным, необходимо, чтобы для всех интервалов выполнялось условие $np_k \geq 5$. Если в некоторых интервалах это условие не выполняется, то интервалы следует объединить с соседними.

Пример 1

Проверить гипотезу о распределении по закону Пуассона число отказов аппаратуры.

Решение. В первых двух столбцах таблицы приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы.

Число отказов, k	Число случаев, в которых наблюдалось k отказов, n_k	$p_k = \frac{0{,}6^k}{k!}e^{-0{,}6}$	Ожидаемое число случаев с k отказами, np_k
0	427	0,54881	416
1	235	0,32929	249
2	72	0,09879	75
3	21	0,01976	15
4	1	0,00296	2
5	1	0,00036	0
≥ 6	0	0,00004	0
Сумма	757	–	–

Общее число обследованных экземпляров аппаратуры $n = 757$, при этом наблюдался $0 \cdot 427 + 1 \cdot 235 + 2 \cdot 72 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 451$ отказ.

Проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона:

$$p_k = P\left[X = k\right] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \;\; k = 0, 1, ..., \text{ при } \alpha = 0{,}01.$$

Оценка параметра λ равна среднему числу отказов: $\tilde{\lambda} = 451/757 \approx 0{,}6$. Находим вероятности p_k и ожидаемое число случаев с k отказами (третий и четвертый столбцы таблицы 6.1).

Для k = 4, 5 и 6 значения $np_k < 5$, поэтому объединяем эта строки со строкой для $k = 3$. В результате получим значения, приведенные в таблице

k	n_k	np_k	$\frac{\left(n_k - np_k\right)^2}{np_k}$
0	427	416	0,291
1	235	249	0,787
2	72	75	0,120
≥ 3	23	17	2,118
–	–	–	$\chi_B^2 = 3{,}316$

Так как по выборке оценивался один параметр λ, то $l = 1$, число степеней свободы равно 4 – 1 – 1 = 2. По таблице находим $\chi^2_{0,99}\left(2\right) = 9{,}21$, следовательно, гипотеза о распределении числа отказов по закону Пуассона принимается.

Задачи

16.1. При 50 подбрасываниях монеты герб появился 20 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять $\alpha = 0{,}10$.

16.2. При 120 бросаниях игральной кости шестерка выпала 40 раз. Согласуется ли этот результат с утверждением, что кость правильная? Принять $\alpha = 0{,}05$.

16.3. Ниже приводятся данные о фактических объемах сбыта (в условных единицах) в пяти районах:

Район	1	2	3	4	5
Фактический объем сбыта	110	130	70	90	100

Согласуются ли эти результаты с предположением о том, что сбыт продукции в этих районах должен быть одинаковым? Принять $\alpha = 0,01$.

16.4. На экзамене студент отвечает только на один вопрос по одной из трех частей курса. Анализ вопросов заданных 60 студентам, показал, что 23 студента получили вопросы из первой, 15 – из второй и 22 – из третьей части курса.

Можно ли считать, что студент, идущий на экзамен, с равной вероятностью получит вопрос по любой из трех частей курса? Принять $\alpha = 0,10$.

16.5. Метод получения случайных чисел был применен 250 раз, при этом получены следующие результаты:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота появления	27	18	23	31	21	23	28	25	22	32

Можно ли считать, что примененный метод действительно дает случайные числа? Принять $\alpha = 0,10$.

16.6. В цехе с 10 станками ежедневно регистрировалось число вышедших из строя станков. Всего проведено 200 наблюдений, результаты которых приведены ниже:

Число выбывших станков	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число зарегистрированных случаев	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Проверить гипотезу H_0 о том, что число выбывших из строя станков имеет распределение Пуассона. Принять $\alpha = 0,05$.

16.7. Во время второй мировой войны на Лондон упало 537 самолетов-снарядов. Вся территория Лондона была разделена на 576 участков площадью по 0,25 км^2. Ниже приведены числа участков n_k на которые упало k снарядов:

k	0	1	2	3	4	5 и больше
n_k	229	211	93	35	7	1

Согласуются ли эти данные с гипотезой о том, что число снарядов, упавших на каждый из участков, имеет распределение Пуассона? Принять $\alpha = 0{,}05$.

16.8. Ниже приводятся данные о числе деталей, поступающих на конвейер в течение 600 двухминутных интервалов:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число интервалов	400	167	29	3	0	0	1

Используя критерий χ^2 проверить гипотезу H_0 пуассоновском распределении числа деталей при $\alpha = 0{,}05$.

16.9. При испытании радиоэлектронной аппаратура фиксировалось число отказов. Результаты 59 испытаний приводятся ниже:

Число отказов	0	1	2	3
Число испытаний	42	10	4	3

Проверить гипотезу H_0 о том, что число отказов имеет распределение Пуассона, при $\alpha = 0{,}10$.

В задачах 16.10–16.11 для приведенных группированных выборок, приняв 10 %-ный уровень значимости, проверить гипотезу H_0 о том, что они получены из нормально распределенной генеральной совокупности.

16.10. Входное сопротивление 125 электронных ламп (Ом):

Границы интервала	3,0–3,6	3,6–4,2	4,2–4,8	4,8–5,4	5,4–6,0	6,0–6,6	6,6–7,2
Частота	2	3	35	43	22	15	5

16.11. Рост 1004 девушек в возрасте 16 лет (см):

Границы интервала	134–137	137–140	140–143	143–146	146–149	149–152	152–155
Частота	1	4	16	53	121	197	229

Границы интервала	155–158	158–161	161–164	164–167	167–170	170–173
Частота	186	121	53	17	5	1

Ответы

Раздел 1. Алгебра событий

1.1 а) да, б) нет, в) нет, г) да, д) да, е) да.

1.2 Когда $A \in B$, то есть множество A является подмножеством множества B.

1.3 а) Достоверное событие, б) невозможное событие.

1.4 а) Искомое событие является противоположным произведению событий A и B, поэтому оно является суммой событий, противоположных событиям A и B (правило Де-Моргана), следовательно, оно состоит в том, что сумма очков четная или ни на одной из них нет единицы. б) Искомое событие состоит в том, что сумма очков четная и на одной из них выпала единица.

1.5 а) Искомое число делится на пять и не заканчивается нулем, следовательно, оно заканчивается на пять. б) Искомое число делится на пять и не заканчивается нулем, а такое событии невозможно.

1.6 $B = A_6$, $C = A_5$.

1.7 Искомым является событие C – ничейный исход.

1.8 а) Все три станка потребуют обслуживания в течение часа, б) хотя бы один станок потребует обслуживания в течение часа, в) ровно один (первый, второй или третий) станок потребует обслуживания в течение часа, г) ровно два станка потребуют обслуживания в течение часа, д) ни один из станков не потребует обслуживания в течение часа.

1.9 а) взят король или карта масти пик, б) взят король пик, в) взят король или карта не масти пик, г) взят король или десятка масти пик, д) взята карта масти пик, так как событие C влечет за собой B, е) невозможное событие, ж) взята десятка пик, з) взят король пик или десятка пик, и) невозможное событие.

Раздел 2. Непосредственный подсчет вероятностей

2.1 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(C)=\dfrac{5}{6}$.

2.2 $P=0,3$.

2.3 $P=\dfrac{ac}{(a+b)(c+d)}$.

2.4 $P=\dfrac{1}{15}$.

2.5 $P=\dfrac{C_a^2C_b^3}{C_{a+b}^5}$.

2.6 $P=\dfrac{C_l^5C_{k-l}^{r-5}}{C_k^2}$.

2.7 $P_1=\dfrac{10}{19}$; $P_2=\dfrac{135}{323}$.

2.8 $P=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{C_{a+b+c}^3}$.

2.9 $P=\dfrac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}$.

2.10 $P=\dfrac{1}{8}$.

2.11 $P=\dfrac{a}{a+b}$.

2.12 $P=\dfrac{3}{4}$.

2.13 $P=1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

2.14 $P_1=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$; $P_2=1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$.

2.15 $P=\dfrac{1}{15}$.

2.16 $P=\dfrac{1}{n!}$.

2.17 $P=\dfrac{1}{120}$.

2.18 $P(A)=\dfrac{1}{A_{30}^4}$, где A_{30}^4 – число размещений из 30 по 4 буквы.

2.19 P = 0,8.

2.20 $P=0{,}1$.

2.21 $P=\dfrac{1}{54}$.

2.22 $P=\dfrac{k!}{k^l(k-l)!}$.

2.23 $P=\dfrac{1}{l^{k-1}}$.

2.24 а) $P = 0,3024$; б) $P = \frac{1}{32}$.

2.25 $P = \frac{1}{720}$.

2.26 $P = \frac{a}{a+b}$.

2.27 P = 60/143.

2.28 P = 4/7.

2.29 $P(A) = \frac{1}{216}$; $P(B) = \frac{1}{36}$; $P(C) = \frac{5}{54}$.

2.30 $P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_m^i C_n^i}{C_{m+n}^{2i}}$.

2.31 а) 91/228, б) 1/114, в) 35/76.

2.32 $P = \frac{1}{6}$.

2.33 $P = \frac{1}{10}$.

2.34 $P = \frac{\tau}{T}\left(2 - \frac{\tau}{T}\right)$.

2.35 $P(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\frac{\sqrt{U_0^2 - (U_s - U_n)^2}}{U_s \cdot U_n}, \text{при } |U_s - U_n| < U_0, \\ 0 \quad \text{при } |U_s - U_n| \geq 0, \end{cases}$ где U_s – амплитуда сигнала, U_n – амплитуда помехи.

2.36 $P = 0,2$.

Раздел 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

3.1 $P = 0,38$.

3.2 $P = 0,51$.

3.3 $P = 0,98$.

3.4 $P = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)$.

3.5 $P = 0,57$.

3.6 $P = 1 - (1 - q_1)^{n_1}(1 - q_2)^{n_2}(1 - q_3)^{n_3}$.

3.7 $P = 1 - (1 - P)^n$.

3.8 $P(A) = 1 - (1 - P)^{mn}$; $P(B) = \left[1 - (1 - P)^n\right]^m$.

3.9 $P_1 P_2$.

3.10 $P = 0{,}65$.

3.11 $P = 0{,}0008$.

3.12 $P = 0{,}008$.

3.13 $P = 0{,}72$.

3.14 $P = 0{,}24$.

3.15 а) $P = 0{,}99^5$; б) $P = 0{,}01 \cdot 0{,}99^4$; в) $P = 0{,}05 \cdot 0{,}99^4$.

3.16 $P = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

3.17 $P = \dfrac{ab}{a^2 + 2ab + b^2 - a - b}$.

3.18 $P = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$.

3.19 $P = 0{,}188$.

3.20 $P = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{3}{7}$.

3.21 $P(1-P)^{n-1}$.

3.22 $P = \dfrac{3}{10}$.

3.23 $P(A) = \dfrac{1}{(N!)^2}$; $\quad P(B) = \dfrac{1}{N!}$.

3.24 $P = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{n-k+1}$.

3.25 $P = \left(\dfrac{C_a^2 \cdot C_{b+c}^1}{C_{a+b+c}^3} + \dfrac{C_a^3}{C_{a+b+c}^3} \right) + \left(\dfrac{C_b^2 \cdot C_{a+c}^1}{C_{a+b+c}^3} + \dfrac{C_b^3}{C_{a+b+c}^3} \right) + \left(\dfrac{C_c^2 \cdot C_{a+b}^1}{C_{a+b+c}^3} + \dfrac{C_c^3}{C_{a+b+c}^3} \right)$

3.26 $P = 0{,}9999$.

3.27 $P = 0{,}991$.

3.28 $P = 0{,}001$.

3.29 $P = 0{,}14$.

3.30 $P(A) = P \cdot P_1 + (1-P)\alpha$; $\quad P(B) = (1-P)\alpha$; $\quad P(C) = P(1-P_1)$.

3.31 $P = 2(1-P_1)P_1(1-P_2)^2 + 2P_1^2(1-P_2)P_2 + P_1^2(1-P_2)^2$.

3.32 $P = 0{,}54$.

3.33 $P = \dfrac{117}{812}$.

3.34 $P = \dfrac{n!}{n^n}$.

3.35 $P_1 = 0,398;\ P_2 = 0,426$.

Раздел 4. Формула полной вероятности

4.1 $P = 0,16$.
4.2 $P = 0,76$.
4.3 $P = 0,87$.
4.4 $P = 0,37$.
4.5 $P = 0,375$.
4.6 $P = 0,255$.
4.7 $P = \frac{7}{18}$.
4.8 $P = 1 - \left[1 - (1-p)\cdot p_0 - p\cdot p_1\right]^n$.
4.9 $P(B) = P\cdot\frac{P_1+P_2+P_3}{3};\ P(C) = P\left(1 - \frac{P_1+P_2+P_3}{3}\right)P_0$.
4.10 $P = 0,44$.
4.11 P = 0,785.
4.12 $P = 1 - \left(P\cdot P_1 + (1-P)P_2\right)^N$.
4.13 $P = \frac{a}{a+b}$.
4.14 $P = 0,089$.
4.15 P = 1/9.
4.16 $P = \frac{5}{8}$.
4.17 $P(A) = \frac{1}{2}(1+p-q);\ P(B) = \frac{1}{2}(1-p+q)$.
4.18 $P = 0,708$.
4.19 $P(A) = \left[p_1p_2 + (1-p_1)(1-q_2)\right]\cdot\left[q_1q_2 + (1-q_1)(1-p_2)\right]$.
4.20 $P = \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)} + \frac{2k(2n-k)(k-1)}{2n(2n-1)(2n-2)}$.

Раздел 5. Формула Байеса

5.1 $P\left(H_1/A\right) = \dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1};\quad P\left(H_2/A\right) = \dfrac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1};$

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}.$$

5.2 $P=0{,}999$.

5.3 $P=0{,}3$.

5.4 $P\left(H_1/A\right)=\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$.

5.5 Из второй группы;

5.6 $P\left(H/A\right)=0{,}475$.

5.7 $P\left(H_1/A\right)=\frac{p_1}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)}$;

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{p_2}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)};\quad P\left(H_3/A\right)=\frac{p_0\left[2-(p_1+p_2)\right]}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)}.$$

5.8 $P=\frac{6}{13}$.

5.9 а) $P_1=0{,}87$; б) $P_2=0{,}13$.

5.10 $\frac{PP_1}{PP_1+(1-P)P_2}$.

5.11 $P=\frac{6}{7}$.

5.12 P=0,022.

5.13 $P=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}}\left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right]$.

5.14 Пять бракованных изделий.

5.15 $P=\frac{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}}$.

5.16 $P=0{,}56$.

Раздел 6. Повторение независимых опытов

6.1 $P=0{,}073$.

6.2 $P_1=0{,}375$; $P_2=0{,}312$.

6.3 а) $0{,}652$; б) $0{,}194$; в) $0{,}264$.

6.4 $P=0,00856$.

6.5 $P=0,06$.

6.6 $P=0,87$.

6.7 $P=\frac{7}{64}$.

6.8 $P=0,999976$.

6.9 $P=\frac{63}{256}$.

6.10 15000;

6.11 а) $P=0,00422$; б) 2.

6.12 $\begin{matrix} P(A)=(1-pr)^n;\ P(B)=C_n^2(pr)^2(1-pr)^{n-2}; \\ P(C)=1-(1-pr)^{n-1}\left[(1-pr)+npr\right] \end{matrix}$.

6.13 $P_1=0,238$; $P_2=0,751$.

6.14 $P=1-(0,996)^{250}$.

6.15 $P=0,972$.

6.16 P = 0,28.

6.17 P = 0,87.

6.18 P = 0,85.

6.19 $n=5$.

6.20 $P_{m,N}=C_N^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m}$.

6.21 (См. предыдущую задачу.) Вероятность того, что из остальных $(N-1)$ абонентов ровно m занимают некоторые (различные) линии, равна $p=C_{N-1}^m\left(\frac{nt}{N}\right)^m\left(1-\frac{nt}{N}\right)^{N-m-1}$.

6.22 $P=C_{90}^{25}(0,27)^{25}(0,73)^{65}$.

6.23 $P=0,2$.

6.24 а) $P_1=0,311$; б) $P_2=0,243$.

6.25 а) $P_{3,\,10}=C_{10}^3\cdot 0,7^3\cdot 0,3^7$; б) $P_{3,\,10}=1-\sum_{i=0}^{2}C_{10}^i\cdot 0,7^i\cdot 0,3^{10-i}$.

6.26 Вероятность того, что в одном цикле обзора будет зарегистрирован сигнал от цели, равна $P_{k,\,n}=1-\sum_{i=0}^{k-1}C_n^i\cdot p_1^{\,i}\cdot(1-p_1)^{n-i}$. Вероятность того, что за

N циклов сигнал будет зарегистрирован не менее m раз, равна $P_{m,N} = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} C_N^j \cdot \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \cdot p_1^{\,i} \cdot \left(1 - p_1\right)^{n-i} \right]^j \cdot \left[\sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot p_1^{\,i} \cdot \left(1 - p_1\right)^{n-i} \right]^{N-m}$.

6.27 $P = \sum_{i=4}^{20} C_{20}^i \cdot p^i \cdot \left(1-p\right)^{20-i}$.

6.28 $P = 0,28$.

6.29 $\begin{array}{l} P_{0,\,4} = 0{,}168;\ P_{1,\,4} = 0{,}394;\ P_{2,\,4} = 0{,}32;\ P_{3,\,4} = 0{,}106; \\ P_{4,\,4} = 0{,}012;\ P = 0{,}3888 \end{array}$.

6.30 $n = 2$.

6.31 Число приборов n должно удовлетворять неравенству

$$\left(0{,}8\right)^n + n \cdot 0{,}2\left(0{,}8\right)^{n-1} + \frac{n\left(n-1\right)}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot \left(0{,}8\right)^{n-2} \le 0{,}1.$$

Раздел 7. Законы распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин

7.1 $m_x = p;\ m_2\left[x\right] = p;\ D\left[x\right] = pq.$

x_i	0	1
p_i	q	p

7.2

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0728	0,6561

7.3

x_m	0	1	…	m	…	n
p_m	p^n	$C_n^1 \cdot q \cdot p^{n-1}$	…	$C_n^m \cdot q^m \cdot p^{n-m}$	…	q^n

7.4 X_1 – случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски; X_2 – то же для второго баскетболиста;

$$\left.\begin{array}{l} P\left(X_1 = m\right) = 0{,}6^{m-1} \quad 0{,}4^m \\ P\left(X_2 = \quad\right) = 0{,}6^{m+1} \quad 0{,}4^{m-1} \end{array}\right\} \text{ для всех } m \ge 1.$$

7.5 $P\left(k\right) = C_{k-1}^{n-1} p^n \left(1-p\right)^{k-n}, \quad k = n, n+1, n+2, \ldots.$

7.6

z_i	0	1/4	2/3	3/2	4	∞
p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

7.7

x_i	1	2	3	$\dots$	i	$\dots$	n
p_i	q	pq	p^2q	$\dots$	$p^{i-1}q$	$\dots$	p^{n-1}

7.8

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/.6	1/6
m_x=7/2, D_x=25/12.						

7.9

x_i	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$
p_i	0,1	0,09	0,081	$\dots$	$0{,}9^{k-1}0{,}1$	$\dots$

7.10 .

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le 0; \\ \dfrac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1} C_n^m 5^{n-m}, \quad \text{если} \quad 0<x\le n \text{ и } x-\text{целое}; \\ \dfrac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]} C_n^m 5^{n-m}, \quad \text{если} \quad 0<x\le n \text{ и } x-\text{нецелое}; \\ 1 \quad \text{при} \quad x>n. \end{cases}$$

7.11 $m_x = p;\ \sigma_x^2 = p(1-p);\ m_y = np;\ \sigma_y^2 = np(1-p)$.

7.12 $m_x = 2;\ D[x]=4{,}8$.

7.14 а) $M[X_1]=1{,}8$; б) $M[X_2]=1{,}7$; в) $M[X_3]=2{,}0$; наименьшее среднее число взвешиваний будет при системе б).

7.15 $M[x]=8$.

7.16

Ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/64

m_x = 29/32; m_2 = 209/64; $D_x = m_2 - m_x^2$

7.17 $D_x = 0{,}495$.

7.18 $m_x = 5$.

7.19 $M[x]=4{,}55$;

7.20 $M[x]=\dfrac{n^2-1}{3n}\cdot a$;

7.21 $$M[x]=1\cdot\frac{n\cdot m}{(n+m)(n+m-1)}+2\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m-2}+$$
$$+\ldots+n\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{(n+m)(n+m-1)\ldots(m+1)}\cdot\frac{m}{n}.$$

7.22 $m_x=\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\frac{n}{n+m}\right)^i\frac{m}{m+n}$; $D_x=\sum_{i=1}^{\infty}i^2\left(\frac{n}{n+m}\right)^i\frac{m}{m+n}-m_x^2$.

7.23 а) $m_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$; б) $m_x=\frac{n+1}{2}$ $m_x = 0{,}98$; $D_x = 1{,}8$.

Раздел 8. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона

8.1 $\sigma_x = 0{,}8$.
8.2 $p = 0{,}101$.
8.3 $p = 0{,}019$.
8.4 $p = 0{,}65$.
8.5 $p = 1 - 1/e$.

8.6 Вероятность безотказной работы равна вероятности того, что будет ноль отказов, то есть это $p(0) = e^{-0{,}01}$. Вероятность отказа – это противоположное событие, поэтому $p_{\text{отк}} = 1 - p(0)$. Гарантировать исправную работу станции с вероятностью 0,9 можно в течение времени $t \le -150\ln 0{,}9$.

8.7 а) $p = 0{,}018$; б) $p = 0{,}865$ в) $p = 0{,}0004$.

Раздел 9. Законы распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин

9.4 $p = 1 - \exp(-\lambda T)$.
9.5 $m_t = 1/\lambda$.
9.6 $p = 0{,}384$.
9.7 $P(T) = \exp(-1)$, $w(t) = (1/T)\exp(-t/T)$, $t\ge0$.

9.8 б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le0;\\ 1-\exp(-\mu x), & x>0;\end{cases}$

в) $m_x=\frac{1}{\mu}$; $P\left(X<\frac{1}{\mu}\right)=0{,}632.$

9.9 а) $a=\frac{1}{\pi}$; б) $F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}$;

в) $P\left[-1<X<1\right]=\frac{1}{2}$; г) характеристики m_x и D_x не существуют, так как выражающие их интегралы расходятся.

9.10 $M\left[X\right]=\frac{65}{12}$.

9.11 $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x^2}{R^2}, & 0\le x\le R;\\ 1, & \mathrm{R}<x.\end{cases}$

9.12 $a=\frac{\lambda}{2}$; $F\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp(\lambda x), & x<0;\\ 1-\frac{1}{2}\exp(-\lambda x), & x\ge 0;\end{cases}$ $W(x)=\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda\,|\,x\,|)$.

$m_x=0$; $D_x=\frac{2}{\lambda^2}$.

9.13 $P=\frac{2}{3}$.

9.14 $P=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\sigma^2}}$.

9.15 $x_0\simeq 3{,}4\sigma$.

9.16 p = 3/8.

9.17 $W\left(x\right)=\begin{cases}1/6, & 1<x\le 7;\\ 0, & \text{вне этого интервала.}\end{cases}$

9.18 а) $W\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{4}, & 0<x\le 4;\\ 0, & x>4;\end{cases}$ б) $M\left[X\right]=2$; $D_x=4/3$;

в) $P=1/8$.

9.19 а) $A_0=\frac{1}{2}$; $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1}{2}\left(\sin x+1\right), & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

б) $P=0{,}866$;

9.20 $P\left[-1<X<1\right]=1/3$.

9.21 $P_{2,\,3} = C_3^2 \left(\dfrac{\pi + 2}{4\pi} \right)^2 \dfrac{3\pi - 2}{4\pi}$; m_x=0.

9.22 $M\left[X\right] = 0.$

9.23 $P = 0,6.$

9.24 $P = 0,951.$

9.25 $D\left[X\right] = \dfrac{4}{3}.$

9.26 $m_x = \dfrac{l}{4};\ \sigma_x^2 = \dfrac{l^2}{48}.$

9.28 a = 1/2, b = 1/π, $W\left(x\right) = \begin{cases} 0, \quad x < -1; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 \le x \le 1; \\ 0, \quad x > 1. \end{cases}$

9.29 p = 1/3.

Раздел 10. Нормальный закон распределения

10.3 $P\left[15 < X < 25\right] = 0,68;$

10.5 $P = 0,0124;$

10.6 $A - 15,85\%;\ B - 52,42\%;\ C - 31,73\%;$

10.7 $\Delta = 3,4\sigma;$

10.8 С вероятностью 0,95 можно гарантировать, что отклонение длины детали от среднего значения не превзойдет $\Delta l = 0,392$ см.

10.9 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\beta + \alpha}{2} \cdot \dfrac{\beta - \alpha}{e_n\beta - e_n\alpha}}.$

10.10 $P\left\{X < x \big/ X > b\right\} = F\left(x \big/ b\right) = \dfrac{1}{\sigma M\sqrt{2\pi}} \int\limits_b^x \exp(-\dfrac{\left(z - a\right)^2}{2\sigma^2})dz,$

где $M = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_b^\infty \exp(-\dfrac{\left(x - a\right)^2}{2\sigma^2})dx;\ W\left(x \big/ b\right) = \dfrac{1}{\sigma M\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{\left(x - a\right)^2}{2\sigma^2});$

$M\left[x \big/ b\right] = a + \dfrac{\sigma}{M\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{\left(b - a\right)^2}{2\sigma^2});$

$D_x = \sigma^2 + \dfrac{\sigma^2}{M\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{b - a}{\sigma} \right) \exp(-\dfrac{\left(b - a\right)^2}{2\sigma^2}) - \dfrac{\sigma^2}{M^2 2\pi} \exp(-\dfrac{\left(b - a\right)^2}{\sigma^2}).$

10.11 $\sigma = 2,5$м/с.

10.12 $P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0{,}3.$

10.13 $\varepsilon = 0{,}0030$ с.

10.14 $\alpha = m_x - \sigma_x\sqrt{3};\ \beta = m_x + \sigma_x\sqrt{3}.$

10.15 $\Delta = (-34; 39)$.

10.16 а) $P = 0{,}999$; б) $P = 0{,}776$.

10.17 $P(A) = 0{,}849;\ P(B) = 0{,}452;\ P(C) = 0{,}199$.

10.18 $P = 0{,}103$.

10.19 $\sigma_x = 42{,}1$.

10.20 $P \cong 0{,}988$.

Раздел 11. Системы случайных величин

11.1

y_i	x_i					
	0	1	2	3	4	$P(y_i)$
0	0	0	0	0	p^4	p^4
1	0	0	0	$4p^3q$	0	$4p^3q$
2	0	0	$6p^2q^2$	0	0	$6p^2q^2$
3	0	$4pq^3$	0	0	0	$4pq^3$
4	q^4	0	0	0	0	q^4
$P(x_i)$	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1$

$m_x = 4p;\ m_y = 4q;\ D_x = D_y = 4pq;\ K_{xy} = -4pq;\ Z_{xy} = -1;$ случайные величины X и Y – линейно зависимы.

11.2 Значения $F(x, y)$ даны в таблице.

Y	X		
	$X \le 0$	$0 < X \le 1$	$1 < X$
$Y \le 0$	0	0	0
$0 < Y \le 1$	0	q_1q_2	q_2
$Y > 0$	0	q_1	1

11.4

$$W(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ или } y < 0; \\ \lambda\mu\,\mathrm{e}^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{при} \quad x < 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } y\le 0;\\ \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mu y}\right) & \text{при} \quad x>0 \text{ и } y>0.\end{cases}$$

11.5 Пусть X – случайная величина, принимающая значения 1, если данное изделие, взятое наперед, обладает дефектом A и $X=0$ – в противном случае. Аналогично $Y=1;0$ в зависимости от того, обладает или нет это изделие дефектом B. Совместное распределение (X,Y) задается таблицей:

Y	X	
	1	0
1	0,025	0,020
0	0,005	0,95

$r_{xy}=0,669$.

11.6 а) $r_{xy}=\begin{cases}+1 & \text{при} \quad \dfrac{n}{m}<0;\\ -1 & \text{при} \quad \dfrac{n}{m}>0;\end{cases}$ б) $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=\left|\dfrac{n}{m}\right|$.

11.7 $R\cong 3,4\sigma$.

11.8 Независимы.

11.9 $\left\|r_y\right\|=\begin{Vmatrix}1 & -0,5 & 0,5\\ -0,5 & 1 & -0,5\\ 0,5 & -0,5 & 1\end{Vmatrix}$.

11.10 $W(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} & \text{при} \quad y\in(0,1);\\ 0 & \text{при} \quad y\notin(0,1).\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0;\\ y\Phi^x\left(x\sqrt{2}\right) & \text{при } 0<y<1;\\ \Phi^x\left(x\sqrt{2}\right) & \text{при } y>1.\end{cases}$$

11.13 а) $P\left[\left(X<m_x\right),\left(Y<m_y\right)\right]=\dfrac{1}{4}$; б) $P[X<3]=0,8413$;

в) $P[Y<X-5]=1/2$; г) $P(|X|<1)=0,1573$; д) $P(|X|<1,|Y|<2)=0,0476$.

11.14 $P(X<Y)=1/2$; $P(X<0,Y>0)=1/4$.

11.15 X и Y независимы; $M[X]=\dfrac{1}{\alpha}$; $M[Y]=\dfrac{1}{\beta}$; $D_x=\dfrac{1}{\alpha^2}$; $D_y=\dfrac{1}{\beta^2}$.

11.16 $P_{\text{вып}}=0,379$; $P_{\text{отл}}=0,379$; $P_2=0,196$; $P_3=0,198$.

11.17 $P=0,467$.

11.18 $k=\frac{1}{20\pi}$; $\begin{Vmatrix}25 & 0\\ 0 & 4\end{Vmatrix}$; $P\left[-10<X<10;\ -10<Y<6\right]=0{,}862.$

11.19 $n=19.$

11.20 При $|x|\le R \quad |y|\le R, \quad W(x)=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}; \quad W(y)=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}.$

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{R}\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}\right]+\frac{1}{2}; \quad F(y)=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{y}{R}+\frac{y}{R}\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\right]+\frac{1}{2}.$$

X и Y зависимы, так как $W(x,y)\ne W_1(x)W_2(y).$

11.21 $r_{u,v}=0{,}8.$

11.22 $W(x)=A\sqrt{\frac{\pi}{c}}\,\mathrm{e}^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2}; W(y)=A\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2};$

Для независимости X и Y необходимо, чтобы было

$$\frac{\sqrt{ac}}{\pi A}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4}\left(\frac{x^2}{c}-\frac{4xy}{b}+\frac{y^2}{a}\right)}=1$$

Это условие выполняется при $b=0$.

11.23 $P\left(x_1/y=0{,}75\right)=0{,}00247;\ P\left(x_2/y=0{,}75\right)=0{,}99753.$

11.24 $\hat{X}=6{,}93\text{В}.$

Раздел 12. Законы распределения и числовые характеристики функции от случайных величин

12.1

y_i	7	13	21
p_i	0,2	0,1	0,7

12.2 $W(\omega_p)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma L\omega_p^3}\exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{L\omega_p^2}-C_0\right)}{2\sigma^2}\right).$

12.3 $g(y)=\frac{1}{2\sigma^2}y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}, \quad 0<y<1.$

12.4 $W(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi az}}\exp\left(-\frac{z}{2a\sigma^2}\right), & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

12.5 $W(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}),\quad y\ge 0.$

12.6 $W(R)=\frac{R}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right\},\quad R>0;$

$W(R)=\frac{R}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{R^2+h^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(\frac{Rh}{\sigma^2}\right).$

12.7 $g(u,v)=W\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right).$

12.8 Равномерно на отрезке $[0,2\pi]$.

12.9

x_i	0	$\frac{1}{2^n}$	$\dots$	$i\frac{1}{2^n}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$
P_i	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$	$\dots$	$\frac{1}{2^n}$	$\dots$	$\frac{1}{2^n}$

$0\le i\le 2^{n-1}.$

$$P[Y=-1]=P[X<0]=\int_{-\infty}^{0}W(x)dx=F(0);$$

12.10 $P[Y=+1]=1-F(0),\ P[Y=0]=0;$

$m_y=1-2F(0);\quad m_2[Y]=1;$

$D[Y]=4F(0)[1-F(0)].$

12.11 $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln[1-X],\quad 0<X\le 1.$

12.12 $m_y=2,4;\quad D[Y]=1,99.$

12.13 $m_y=-0,7;\quad D[Y]=2,41.$

12.14 $m_y=-m_x;\quad \sigma_y^2=\sigma_x^2.$

12.15 $M[R]=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

12.16 $m_y=\ln 2;\quad D[Y]=\frac{1}{2}-(\ln 2)^2.$

12.17 а) $m_y=5;\quad D[Y]=36;\quad K_{xy}=-12;\quad r_{xy}=-1.$

12.19 $M[Y]=\frac{\pi^2-8}{4}.$

12.20 а) $M[X+Y]=2;$ б) $M[XY]=1;$ в) $M\left[X^2\right]=5;$

г) $M\left[X^2-Y^2\right]=-\frac{1}{3}$; д) $D\left[X+Y\right]=4\frac{1}{3}$; е) $D\left[X-Y\right]=4\frac{1}{3}$.

12.21 $m_x=m_y=0$.

12.22 $m_r=\frac{D}{3}$.

12.23 $m_r=1;\ D_r=\frac{1}{6};\ \ M\left[R^2\right]=\frac{7}{6}$.

12.24 $m_z=5{,}02$.

12.25 $m_y=\int\limits_0^\infty x\left[W(x)-W(-x)\right]dx;$

$D[Y]=D[X]+m_x^2-m_y^2.$

12.26 $m_{xy}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2};$

$\sigma_{xy}^2=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(c^2+cd+d^2\right)}{9}-\frac{(a+b)^2(c+d)^2}{16}.$

12.27 $M[t]=T\left[1-\exp(-a\left(1-\mathrm{e}^{-a}\right))\right];$

$M[S]=kT^2\left[1-2\exp(-a\left(1-\mathrm{e}^{-a}\right))+\exp(-a\left(1-\mathrm{e}^{-2a}\right))\right]^2.$

12.28 $M\left[p(T)\right]=1-\frac{1}{p\lambda t^*}\left[1-\exp(-p\lambda t^*)\right].$

12.29 $m_y=0{,}115$ *рад*; $\sigma_y\approx 0{,}056$ *рад*.

12.30 $m_y=\sigma_x\sqrt{\frac{2}{\pi}};\quad D[Y]=\sigma_x^2\frac{\pi-2}{\pi}.$

12.31 $m_z=-6;\quad \sigma_z^2=29.$

12.32 а) $K_{yz}=12\sigma_x^2$; б) $\mathrm{r}_{xy}=-1$.

Раздел 13. Выборка и способы ее представления. Выборочные параметры распределения

13.1.11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11, 12, 13, 16, 8, 9, 14, 5, 11, 3.

13.2.17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18,18.

13.3.ω = 63, b = 9, k = 7, n = 50, результаты группировки сведены в таблицу

Номер интервала	Границы интервала	x^*_{i}	n^*_{i}	$\sum_{j=1}^{i} n_j^*$	$\frac{n_j^*}{n}$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*$
1	14–23	18,5	2	2	0,04	0,04
2	23–32	27,5	3	5	0,06	0,1
3	32–41	36,5	6	11	0,12	0,22
4	41–50	45,5	17	28	0,34	0,56
5	50–59	54,5	10	38	0,2	0,76
6	59–68	63,5	9	47	0,18	0,94
7	68–77	72,5	3	50	0,06	1

13.5. ω=13,5, b=2, k=7, *n*=65, результаты группировки сведены в таблицу

Номер интервала	x^*_{i}	n^*_{i}	$\sum_{j=1}^{i} n_j^*$	$\frac{n_j^*}{n}$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*$
1	9,4	3	3	0,046	0,0462
2	11,4	7	10	0,1077	0,1539
3	13,4	13	23	0,2	0,3539
4	15,4	21	41	0,3231	0,6770
5	17,4	17	61	0,2615	0,9885
6	19,4	2	63	0,0308	0,9693
7	21,4	2	65	0/0308	1,0001

13.6. – 13.10. Гистограмма, полигон относительных частот и графики эмпирических функций распределения имеют вид, аналогичный приведенным в примере 2 на рис.13.1., рис.13.2. и рис.13.3.

13.11. $m_x^* \approx 3{,}5;\ D_x^* \approx 3{,}65$.

13.12. $m_x^* \approx 2{,}39;\ D_x^* \approx 0{,}43\ D_x^* \approx 0{,}43$.

13.13. а) $m_x^* \approx 4{,}14;\ D_x^* \approx 5{,}84;$ б) $m_x^* \approx 4{,}57;\ D_x^* \approx 11{,}10.$ Для выборки б) среднее и дисперсия увеличились.

13.14 $m_x^* \approx 6{,}54;\ D_x^* \approx 7{,}34.$

13.15 $m_x^* \approx 11{,}78;\ D_x^* \approx 7{,}34.$

13.16. $m_x^* \approx 10{,}49;\ D_x^* \approx 6{,}29.$

13.17. m_x^* изменится на величину а, D_x^* не изменится.

Раздел 14. Точечные оценки параметров распределения, их свойства и методы получения

14.1. $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum x_i^s$. Для доказательства состоятельности определить дисперсию $\tilde{\alpha}_s$ и найти предел при $n \to \infty$.

14.2. Применить операцию статистического усреднения к левой и правой части равенства.

14.6. б) $p = 1/2$.

14.9. $\dfrac{n}{2\sigma^n}$.

14.10. x/n.

14.11. x/n.

14.12. $\overline{x}$.

14.13. $\overline{x}$.

14.14. $\tilde{m} = \dfrac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}; D[\tilde{m}] = \dfrac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}$.

14.15. $\tilde{p} = 1/k$.

14.16. $\tilde{p} = 1/n$.

14.17. $\tilde{\lambda} = \dfrac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}$.

14.18. $\tilde{m} = \dfrac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}$, $\overline{\sigma}^2 = D_x^* = \dfrac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^2$.

14.19. $\tilde{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{x}}$.

Раздел 15. Интервальные оценки. Доверительные интервалы и доверительная вероятность

15.2. (18,35; 21,64), (17,42; 22,58).

15.3. (498,5; 501,64), (497,42; 502,58).

15.4. (28,14; 31,86), (26,64; 33,26).

15.5. (16,63; 19,37), (15,76; 20,24).

15.6. Найти $D[\overline{x}]$ и установить, что $\dfrac{X - m}{\sigma / \sqrt{n_1 + n_2}}$ имеет нормальное распределение $N(0,1)$.

15.7. (17,96; 20,60), (17,22; 21,34).

15.8. (490,91; 493,48), (490,18; 494,21).

15.9. (28,52; 30,20), (27,98; 30,74).

15.10. (17,01; 19,41), (16,27; 20,16).

15.11. а) 0,68; б) $n \geq 385$.

15.12. а) $n \geq 15$; б) $n \geq 4$.

Раздел 16. Критерий χ^2. Проверка гипотезы о виде распределения

16.1. Да. Проверим гипотезу о том, что число появлений герба имеет биномиальное распределение с параметром $p = 1/2$.

$$\chi_в^2 = \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(30-25)^2}{25} = 2; r-l-1 = 2-0-1 = 1.$$

Так как $\chi_{0,90}(1) = 2,706$ – гипотеза H_0 принимается.

16.2. Нет.

16.3. Нет.

16.4. Да.

16.5. Да.

16.6. H_0 отклоняется; $\chi_в^2 \approx 12,95$ (последние 6 интервалов объединяются).

16.7. Да. $\chi_в^2 \approx 1,171$.

16.8. H_0 принимается. $\chi_в^2 \approx 0,71$ (последние 5 интервалов объединяются).

16.9. H_0 отклоняется; $\chi_в^2 \approx 4,9$ (последние 2 интервала объединяются).

16.10. H_0 отклоняется; $\chi_в^2 \approx 6,22$ (первые 2 и последние 2 интервала объединяются).

16.11. H_0 принимается; $\chi_в^2 \approx 0,517$ (первые 3 и последние 3 интервала объединяются).

Приложение 1. Значения нормальной функции распределения

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
–0,00	0,5000	–0,34	3669	–0,68	2483
–0,01	4960	–0,35	3632	–0,69	2451
–0,02	4920	–0,36	3594		
–0,03	4880	–0,37	3557	–0,70	0,2420
–0,04	4840	–0,38	3520	–0,71	2389
–0,05	4801	–0,39	3483	–0,72	2358
–0,06	4761			–0,73	2327
–0,07	4721	–0,40	0,3446	–0,74	2297
–0,08	4681	–0,41	3409	–0,75	2266
–0,09	4641	–0,42	3372	–0,76	2236
		–0,43	3336	–0,77	2206
–0,10	0,4602	–0,44	3300	–0,78	2177
–0,11	4562	–0,45	3264	–0,79	2148
–0,12	4522	–0,46	3228		
–0,13	4483	–0,47	3192	–0,8	0,2119
–0,14	4443	–0,48	3156	–0,81	2090
–0,15	4404	–0,49	3121	–0,82	2061
–0,16	4364			–0,83	2033
–0,17	4325	–0,50	0,3085	–0,84	2005
–0,18	4286	–0,51	3050	–0,85	1977
–0,19	4247	–0,52	3015	–0,86	1949
		–0,53	2981	–0,87	1922
–0,20	0,4207	–0,54	2946	–0,88	1894
–0,21	4168	–0,55	2912	–0,89	1867
–0,22	4129	–0,56	2877		
–0,23	4090	–0,57	2843	–0,90	0,1841
–0,24	4052	–0,58	2810	–0,91	1814
–0,25	4013	–0,59	2776	–0,92	1788
–0,26	3974			–0,93	1762
–0,27	3936	–0,60	0,2743	–0,94	1736
–0,28	3897	–0,61	2709	–0,95	1711
–0,29	3859	–0,62	2676	–0,96	1685
		–0,63	2643	–0,97	1660
–0,30	0,3821	–0,64	2611	–0,98	1635
–0,31	3783	–0,65	2578	–0,99	1611
–0,32	3745	–0,66	2546		
–0,33	3707	–0,67	2514		

x	$\Phi^*(x)$	*x*	$\Phi^*(x)$	*x*	$\Phi^*(x)$
–1,00	0,1587	–1,39	0823	–1,77	0384
–1,01	1563			–1,78	0375
–1,02	1539	–1,40	0,0808	–1,79	0367
–1,03	1515	–1,41	0793		
–1,04	1492	–1,42	0778	–1,80	0,0359
–1,05	1469	–1,43	0764	–1,81	0351
–1,06	1446	–1,44	0749	–1,82	0344
–1,07	1423	–1,45	0735	–1,83	0336
–1,08	1401	–1,46	0721	–1,84	0329
–1,09	1379	–1,47	0708	–1,85	0322
		–1,48	0694	–1,86	0314
–1,10	0,1357	–1,49	0681	–1,87	0307
–1,11	1335			–1,88	0301
–1,12	1314	–1,50	0,0668	–1,89	0294
–1,13	1292	–1,51	0655		
–1,14	1271	–1,52	0643	–1,90	0,0288
–1,15	1251	–1,53	0630	–1,91	0281
–1,16	1230	–1,54	0618	–1,92	0274
–1,17	1210	–1,55	0606	–1,93	0268
–1,18	1190	–1,56	0594	–1,94	0262
–1,19	1170	–1,57	0582	–1,95	0256
		–1,58	0571	–1,96	0250
–1,20	0,1151	–1,59	0559	–1,97	0244
–1,21	1131			–1,98	0239
–1,22	1112	–1,60	0,0548	–1,99	0233
–1,23	1093	–1,61	0537		
–1,24	1075	–1,62	0526	–2,00	0,0228
–1,25	1056	–1,63	0516	–2,10	0179
–1,26	1038	–1,64	0505	–2,20	0139
–1,27	1020	–1,65	0495	–2,30	0107
–1,28	1003	–1,66	0485	–2,40	0082
–1,29	0985	–1,67	0475	–2,50	0062
		–1,68	0465	–2,60	0047
–1,30	0,0968	–1,69	0455	–2,70	0035
–1,31	0951			–2,80	0026
–1,32	0934	–1,70	0,0446	–2,90	0019
–1,33	0918	–1,71	0436		
–1,34	0901	–1,72	0427	–3,00	0,0014
–1,35	0885	–1,73	0418	–3,10	0010
–1,36	0869	–1,74	0409	–3,20	0007
–1,37	0853	–1,75	0401	–3,30	0005
–1,38	0838	–1,76	0392	–3,40	0003

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
–3,50	0002	0,33	6293	0,71	7611
–3,60	0002	0,34	6331	0,72	7642
–3,70	0001	0,35	6368	0,73	7673
–3,80	0001	0,36	6406	0,74	7703
–3,90	0000	0,37	6443	0,75	7734
		0,38	6480	0,76	7764
0,00	0,5000	0,39	6517	0,77	7794
0,01	5040			0,78	7823
0,02	5080	0,40	0,6554	0,79	7852
0,03	5120	0,41	6591		
0,04	5160	0,42	6628	0,80	0,7881
0,05	5199	0,43	6664	0,81	7910
0,06	5239	0,44	6700	0,82	7939
0,07	5279	0,45	6736	0,83	7967
0,08	5319	0,46	6772	0,84	7995
0,09	5359	0,47	6808	0,85	8023
		0,48	6844	0,86	8051
0,10	0,5398	0,49	6879	0,87	8078
0,11	5438			0,88	8106
0,12	5478	0,50	0,6915	0,89	8133
0,13	5517	0,51	6950		
0,14	5557	0,52	6985	0,90	0,8159
0,15	5596	0,53	7019	0,91	8186
0,16	5636	0,54	7054	0,92	8212
0,17	5675	0,55	7088	0,93	8238
0,18	5714	0,56	7123	0,94	8264
0,19	5753	0,57	7157	0,95	8289
		0,58	7190	0,96	8315
0,20	0,5793	0,59	7224	0,97	8340
0,21	5832			0,98	8365
0,22	5871	0,60	0,7257	0,99	8389
0,23	5910	0,61	7291		
0,24	5948	0,62	7324	1,00	0,8413
0,25	5987	0,63	7357	1,01	8437
0,26	6026	0,64	7389	1,02	8461
0,27	6064	0,65	7422	1,03	8485
0,28	6103	0,66	7454	1,04	8508
0,29	6141	0,67	7486	1,05	8531
		0,68	7317	1,06	8554
0,30	0,6179	0,69	7349	1,07	8577
0,31	6217			1,8	8599
0,32	6255	0,70	0,7680	1,09	8621

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
1,10	0,8643	1,49	9319	1,87	9693
1,11	8665			1,88	9699
1,12	8686	1,50	0,9332	1,89	9706
1,13	8708	1,51	9345		
1,14	8729	1,52	9357	1,90	0,9713
1,15	8749	1,53	9370	1,91	9719
1,16	8770	1,54	9382	1,92	9726
1,17	8790	1,55	9394	1,93	9732
1,18	8810	1,56	9406	1,94	9738
1,19	8830	1,57	9418	1,95	9744
		1,58	9429	1,96	9750
1,20	0,8849	1,59	9441	1,97	9756
1,21	8869			1,98	9731
1,22	8888	1,60	0,9452	1,99	9767
1,23	8907	1,61	9463		
1,24	8925	1,62	9484	2,00	0,9772
1,25	8944	1,63	9484	2,10	9821
1,26	8962	1,64	9495	2,20	9861
1,27	8980	1,65	9505	2,30	9893
1,28	8997	1,66	9516	2,40	9918
1,29	9015	1,67	9525	2,50	9938
		1,68	9535	2,60	9953
1,30	0,9032	1,69	9545	2,70	9965
1,31	9049			2,80	9974
1,32	9066	1,70	0,9554	2,90	9981
1,33	9082	1,71	9564		
1,34	9099	1,72	9573	3,00	0,9986
1,35	9115	1,73	9582	3,10	9990
1,36	9131	1,74	9591	3,20	9993
1,37	9147	1,75	9599	3,30	9995
1,38	9162	1,76	9608	3,40	9997
1,39	9177	1,77	9616	3,50	9998
		1,78	9625	3,60	9998
1,40	0,9192	1,79	9633	3,70	9999
1,41	9207			3,80	9999
1,42	9222	1,80	0,9641	3,90	1,0000
1,43	9236	1,81	9649		
1,44	9251	1,82	9656		
1,45	9265	1,83	9664		
1,46	9279	1,84	9671		
1,47	9292	1,85	9678		
	1,48	1,86	9686		

Приложение 2. Квантили распределения хи–квадрат

k	P									
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,4463	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,0052	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,6488	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,3425	7,2893	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,0701	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	3,8223	9,8032	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	4,5936	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,3801	12,2421	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,1791	13,4420	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	6,9887	14,6314	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	7,8073	15,8120	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	8,6339	16,9848	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	9,4673	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	10,3070	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,1521	20,4651	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,0023	21,6146	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	12,8570	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	13,7158	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	14,5784	25,0375	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	15,4446	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	16,3140	27,3015	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	17,1865	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	18,0618	29,5533	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798

k	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	18,9398	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	19,8202	31,7946	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	20,7030	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	21,5880	34,0266	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	22,4751	35,1394	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	23,3641	36,2502	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	24,2551	37,3591	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	25,1478	38,4663	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858
33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	26,0422	39,5718	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	26,9383	40,6756	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	27,8359	41,7780	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	28,7350	42,8788	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	29,6355	43,9782	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	30,5373	45,0763	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621
39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	31,4405	46,1730	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	32,3450	47,2685	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	33,2506	48,3628	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654	34,1574	49,4560	54,0902	58,1240	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	35,0653	50,5480	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871	35,9743	51,6389	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	36,8844	52,7288	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152	37,7955	53,8177	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	38,7075	54,9056	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491	39,6205	55,9926	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826

Приложение 3. Квантили распределения Стьюдента

k	β										
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,99**
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	63,656
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	9,924
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	5,84
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	4,604
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	4,0321
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,707
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	3,4995
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	3,3554
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	3,2498
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	3,1693
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,088	1,0877	1,7959	2,2010	3,105
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	3,0845
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	3,1123
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,976
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,9467
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,92
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,8982
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,8784
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,8609
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,8453
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,831
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,8188
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,8073
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,7969
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,7874

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,778
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,7707
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,7633
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,7564
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,75
31	0,1267	0,2555	0,3889	0,5298	0,6825	0,8534	1,0541	1,3095	1,6955	2,0395	2,738
32	0,1267	0,2555	0,3888	0,5297	0,6822	0,8530	1,0535	1,3086	1,6939	2,0369	2,7284
33	0,1266	0,2554	0,3887	0,5295	0,6820	0,8526	1,0530	1,3077	1,6924	2,0345	2,7195
34	0,1266	0,2553	0,3886	0,5294	0,6818	0,8523	1,0525	1,3070	1,6909	2,0322	2,7116
35	0,1266	0,2553	0,3885	0,5292	0,6816	0,8520	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,7045
36	0,1266	0,2552	0,3884	0,5291	0,6814	0,8517	1,0516	1,3055	1,6883	2,0281	2,698
37	0,1265	0,2552	0,3883	0,5289	0,6812	0,8514	1,0512	1,3049	1,6871	2,0262	2,6923
38	0,1265	0,2551	0,3882	0,5288	0,6810	0,8512	1,0508	1,3042	1,6860	2,0244	2,687
39	0,1265	0,2551	0,3882	0,5287	0,6808	0,8509	1,0504	1,3036	1,6849	2,0227	2,6822
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,6778
41	0,1264	0,2550	0,3880	0,5285	0,6805	0,8505	1,0497	1,3025	1,6829	2,0195	2,778
42	0,1264	0,2550	0,3880	0,5284	0,6804	0,8503	1,0494	1,3020	1,6820	2,0181	2,7707
43	0,1264	0,2549	0,3879	0,5283	0,6802	0,8501	1,0491	1,3016	1,6811	2,0167	2,7633
44	0,1264	0,2549	0,3878	0,5282	0,6801	0,8499	1,0488	1,3011	1,6802	2,0154	2,7564
45	0,1264	0,2549	0,3878	0,5281	0,6800	0,8497	1,0485	1,3006	1,6794	2,0141	2,75
46	0,1264	0,2548	0,3877	0,5281	0,6799	0,8495	1,0483	1,3002	1,6787	2,0129	2,738
47	0,1263	0,2548	0,3877	0,5280	0,6797	0,8493	1,0480	1,2998	1,6779	2,0117	2,7284
48	0,1263	0,2548	0,3876	0,5279	0,6796	0,8492	1,0478	1,2994	1,6772	2,0106	2,7195
49	0,1263	0,2547	0,3876	0,5278	0,6795	0,8490	1,0475	1,2991	1,6766	2,0096	2,7116
50	0,1263	0,2547	0,3875	0,5278	0,6794	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,7045
100	0,1260	0,2540	0,3864	0,5261	0,6770	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,6259
1000	0,1257	0,2534	0,3854	0,5246	0,6747	0,8420	1,0370	1,2824	1,6464	1,9623	2.5808

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для студ. вузов. – 10-е изд., стер. – М. : Академия, 2005. – 576 с.

2. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие для студ. вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 6-е изд., стер. – М. : Академия, 2005. – 448 с.

3. Вуколов Э.А. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб пособие для втузов / Э.А. Вуколов [и др.]; под ред. Ефимова А. В. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1990. – 426 с.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., стер. – М. : КНОРУС, 2010. – 480 с.

5. Володин Б.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Б.Г. Володин [и др.]. – М. : Наука, 1965. – 632 с.

6. Гурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М. : Высшая школа, 1979. – 240 с.

7. Горяинов В.Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов. – М. : Сов. радио, 1980. – 542 с.

8. Емельянов Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – Л. : ЛГУ им А.А. Жданова, 1967. – 332 с.

9. Знаменский С.А., Радунский Б.А., Смирнова Г.Н. Задачник по теории вероятностей и элементам математической статистики / С.А. Знаменский, Б.А. Радунский, Г.Н. Смирнова. – М. : ВЗЭИС, 1967. – 112 с.

10. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. – М. : Изд-во МГУ, 1963. – 160 с.

11. Штеренгас С.С., Соков К.Д. Задачник по теории вероятностей / С.С. Штеренгас, К.Д. Соков. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1972. – 124 с.