Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Факультет вычислительных систем (ФВС)

Кафедра Моделирования и системного анализа (МиСА)

Баранник Валентин Григорьевич

Истигечева Елена Валентиновна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания для выполнения практических работ

Томск 2015

Баранник В.Г., Истигечева Е.В. Дискретная математика/ Методические указания для выполнения практических работ – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Факультет вычислительных систем, кафедра моделирования и системного анализа, 2015г. – 15 с.

Содержание

Введение

Целью преподавания дисциплины «Дискретная математика» является овладение студентами принципами и методами дискретной математики как теоретической основы разработки алгоритмов и программ для автоматизированных систем управления. Задача курса состоит в изучении методик составления математических моделей объектов и процессов конечной структуры с позиций системного подхода; изучении методов поиска и оценки решений с привлечением математических моделей дискретных структур.

Практическая работа № 1. Операции над конечными множествами.

Цель работы – научиться выполнять операции над множествами.

Операции над множествами

Рассмотрим некоторое множество *U*. Будем считать, что все множества, которые рассматриваются в данном пункте, являются подмножествами основного множества. *Объединением* двух множеств *A* и *B* называется множество *A*И*B*, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В. *Пересечением* множеств *A* и *B* называется множество *A*З *B* , которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству А, так и множеству В.

Пример.

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$.

Найти *A*И *B* и *A*З *B* .

Решение:

*A*И *B* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19}, *A*З *B* = {1, 3, 5, 7, 9}.

Пусть теперь *A* и *B* − некоторые множества в основном множестве *U*. *Разностью* множеств *A* и *B* называется множество $A \setminus B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A*, но не принадлежат множеству *B* . Разность между основным множеством *U* и множеством *A* называется дополнением множества *A* в *U* и обозначается *A*. Кратко это можно записать так:

A = {*x* О *U* : *x A*, П*A* \ *B* {*x U* : *x A*=, *x* О*B*}.

Очевидно, что *A*З *A* = , *A*Ж *A U*И, (*A*)= *A* для любого *A* М *U*. *Симметрической разностью* множеств *A* и *B* называется множество *A*D *B* , которое состоит из тех и только тех элементов *A*, которые не принадлежат *B* и элементов *B* , которые не принадлежат *A*. Или в краткой записи: *A*D *B* {=(*x* О *A*& *x B*) П (*x B* И& *x A*)О}.

Задание на практическую работу

Написать программу, которая по заданным множествам A,B,C формирует множество, задаваемое формулой. Элементы полученного множества вывести на печать. Множества A,B,C задать перечислением элементов

Варианты заданий

1. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
2. $A\setminus(B\cup C)$.
3. $A\setminus(B\cap C)$.
4. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.
5. $A\cap(B\setminus C)$.
6. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.
7. $(A\cap B)\setminus C$.
8. $(A\cup B)\setminus C$.
9. $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.
10. $(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.
11. $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Практическая работа № 2. Анализ бинарных отношений, заданных матрицей.

Цель работы – научиться определять свойства бинарных отношений

Задание бинарных отношений

Рассмотрим способ задания бинарных отношений, используемый при написании программ. Бинарному отношению R Н A Aґ , где $A = \{a1, a2 ,..., an\}$ ставится в соответствие квадратная матрица S порядка n, в которой элементы sij определяются по правилу:

Свойства бинарных отношений

Пусть R – отношение на множестве A, R Н A Aґ. Рассмотрим свойства бинарных отношений.

1. R *рефлексивно,* если выполняется (x, x)О R для любого x О A: " x О A: (x, x)О R .

2. R *антирефлексивно*, если ни для какого x О A не выполняется (x, x)О R : " x О A: (x, x)П R .

3. R *симметрично*, если из (x, y)О R следует (y, x)О R для всех x О A и y О A: " x, y О A (x, y)О R (y, x)О R .

4. R *антисимметрично,* если для всех x О A и y О A из ((x, y)О R и (y, x)О R) следует $x = y$: " x, y О A ((x, y)О R и (y, x)О R) $x = y$.

5. R *транзитивно*, если для всех x О A , y О A и z О A из того, что (x, y)О R и (y, z) О R следует (x, z)О R : " x, y, z О A ((x, y)О R и (y, z)О R (x, z)О R .

Задание на практическую работу

Для заданного множества A и заданного отношения R на множестве элементов A построить матрицу M , описывающую данное отношение. Написать программу, которая по матрице M определяет, какими свойствами обладает отношение R (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

Варианты заданий

1. *R* = {*a*,*b* | *a*Î *A*,*b*Î *A*,*a* < *b*}, *A* = {2,5,7,8}.

2. *R* = {*a*,*b* | *a* Î *A*,*b*Î *A*, *a* ³ *b*}, *A* = {1,3,8,9}.

3. *R* = {*a*,*b* | *a*Î *A*,*b*Î *A*,*a* > *b*}, *A* = {0,2,6,8,9}.

4. *R* = {*a*,*b* | *a* Î *A*,*b*Î *A*, *a* £ *b*}, *A* = {1,2,3,7,8}.

5. *R* = {*a*,*b* | *a* Î *A*,*b*Î *A*,*a* = *b*}, *A* = {1,2,4,6}.

6. *R* = {*a*,*b* | *a* Î *A*,*b*Î *A*,*a* ¹ *b*}, *A* = {0,2,5,7,8,9}.

Практическая работа № 3. Генерирование комбинаторных объектов.

Цель работы - приобрести навыки работы с комбинаторными объектами

Правило суммы

Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать k способами, то выбор элемента A или B можно осуществить $m + k$ способами. Правило суммы можно перефразировать на теоретико-множественном языке.

Обозначим через A число элементов множества A. Тогда для непересекающихся множеств A и B выполняется равенство: $|A$И $B| =| A|+ |B|$. Обобщением правила суммы является правило произведения.

Правило произведения

Если элемент A можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента A элемент B можно выбрать k способами, тогда, упорядоченную пару элементов (A, B) можно выбрать $m*k$ способами. Правило произведения можно распространить на выбор последовательности $(x_1\ x_2\ x_n, ,...,)$ произвольной конечной длины n. На теоретико-множественном языке правило произведения формулируется так: $|A$ґ $B| =| A| * |B|$.

Размещения

Рассмотрим множество, содержащее n элементов.

Последовательность $(x_1\ x_2\ x_k, ,...,)$ длины k без повторяющихся элементов из элементов данного множества назовём размещением из n элементов по k.

Обозначим символом A_n^k число размещений из n по k элементов. Используя правило произведения, вычислим число A_n^k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если в формуле $k = n$, то A_n^k есть число P_n перестановок из n элементов $P_n = n!$.

Сочетания

Подмножество из k элементов данного n-элементного множества называется сочетанием из n по k.

Обозначим через C_n^k число сочетаний из n по k. Формула для числа C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Задание на практическую работу

Написать программу для решения задачи.

Варианты заданий

1. Сгенерировать все подмножества множества мощности n .
2. Сгенерировать все k -элементные подмножества множества мощности n .
3. Сгенерировать все $P(n, k)$ разбиения числа n на k слагаемых.
5. Решить задачу «о марках». Имея марки достоинством в n_1 , n_2 ,..., nk рублей, сформировать все наборы марок, дающих в сумме n рублей. Все значения – целые.

Практическая работа № 4. Представление графа матрицей смежности, инцидентности и списками смежности.

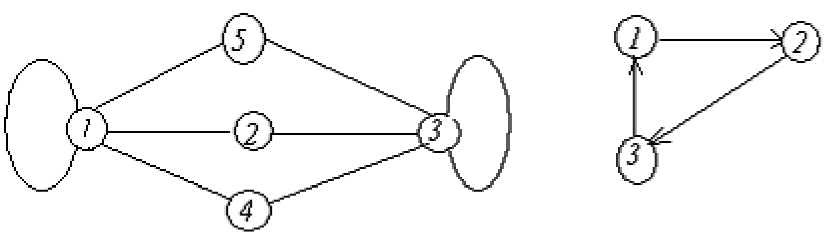
Пусть $v1$, $v2$, ... vn – вершины графа $G(V, E)$**,** а $e1$, $e2$, ... em **–** его ребра дуги). Матрицей *смежности* графа G называется матрица $A=\|aij\|$, $i=1,...,n$; $j = 1, ..., n$, у которой элемент aij равен числу ребер (или дуг), соединяющих вершины vi и vj (соответственно, идущих из вершины vi в вершину vj). Матрицей *инцидентности* неориентированного графа G называется матрица $B=\|bij\|$, $i=1, .., n$; $j = 1, ..., m$, у которой элемент bij равен 1, если вершина vi инцидентна ребру ej и равен 0, если не инцидентна. Для ориентированного графа bij равен -1, если дуга выходит из вершины vi ; равен 1, если дуга входит в вершину vi . Если ej – петля в вершине vi , bij равен 2. Наконец, граф можно задать посредством списков смежности, указав для каждой вершины номера смежных с ней вершин.

Задание на практическую работу

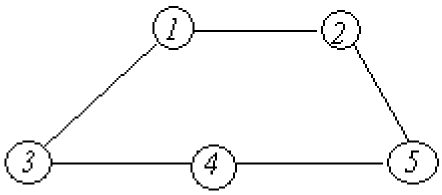
Построить матрицы смежности, соответствующие изображённым графам, неориентированному и ориентированному. Написать программу, которая по матрице смежности строит и выводит на печать матрицу инцидентности и списки смежности для 1-го и 2-го графа.

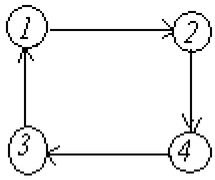
Варианты заданий

1



2





Практическая работа № 5. Минимизация и реализация функций алгебры логики.

Логическая (булева) переменная – такая величина x, которая может принимать только два значения (0 или 1). *Логическая функция* (функция алгебры логики, ФАЛ) – функция $f(x1, x2, ..., xn)$, принимающая значение, равное 0 или 1 на наборе логических переменных $x1, x2, ..., xn$. *Макстерм* – терм, связывающий все переменные, представленные в прямой и инверсной форме знаком дизъюнкции. *Минтерм* – терм, связывающий все переменные, представленные в прямой и инверсной форме знаком конъюнкции.

Ранг терма равен числу переменных, входящих в данный терм. *Нормальная дизъюнктивная форма* (НДФ) аналитической записи ФАЛ – это объединение знаком дизъюнкции минтермов разного ранга. *Нормальной конъюнктивной формой* (НКФ) записи ФАЛ называется объединение знаком конъюнкции макстермов разного ранга. *Базисом* называется полная система ФАЛ, с помощью которой любая ФАЛ может быть представлена суперпозицией исходных функций. Базис называется *минимальным*, если удаление хотя бы одной функции превращает систему ФАЛ в неполную.

Базисы:

1. И, ИЛИ, НЕ, базис Буля.
2. И, НЕ.
3. ИЛИ, НЕ.
4. И-НЕ, базис Шеффера.
5. ИЛИ-НЕ, базис Пирса.

Задание на практическую работу

В базисе Буля построить функциональную схему, реализующую заданную минимизированную функцию.

Практическая работа № 6. Основные понятия теории графов.

Задачи о нахождении кратчайших путей

Приведём алгоритмы для решения задачи *о кратчайших путях из одной вершины*, которая формулируется следующим образом: дан взвешенный граф $G(V,E)$ и начальная вершина s; требуется найти кратчайшие пути из s во все вершины v Î V . Алгоритм, решающий эту задачу, пригоден и для многих других задач. Приведём формулировки некоторых из них. *Кратчайшие пути в одну вершину*: дана конечная вершина t , требуется найти кратчайшие пути в t из всех вершин v Î V. *Кратчайший путь между данной парой вершин:* даны вершины u и v , найти кратчайший путь из u в v . Если мы найдём все кратчайшие пути из u , то тем самым решим и эту задачу. Оказывается, что не найдено более быстрого способа решения этой задачи. *Кратчайшие пути для всех пар вершин*: для каждой пары вершин u и v найти кратчайший путь из u в v. Можно решить эту задачу, находя кратчайшие пути из данной вершины для всех вершин по очереди. Существуют и более эффективные подходы к решению этой задачи. При описании алгоритмов будем использовать следующие обозначения. Для каждой вершины v Î V , будем обозначать её предшественника – p(v) . По завершении работы алгоритмов, цепочка предшественников, начинающаяся с произвольной вершины v , будет представлять собой кратчайший путь из s в v (в обратном порядке). Будем называть её подграфом предшествования и обозначать $G = (V, E)$. Можно доказать, что по окончании работы алгоритмов построения кратчайших путей граф p G будет «деревом кратчайших путей» – деревом с корнем s , содержащим кратчайшие пути из s во все достижимые из s вершины. Деревья кратчайших путей аналогичны деревьям поиска в ширину, с той разницей, что кратчайшими объявляются пути с наименьшим весом, а не с наименьшим числом рёбер.

Задание на практическую работу

Написать программу для решения задачи

Варианты заданий

1. Вычислить диаметр заданного графа.
2. В графе найти вершину, наиболее удалённую от заданной.
3. В графе найти расстояние между двумя заданными вершинами